

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

## **ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ**

### **Частина 1**

### **НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра  
за освітніми програмами «Електричні системи і мережі», «Електричні станції»  
«Електричні машини і апарати», «Управління, захист та автоматизація енергосистем»  
«Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та  
електромобільність»,  
«Електротехнічні пристрої та електротехнологічні комплекси»  
«Нетрадиційні та відновлювані джерела енергії»  
спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»*

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2022

Рецензент: *Чумак Вадим Володимирович*, канд. техн. наук, доц .  
Відповідальний редактор *Островецьков Микола Якович*, д-р техн. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 5 від 26.05.2022 р.)  
за поданням Вченої ради факультету електроенергетехніки та автоматики  
(протокол № 9 від 17 травня 2022 р.)*

Електронне мережне навчальне видання  
*Бойко Валерій Степанович*, д-р техн. наук, проф.  
*Спінул Людмила Юрійівна*, канд. техн. наук, доц.  
*Бурик Микола Петрович*, канд. техн. наук, доц.  
*Лободзинський Вадим Юрійович*, канд. техн. наук, доц.

# **ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ**

## **Частина 1**

### **НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

**Теоретичні основи електротехніки Частина 1:** Навчальний посібник [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітніми програмою «Електричні системи і мережі», «Електричні станції», «Електричні машини і апарати», «Управління, захист та автоматизація енергосистем», «Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність», «Електротехнічні пристрої та електротехнологічні комплекси», «Нетрадиційні та відновлювані джерела енергії» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / В.С.Бойко, Л.Ю.Спінул, М.П.Бурик, В.Ю.Лободзинський; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 17,9 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 199 с.

Наведено основні формулювання, визначення, поняття і закони теорії електричних кіл. Розглянуто властивості активних і пасивних двополюсних елементів електричного кола і властивості електричних кіл, а також методи їх розрахунку за постійного і синусоїдного сигналів. Проаналізовано найважливіші для практичного застосування явища резонансу і взаємної індукції. Викладено основи теорії чотириполіусників. Навчальний посібник призначений здобувачів ступеня бакалавра денної форми навчання за спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка». Посібник також буде корисним для здобувачів ступеня бакалавра, які вивчають споріднені кредитні модулі.

© В.С.Бойко, Л. Ю. Спінул, М. П. Бурик, В. Ю. Лободзинський  
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

## Зміст

Розділ 1. Лінійні електричні кола постійного струму .....	7
Тема 1.1. Основні закони електричного кола.....	7
1.1.1. ....Схеми заміщення джерел енергії. Умови еквівалентності схем заміщення.....	9
1.1.2. Структура електричного кола і основні закони.....	13
1.1.2.1. Структура (топологія) електричного кола.....	13
1.1.2.2. Закон Ома.....	15
1.1.2.3. Закони Кірхгофа.....	19
Тема 1.2. Методи розрахунку електричного кола.....	22
1.2.1. Метод законів Кірхгофа.....	22
1.2.2. Енергетичний баланс електричного кола (баланс потужностей). .....	26
1.2.3. Метод контурних струмів.....	28
1.2.4. Метод вузлових потенціалів.....	33
1.2.5. Метод вузлової напруги (метод двох вузлів).....	39
1.2.6. Еквівалентні перетворення в електричних колах.....	41
1.2.6.1. Перетворення пасивних ділянок електричного кола.....	41
1.2.6.1.1. Послідовне з'єднання.....	41
1.2.6.1.2. Паралельне з'єднання.....	42
1.2.6.1.3. З'єднання трикутником і зіркою. Перетворення трикутника і зірки опорів.....	43
1.2.6.2. Перетворення активних ділянок кола.....	47
1.2.6.2.1. Послідовне з'єднання активних ділянок.....	47
1.2.6.2.2. Паралельне з'єднання віток з джерелами струму.....	48
1.2.6.2.3. Паралельне з'єднання віток з джерелами ЕРС.....	49
1.2.6.3. Еквівалентні перетворення джерела струму.....	50
1.2.6.4. Перенесення джерела ЕРС за вузол.....	51
1.2.7. Принцип і метод накладання дії джерел енергії.....	53
1.2.8. Вхідні і взаємні провідності віток, їх розрахунки.....	59
1.2.9. Властивість взаємності і її використання.....	63
1.2.10. Теорема компенсації.....	64
1.2.11. Активні і пасивні двополюсники.....	65
1.2.11.1. Теорема про активний двополюсник.....	66
1.2.11.2. Метод еквівалентного генератора.....	69
1.2.12. Передача енергії від активного двополюсника до пасивного...	73

Розділ 2. Лінійні електричні кола однофазного синусоїдного струму.	78
Тема 2.1. Основні властивості кола синусоїдного струму і його розрахунок.	78
2.1.1. Основні властивості синусоїдного струму. Часові та векторні діаграми.	78
2.1.2. Діюче значення періодичного змінного струму, напруги.	79
2.1.3. Зображення синусоїдних струмів і напруг обертовими векторами.	81
2.1.4. Зображення синусоїдних струмів і напруг комплексними функціями.	83
2.1.5. Особливості фізичних процесів в колі змінного струму.	85
2.1.5.1. Співвідношення між напругами і струмами на елементах кола змінного струму.	85
2.1.5.2. Розрахункова схема кола змінного струму.	86
2.1.6. Закони Кірхгофа для кола змінного струму.	88
2.1.7. Елементи у колі синусоїдного струму. Активні і реактивні опори. .....	90
2.1.7.1. Ідеалізований резистивний елемент у колі синусоїдного струму.	91
2.1.7.2. Ідеалізований індуктивний елемент у колі синусоїдного струму.	94
2.1.7.3. Ідеалізований ємнісний елемент у колі синусоїдного струму.	98
2.1.8. Послідовне з'єднання елементів $R$ , $L$ , $C$ в колі синусоїдного струму.	101
2.1.9. Трикутники напруг і опорів.	104
2.1.10. Паралельне з'єднання елементів $R$ , $L$ , $C$ в колі синусоїдного струму.	106
2.1.11. Трикутники струмів і провідностей.	109
2.1.12. Пасивний двополюсник при синусоїдному струмі. Умови еквівалентності схем заміщення двополюсника.	110
2.1.13. Потужність у колі синусоїдного струму.	112
2.1.13.1. Миттєва потужність і коливання енергії.	112
2.1.13.2. Активна, реактивна і повна потужності кола.	118
2.1.13.3. Комплексна потужність.	121
2.1.13.4. Баланс потужностей кола синусоїдного струму.	124
2.1.13.5. Коефіцієнт потужності та способи його підвищення	124

2.1.14. Символічний метод розрахунку кола синусоїдного струму (метод комплексних амплітуд). .....	128
Тема 2.2. Електричні кола з індуктивно-зв'язаними елементами та їх розрахунок. ....	129
2.2.1. Рівняння індуктивно-зв'язаних контурів для поточкозчеплень і напруг. ....	129
2.2.2. Послідовне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок.....	133
2.2.3. Паралельне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок.....	136
2.2.4. Передача енергії індуктивно зв'язаними елементами кола.....	140
2.2.5. Розрахунок електричного кола з індуктивно зв'язаними елементами.....	142
2.2.5.1. Метод рівнянь Кірхгофа.....	143
2.2.5.2. Метод контурних струмів. ....	146
2.2.5.3. Еквівалентні перетворення індуктивних зв'язків. Магнітна розв'язка. ....	148
Тема 2.3. Резонансні явища і частотні характеристики. ....	151
2.3.1. Резонанс у послідовному електричному колі. ....	151
2.3.2. Настроювальні характеристики послідовного контуру. ....	153
2.3.3. Частотні характеристики послідовного контуру. ....	155
2.3.4. Енергетичні процеси при резонансі в послідовному контурі. ..	157
2.3.5. Резонанс при паралельному з'єднанні котушки і конденсатора. Резонанс струмів. ....	159
2.3.6. Умова передачі максимальної потужності до споживача. ....	163
2.3.7. Частотні характеристики реактивних двополюсників. ....	164
Тема 2.4. Основи теорії чотириполюсників .....	170
2.4.1. ....Класифікація чотириполюсників .....	170
2.4.2. Основні рівняння чотириполюсників .....	173
2.4.2.1. Рівняння чотириполюсника в $[\underline{Y}]$ -формі .....	173
2.4.2.2. Рівняння чотириполюсника в $[\underline{Z}]$ -формі .....	174
2.4.2.3. Рівняння чотириполюсників в $[\underline{A}]$ -формі.....	176
2.4.2.4. Зворотне включення чотириполюсника. Умова симетрії.....	178
2.4.3. .... Еквівалентні схеми заміщення пасивного чотириполюсника .....	180

2.4.4. ....	Визначення коефіцієнтів рівнянь форми $[A]$ із режимів неробочого ходу та короткого замикання .....	182
2.4.5. ....	Вторинні параметри чотириполюсника .....	185
2.4.6. ....	Коефіцієнт поширення симетричного чотириполюсника .....	189
2.4.7. Рівняння чотириполюсника, записані через вторинні параметри .....		190
2.4.8. Каскадне з'єднання чотириполюсників.....		192
2.4.9. Ланцюгова схема.....		195
Література: .....		197

## **Розділ 1. Лінійні електричні кола постійного струму**

### **Тема 1.1. Основні закони електричного кола**

#### **Електричне коло, його елементи, ВАХ елементів, лінійні і нелінійні елементи**

Електричним колом називається сукупність пристроїв, які забезпечують генерування, передачу, розподіл електричної енергії та перетворення її в інші види.

Основними елементами електричного кола є джерела енергії, споживачі та з'єднувальні провідники.

Джерела енергії – це пристрої в яких теплова, механічна, хімічна чи світлова енергії перетворюються в електричну енергію.

В споживачах має місце зворотне перетворення електричної енергії в теплову, механічну, хімічну і інші види енергії.

Джерела енергії називають ще активними елементами кола, споживачі – пасивними елементами.

Залежність напруги на затискачах джерела чи споживача від струму через цей елемент називається вольт-амперною характеристикою (ВАХ) елемента.

За виглядом цих залежностей (прямолінійні чи криволінійні) елементи ділять на лінійні і нелінійні.

ВАХ лінійних елементів приведено на рис. 1.1, ВАХ нелінійних елементів - на рис. 1.2.

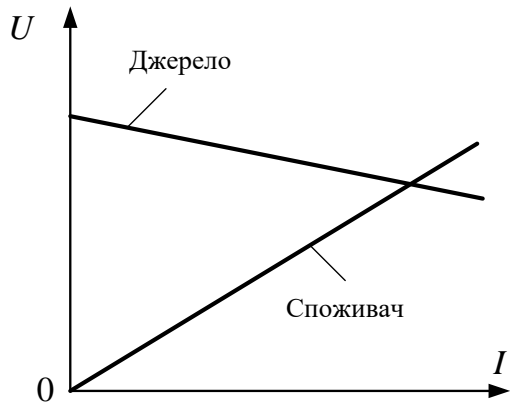


Рис. 1.1

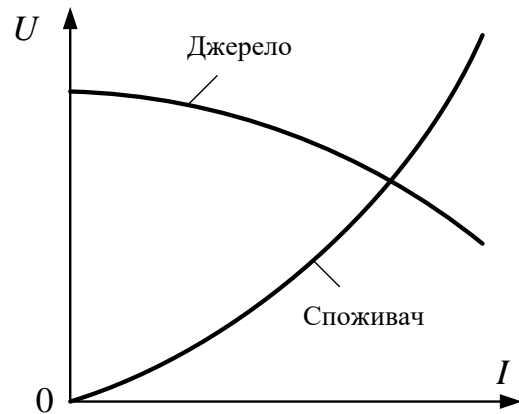


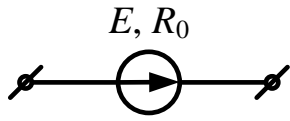
Рис. 1.2

Величини, які характеризують елементи в умовах даної задачі, називаються параметрами елементів. Параметрами джерел енергії є величина ЕРС чи величина струму, а також внутрішній опір чи провідність джерела. Параметрами споживачів є опори чи провідності. Крім того в колах змінного струму параметрами є також індуктивності і ємності елементів. Якщо параметри елементів не залежать від величини струму через елемент, тоді рівняння для ВАХ такого елементу є лінійним і відповідно ВАХ елементів будуть зображені на рис. 1.1. Якщо ж параметри елементів залежать від величини струму, тоді рівняння для ВАХ елементу буде нелінійним і його ВАХ зображено на рис. 1.2.

Якщо електричне коло має хоча б один нелінійний елемент, то все коло розглядається як нелінійне.

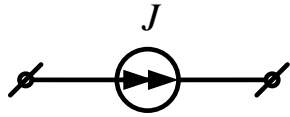
Зображення електричного кола з допомогою умовних знаків називається схемою кола. Схема електричного кола не передає фізичних властивостей елементів, а тільки вказує на послідовність з'єднання елементів.

Умовні позначення елементів кола:

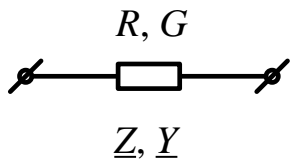


Джерело із заданою ЕРС (ДН)

$E$  - ЕРС,  $R_0$  - внутрішній опір.



Джерело із заданим струмом (ДС)



Споживач

$R$  - опір,  $G$  - провідність,

$\underline{Z}$  - комплексний опір,

$\underline{Y}$  - комплексна провідність.

### 1.1.1. Схеми заміщення джерел енергії. Умови еквівалентності схем заміщення

Розглянемо найпростіше коло, яке складається з джерела енергії і споживача (рис.1.3).

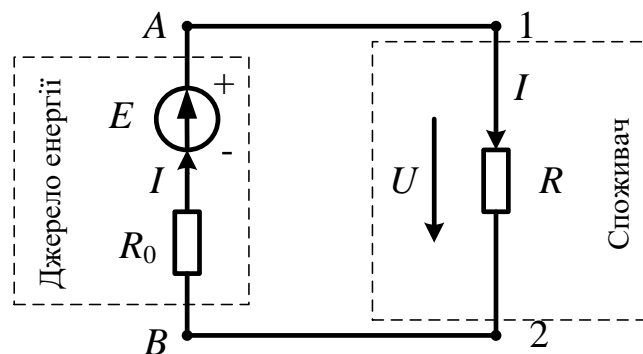


Рис. 1.3

Рівняння напруг

$$IR_0 + IR = E,$$

(1.1)

де  $IR_0$  - спад напруги на внутрішньому опорі,

$IR = U = U_{12}$  - спад напруги на споживачі,

$U_{A1} = U_{2B} = 0$ ,  $U_{AB} = U_{12} = U$ ,

$U_{AB}$  - різниця потенціалів на джерелі енергії.

Тоді з рівняння (1.1):

$$U_{AB} = U = E - IR_0, \quad (1.2)$$

Нехай  $E = const$ ,  $R_0 = const$ . Тоді рівняння (1.2) – лінійне, ВАХ джерела теж лінійна.

Якщо маємо кілька джерел з однаковими  $E$  і різними  $R_0$ , то залежності напруг на затискачах джерела від струму будуть мати вигляд, зображений на рис. 1.4

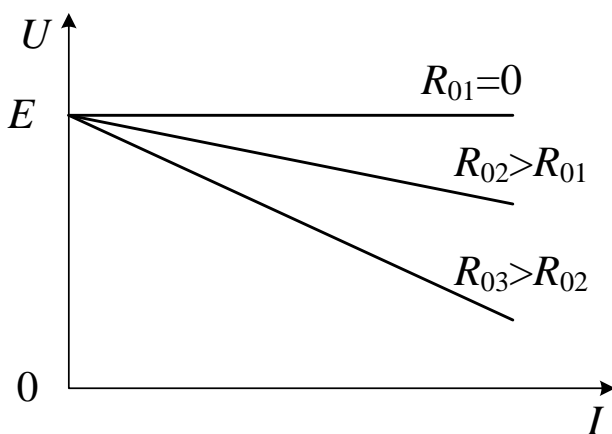


Рис. 1.4

Як видно із рис. 1.4, чим менше  $R_0$ , тим менший спад напруги на цьому внутрішньому опорі і відповідно напруга на затискачах джерела менше залежатиме від струму. Якщо ж  $R_0 = 0$ , то напруга на затискачах джерела взагалі не буде залежати від величини струму і ВАХ такого

джерела буде прямою, паралельною осі  $I$  (дивись рис. 1.4).

Таке ідеальне джерело, внутрішній опір якого дорівнює нулю і напруга на затискачах якого не залежить від величини струму, називається джерелом напруги (ДН). На схемі заміщення воно зображається одним елементом (рис. 1.5,б).

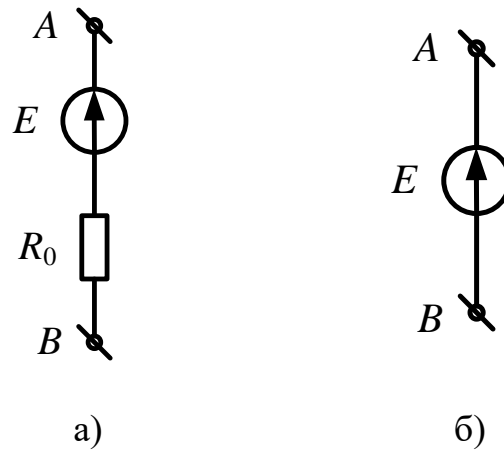


Рис. 1.5

Поділимо ліву і праву частину рівняння (1.2) на  $R_0$  :

$$\frac{U}{R_0} = \frac{E}{R_0} - I.$$

Введемо позначення:

$$\frac{E}{R_0} = I_{\text{КЗ}} - \text{струм короткого замикання джерела, } I_{\text{КЗ}} = J ;$$

$$\frac{1}{R_0} = G_0 - \text{внутрішня провідність джерела.}$$

$$UG_0 = J - I ,$$

$$\text{тоді} \quad I = J - UG_0. \quad (1.3)$$

Рівнянню (1.3) відповідає наступна схема заміщення джерела (рис. 1.6). Вольт-амперні характеристики джерела, побудовані по рівнянню (1.3), будуть мати вигляд рис. 1.7, де  $G_{03} > G_{02} > G_{01}$ .

Таке ідеальне джерело, внутрішня провідність якого дорівнює нулю і струм якого не залежить від величини напруги на затискачах, отримало назву джерело струму (ДС).

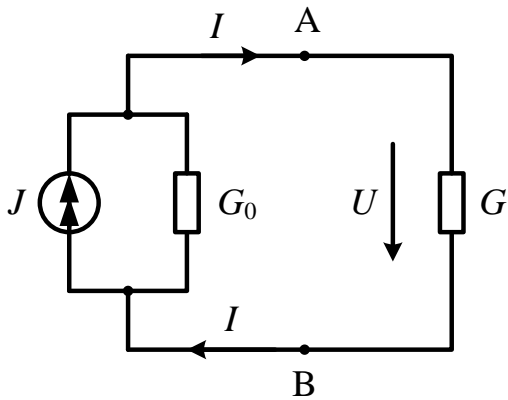


Рис. 1.6

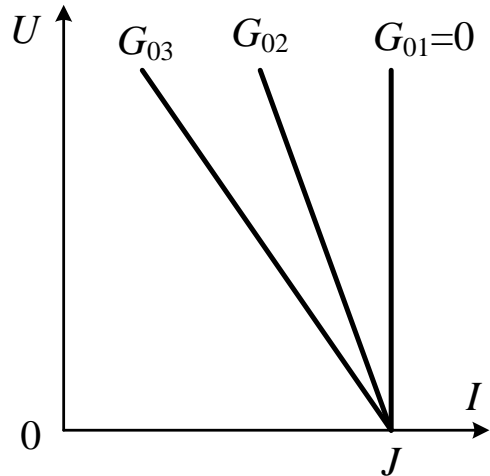


Рис. 1.7

Для джерела струму будуть справедливими співвідношення:

$$G_0 = 0, \quad R_0 = \infty, \quad E = IR_0 = \infty.$$

Для споживача  $R$  (див. рис. 1.3) немає значення, якою схемою заміщення зображено джерело енергії: послідовною чи паралельною (рис. 1.5 чи рис. 1.6). Струм і напруга на споживачі залишаються незмінними, якщо між параметрами схем заміщення джерела енергії виконуються такі співвідношення:

$$J = \frac{E}{R_0}, \quad E = JR_0; \quad (1.4)$$

$$G_0 = \frac{1}{R_0}, \quad R_0 = \frac{1}{G_0}. \quad (1.5)$$

Вирази (1.4) і (1.5) є умовами еквівалентності схем заміщення джерела енергії.

## 1.1.2. Структура електричного кола і основні закони.

### 1.1.2.1. Структура (топологія) електричного кола.

Частина електричного кола, вздовж якої струм має одне і теж значення, називається віткою кола чи схеми. Місце з'єднання трьох і більше віток називається електричним вузлом. Замкнений шлях по елементах кола, створений вітками, які не повторюються, називається електричним контуром.

Якщо кожному вітку схеми незалежно від кількості елементів в ній зобразити однією лінією, то отримаємо граф схеми. Вітки схеми будуть вітками графа (ребра). Схема кола і її граф, в яких 6 віток і 4 вузли, зображено на рис. 1.8 та рис. 1.9  $n_{\text{ВУЗ}} = 4$ ,  $m_{\text{ВІТ}} = 6$ .

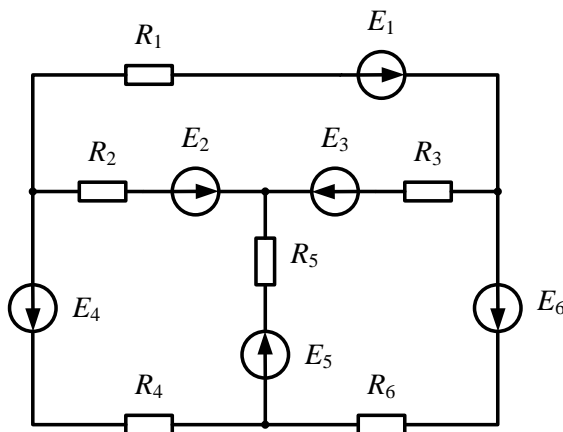


Рис. 1.8

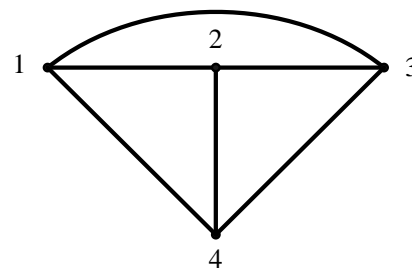


Рис. 1.9

Частина графа, створена вітками, які зв'язують всі вузли і не дають замкнених контурів, називається деревом графа. Для графа рис. 1.9 можна запропонувати кілька дерев: рис. 1.10 (а, б, в).

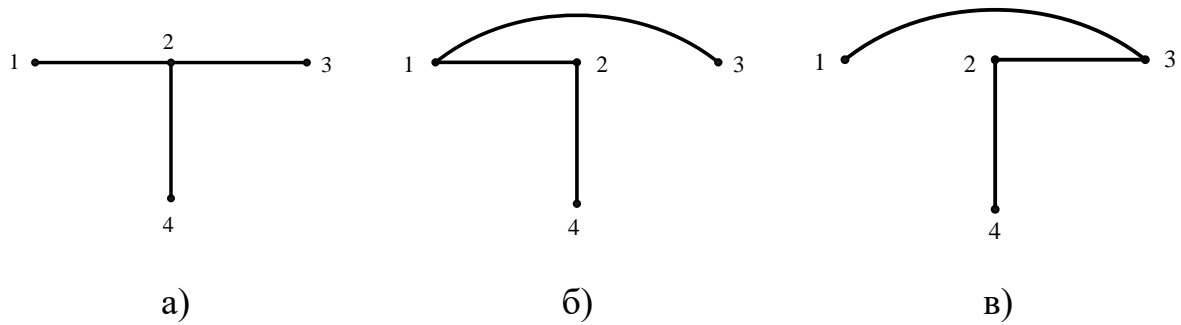
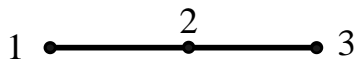


Рис. 1.10

Вітки дерева називаються головними вітками графа. Вітки, які доповнюють дерево до повного графа, називаються вітками зв'язку. Кількість віток дерева залежить від кількості вузлів. Для графу рис. 1.10  $m_{\text{ВУЗ}} = 4$ ,  $n_{\text{ВД}} = 3$ . Кількість віток дерева та кількість вузлів пов'язані співвідношенням:

$$n_{\text{ВД}} = m_{\text{ВУЗ}} - 1.$$

Наприклад, для графів:



$$m_{\text{ВУЗ}} = 3, n_{\text{ВД}} = 2.$$



$$m_{\text{ВУЗ}} = 2, n_{\text{ВД}} = 1.$$

Контур графа, які створені вітками дерева і тільки однією віткою зв'язку, називаються головними контурами графа. Кількість головних контурів визначається кількістю віток зв'язку.

$n_{\text{В}}$  – всього віток графа;

$n_{\text{ВД}}$  – віток дерева;

$$n_{\text{В.ЗВ}} = n_{\text{В}} - n_{\text{ВД}} = n_{\text{ГОЛ.КОНТ}};$$

$$n_{\text{ГОЛ.КОНТ}} = n_{\text{В}} - (m_{\text{ВУЗ}} - 1).$$

Якщо коло має послідовне з'єднання елементів, в яких протікає один і той же струм, то таке коло називається нерозгалуженим. Якщо в колі 3 і більше віток, то це розгалужене коло. Якщо в колі діє одне джерело енергії, то незалежно від кількості віток його називають простим колом.

Якщо в колі є кілька віток і не менше 2-х джерел, які знаходяться в різних вітках, то це складне коло.

### 1.1.2.2. Закон Ома

а) Для пасивної ділянки кола (рис. 1.11)

Припустимо, що єдиним джерелом струму у провіднику є заряди, які збуджують поле у відповідності до закону Кулона. При проходженні струму заряди спадають. Для того, щоб напруженість поля і густина струму залишалися незмінними, необхідно мати додаткові сили чи процеси, які б неперервно поповнювали заряди. Таким чином, можна стверджувати, що заряди рухаються під дією напруженості результуючого поля, що має дві складові – кулонівську і напруженість поля сторонніх сил

$$\bar{E}_{\text{РЕЗ}} = \bar{E}_{\text{КУЛ}} + \bar{E}_{\text{СТОП}}.$$

З урахуванням останнього, закон Ома в диференціальній формі може бути записаний так

$$\delta = \gamma(\bar{E}_{\text{КУЛ}} + \bar{E}_{\text{СТОП}}),$$

де  $\delta$  - густина струму,  $\gamma$  - питома провідність;

$$\delta = \frac{I}{S}, I - \text{струм, } S - \text{переріз провідника.}$$

$$\frac{I}{S} = \gamma(\bar{E}_{\text{КУЛ}} + \bar{E}_{\text{СТОП}}).$$

На ділянці кола, що показана на рис. 1.11 джерела сторонніх сил відсутні, тому  $\bar{E}_{\text{СТОП}} = 0$  і  $\bar{E}_{\text{РЕЗ}} = \bar{E}_{\text{КУЛ}}$ ,  $\frac{I}{S} = \gamma\bar{E}_{\text{КУЛ}}$ .

Помножимо останній вираз на  $dl$  і проінтегруємо від точки  $a$  до  $b$

$$\int_a^b \frac{I}{\gamma S} dl = \int_a^b \overline{E}_{\text{кул}} dl.$$

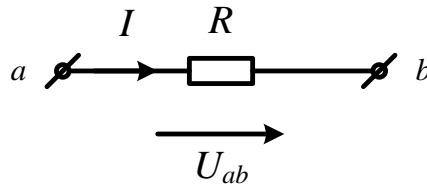


Рис. 1.11

$$\int_a^b \frac{I}{\gamma S} dl = IR.$$

Поле у провіднику є потенціальним, тому  $\int_a^b \overline{E}_{\text{кул}} dl = \varphi_a - \varphi_b = U_{ab}$ .

Отже,  $IR = \varphi_a - \varphi_b = U_{ab}$ .

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R} = \frac{U_{ab}}{R}. \quad (1.6)$$

Закон Ома для ділянки без ЕРС.

$$\varphi_a = \varphi_b + I \cdot R. \quad (1.7)$$

Співвідношення (1.7) вказує на те, що в напрямку проти струму потенціал підвищується на величину спаду напруги.

$$\varphi_b = \varphi_a - I \cdot R. \quad (1.8)$$

В напрямку струму потенціал знижується на величину спаду напруги.

б) Для активної ділянки (рис. 1.12)

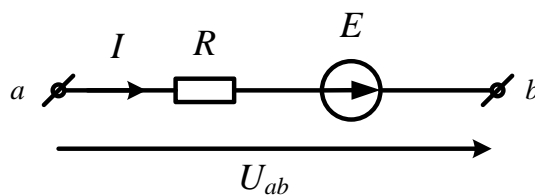


Рис. 1.12

$$\int_a^b \frac{I}{\gamma S} dl = \int_a^b \overline{E}_{\text{КУЛ}} dl + \int_a^b \overline{E}_{\text{СТОП}} dl,$$

$$\int_a^b \frac{I}{\gamma S} dl = IR, \quad \int_a^b \overline{E}_{\text{КУЛ}} dl = \varphi_a - \varphi_b = U_{ab},$$

$$\int_a^b \overline{E}_{\text{СТОП}} dl = E - \text{ЕРС джерела.}$$

$$IR = \varphi_a - \varphi_b + E = U_{ab} + E, \quad (1.9)$$

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + E}{R} = \frac{U_{ab} + E}{R}. \quad (1.10)$$

закон Ома для ділянки з ЕРС.

У загальному випадку, якщо на ділянці є кілька опорів і декілька ЕРС, то (1.10) матиме вигляд:

$$I = (U_{ab} + \sum E_k) / \sum R_k. \quad (1.11)$$

У чисельнику співвідношення (1.11)  $E_k$  входить із знаком «+», якщо напрямок ЕРС і струму збігаються і з мінусом, якщо вони протилежні. У знаменнику  $\sum R_k$  – це арифметична сума опорів ділянки. Наприклад, для ділянки кола, що показана на рис. 1.13, закон Ома матиме вигляд

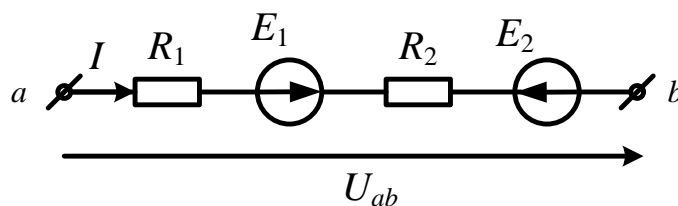


Рис. 1.13

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{U_{ab} + E_1 - E_2}{R_1 + R_2}.$$

Якщо напрямок струму невідомий, то його можна вибрати довільно і записати відповідне співвідношення (1.11). Якщо отримане рішення буде додатнім, то вибраний напрямок відповідає дійсному (і навпаки).

в) Закон Ома для замкненого кола (рис. 1.14) ( $E_1 > E_2$ ).

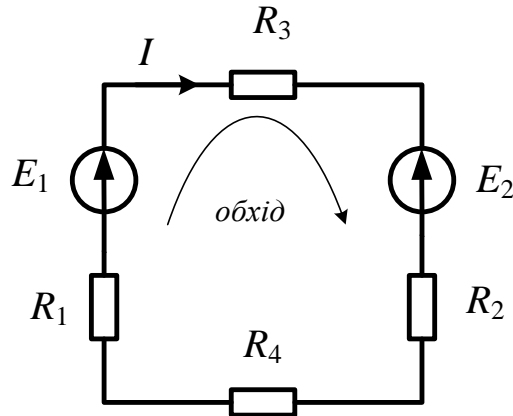


Рис. 1.14

$$\oint_{\gamma S} \frac{I}{\gamma S} dl = I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4),$$

$$\oint \bar{E}_{\text{кул}} dl = 0, \quad \oint \bar{E}_{\text{стор}} dl = E_1 - E_2$$

$$I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = E_1 - E_2;$$

$$I = \frac{\sum E_k}{\sum_j R_j}. \quad (1.12)$$

Струм у нерозгалуженому замкненому колі визначається як відношення алгебраїчної суми ЕРС до суми опорів цього кола. В рівнянні (1.12)  $E_k$  входить із знаком «+», якщо напрями ЕРС і струму однакові.

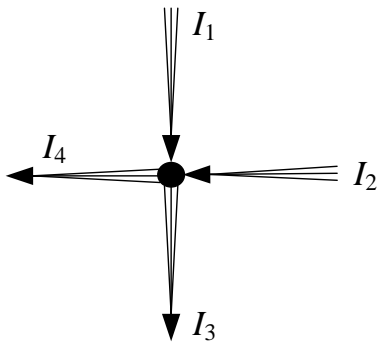
### 1.1.2.3. Закони Кірхгофа.

а) Перший закон Кірхгофа.

*Алгебраїчна сума струмів віток, з'єднаних у вузлі, дорівнює нулю.*

$$\sum I_k = 0. \quad (1.13)$$

Наприклад, для вузла, зображеного на рис. 1.15, перший закон Кірхгофа записується так



або

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0,$$

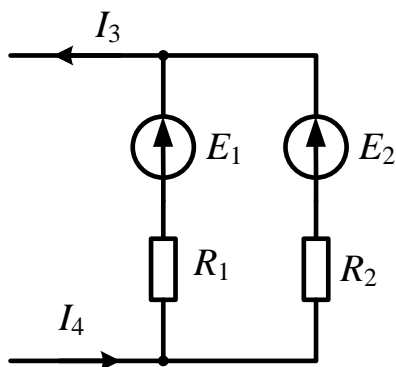
$$-I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

Рис. 1.15

Перший закон Кірхгофа можна розглядати як наслідок принципу неперервності електричного струму.

$$\oint_S \bar{\delta} d\bar{S} = 0.$$

Виходячи з цього, перший закон Кірхгофа можна використовувати не тільки для вузла, але й для будь-якої замкненої поверхні, в якій знаходиться частина електричного кола (рис. 1.16).



$$I_3 = I_4.$$

Рис. 1.16

б) Другий закон Кірхгофа.

В будь-якому замкненому контурі алгебраїчна сума спадів напруг на ділянках контуру дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС в цьому контурі.

$$\sum I_k \cdot R_k = \sum E_k. \quad (1.14)$$

Для того, щоб записати рівняння на основі другого закону, треба попередньо вибрати напрямок обходу контуру (рис. 1.17).

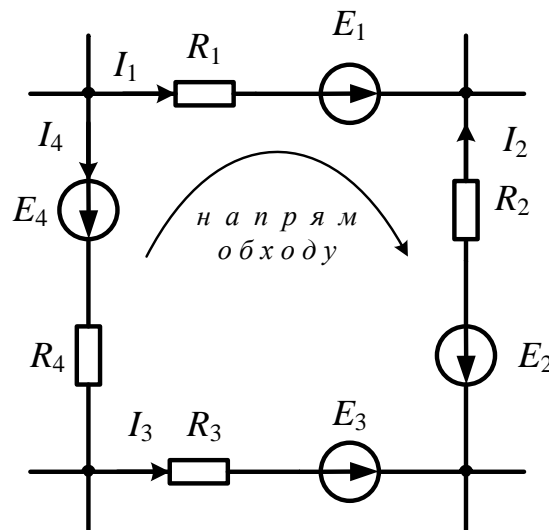


Рис. 1.17

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_4 R_4 = E_1 + E_2 - E_3 - E_4. \quad (1.15)$$

В рівнянні (1.15) складова  $I_k R_k$  береться із знаком «+» для спадів напруг, де напрям обходу і напрямок струму співпадають; складова  $E_k$  додатна, де напрям обходу співпадає з напрямком ЕРС.

Якщо замість ЕРС ввести в розгляд напруги, що їх врівноважують, то другий закон Кірхгофа записується таким чином

в будь-якому замкненому контурі алгебраїчна сума напруг дорівнює нулю

$$\sum U_k = 0. \quad (1.16)$$

Це формулювання другого закону Кірхгофа частіше використовується в ході експериментальної перевірки.

### Визначення напруги між точками електричного кола.

При розв'язанні багатьох задач необхідно обчислити напругу між різними точками кола. У таких випадках доцільно користуватися наведеним нижче правилом:

*для визначення напруги між точками 1 і 2 потрібно пройти від точки 1 до точки 2 тим шляхом, де відомі опори, струми, ЕРС і обчислити зміну потенціалів на цьому шляху.*

Коли розраховуються потенціали слід пам'ятати, що ЕРС спрямована від від'ємного затискача джерела ("-") до додатного ("+") незалежно від напрямку струму через джерело; в опорі струм завжди тече від точки з більшим потенціалом до точки з меншим потенціалом.

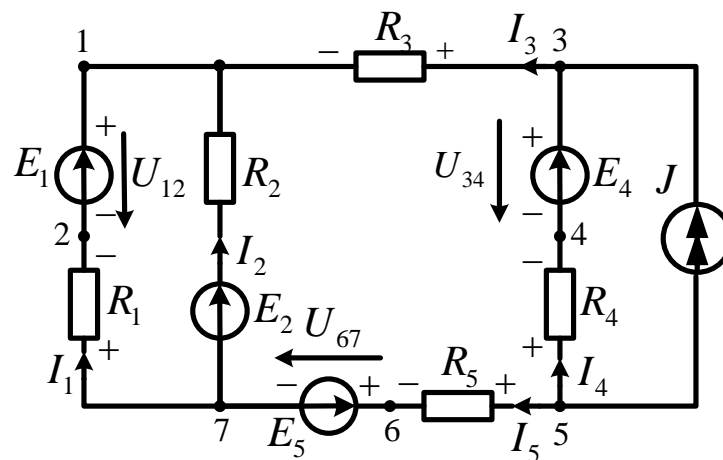


Рис. 1.18

Наприклад, у схемі рис.1.18:

$$U_{35} = -I_4 R_4 + E_4,$$

$$U_{57} = I_5 R_5 + E_5,$$

$$U_{15} = -I_5 R_5 - E_5 - I_1 R_1 + E_1.$$

## Тема 1.2. Методи розрахунку електричного кола.

Будь-яке складне коло можна розрахувати, склавши для цього кола відповідну кількість рівнянь на основі першого та другого законів Кірхгофа. Заданими вважаються величини ЕРС чи струми джерел енергії, а також опори чи провідності споживачів.

Склавши необхідну кількість рівнянь (в залежності від кількості невідомих струмів віток) та розв'язавши ці рівняння, отримаємо струми віток; далі можна розрахувати напруги на елементах схеми та потужності елементів. Цей метод отримав назву метод рівнянь Кірхгофа.

Але якщо в схемі є значна кількість віток з невідомими струмами, то система рівнянь по їх визначенню буде громіздкою і розв'язок цієї системи складатиме певні труднощі. Тому були розроблені методи, які дозволяють спростити систему рівнянь для сумісного розв'язку, звівши їх кількість або до кількості головних контурів (метод контурних струмів) або до кількості вузлів схеми (метод вузлових потенціалів). В залежності від того, чого в досліджувальній схемі менше - рівнянь для головних контурів чи рівнянь для вузлів, використовують той чи інший метод.

### 1.2.1. Метод законів Кірхгофа.

Базується на прямому використанні рівнянь Кірхгофа.

*Переваги:* придатний до розрахунку будь-якого електричного кола і не потребує додаткових перетворень.

#### Порядок розрахунку:

1. Визначити у схемі кількість віток  $m$ , вузлів  $n$  і незалежних контурів (комірок).

2. Підраховавши число невідомих, визначити загальну кількість рівнянь, які потрібно скласти за законами Кірхгофа для розв'язання задачі.

3. Довільно вибрати додатний напрямок струму в окремих вітках (позначення струмів доцільно брати відповідно до номера вітки) і скласти  $(n - 1)$  рівняння за першим законом Кірхгофа.

4. Довільно вибрати напрямок обходу кожного незалежного контуру і скласти  $(m - n + 1)$  рівняння за другим законом Кірхгофа. (Кількість цих рівнянь дорівнює кількості комірок у схемі).

5. Розв'язуючи складену систему рівнянь, обчислити невідомі струми.

*Зауваження 1:* коли числове значення знайдене з рівнянь струму виявилось від'ємним, це означає, що дійсний напрямок струму є оберненим раніше довільно вибраному.

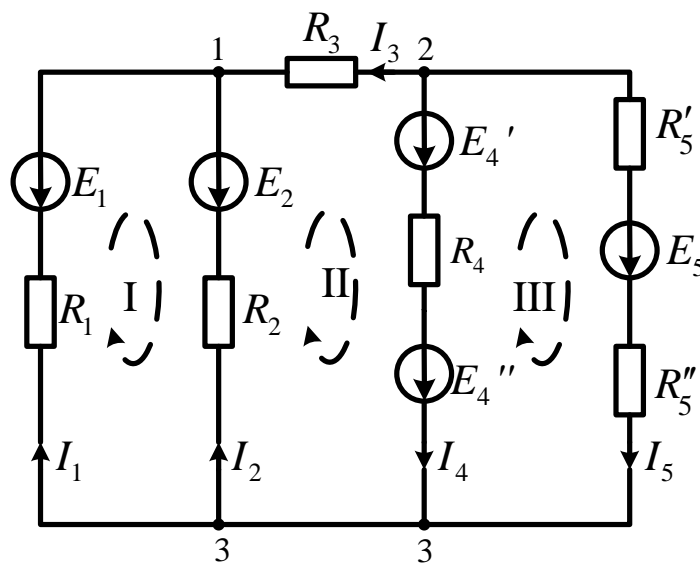


Рис. 1.19

1. Аналізуємо схему (рис. 1.19) і обчислюємо кількість віток ( $m = 5$ ), вузлів ( $n = 3$ ) і незалежних контурів (3).

2. Визначаємо загальну кількість рівнянь, необхідних для розв'язання задачі. Оскільки схема містить 5 віток з невідомими струмами, для їх обчислення треба скласти 5 незалежних рівнянь.

3. Довільно задаємося додатним напрямками струмів у вітках, як показано на рис.1.19, і складаємо  $n - 1 = 3 - 1 = 2$  незалежних рівняння за першим законом.

$$\text{вуз.1: } I_1 + I_2 + I_3 = 0;$$

$$\text{вуз.2: } -I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

4. Довільно вибираємо напрямок обходу кожного незалежного контуру, як показано на рис.21, і складаємо  $m - n + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$  незалежних рівняння за другим законом.

$$\text{I контур: } -E_1 + E_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2;$$

$$\text{II контур: } -E_2 + E'_4 + E''_4 = R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_4 I_4;$$

$$\text{III контур: } -E''_4 - E'_4 + E_5 = -R_4 I_4 + (R'_5 + R''_5) I_5.$$

*Зауваження 2:* якщо в коло ввімкнені вітки з відомими джерелами струму, то загальна кількість рівнянь скорочується:

за першим законом складають, як і раніше,  $n - 1$  рівняння;

за другим законом складають рівняння для незалежних контурів, які залишаються у схемі після вилучення віток з джерелами струму.

**Приклад.** Скласти рівняння для визначення струмів у вітках кола показаного на рис. 1.20.

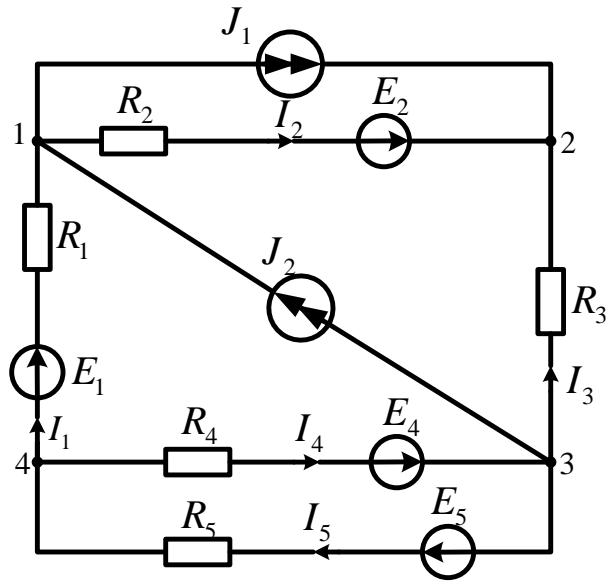


Рис. 1.20

1. Аналізуючи схему (див. рис. 1.20), підраховуємо кількість віток ( $m = 7$ ) і кількість вузлів ( $n = 4$ ).

2. Беручи до уваги дві вітки з відомими струмами  $J_1$  і  $J_2$  визначаємо, що для обчислення струмів в інших вітках треба скласти  $m - 2 = 7 - 2 = 5$  незалежних рівнянь.

3. Довільно вибираємо додатний напрямок струмів  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$ , як показано на рис. 1.20, і складаємо  $n - 1 = 4 - 1 = 3$  рівняння за першим законом Кірхгофа:

$$\text{вуз.1: } +I_1 - I_2 - J_1 + J_2 = 0;$$

$$\text{вуз.2: } J_1 + I_2 + I_3 = 0;$$

$$\text{вуз.3: } -J_2 + I_4 - I_3 - I_5 = 0;$$

4. Вилучаємо зі схеми вітки з джерелами струму (рис. 1.21) і складаємо рівняння для незалежних контурів за другим законом Кірхгофа, обходячи їх за обертанням годинникової стрілки:

$$\text{I контур: } E_1 + E_2 - E_4 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_4 I_4;$$

$$\text{II контур: } E_4 + E_5 = R_4 I_4 + R_5 I_5.$$

*Зауваження 3:* порядок розв'язання задач методом законів Кірхгофа не залежить від відомих або невідомих величин. Наприклад, за відомими опороми і струмами можна обчислити ЕРС у контурі.

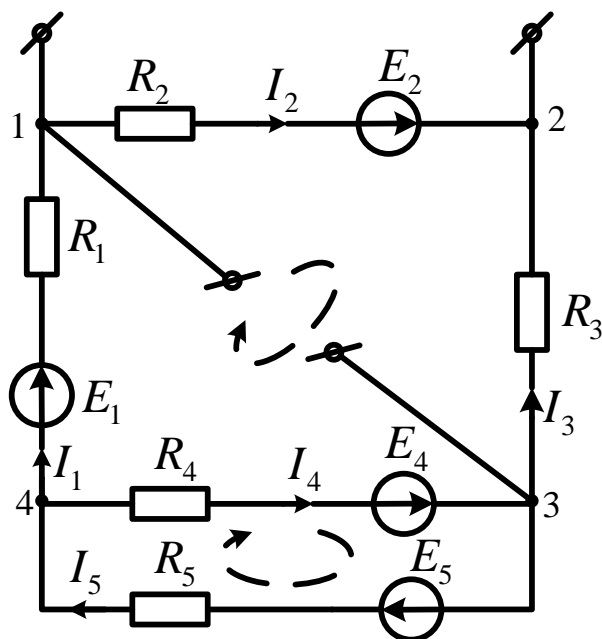


Рис. 1.21

### 1.2.2. Енергетичний баланс електричного кола (баланс потужностей).

Необхідний інший підхід для перевірки отриманих результатів. Для цього рекомендовано використовувати баланс потужностей електричного кола. На основі закону збереження енергії можна стверджувати, що в будь-якому електричному колі сума потужностей джерел енергії дорівнює сумі потужностей споживачів і це можна записати таким співвідношенням:

$$\sum P_{\text{кдж}} = \sum P_{\text{ксп}}. \quad (1.17)$$

Сумарна потужність всіх джерел дорівнює сумі потужностей джерел напруги та джерел струму

$$\sum P_{кдж} = \sum P_{кдн} + \sum P_{кдс} .$$

Потужність джерела напруги  $P_{кдн} = \pm E_k \cdot I_k$ .

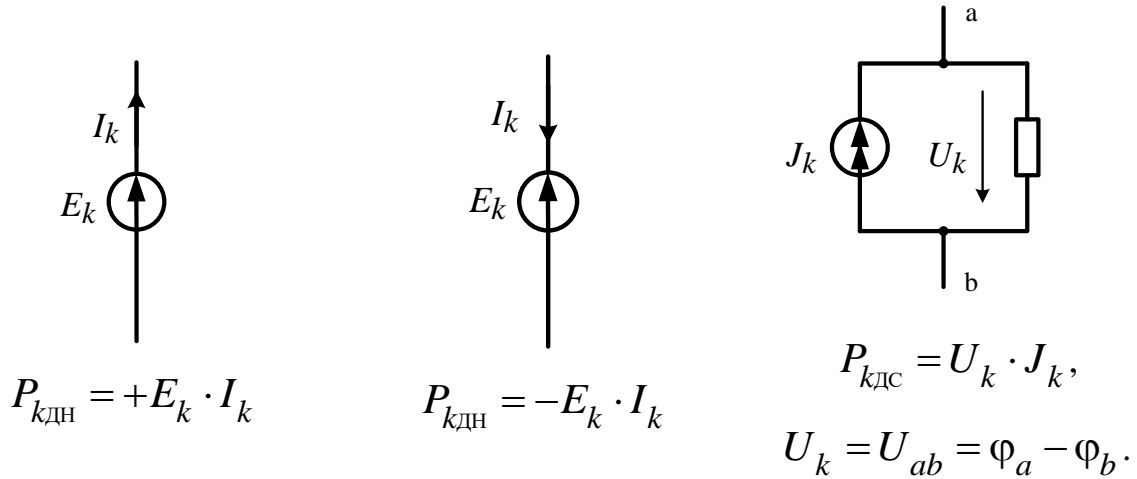


Рис. 1.22

При визначенні  $U_k$  для джерела струму від потенціалу точки, в яку струм притікає, віднімають потенціал точки, з якої струм витікає.

$$\sum P_{кдж} = \sum E_k \cdot I_k + \sum U_k \cdot I_k . \quad (1.18)$$

В співвідношенні (1.18) складові - алгебраїчні величини, можуть бути і додатніми і від'ємними.  $P_{ксп}$  - завжди додатна величина, бо визначається із співвідношення:

$$P_{ксп} = I_k^2 R_k . \quad (1.19)$$

Таким чином, остаточно рівняння балансу потужностей має вигляд

$$\sum E_k \cdot I_k + \sum U_k \cdot I_k = \sum I_k^2 R_k . \quad (1.20)$$

**Приклад.** Скласти рівняння балансу потужностей для кола, показаного на рис. 1.20.

Сумарна потужність джерел енергії

$$\sum P_{кдж} = \sum E_k \cdot I_k + \sum U_k \cdot I_k = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_4 I_4 + E_5 I_5 + U_{21} J_1 + U_{13} J_2,$$

де напруги  $U_{21} = E_2 - I_2 R_2$ ,  $U_{13} = I_2 R_2 - E_2 - I_3 R_3$ .

Сумарна потужність споживачів електричної енергії

$$\sum P_{ксп} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5.$$

### 1.2.3. Метод контурних струмів.

Введемо в розгляд так-звані контурні струми – це розрахункові величини, кожний із цих контурних струмів умовно замикається в своєму головному контурі.

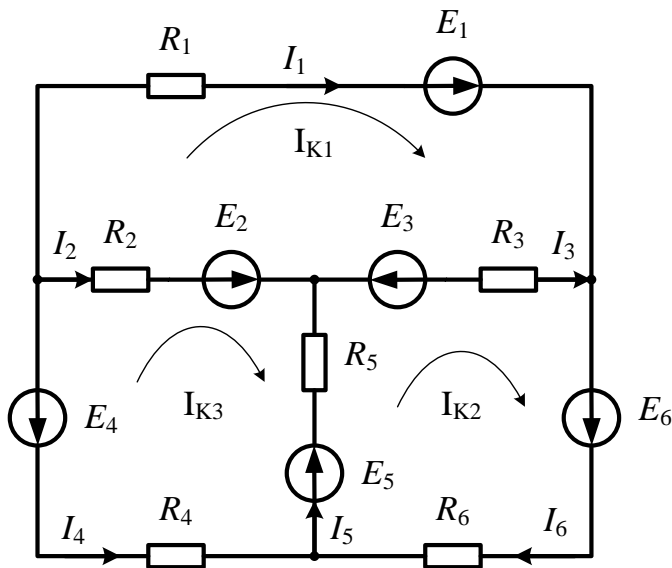
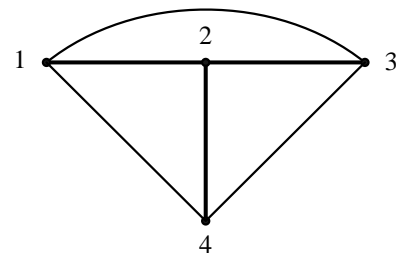


Рис. 1.23



$$\begin{aligned} n_B &= 6, \\ m_{\text{БУЗ}} &= 4, \\ n_{\text{ГОЛ.КОНТ}} &= 3. \end{aligned}$$

Рис. 1.24

$I_{K1}$ ,  $I_{K2}$ ,  $I_{K3}$  – контурні струми. Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для головних контурів 1, 2, 3 через контурні струми. Тоді матимемо:

$$\text{для контуру 1: } I_{K1}(R_1 + R_2 + R_3) - I_{K2}R_3 - I_{K3}R_2 = E_1 + E_3 - E_2, \quad (1.21)$$

$$\text{для контуру 2: } -I_{K1}R_3 + I_{K2}(R_3 + R_5 + R_6) - I_{K3}R_5 = -E_3 + E_6 + E_5, \quad (1.22)$$

$$\text{для контуру 3: } -I_{K1}R_2 - I_{K2}R_5 + I_{K3}(R_2 + R_4 + R_5) = E_2 - E_4 - E_5. \quad (1.23)$$

Введемо наступні позначення:

$$\begin{cases} R_{11} = R_1 + R_2 + R_3, \\ R_{22} = R_3 + R_5 + R_6, \\ R_{33} = R_2 + R_4 + R_5, \end{cases}$$

де  $R_{11}$ ,  $R_{22}$ ,  $R_{33}$  – власні контурні опори.

*Власний контурний опір* дорівнює арифметичній сумі опорів гілок, що створюють певний контур.

Опори віток, що належать одночасно двом контурам, називаються *міжконтурними опорами*.

$$R_{12} = R_{21} \text{ – міжконтурний опір контурів 1 і 2;}$$

$$R_{13} = R_{31} \text{ – для контурів 1 і 3;}$$

$$R_{23} = R_{32} \text{ – для контурів 2 і 3.}$$

Міжконтурні опори можуть бути як додатні так і від'ємні. Міжконтурний опір буде додатним, якщо в даній вітці напрямки контурних струмів однакові, і від'ємним, якщо напрямки контурних струмів протилежні.

В приведених рівняннях (1.21) – (1.23) міжконтурні опори від'ємні. Власні контурні опори завжди додатні, бо вважається, що напрямок обходу контуру співпадає з напрямком відповідного контурного струму.

Праві частини рівнянь (1.21) – (1.23) являють собою контурні ЕРС.  $E_{K1}$ ,  $E_{K2}$ ,  $E_{K3}$  – контурні ЕРС. Контурні ЕРС – це алгебраїчна сума ЕРС віток, які входять в даний контур. ЕРС вітки входить в контурну ЕРС із знаком «+», якщо напрямок дії ЕРС вітки співпадає з напрямком контурного струму.

З урахуванням внесених позначень рівняння (1.21) – (1.23) приймуть вигляд системи рівнянь:

$$\begin{cases} I_{K1}R_{11} + I_{K2}R_{12} + I_{K3}R_{13} = E_{K1} \\ I_{K1}R_{21} + I_{K2}R_{22} + I_{K3}R_{23} = E_{K2} \\ I_{K1}R_{31} + I_{K2}R_{32} + I_{K3}R_{33} = E_{K3} \end{cases} \quad (1.24)$$

В системі рівнянь (1.24) три невідомі контурні струми і відповідно три рівняння. Розв'язавши цю систему, отримаємо контурні струми. Далі знаходимо струми віток, як алгебраїчну суму контурних струмів, що замикаються через дану вітку. Для цього вибирають додатні напрямки струмів гілок порівнюють напрямок струму гілки з напрямком контурних струмів, які протікають по даній гілці. Якщо напрямок контурного струму і напрямок струму гілки однакові, то контурний струм береться з знаком «+» (і навпаки). Для вказаних на рис. 1.23 напрямів струму  $I_1, I_2, \dots, I_6$  матимемо:

$$I_1 = I_{K1}, I_2 = I_{K3} - I_{K1}, I_3 = I_{K2} - I_{K1},$$

$$I_4 = -I_{K3}, I_5 = I_{K2} - I_{K3}, I_6 = I_{K2}.$$

### **Послідовність розрахунку методом контурних струмів:**

- 1) Вибираємо головні контури схеми.
- 2) Вибираємо додатні напрямки контурних струмів, вказуємо їх на схемі (додатні напрямки вибираються довільно).

Примітка: якщо в схемі є вітки з джерелами струму (ДС), то струми цих джерел необхідно умовно замкнути по вітках схеми з кінчними опорами віток. Таким чином, струми віток ДС будуть використовуватись як контурні струми і оскільки їх струми відомі, то рівняння для контурів із ДС не складають, але враховують спади від цих струмів на опорах віток схеми інших контурів. Загальна кількість рівнянь в МКС за наявності віток з джерелами струму зменшиться на кількість таких джерел.

При визначенні головних контурів вітки з джерелом струму в граф схеми не вводять, оскільки ці джерела мають нескінченно великі внутрішні опори.

3) Складаємо загальні рівняння (рівняння типу (1.24)) через контурні струми для головних контурів.

4) Визначаємо власні контурні опори, міжконтурні опори та контурні ЕРС.

5) Підставляємо значення вказаних констант у вихідні рівняння, розв'язуємо ці рівняння і знаходимо контурні струми.

6) Вибираємо додатні напрямки струмів віток і знаходимо струми віток через контурні струми.

Після того як струми в колі визначені, виникає питання про перевірку правильності отриманих результатів. Цю перевірку бажано виконати іншим методом, відмінним від того, який використовують при аналізі. Якщо при аналізі використовувався МКС, тоді перевірку можна виконати за допомогою рівнянь Кірхгофа.

Необхідно пам'ятати:

Рівняння на основі першого закону Кірхгофа завжди виконуються автоматично, бо контурні струми перетинають вузли.

Рівняння на основі другого закону Кірхгофа можуть виявити неточності рівнянь, складених за методом контурних струмів.

**Приклад.** Скласти систему рівнянь для кола показаного на рис. 1.24.

1) Вибираємо головні контури схеми.

2) Вибираємо додатні напрямки контурних струмів, вказуємо їх на схемі (додатні напрямки вибираються довільно). В схемі є вітка з джерелом струму, то струм цього джерела замикаємо по вітках схеми з опорами  $(R_3 - R_4)$ . Таким чином, струм вітки з ДС буде використовуватись як контурний струм і оскільки його величина відома, то рівняння для контуру із ДС не складається, але враховуються спади напруг від цього струму на опорах віток схеми інших контурів.

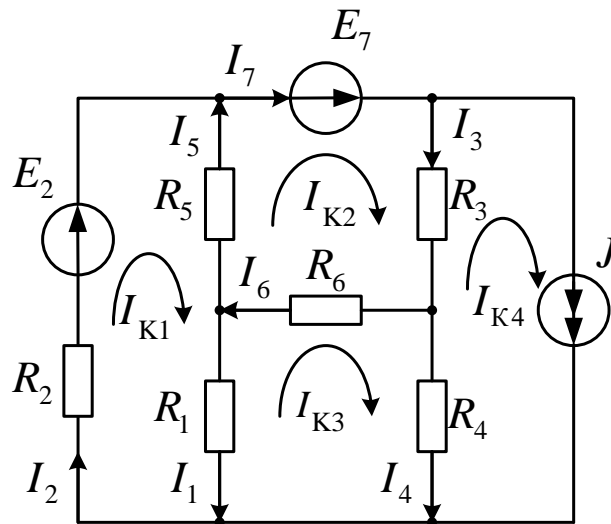


Рис. 1.24

3) Складаємо загальні рівняння (рівняння типу (1.24)) через контурні струми для головних контурів.

$$\begin{cases} I_{K1}R_{11} + I_{K2}R_{12} + I_{K3}R_{13} + JR_{14} = E_{11}; \\ I_{K1}R_{21} + I_{K2}R_{22} + I_{K3}R_{23} + JR_{24} = E_{22}; \\ I_{K1}R_{31} + I_{K2}R_{32} + I_{K3}R_{33} + JR_{34} = E_{33}. \end{cases}$$

4) Визначаємо власні контурні опори, міжконтурні опори та контурні ЕРС.

Контурні опори:

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5;$$

$$R_{22} = R_3 + R_6 + R_5;$$

$$R_{33} = R_1 + R_6 + R_4.$$

Міжконтурні опори:

$$R_{12} = R_{21} = -R_5; \quad R_{14} = 0; \quad R_{13} = R_{31};$$

$$R_{14} = -R_3; \quad R_{23} = R_{32} = -R_6; \quad R_{34} = -R_4.$$

Міжконтурний опір додатній, якщо в даній вітці напрямки контурних струмів однакові, і від'ємний, якщо напрямки контурних струмів протилежні.

Контурні ЕРС:

$$E_{11} = E_2; \quad E_{22} = E_7; \quad E_{33} = 0.$$

5) Підставляємо значення вказаних констант у вихідні рівняння, розв'язуємо ці рівняння і знаходимо контурні струми.

6) Вибираємо додатні напрямки струмів віток і знаходимо струми віток через контурні струми.

$$I_1 = I_{K1} - I_{K3}; \quad I_2 = I_{K1}; \quad I_3 = I_{K2} - J;$$

$$I_4 = I_{K3} - J; \quad I_5 = I_{K2} - I_{K1}; \quad I_6 = I_{K2} - I_{K3};$$

$$I_7 = I_{22}.$$

#### 1.2.4. Метод вузлових потенціалів.

Метод вузлових потенціалів базується на використанні першого закону Кірхгофа і закону Ома, тому дуже ефективний, якщо в схемі багато віток і мало вузлів, бо кількість рівнянь, які необхідно скласти і розв'язати для визначення струмів віток, визначається кількістю вузлів в схемі. Сутність методу розглянемо на прикладі. Нехай маємо схему рис. 1.25.

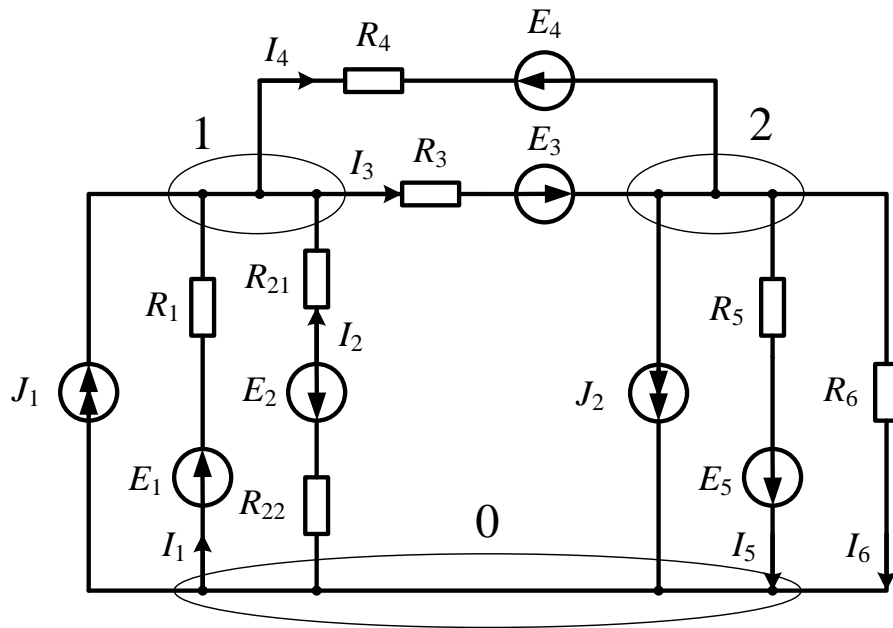


Рис. 1.25

В цій схемі  $n_{\text{в}} = 6$  (з невідомими струмами),  $m_{\text{вуз}} = 3$ .

Складемо рівняння на основі першого закону Кірхгофа:

Для вузла 1:

$$-I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = J_1. \quad (1.25)$$

Для вузла 2:

$$-I_3 - I_4 + I_5 + I_6 = -J_2. \quad (1.26)$$

Визначимо струми  $I_1, I_2, \dots, I_6$ , які входять в рівняння (1.25) та (1.26) на основі закону Ома через різницю потенціалів на кінцях заданих віток і параметри віток: опори і ЕРС. Так як струми залежать не від абсолютного значення потенціалів, а від різниці потенціалів, можемо один із вузлів схеми вибрати опорним і його потенціал прирівняти до 0, тоді отримаємо співвідношення:  $\varphi_0 = 0$ ;

$$\left. \begin{aligned}
I_1 &= \frac{\varphi_0 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = \frac{-\varphi_1 + E_1}{R_1} = (-\varphi_1 + E_1) \cdot G_1, & G_1 &= \frac{1}{R_1} \\
I_2 &= \frac{-\varphi_1 - E_2}{R_{21} + R_{22}} = (-\varphi_1 - E_2) \cdot G_2, & G_2 &= \frac{1}{R_{21} + R_{22}} \\
I_3 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_3}{R_3} = (\varphi_1 - \varphi_3 + E_3) \cdot G_3, & G_3 &= \frac{1}{R_3} \\
I_4 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - E_4}{R_4} = (\varphi_1 - \varphi_2 - E_4) \cdot G_4, & G_4 &= \frac{1}{R_4} \\
I_5 &= \frac{\varphi_2 + E_5}{R_5} = (\varphi_2 + E_5) \cdot G_5, & G_5 &= \frac{1}{R_5} \\
I_6 &= \frac{\varphi_2}{R_6} = \varphi_2 \cdot G_6, & G_6 &= \frac{1}{R_6}
\end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Підставляємо вирази для струмів  $I_1, I_2, \dots, I_6$  в рівняння (1.25) та (1.26). Згрупуємо коефіцієнти при потенціалах  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$ . Складові у вигляді  $E_k \cdot G_k$ , як відомі величини перенесемо в праву частину рівнянь. Тоді замість (1.25) і (1.26) отримаємо (1.28) та (1.29):

$$\varphi_1(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) - \varphi_2(G_3 + G_4) = J_1 + E_1G_1 - E_2G_2 - E_3G_3 + E_4G_4, \quad (1.28)$$

$$-\varphi_1(G_3 + G_4) + \varphi_2(G_3 + G_4 + G_5 + G_6) = -J_2 + E_3G_3 - E_4G_4 - E_5G_5. \quad (1.29)$$

$$G_1 + G_2 + G_3 + G_4 = G_{11} \text{ - власна провідність вузла 1;}$$

$$G_3 + G_4 + G_5 + G_6 = G_{22} \text{ - власна провідність вузла 2;}$$

$$G_3 + G_4 = G_{12} = G_{21} \text{ - міжвузлова провідність вузлів 1 та 2;}$$

$$J_1 + E_1G_1 - E_2G_2 - E_3G_3 + E_4G_4 = I_{B1} \text{ - вузловий струм вузла 1;}$$

$$-J_2 + E_3G_3 - E_4G_4 - E_5G_5 = I_{B2} \text{ - вузловий струм вузла 2.}$$

Власна вузлова провідність дорівнює сумі провідностей віток, приєднаних до даного вузла.



Якщо в схемі є вітка, в якій діє тільки ЕРС, а опір цієї вітки дорівнює 0, то в якості базового необхідно прийняти потенціал одного із вузлів цієї вітки. Потенціал іншого вузла цієї вітки визначається в цьому випадку за величиною і напрямком ЕРС даної вітки і для цього вузла рівняння потім не складають. Таким чином кількість рівнянь для сумісного розв'язку скорочується.

2) Записуємо рівняння для решти вузлів, потенціали яких невідомі (1.31).

3) Визначаємо власні вузлові провідності  $G_{11}, G_{22}, \dots$  міжвузлові провідності  $G_{kn}$  та вузлові струми.

4) Підставляємо значення вказаних констант у вихідні рівняння і розв'язуємо ці рівняння. Отримуємо значення потенціалів вузлів схеми.

5) Складаємо вирази для струмів віток на основі закону Ома (1.27) та знаходимо струми віток. Якщо в схемі була вітка, опір якої дорівнює нулю, то струми цієї вітки розраховуємо за першим законом Кірхгофа після визначення струмів решти віток.

**Приклад.** Скласти систему рівнянь для кола показаного на рис. 1.26.

1) Вибираємо базовий вузол і приймаємо його потенціал за нуль. У схемі є вітка, в якій діє тільки ЕРС  $E_7$ , а опір цієї вітки дорівнює нулю, то в якості базового необхідно прийняти потенціал одного із вузлів цієї вітки  $\varphi_5 = 0$ . Потенціал іншого вузла цієї вітки визначається за величиною і напрямком ЕРС даної вітки  $\varphi_4 = E_7$  і для цього вузла рівняння потім не складають.

2) Записуємо рівняння для решти вузлів, потенціали яких невідомі (1.31).

$$\begin{aligned} \varphi_1 G_{11} - \varphi_2 G_{12} - \varphi_3 G_{13} - \varphi_4 G_{14} &= J_{11}; \\ -\varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} - \varphi_3 G_{23} - \varphi_4 G_{24} &= J_{22}; \\ -\varphi_1 G_{31} - \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} - \varphi_4 G_{34} &= J_{33}. \end{aligned}$$

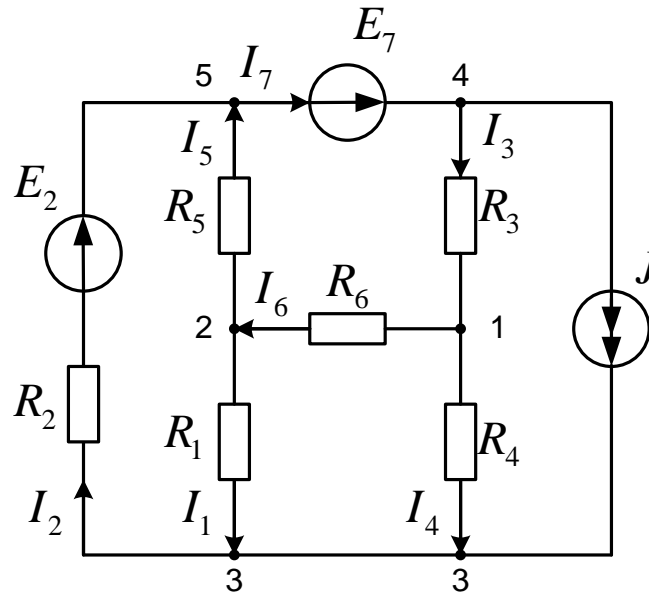


Рис. 1.26

3) Визначаємо власні вузлові провідності, міжвузлові провідності та вузлові струми.

Власна провідність 1 вузла  $G_{11} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6}$  См,

власна провідність 2 вузла  $G_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}$  См,

власна провідність 3 вузла  $G_{33} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}$  См,

міжвузлова провідність 1 і 2 вузлів  $G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{R_6}$  См,

міжвузлова провідність 1 і 3 вузлів  $G_{13} = G_{31} = -\frac{1}{R_4}$  См,

міжвузлова провідність 2 і 3 вузлів  $G_{23} = G_{32} = -\frac{1}{R_1}$  См,

вузловий струм 1 вузла  $J_{11} = E_7 \frac{1}{R_3}$  А,

вузловий струм 2 вузла  $J_{22} = 0$  А,

вузловий струм 3 вузла  $J_{33} = -\frac{E_2}{R_2} + J$  А.

4) Підставляємо значення вказаних констант у вихідні рівняння і розв'язуємо ці рівняння. Отримуємо значення потенціалів вузлів схеми.

5) Складаємо вирази за законом Ома (1.6), (1.11) та знаходимо струми віток:

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_1}; \quad I_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_0 + E_7}{R_2}; \quad I_3 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{R_3};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_4}; \quad I_5 = \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{R_5}; \quad I_6 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_6}.$$

В схемі є вітка, опір якої дорівнює нулю, тому струми цієї вітки розраховуємо за першим законом Кірхгофа  $I_7 = I_2 + I_5$ .

### 1.2.5. Метод вузлової напруги (метод двох вузлів).

Найбільш ефективним є використання розглянутого методу у випадку, коли схема має два вузли.

Розглянемо схему на рис. 1.27.

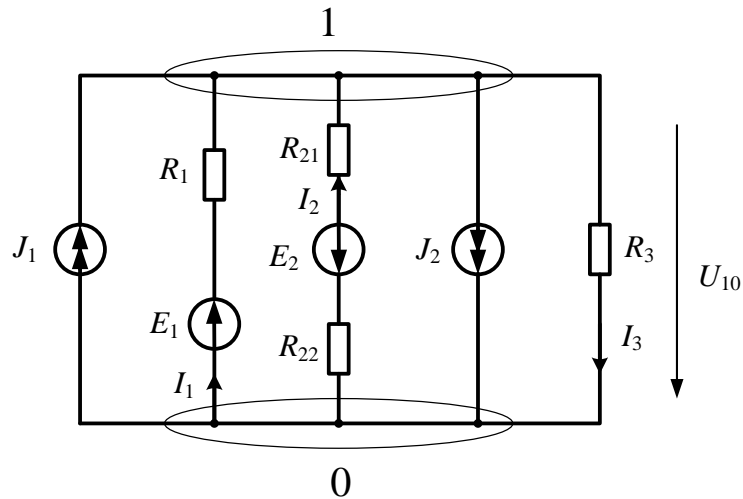


Рис. 1.27

Напруга  $U_{10} = \varphi_1 - \varphi_0$ ; за умови, що  $\varphi_0 = 0$ , тоді  $U_{10} = \varphi_1$ . Складемо рівняння для вузла 1 розглянутим раніше методом:

$$\varphi_1 G_{11} = I_{B1},$$

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{21} + R_{22}} + \frac{1}{R_3}, \quad I_{B1} = J_1 - J_2 + E_1 G_1 - E_2 G_2,$$

$$\varphi_1 = \frac{I_{B1}}{G_{11}} = \frac{J_1 - J_2 + E_1 G_1 - E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Після визначення вузлової напруги, обираємо додатні напрямки струмів і визначаємо їх:

$$I_1 = (E_1 - U_{10})G_1, \quad I_2 = (-E_2 - U_{10})G_2, \quad I_3 = U_{10}G_3.$$

### 1.2.6. Еквівалентні перетворення в електричних колах.

Заміна однієї частини кола на іншу буде еквівалентною, якщо в неперетворювальній частині кола струми і напруги не змінились. Якщо в перетворенні бере участь пасивна ділянка кола (без джерел енергії), то сума потужностей віток до і після перетворення залишається незмінною. Якщо ж перетворення відбувається над частиною кола, де є джерела енергії, то сума потужностей віток до і після перетворення може відрізнятись.

#### 1.2.6.1. Перетворення пасивних ділянок електричного кола.

##### 1.2.6.1.1. Послідовне з'єднання.

Послідовним називають з'єднання, за якого через елементи тече один й той саме струм (між елементами немає вузла) (рис. 1.28,а).

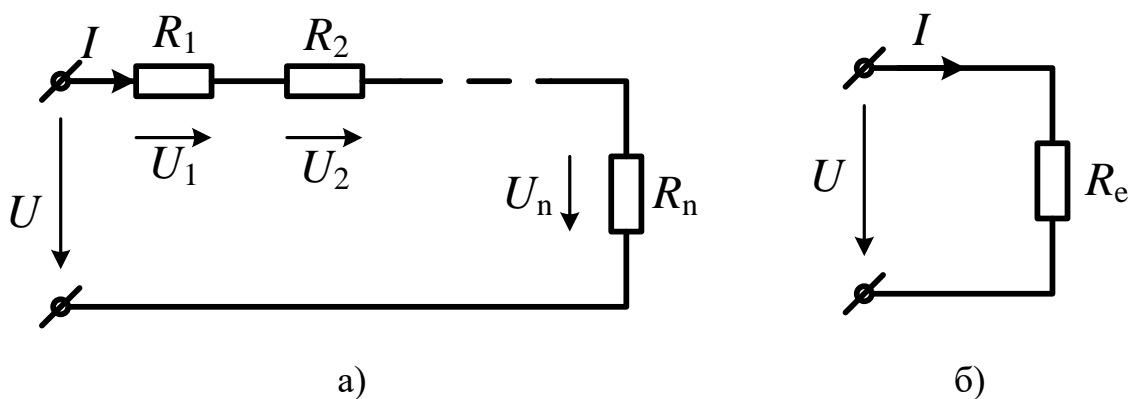


Рис. 1.28

За другим законом Кірхгофа і законом Ома для кола показаного на рис. 1.28,а:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n). \quad (1.38)$$

Для рис. 1.28,б :  $U = IR_e$  (1.39)

Порівнюючи вирази (1.38) та (1.39) і враховуючи умови еквівалентності (при однакових струмах, однакові напруги), маємо:

$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n, \quad R_e = \sum_{k=1}^n R_k.$$

### 1.2.6.1.2. Паралельне з'єднання

Паралельним називають з'єднання, за якого елементи ввімкнені до однієї пари вузлів і, таким чином, знаходяться під однаковою напругою (рис. 1.29,а).

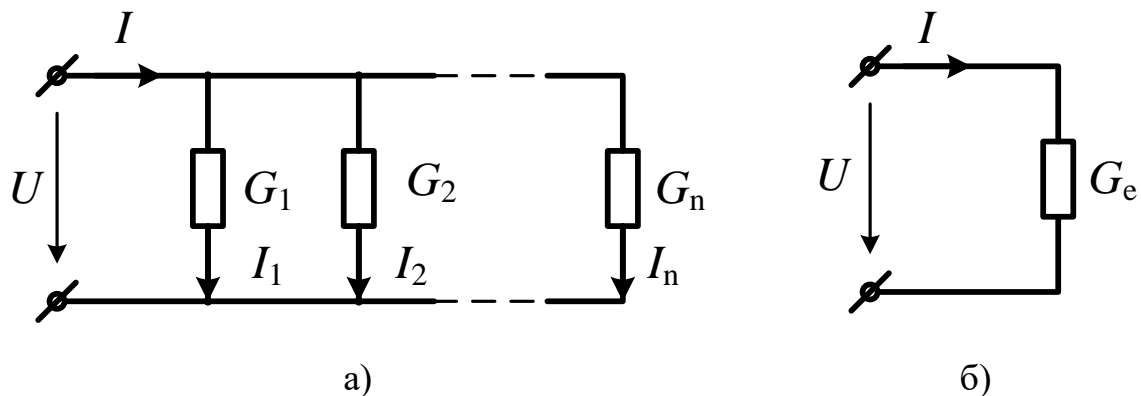


Рис. 1.29

$G_1, G_2, \dots, G_n$  - провідності віток.

Для рис. 1.29,а:  $I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$ ;

$$I_1 = G_1 \cdot U;$$

$$I_2 = G_2 \cdot U;$$

$$I_n = G_n \cdot U;$$

$$I = (G_1 + G_2 + \dots + G_n) \cdot U. \quad (1.40)$$

Для рис. 1.29,б:  $I = G_e \cdot U$  ; (1.41)

Порівнюючи (1.40) і (1.41) і враховуючи умови еквівалентності, маємо (1.42):

$$G_e = \sum_{k=1}^n G_k . \quad (1.42)$$

Еквівалентний опір паралельного з'єднання визначається співвідношенням (1.43):

$$R_e = \frac{1}{G_e} . \quad (1.43)$$

Якщо маємо паралельне з'єднання двох віток (рис. 1.30), то можна скористатися відомим співвідношенням для визначення еквівалентного опору цього з'єднання:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} .$$

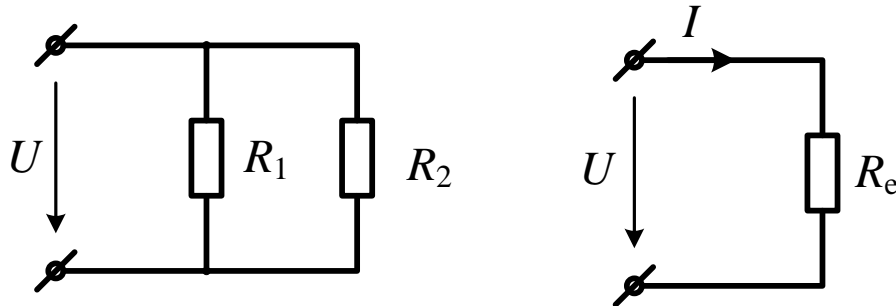


Рис. 1.30

### 1.2.6.1.3. З'єднання трикутником і зіркою. Перетворення трикутника і зірки опорів.

З'єднання опорів трикутником і зіркою зображено на рис. 1.30,а,б. Перетворення трикутника в еквівалентну зірку приводить до спрощення всієї схеми, бо зменшується кількість контурів схеми і відповідно при

знаходженні струмів в новій схемі необхідно буде скласти меншу кількість рівнянь.

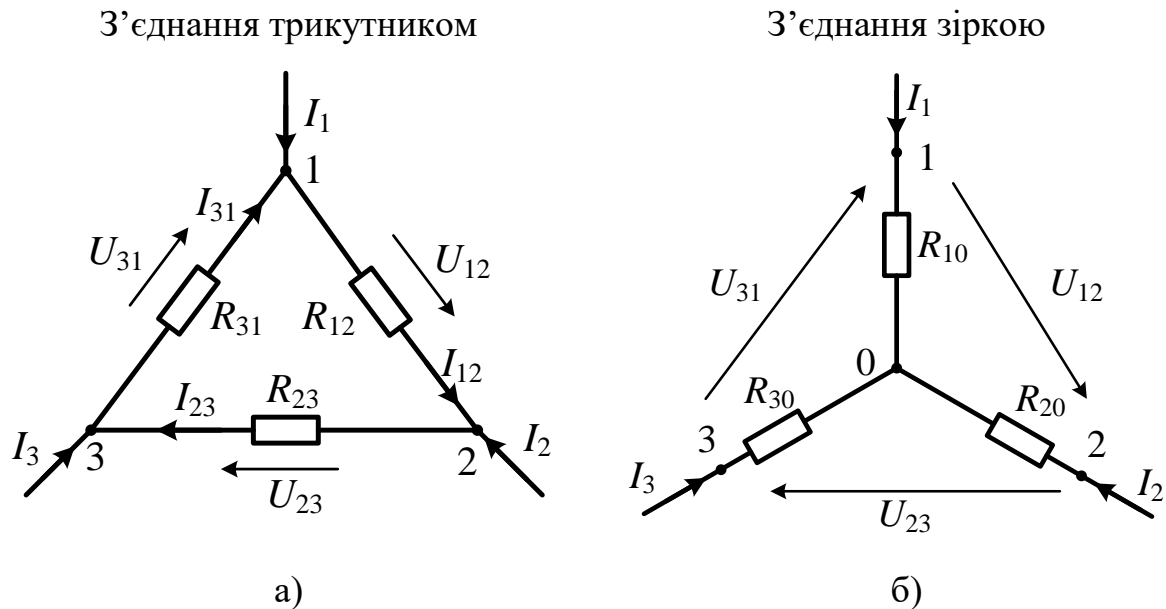


Рис. 1.31

Перетворення зірки в трикутник не зменшує кількості контурів в новій схемі, але може дати можливість подальшого спрощення схеми з використанням формул паралельного з'єднання і тому теж використовується при еквівалентних перетвореннях.

Схеми з'єднань трикутника і зірки будуть еквівалентні, якщо при однакових струмах  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  на вході трикутника і зірки будуть однакові напруги  $U_{12}$ ,  $U_{23}$ ,  $U_{31}$ . Це матиме місце, якщо опори між парами вузлів 1-2, 2-3, 3-1, в трикутнику і в зірці будуть однакові. Тоді можна буде записати такі співвідношення:

Пари вузлів	з'єднання “трикутник”	з'єднання “зірка”	
1–2	$\frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} =$	$R_{10} + R_{20}$	} (1.44)
2–3	$\frac{R_{23}(R_{12} + R_{31})}{R_{23} + R_{12} + R_{31}} =$	$R_{20} + R_{30}$	
3–1	$\frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{31} + R_{12} + R_{23}} =$	$R_{30} + R_{10}$	

Не залежно від того, що перетворюється (трикутник опорів в зірку чи навпаки), необхідно розв'язати систему (1.44). Якщо перетворюється трикутник в зірку, то відомими необхідно вважати опори трикутника, а знайти необхідно опори зірки. Тоді розв'язавши систему рівнянь відносно опорів зірки отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} R_{10} &= \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_{20} &= \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{23} + R_{12} + R_{31}} \\ R_{30} &= \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{31} + R_{12} + R_{23}} \end{aligned} \right\} (1.45)$$

Якщо опори віток трикутника однакові, то опори віток еквівалентної зірки теж будуть однакові.

$$R_{\text{зірки}} = \frac{1}{3} R_{\text{трикутника}}; \quad R_{\text{трикутника}} = 3 \cdot R_{\text{зірки}}.$$

Якщо виконується перетворення зірки в трикутник, то відомими є опори  $R_{10}$ ,  $R_{20}$ ,  $R_{30}$ . Тоді для опорів трикутника маємо:

$$\left. \begin{aligned} R_{12} &= R_{10} + R_{20} + \frac{R_{10}R_{20}}{R_{30}} \\ R_{23} &= R_{20} + R_{30} + \frac{R_{20}R_{30}}{R_{10}} \\ R_{31} &= R_{30} + R_{10} + \frac{R_{30}R_{10}}{R_{20}} \end{aligned} \right\}. \quad (1.46)$$

Якщо відбувалось перетворення трикутника в зірку і виконаний розрахунок нової схеми з зіркою, тобто знайдені струми і напруги в новій схемі, а необхідно повернутись до вихідної схеми з трикутником, можна рекомендувати наступне: знаючи струми  $I_1, I_2, I_3$  в схемі із зіркою розрахуємо напруги  $U_{12}, U_{23}, U_{31}$  для цієї схеми. Для прийнятих на рис. 1.30,б додатних напрямків відповідно матимемо:

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= I_1 R_{10} - I_2 R_{20} \\ U_{23} &= I_2 R_{20} - I_3 R_{30} \\ U_{31} &= I_3 R_{30} - I_1 R_{10} \end{aligned} \right\}. \quad (1.47)$$

Визначивши напруги  $U_{12}, U_{23}, U_{31}$  для схеми із зіркою і, приймаючи до уваги, що ці ж напруги в трикутнику повинні мати такі ж значення, далі легко знаходимо струми  $I_{12}, I_{23}, I_{31}$  в схемі трикутника:

$$I_{12} = \frac{U_{12}}{R_{12}}, \quad I_{23} = \frac{U_{23}}{R_{23}}, \quad I_{31} = \frac{U_{31}}{R_{31}}.$$

Якщо ж виконувалось перетворення зірки в трикутник і струми в вітках трикутника визначені, то струми  $I_1, I_2, I_3$  знаходимо із рівнянь для вузлів 1,2,3:

$$I_1 = I_{12} - I_{31}, \quad I_2 = I_{23} - I_{12}, \quad I_3 = I_{31} - I_{23}.$$

## 1.2.6.2. Перетворення активних ділянок кола.

### 1.2.6.2.1. Послідовне з'єднання активних ділянок.

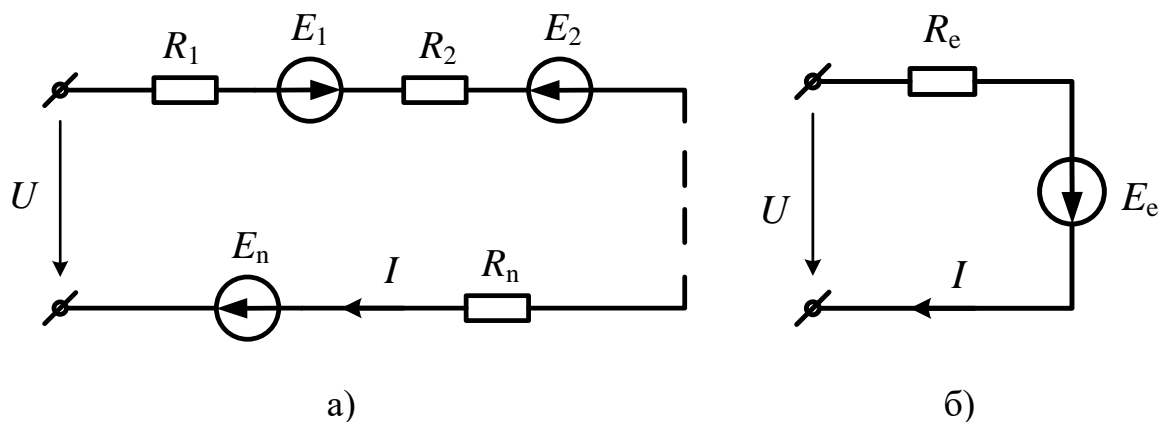


Рис. 1.32

Для рис. 1.32,а маємо:

$$U = -E_1 + E_2 - \dots - E_n + I(R_1 + R_2 + \dots + R_n). \quad (1.48)$$

Для рис. 1.31,б:

$$U = -E_e + IR_e. \quad (1.49)$$

Порівнюючи рівняння (1.48) та (1.49) і виходячи з умов еквівалентності схем рис. 1.32,а і 1.32,б маємо:

$$E_e = +E_1 - E_2 + \dots + E_n, \quad E_e = \sum_{k=1}^n E_k, \quad (1.50)$$

$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n, \quad R_e = \sum_{k=1}^n R_k.$$

Вираз (1.50) – сума ЕРС – це алгебраїчна сума. ЕРС  $E_k$  враховується із знаком «+», якщо напрямок дії ЕРС  $E_k$  співпадає з прийнятим напрямком ЕРС  $E_e$ .

### 1.2.6.2.2. Паралельне з'єднання віток з джерелами струму.

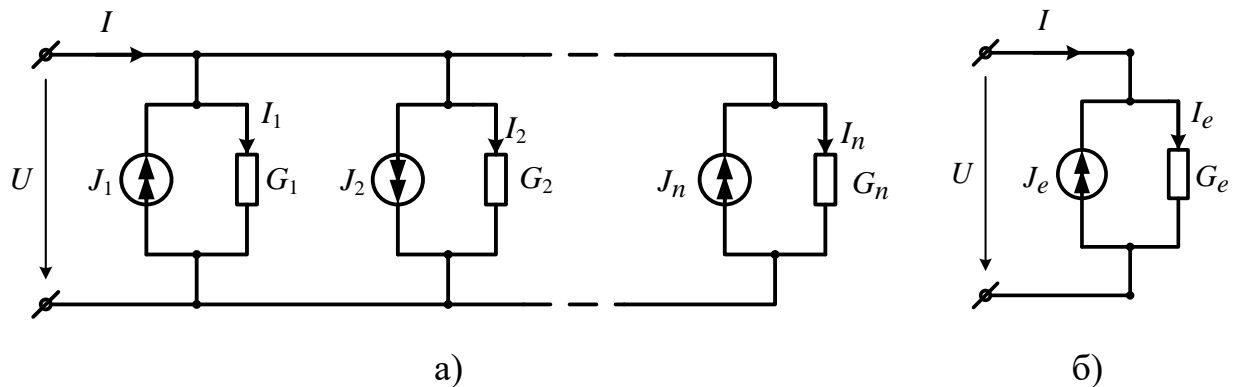


Рис. 1.33

Для рис.: 1.33,а

$$I = -J_1 + J_2 - \dots - J_n + U(G_1 + G_2 + \dots + G_n). \quad (1.51)$$

Для рис. 1.33,б

$$I = -J_e + UG_e. \quad (1.52)$$

Порівнюючи рівняння (1.51) і (1.52) і враховуючи умови еквівалентності схем а і б відповідно матимемо:

$$G_e = G_1 + G_2 + \dots + G_n, \quad G_e = \sum_{k=1}^n G_k. \quad (1.53)$$

$$J_e = J_1 - J_2 + \dots + J_n, \quad J_e = \sum_{k=1}^n J_k. \quad (1.54)$$

В правій частині рівняння (1.54) сума  $J_k$  це алгебраїчна сума. Струм  $J_k$  входить у вираз  $J_e$  зі знаком «+», якщо напрямки струмів  $J_k$  і  $J_e$  однакові.

### 1.2.6.2.3. Паралельне з'єднання віток з джерелами ЕРС.

Нехай маємо схему рис. 1.34, де кілька віток з'єднані паралельно, причому в деяких з них є джерела ЕРС.

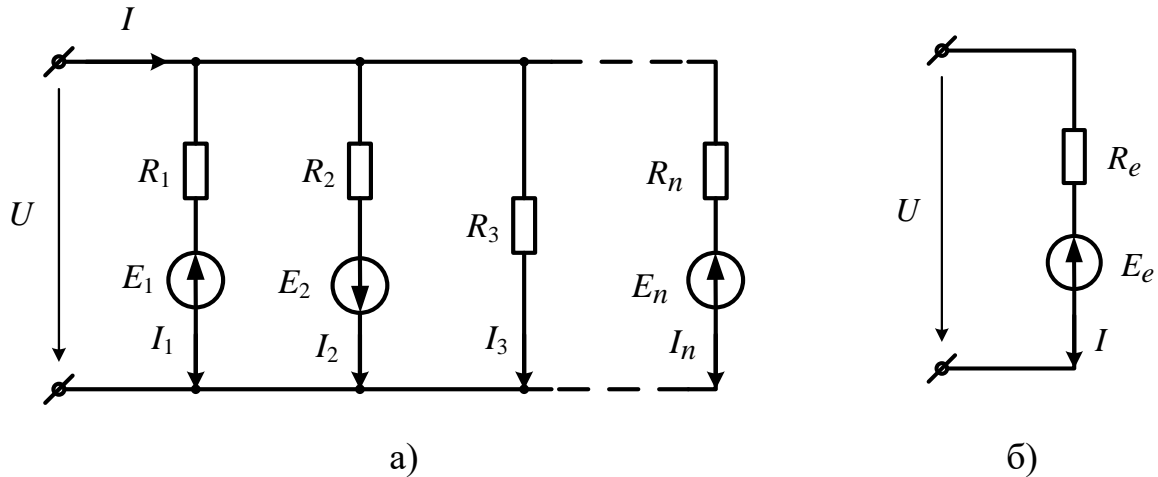


Рис. 1.34

Для рис. 1.34,а за першим законом Кірхгофа

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n; \quad (1.55)$$

За законом Ома:

$$I_1 = UG_1 - E_1G_1, \quad I_2 = UG_2 + E_2G_2, \quad I_3 = UG_3, \quad I_n = UG_n - E_nG_n.$$

Підставимо ці вирази в рівняння (1.55)

$$I = U(G_1 + G_2 + \dots + G_n) - E_1G_1 + E_2G_2 - \dots - E_nG_n. \quad (1.56)$$

Для схеми рис. 1.31,б:

$$I = UG_e - E_eG_e. \quad (1.57)$$

Із рівнянь (1.56) і (1.57) умови еквівалентності схем рис. 1.34,а і рис. 1.34,б будуть виконуватись, коли:

$$G_e = G_1 + G_2 + \dots + G_n, \quad G_e = \sum_{k=1}^n G_k. \quad (1.58)$$

$$E_e G_e = E_1 G_1 - E_2 G_2 + \dots + E_n G_n. \quad (1.59)$$

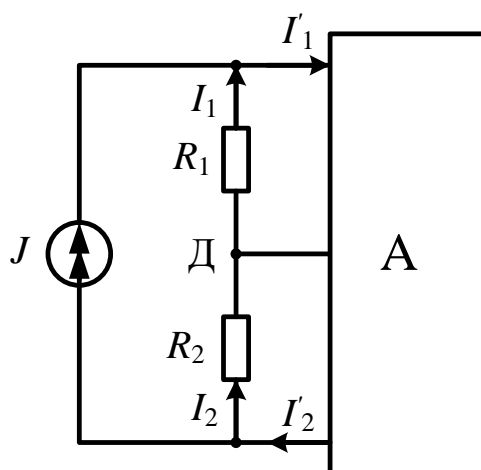
$$E_e = \frac{\sum_{k=1}^n E_k G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}. \quad (1.60)$$

В чисельнику (1.60) добуток  $E_k G_k$  враховується із знаком «+», якщо напрямок ЕРС  $E_k$  збігається з напрямком ЕРС  $E_e$ . В знаменник (1.60) входить сума провідностей всіх віток схеми і навіть тих, де ЕРС відсутні.

Якщо маємо паралельне з'єднання віток із джерелами струму і джерелами ЕРС, то бажано спочатку джерела ЕРС замінити на джерела струму (див. 1.4). Після цього матимемо вітки з джерелами струму, заміна яких на еквівалентне джерело струму розглянуто раніше.

### 1.2.6.3. Еквівалентні перетворення джерела струму.

Нехай маємо схему з джерелом струму (рис. 1.35).



$$I_1 = I_1' - J,$$

$$I_2 = I_2' - J.$$

Рис. 1.35

Включимо у вітку з джерелом струму таке саме джерело  $J$ , отримаємо рис. 1.36.

В схемі рис. 1.36 струм на відріжку ДВ  $I = 0$  ( $I = J - J = 0$ ). Таким чином схема рис. 1.36 еквівалентна схемі рис. 1.35. Джерела струму  $J$  в схемі рис. 1.35 перетворимо на джерела ЕРС отримаємо схему рис. 1.36, в якій  $E_1 = JR_1$ ,  $E_2 = JR_2$ .

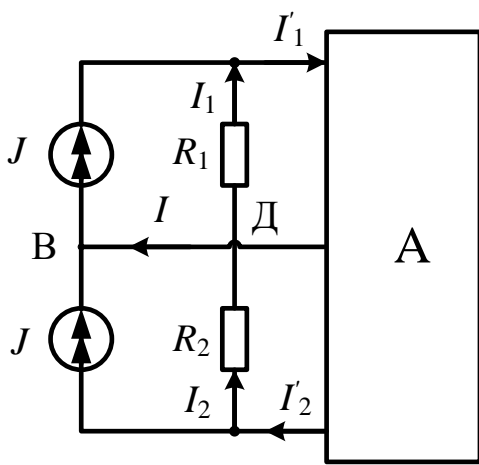


Рис. 1.36

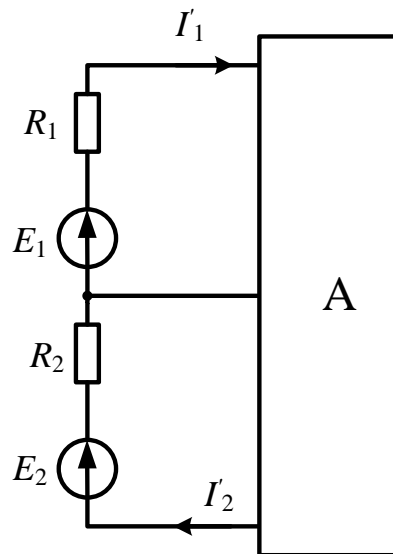


Рис. 1.37

Отримана схема рис. 1.36 для аналізу простіша від рис. 1.35. Струми в опорах  $R_1$ ,  $R_2$  на рис. 1.37 відрізняються від струмів в цих опорах на рис. 1.35, але в решті частини схеми нічого не зміниться.

#### 1.2.6.4. Перенесення джерела ЕРС за вузол.

Включимо в кожен із віток (1-0), (2-0), (3-0) (рис. 1.38,а) три однакові ЕРС  $E$ , направлені від вузла 0, отримаємо схему рис. 1.38,б.

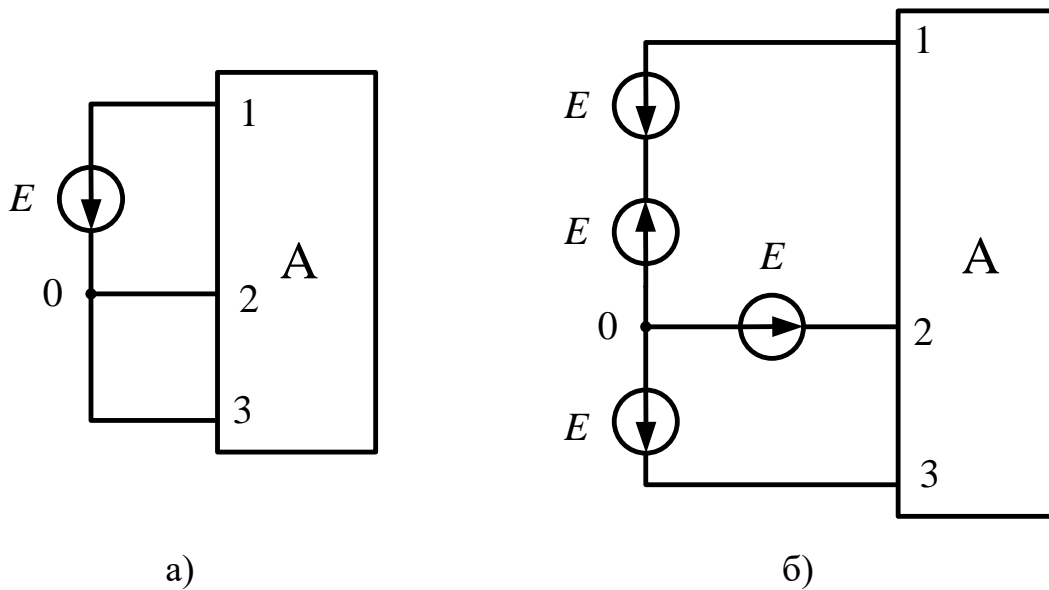


Рис. 1.38

Для рис. 1.38,а:  $U_{12} = -E$ ,  $U_{23} = 0$ ,  $U_{13} = -E$ .

Для рис. 1.38,б:  $U_{12} = -E + E - E = -E$ ,  $U_{23} = -E + E = 0$ ,

$$U_{13} = -E + E - E = -E$$

Виходячи з того, що різниці потенціалів в схемах а) і б) залишились незмінними, режим роботи схем а) і б) за вузлами 1, 2, 3 не змінився.

Приймаючи до уваги, що в схемі рис. 1.38,б в вітці (1-0) діють однакові, протилежно орієнтовані ЕРС  $E$  і дія їх по відношенню точок 1, 0 скомпенсована, можемо виключити ці ЕРС з вітки (1-0), тоді отримаємо рис. 1.39.

Схема рис. 1.39 по відношенню до інших частин схеми еквівалентна схемі рис. 1.38,а, але в схемі рис. 1.38,а ЕРС знаходиться в вітці (1-0) і орієнтована до вузла 0, в схемі рис. 1.39 в вітці (1-0) ЕРС відсутня, проте з'явилися такі ж ЕРС у вітках, які відходять від вузла 0.

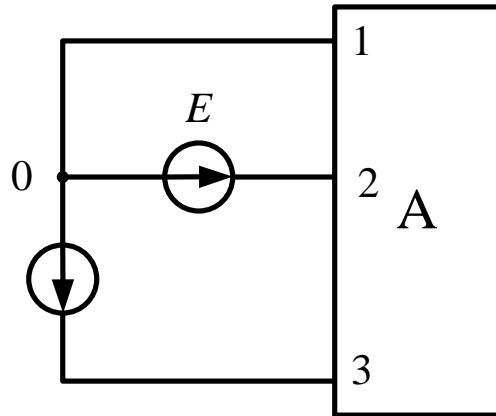


Рис. 1.39

Вказану операцію перенесення ЕРС можна використовувати, якщо в схемі є вітки, в яких знаходяться тільки джерела ЕРС. Переставляючи ЕРС із цієї вітки у вітки, які відходять від місця з'єднання цієї ЕРС з іншими вітками, можна потім взагалі виключити вітку, де стояла ЕРС, з розгляду. У результаті такого перетворення кількість вузлів зменшується.

### 1.2.7. Принцип і метод накладання дії джерел енергії.

Принцип. В лінійному електричному колі реакція на дію всіх джерел енергії дорівнює сумі реакцій від дії кожного джерела окремо. Під реакцією будемо розуміти струм чи напругу вітки.

Лінійне коло – це коло, параметри (опори) якого не залежать від величини струму.

Принцип накладання називається ще принципом незалежності дії джерел енергії. Кожне джерело діє в колі так, немов би воно там одне, а інші джерела виключені. Якщо коло складається з реальних джерел, які характеризуються величиною ЕРС та внутрішнім опором (рис. 1.40,а) чи струму та внутрішньою провідністю (рис. 1.40,в), то при виключенні

джерела ЕРС ділянка з  $E$  закорочується, залишається тільки  $R_0$  (рис. 1.40,в). Якщо виключається джерело струму, то вітка з  $J$  розривається, залишається тільки внутрішня провідність  $G_0$  (рис. 1.40,г).

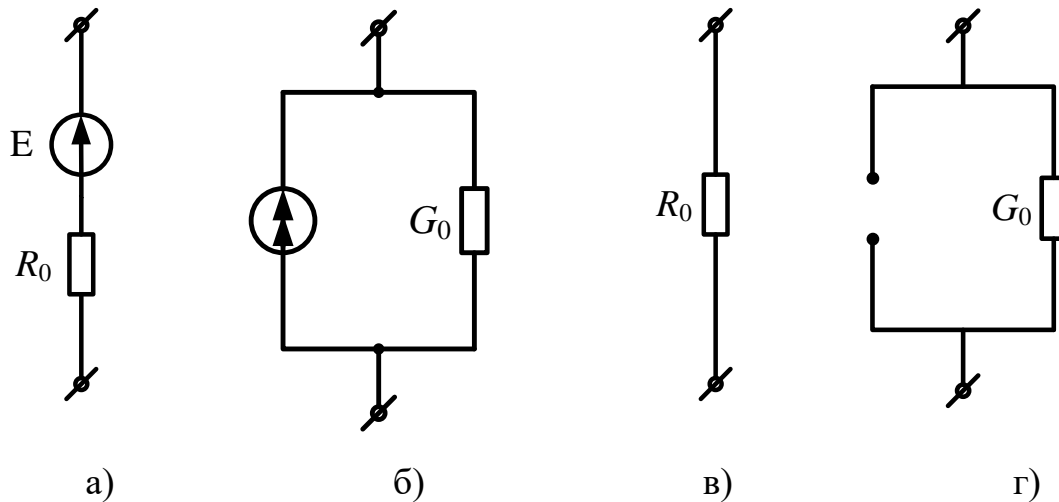


Рис. 1.40

Розрахунковий метод, який базується на використанні принципу накладання, отримав назву методу накладання дії джерел енергії.

### **Послідовність розрахунку кола методом накладання дії джерел енергії.**

1. Виключаємо всі джерела із схеми за винятком першого джерела. Якщо джерела енергії мали внутрішні опори, то їх слід залишити в тих вітках, в яких стояли джерела. Вказуємо додатні (дійсні) напрямки струмів віток. Коли в колі діє тільки одне джерело, то в схемі в більшості випадків можна вказати дійсні напрямки струмів віток і їх, як правило, вказують в розрахунках кожного часткового режиму (від дії окремого джерела). Якщо ж додатні напрямки вибрані довільно, то розрахункові формули потрібно привести у відповідність з дійсними напрямками струмів віток.

2. Залишаємо в колі наступне джерело енергії, перше і інші виключаємо, розраховуємо другий частковий режим від дії другого джерела енергії. Вказуємо напрямки струмів другого часткового режиму у всіх вітках схеми.

При розрахунку струмів часткового режиму, мова йде тільки про наявність в схемі одного джерела енергії, такий частковий режим може бути розрахований з використанням закону Ома. Використовувати для розрахунку часткового режиму МКС чи метод вузлових потенціалів немає сенсу, бо метод накладання дії джерел енергії якраз і передбачає переведення задачі по розрахунку складного кола з кількома джерелами до розрахунку кількох простих задач з одним джерелом енергії.

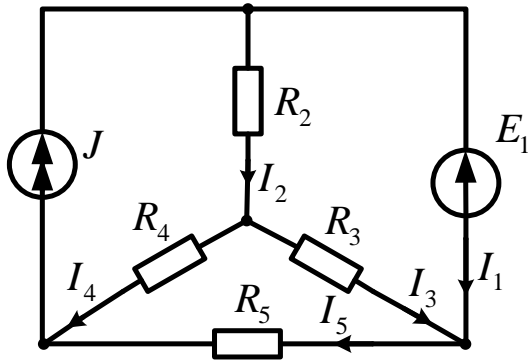
3. Виконуємо розрахунки інших часткових режимів від дії інших джерел енергії, як і в попередніх двох етапах.

4. На останньому етапі виконуємо накладання дії джерел енергії. Для цього вибираємо напрямки результуючих струмів віток і порівнюємо вибраний напрямок для результуючого струму з напрямками часткових струмів даної вітки. Якщо напрямок часткового струму співпадає з напрямком результуючого струму, то частковий струм враховується у виразі для результуючого струму із знаком «+». Якщо ж напрямок часткового струму протилежний напрямку результуючого струму, то частковий струм береться зі знаком «-». Таким чином результуючі струми віток знаходять як алгебраїчну суму часткових струмів від дії кожного із джерел.

Як видно із приведеного, якщо в схемі діють 4 і більше джерел енергії, то необхідно розглянути відповідно не менше чотирьох режимів. Це робить розв'язання задачі методом накладання громіздким. Тому даний метод бажано використовувати, якщо в схемі діє обмежена кількість джерел енергії (не більше чотирьох). Якщо в схемі діє більше чотирьох

джерел енергії, то ефективніше буде використовувати метод контурних струмів чи вузлових потенціалів.

**Приклад.** Обчислити струми у колі (рис. 1.41) методом накладання. Джерела вважати ідеалізованими.



$$E_1 = 160 \text{ В}, \quad J = 7,5 \text{ А},$$

$$R_2 = 30 \text{ Ом}, \quad R_3 = 60 \text{ Ом},$$

$$R_4 = 10 \text{ Ом}, \quad R_5 = 20 \text{ Ом}.$$

Рис. 1.41

**Розв'язання.**

1. У заданому складному колі струми спричинюються двома джерелами - напруги  $E_1$  і струму  $J$ . Згідно з методом накладання, схему цього кола розбиваємо на 2 прості підсхеми: в одній діє тільки  $J$ , у другій - тільки  $E_1$  (рис. 1.42,а,б). Складаючи підсхеми беремо до уваги, що у ідеалізованого джерела напруги внутрішній опір  $R_0 = 0$  і замінюємо його на відрізок провідника; у ідеалізованого джерела струму  $R_0 = \infty$  і його вимикаємо.

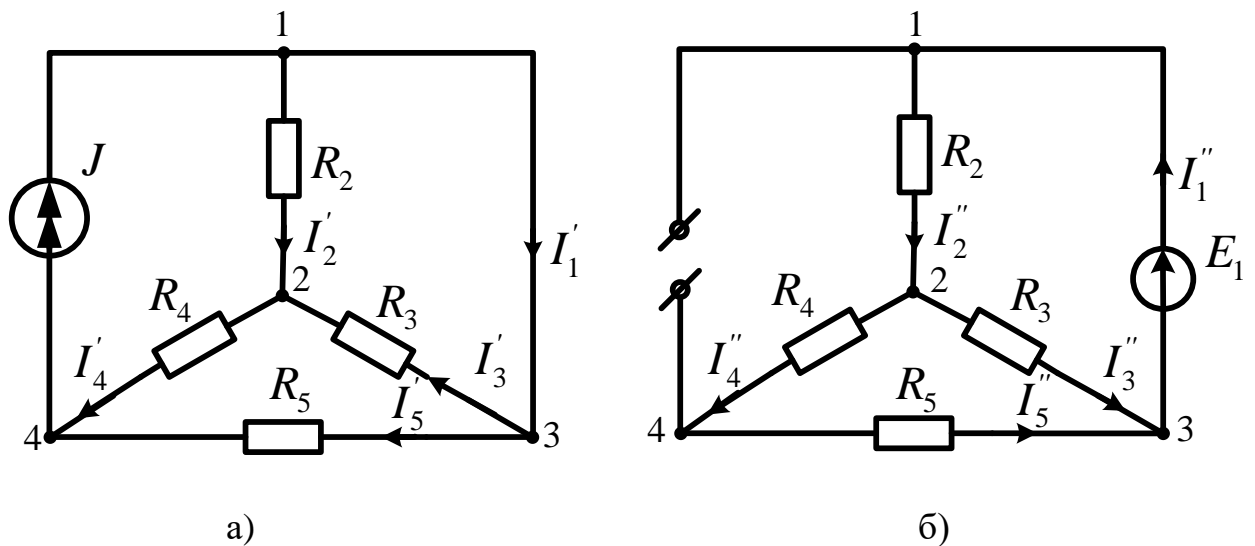


Рис. 1.42

2. Обчислюємо часткові струми від дії  $J$  (рис. 1.42,а). Для цього визначаємо еквівалентний опір кола відносно затискачів 1, 4 джерела  $J$ , маючи на увазі, що між точками 1 і 3 опір відсутній, і їх можна з'єднати в один вузол (рис. 1.43,а,б).

$$R'_{\text{ЕК}} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + R_4 = \frac{30 \cdot 60}{30 + 60} + 10 = 30 \text{ Ом.}$$

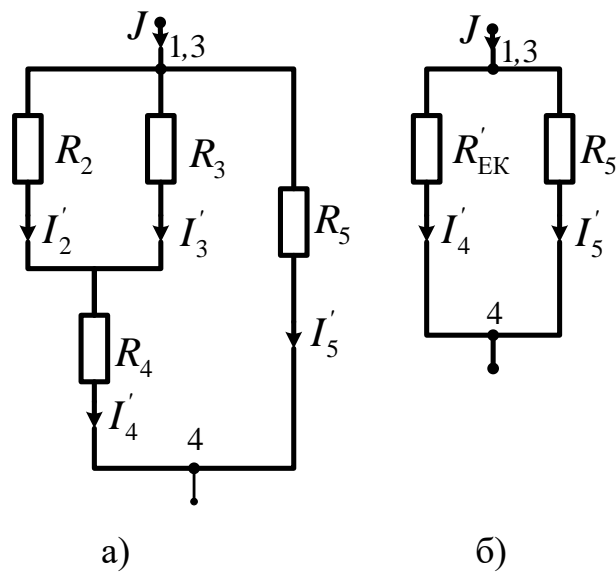


Рис. 1.43

За формулами "чужого опору", користуючись рис. 1.43,а розраховуємо:

$$I'_4 = J \frac{R_5}{R'_{\text{ЕК}} + R_5} = \frac{7,5 \cdot 20}{50} = 3 \text{ А}, \quad I'_5 = J \frac{R'_{\text{ЕК}}}{R'_{\text{ЕК}} + R_5} = \frac{7,5 \cdot 30}{50} = 4,5 \text{ А};$$

$$I'_2 = I'_4 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{3 \cdot 60}{90} = 2 \text{ А}, \quad I'_3 = I'_4 \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{3 \cdot 30}{90} = 1 \text{ А}.$$

За першим законом Кірхгофа (див. рис. 1.42,а):

$$I'_1 = J - I'_2 = 7,5 - 2 = 5,5 \text{ А}.$$

Відтак, для першої підсхеми маємо:

$$I'_1 = 5,5 \text{ А}; \quad I'_2 = 2 \text{ А}; \quad I'_3 = 1 \text{ А}; \quad I'_4 = 3 \text{ А}; \quad I'_5 = 4,5 \text{ А}.$$

3. Обчислюємо часткові струми від дії  $E_1$  (див. рис. 1.428,б).

Еквівалентний опір кола відносно затискачів 1,3 джерела  $E_1$

$$R''_{\text{ЕК}} = \frac{(R_4 + R_5)R_3}{R_4 + R_5 + R_3} + R_2 = \frac{30 \cdot 60}{30 + 60} + 30 = 50 \text{ Ом},$$

$$I''_1 = I''_2 = \frac{E_1}{R''_{\text{ЕК}}} = \frac{150}{50} = 3 \text{ А}.$$

За формулами "чужого опору":

$$I''_4 = I''_5 = I''_2 \frac{R_3}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{3 \cdot 60}{90} = 2 \text{ А};$$

$$I''_3 = I''_2 \frac{R_4 + R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{3 \cdot 30}{90} = 1 \text{ А}.$$

Для другої підсхеми маємо:

$$I''_1 = 3 \text{ А}, \quad I''_2 = 3 \text{ А}, \quad I''_3 = 1 \text{ А}, \quad I''_4 = 2 \text{ А}, \quad I''_5 = 2 \text{ А}.$$

4. Визначаємо дійсні струми від одночасної дії  $E_1$  і  $J$ .

Довільно вибираємо додатний напрямок струму в кожній вітці заданого складного кола (див. рис. 1.41) і обчислюємо його як суму часткових струмів з урахуванням їх напрямку через вітку, що розглядається:

$$I_1 = I'_1 - I''_1 = 5,5 - 3 = 2,5 \text{ А}, \quad I_2 = I'_2 - I''_2 = 2 + 3 = 5 \text{ А},$$

$$I_3 = -I'_3 + I''_3 = -1 + 1 = 0 \text{ А}, \quad I_4 = I'_4 + I''_4 = 3 + 2 = 5 \text{ А},$$

$$I_5 = I'_5 - I''_5 = 4,5 - 2 = 2,5 \text{ А}.$$

### 1.2.8. Вхідні і взаємні провідності віток, їх розрахунки.

Виходячи із методу накладання дії джерел енергії, струм будь-якої вітки можна розглядати як алгебраїчну суму складових від дії кожної із ЕРС кола.

$$I_k = E_1 G_{k1} + E_2 G_{k2} + \dots + E_k G_{kk} + \dots + E_n G_{kn}; \quad (1.61)$$

$n$  – кількість джерел енергії (ЕРС);

$k$  – номер вітки, струм якої визначається;

$G_{k1}, G_{k2}, \dots, G_{kk}, \dots, G_{kn}$  – мають розмірності провідності, отримали назву провідності вітки;

$G_{kk}$  – вхідна (власна) провідність вітки;

$G_{kn}$  ( $k \neq n$ ) – взаємна провідність між  $k$ -тою і  $n$ -тою вітками.

Із (1.61) можна визначити вказані провідності:

1) Нехай всі джерела ЕРС за винятком ЕРС  $E_k$  – виключені.

$$E_k \neq 0; E_1, E_2, \dots, E_n = 0.$$

Тоді в цій вітці буде тільки частковий струм  $I_{kk}$ .

$I_{kk}$  – частковий струм у вітці « $k$ » від ЕРС цієї вітки.

$$I_{kk} = E_k \cdot G_{kk}, \text{ тоді } G_{kk} = \frac{I_{kk}}{E_k} \quad (1.62)$$

Із формули (1.62) видно, що власна провідність вітки дорівнює відношенню струму цієї вітки до ЕРС, яка знаходиться в даній вітці, при відсутності ЕРС в інших вітках.

$$\frac{E_k}{I_{kk}} = R_{\text{вх}(k)} \text{ – вхідний опір відносно } k \text{-тої ЕРС;}$$

$$G_{kk} = \frac{1}{R_{\text{вх}(k)}} \quad (1.63)$$

2) Нехай зі схеми виключені всі ЕРС за винятком  $E_n$ :

$$E_n \neq 0, E_1, E_2, \dots, E_k = 0;$$

$I_{kn}$  – частковий струм  $k$ -тої вітки від ЕРС  $n$ -тої вітки ( $E_n$ )

$$I_{kn} = E_n \cdot G_{kn}; \quad G_{kn} = \frac{I_{kn}}{E_n} \quad (1.64)$$

Із (1.64) видно, що взаємна провідність між вітками  $k$  і  $n$   $G_{kn}$  чисельно дорівнює відношення струму  $k$ -тої вітки, обумовленого дією ЕРС, що знаходиться в  $n$ -тій вітці, до величини цієї ЕРС за умови, що ЕРС в інших вітках відсутні.

У виразі (1.61) провідності  $G_{k1}, G_{k2} \dots$  це алгебраїчні величини, тобто вони можуть бути як додатні так і від'ємні. Знак  $G_{kn}$  визначається напрямком часткового струму порівняно з напрямком результуючого струму  $I_k$ .

Приклад визначення провідностей віток.

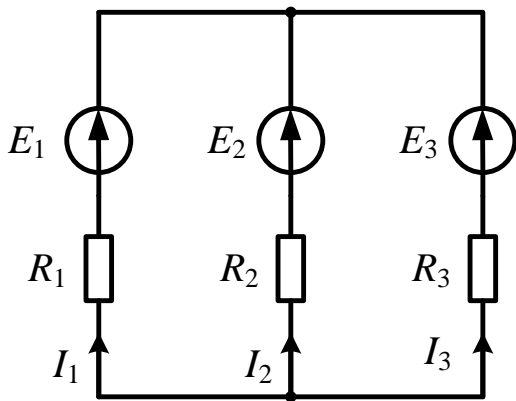


Рис. 1.44

Вилучаємо джерела  $E_2$ ,  $E_3$  і

залишаємо  $E_1$ .

Знаходимо вхідний опір

$$R_{\text{вх1}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{R_2 + R_3} = \frac{D}{R_2 + R_3}.$$

Вхідна провідність

$$G_{11} = \frac{1}{R_{\text{вх1}}}, G_{11} = \frac{R_2 + R_3}{D}.$$

Визначення провідності другої вітки при дії джерела  $E_1$

$$G_{21} = \frac{I_{21}}{E_1}.$$

Напруга на паралельній ділянці  $I_{21} R_2 = I_{11} \frac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3)}$ . Тоді

$$I_{21} = I_{11} \frac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3) R_2} = I_{11} \frac{R_3}{R_2 + R_3}; \quad (1.65)$$

Напруга на паралельній ділянці також може бути записана так

$I_{31} R_3 = I_{11} \frac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3)}$ . Звідки струм

$$I_{31} = I_{11} \frac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3) R_3} = I_{11} \frac{R_2}{R_2 + R_3}. \quad (1.66)$$

Визначення струмів двох паралельних віток за формулами (1.56) та (1.66) отримало назву «правило чужого опору».

Виходячи з рівнянь для струмів  $I_{21}$ ,  $I_{31}$ , можна записати такі співвідношення для провідностей:

$$G_{21} = G_{11} \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_3(R_2 + R_3)}{(R_2 + R_3)D} = \frac{R_3}{D}; \quad G_{31} = \frac{R_2}{D}.$$

Вилучаємо джерела  $E_1$ ,  $E_3$  і залишаємо  $E_2$ . Вхідний опір

$$R_{\text{ВХ2}} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{(R_2 R_1 + R_2 R_3 + R_1 R_3)}{R_1 + R_3} = \frac{D}{R_1 + R_3}.$$

Вхідна провідність другої вітки  $G_{22} = \frac{1}{R_{\text{ВХ2}}}$ ,  $G_{22} = \frac{R_1 + R_3}{D}$ .

Вилучаємо джерела  $E_1$ ,  $E_2$  і залишаємо  $E_3$ . Вхідна провідність

$$G_{33} = \frac{R_1 + R_2}{D}.$$

Взаємні провідності віток

$$G_{21} = G_{12} = \frac{R_3}{D}; \quad G_{13} = G_{31} = \frac{R_2}{D}; \quad G_{23} = G_{32} = \frac{R_1}{D}.$$

Після визначення провідностей віток можна визначити струми  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ . Для прийнятих додатних напрямків струмів (рис. 1.44) матимемо такі рішення:

$$I_1 = E_1 G_{11} - E_2 G_{12} - E_3 G_{13};$$

$$I_2 = -E_1 G_{21} + E_2 G_{22} - E_3 G_{23};$$

$$I_3 = -E_1 G_{31} - E_2 G_{32} + E_3 G_{33}.$$

Із отриманих рішень для власних і взаємних провідностей віток випливає, що власна провідність вітки дорівнює сумі взаємних провідностей віток, які приєднані до даного вузла

$$G_{11} = G_{21} + G_{31} \quad \text{та} \quad G_{22} = G_{12} + G_{32}.$$

### 1.2.9. Властивість взаємності і її використання.

Коли в схемі чи в електричному колі діє тільки одне джерело ЕРС і воно створює в вітці « $k$ » струм  $I_k = I$ , то якщо переставити це джерело у вітку « $k$ », в тій вітці, де стояло це джерело ЕРС буде протікати той же струм  $I$  (див. рис. 1.45).

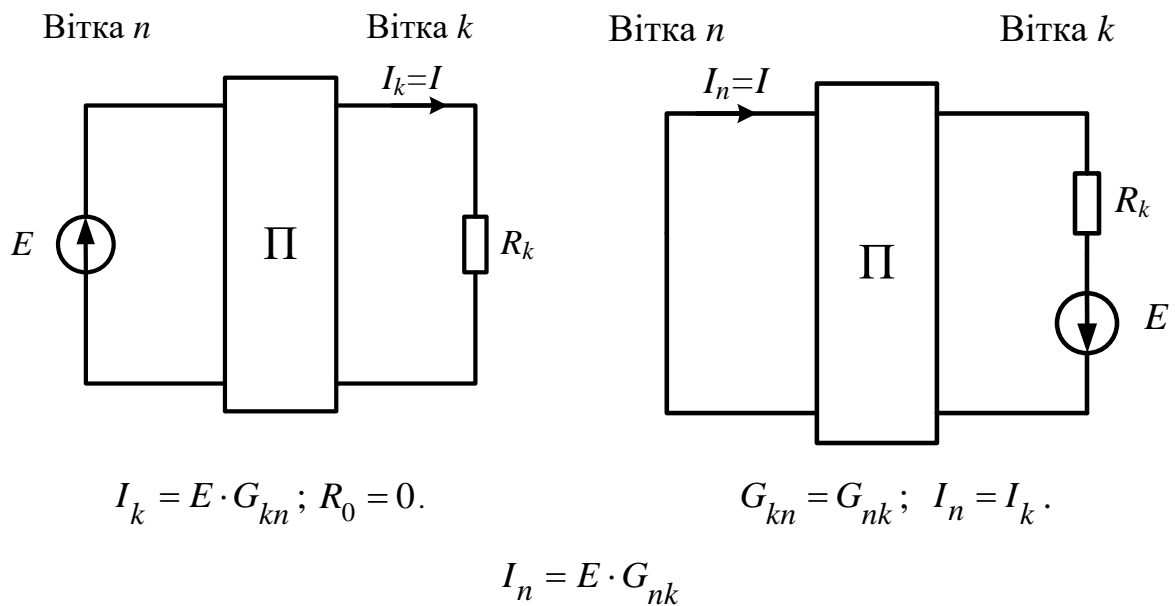


Рис. 1.45

У ході експериментального дослідження властивості взаємності необхідно:

У вітку « $n$ » включити джерело ЕРС з мінімально можливим внутрішнім опором ( $R_0 = 0$ ), в вітку « $k$ » включити амперметр, запам'ятати показ амперметра. ЕРС переставити в вітку « $k$ », а амперметр в « $n$ ». Показ амперметра залишиться таким же. Властивість взаємності можна використовувати, коли в схемі діє одне джерело енергії. Якщо після перестановки ЕРС в одну із віток схеми розрахункова схема спрощується, то можна знайти струм в новій схемі у вітці, де раніше стояла ЕРС;

вважається, що цей струм дорівнює струмові в попередній схемі, але в тій вітці, куди переставляли ЕРС.

Цей метод використовується при умові розрахунку одного струму в схемі, при розрахунку всіх струмів він буде громіздким.

### 1.2.10. Теорема компенсації.

Теорема стверджує: опір будь-якої вітки схеми можна замінити на ЕРС, величина якої дорівнює спаду напруги на даному опорі і напрямом дії якої протилежний напрямку струму вітки.

$$U_{ab} = IR - E = 0.$$

Схема рис. 1.47 еквівалентна схемі рис. 1.46,б і відповідно рис. 1.46,а. Схема рис. 1.47 відповідає теоремі. Використовуючи теорему, можна замінити всі опори схеми на ЕРС, але величини цих ЕРС розрахункові, тобто необхідно знати струми всіх віток для даного режиму; величини цих ЕРС повинні змінитись, якщо в схемі щось зміниться.

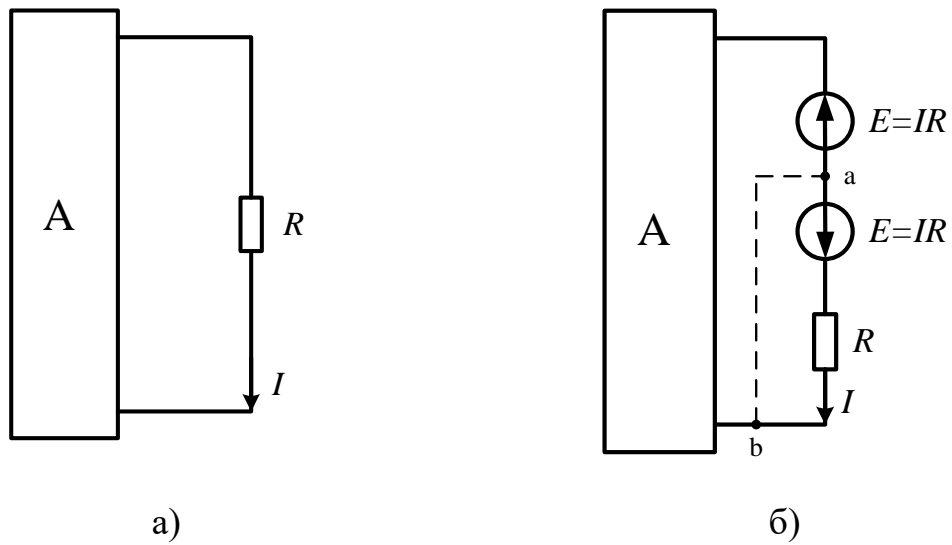


Рис. 1.46

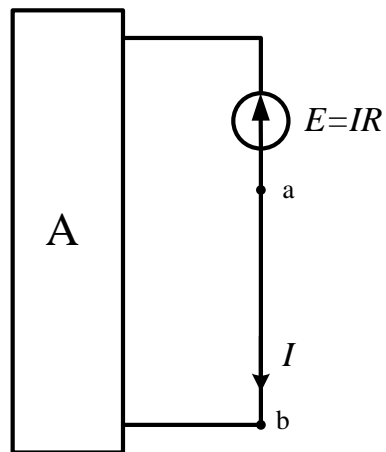


Рис. 1.47

### 1.2.11. Активні і пасивні двополюсники.

Двополюсником називають частину схеми довільної конфігурації, яка має два затискачі (два полюси) і коли досліджується струм і напруга на цих затискачах, а струми в середині схеми не досліджуються.

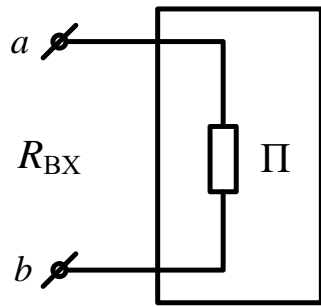


Рис.1.48

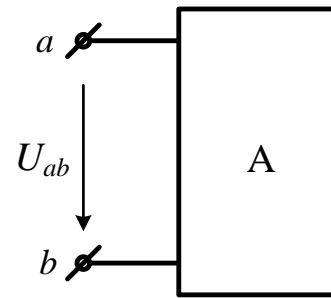


Рис. 1.49

Пасивний двополюсник (рис. 1.48) можна охарактеризувати одною величиною –  $R_{ВХ}$ , яке являє собою еквівалентний опір всієї схеми, (вхідний опір відповідно затискачів  $a, b$ ).

Активний двополюсник (рис. 1.49) характеризується двома величинами: еквівалентною ЕРС і еквівалентним вхідним опором.

### 1.2.11.1. Теорема про активний двополюсник. (теорема про еквівалентний генератор).

Теорема стверджує: струм вітки, приєднаної до якоїсь схеми не зміниться, якщо цю частину схеми замінити активним двополюсником (еквівалентним генератором), ЕРС якого дорівнює напрузі на розімкнених затискачах вказаної вітки, а внутрішній опір цього еквівалентного генератора дорівнює вхідному опору схеми відносно затискачів досліджуваної вітки.

Виділимо із схеми досліджувану вітку з опором  $R$ . Якщо в цій вітці є ЕРС, включимо її в решту частини схеми, тобто в активний двополюсник, тоді отримаємо рис. 1.50.

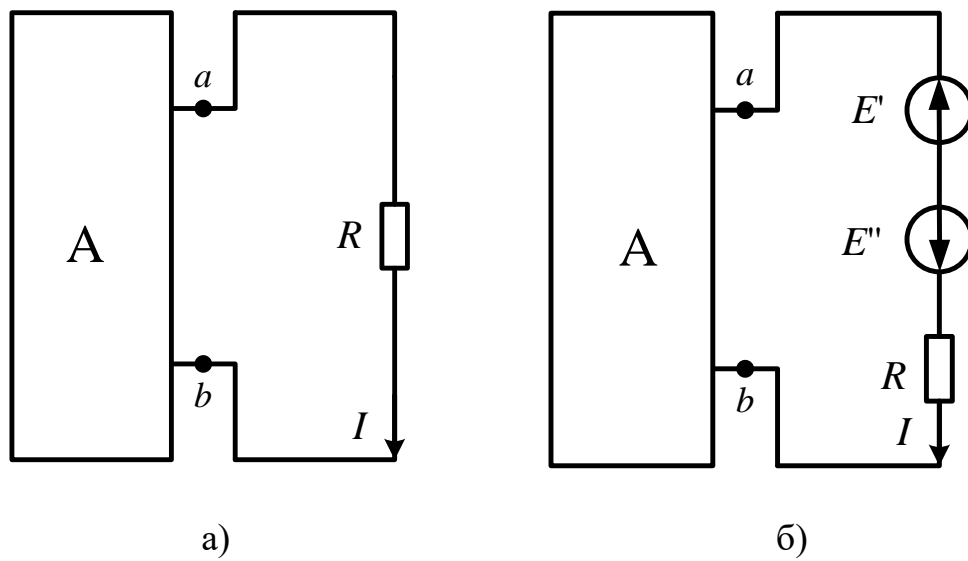


Рис. 1.50

Включимо в досліджувану вітку дві однакові та протилежно направлені ЕРС  $E'$ ,  $E''$ ; струм  $I$  при цьому не зміниться ( $E' = E''$ ). Схеми рис. 1.50,а і рис. 1.50,б будуть при цьому рівноцінними. В схемі рис. 1.50,б струм  $I$  визначимо, використовуючи метод накладання. Розглянемо два режими: перший режим, коли в схемі діють всі ЕРС активного двополюсника і ЕРС  $E'$  і другий режим, обумовлений дією тільки ЕРС  $E''$ . (рис. 1.51,а,б).

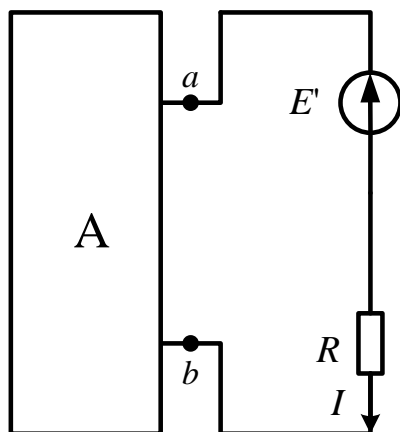


Рис. 1.51,а

+

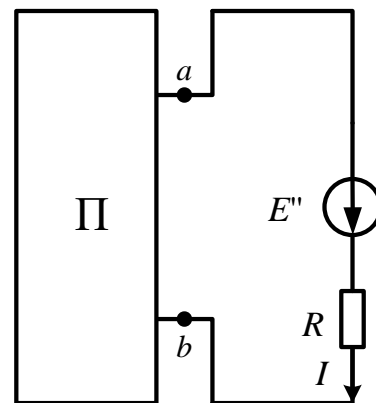


Рис. 1.51,б

Струм досліджуваної вітки в схемі рис. 1.51,а дорівнює  $I = \frac{U_{ab} - E}{R}$ .

Оскільки ЕРС  $E'$  і  $E''$  можна вибрати довільними (але однаковими), то виберемо ЕРС  $E'$  таку, щоб струм  $I' = 0$ . Це можливо, коли вітка розімкнута (рис. 1.52).

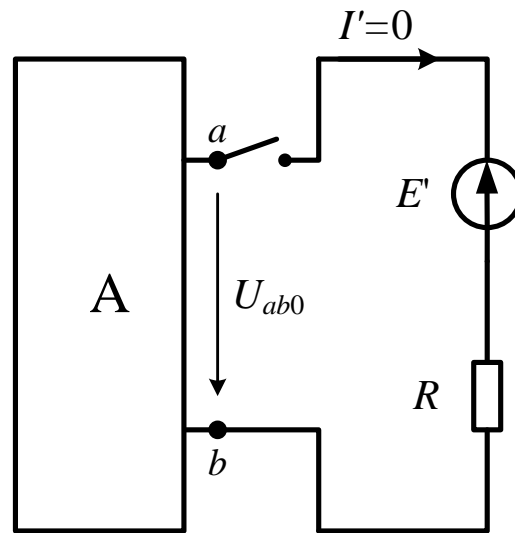


Рис. 1.52

$U_{ab0}$  - напруга неробочого ходу досліджуваної вітки;

$$E' = U_{ab0}, I' = 0.$$

Для схеми рис. 1.51,б струм  $I''$  дорівнює  $I'' = \frac{E''}{R + R_{ab}}$ ,

для схеми рис. 1.51,а струм  $I' = 0$ .

Тоді, у відповідності зі методом накладання  $I = I' + I'' = \frac{E''}{R + R_{ab}}$ ,

де  $E'' = E' = U_{ab0}$ .

Остаточно,

$$I = \frac{U_{ab0}}{R + R_{ab}}. \quad (1.67)$$

Отримане рішення для струму відповідає положенню теореми про активний двополюсник.

### 1.2.11.2. Метод еквівалентного генератора.

Метод розрахунку струму у одній із віток складної схеми, оснований на використанні теореми про еквівалентний генератор. При розрахунку струму цим методом можна виділити такі етапи:

1) Розмикаємо досліджувану вітку і розраховуємо напругу на розімкнених затискачах досліджуваної вітки (рис. 1.53).

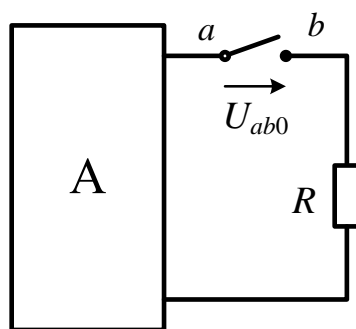


Рис. 1.53

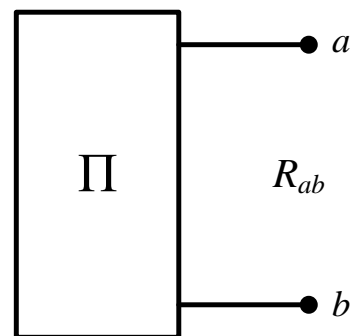


Рис. 1.54

2) Виключаємо джерела із активного двополюсника, (внутрішні опори джерел лишаємо), і розраховуємо вхідний опір двополюсника по відношенню до затискачів досліджуваної вітки. (рис. 1.54).

3) Замінюємо активний двополюсник еквівалентним генератором, ЕРС якого дорівнює напрузі  $U_{ab0}$  ( $E_e = U_{ab0}$ ) і внутрішній опір  $R_e = R_{вхab}$ . Підключаємо до цього еквівалентного генератора досліджувану вітку – отримаємо схему рис. 1.55.

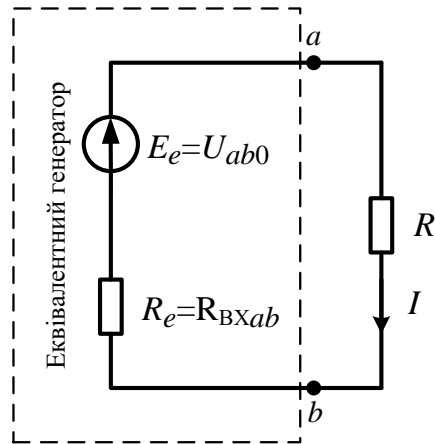


Рис. 1.55

4) Знаходимо струм  $I$  в досліджуваній вітці:

$$I = \frac{E_e}{R_e + R} = \frac{U_{ab0}}{R_{вх ab} + R}. \quad (1.68)$$

Схема рис. 1.55 і формула (1.68) відповідають схемі Тевенена.

Замінімо в схемі рис. 1.55  $E_e$  на джерело струму  $J$ . Отримаємо схему на рис. 1.56.

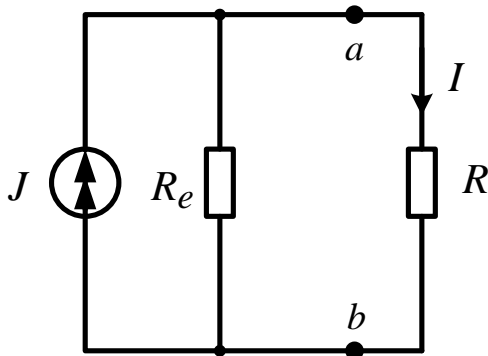


Рис. 1.56

$J = \frac{E_e}{R_e} = I_{к.з.}$  - струм короткого замикання через затискачі  $a, b$  активного двополюсника.

Схема рис. 1.56 – схема Нортонна.

$$I = I_{к.з.} \frac{R_e}{R_e + R}. \quad (1.69)$$

**Приклад.** Визначити струм через амперметр у колі, показаному на рис. 1.57, якщо  $J = 2$  А,  $E_1 = 20$  В,  $E_2 = 75$  В,  $E_3 = 120$  В,  $R_1 = 40$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $R_3 = 60$  Ом,  $R_4 = 10$  Ом.

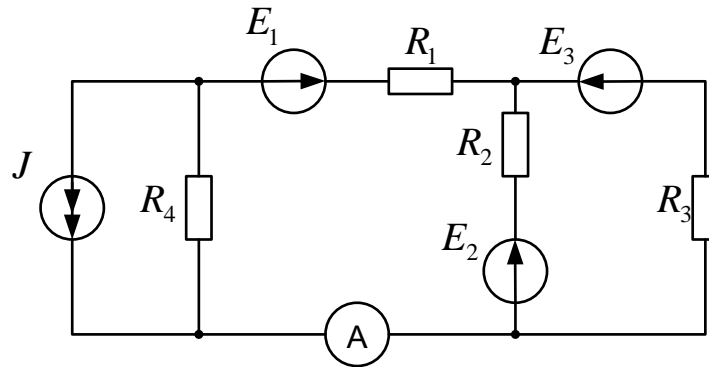


Рис. 1.57

**Розв'язання.**

1. Вимикаємо вітку з амперметром (рис. 1.58).

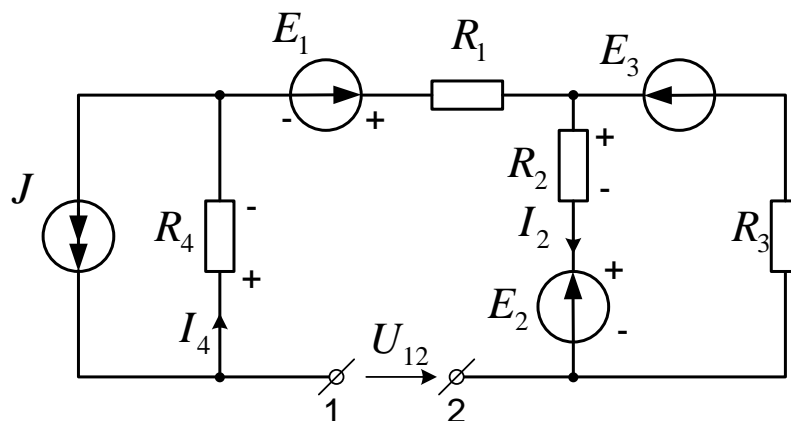


Рис. 1.58

2. Визначаємо напругу  $U_{12}$ . Для цього спочатку розраховуємо струми у схемі рис. 1.58, беручи до уваги, що в ній існують тільки два замкнених контури для протікання струмів:

$$I_4 = J = 2 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{E_3 - E_2}{R_3 + R_2} = \frac{120 - 75}{30 + 60} = 0,5 \text{ А.}$$

Позначивши на схемі полярність ЕРС джерел і напруг на опорах, обчислюємо напругу

$$U_{12} = E_2 + I_2 R_2 - E_1 + J R_4 = 75 + 30 \cdot 0,5 - 20 + 2 \cdot 10 = 90 \text{ В.}$$

3. Розраховуємо еквівалентний опір  $R_{\text{ЕК1-2}}$  схеми між затискачами 1 і 2 (рис. 1.59).

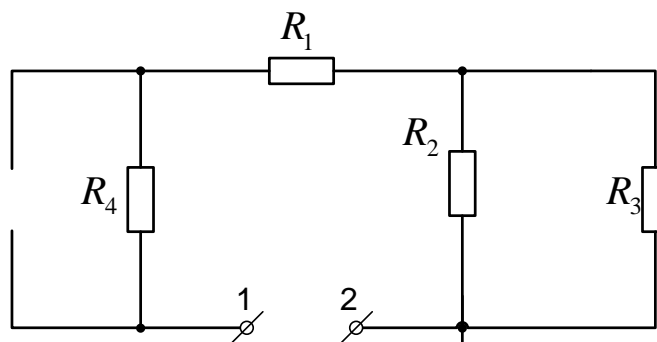


Рис. 1.59

$$R_{\text{ЕК1-2}} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + R_4 + R_1 = \frac{30 \cdot 60}{30 + 60} + 10 + 40 = 70 \text{ Ом.}$$

3. Складаємо еквівалентну схему (рис. 1.60), в якій  $E_{\text{ЕГ}} = U_{12} = 90 \text{ В}$ ,  $R_{\text{ЕГ}} = R_{\text{ЕК1-2}} = 70 \text{ Ом}$  і обчислюємо струм через амперметр (вважаємо, що  $R_A \approx 0$ ).

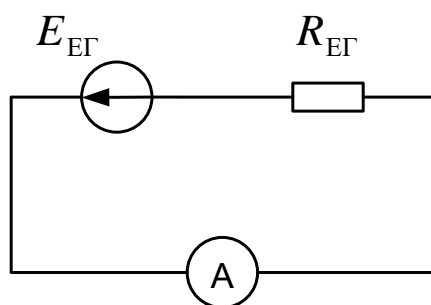


Рис. 1.60

$$I = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_{\text{ЕГ}} + R_A} = \frac{90}{70} = 1,3 \text{ А.}$$

### ***Порівняння методів розрахунку складних електричних кіл***

1. Метод законів Кірхгофа вимагає стільки рівнянь, скільки невідомих струмів. Використовується коли в колі 3 невідомих струми або для перевірки.
2. Метод контурних струмів. Найбільш поширений, оскільки вимагає стільки рівнянь, скільки у колі контурів. Рекомендується коли число головних контурів  $\leq$  (число вузлів -1).
3. Метод вузлових потенціалів. Є конкурентом до методу контурних струмів. Рекомендується коли (число вузлів -1)  $\leq$  числа головних контурів. Вимагає стільки рівнянь, скільки у схемі вузлів -1.
4. Метод накладання. Дуже простий, оскільки потребує розрахунку простих кіл, замість складного кола. Але необхідно розрахувати стільки підсхем, скільки у вихідній схемі джерел енергії.
5. Метод еквівалентного генератора. Використовується для розрахунку струму тільки в одній вітці.

#### **1.2.12. Передача енергії від активного двополюсника до пасивного.**

Нехай енергія від джерела ЕРС  $E$  через двопровідну лінію, опір двох проводів якої дорівнює  $R_{\text{л}}$ , передається до споживача з опором  $R_{\text{н}}$  (рис. 1.61).

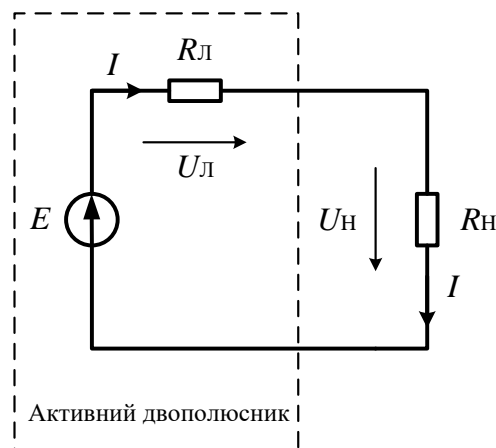


Рис. 1.61

Джерело ЕРС і  $R_{\text{Л}}$  можна розглядати, як активний двополюсник, а споживач  $R_{\text{Н}}$ , як пасивний двополюсник. Нехай  $R_{\text{Н}}$  змінюється в широких межах  $R_{\text{Н}} = 0 \div \infty$ . Дослідимо як змінюються  $I$ ,  $U_{\text{Н}}$ ,  $U_{\text{Л}}$ ,  $P_{\text{Г}}$ ,  $P_{\text{Л}}$ ,  $P_{\text{Н}}$ ,  $\eta$  – к. д. у разі зміни  $R_{\text{Н}}$ . Маємо такі рішення для вказаних величин (формули 1.70-1.76):

$$I = \frac{E}{R_{\text{Л}} + R_{\text{Н}}}, \quad (1.70)$$

$$U_{\text{Л}} = R_{\text{Л}} I, \quad (1.71)$$

$$U_{\text{Н}} = E - R_{\text{Л}} I, \quad (1.72)$$

$$P_{\text{Г}} = EI, \quad (1.73)$$

$$P_{\text{Л}} = R_{\text{Л}} I^2, \quad (1.74)$$

$$P_{\text{Н}} = P_{\text{Г}} - P_{\text{Л}} = EI - R_{\text{Л}} I^2, \quad (1.75)$$

$$\eta = \frac{P_{\text{Н}}}{P_{\text{Г}}} = \frac{EI - R_{\text{Л}} I^2}{EI} = 1 - \frac{R_{\text{Л}} I}{E} = 1 - \frac{R_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}} + R_{\text{Н}}} = \frac{R_{\text{Н}}}{R_{\text{Л}} + R_{\text{Н}}}. \quad (1.76)$$

Залежності  $P_{\text{Г}}$ ,  $P_{\text{Л}}$ ,  $U_{\text{Л}}$ ,  $P_{\text{Н}}$ ,  $U_{\text{Н}}$ ,  $\eta$  від струму в лінії зображені на рис. 1.62. При побудові цих залежностей були використані формули 1.70 - 1.76.

Особовою точкою на рис. 1.62 є точка де  $I = I_{\text{КЗ}} = I_{\text{max}}$ . При цьому  $R_{\text{Н}} = 0$  і, відповідно

$$I_{\text{КЗ}} = \frac{E}{R_{\text{Л}}}. \quad (1.77)$$

Цьому значенню струму відповідає максимальне значення потужності генератора  $P_{\text{Гmax}} = E \cdot I_{\text{КЗ}}$ .

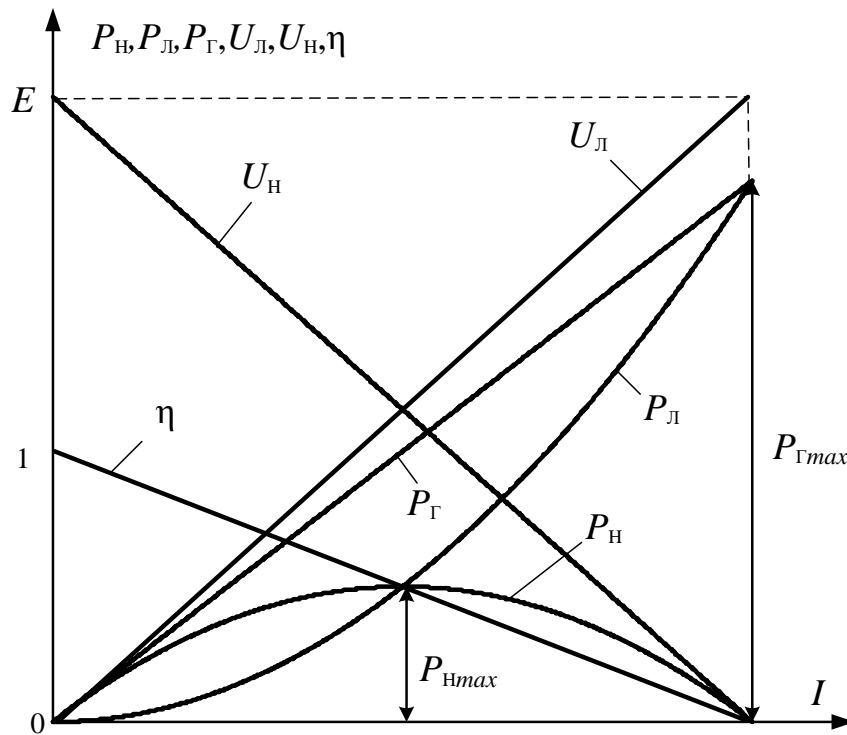


Рис. 1.62

Як видно із рис. 1.62,  $P_H$  спочатку зростає, досягає максимуму і далі зменшується до 0. Визначимо при яких умовах  $P_H$  досягає максимального значення.

$$\frac{dP_H}{dI} = E - 2R_L \cdot I = 0, \quad P_H = P_{Hmax}.$$

При максимальній потужності струм в колі

$$I = E/2 \cdot R_L. \quad (1.78)$$

Порівнюючи формулу (1.78) із формулою (1.77) для струму короткого замикання, бачимо, що при максимальній потужності навантаження струм в лінії становитиме половину струму короткого замикання.

$$I = I_{кз} / 2, \quad P_H = P_{Hmax}. \quad (1.79)$$

Із (1.79) випливає, що максимальна потужність в навантаженні буде виділятися коли  $R_{Л} = R_{Н}$ .

Визначимо умови, за яких  $P = P_{max}$  використавши для цього схему заміщення кола, складену відповідно до методу еквівалентного генератора (рис. 1.63).

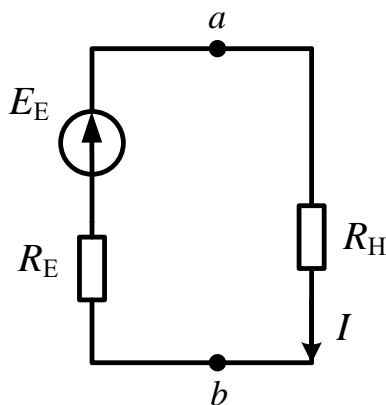


Рис. 1.63

Рівняння балансу потужностей для такої схеми має вигляд:

$$E_E \cdot I = R_E \cdot I^2 + R_H \cdot I^2,$$

звідки випливає, що

$$P = R_H \cdot I^2 = E_E \cdot I - R_E \cdot I^2.$$

З курсу математики відомо, що  $P = P_{max}$ , коли  $\frac{dP}{dI} = 0$ .

Отже  $\frac{dP}{dI} = E_E - 2R_E \cdot I$ , звідки  $I = \frac{E_E}{2R_E}$ .

З іншого боку, згідно з методом еквівалентного генератора

$$I = \frac{E_E}{R_E + R_H}.$$

Порівнявши два вирази одного струму  $I = \frac{E_E}{2R_E}$  і  $I = \frac{E_E}{R_E + R_H}$ ,

визначаємо, що умовою виділення максимальної потужності в опорі є  $R_E = R_H$  або  $R_{Л} = R_{Н}$  (такий режим роботи кола називають погодженим). За таких умов величина максимальної потужності

$$P_{max} = R_E \left( \frac{E_E}{2R_E} \right)^2 = \frac{E_E^2}{4R_E}.$$

За умови передачі максимальної потужності до навантаження ККД  $\eta$  лінії передачі буде становити 0,5 (50%). Для промислових електромереж це неприйнятне значення  $\eta$ , тому промислові електромережі працюють при режимах  $R_{\text{л}} \ll R_{\text{н}}$ .

В техніці малих струмів, де на перший план виступає умова передачі максимальної потужності до споживача, створюються такі умови, щоб  $R_{\text{л}} = R_{\text{н}}$ . Якщо мова йде про передачу фіксованої потужності до споживача ( $P_{\text{н}} = \text{const}$ ), то для зменшення втрат в лінії бажано підвищити значення робочої напруги передачі:

$$P_{\text{л}} = R_{\text{л}} I^2, \quad I = \frac{P_{\text{н}}}{U_{\text{н}}}, \quad P_{\text{л}} = R_{\text{л}} \left[ \frac{P_{\text{н}}}{U_{\text{н}}} \right]^2.$$

Якщо  $U_{\text{н}}$  – зростає, то  $P_{\text{л}}$  – зменшується.

Першу лінію електропередачі було сконструйовано в 1874 році під Петербургом російським інженером Піроцьким. По цій лінії передавалось близько 4 кВт до 1 км. Перше дослідження умов передачі було виконано російським вченим Лачиновим, який показав, що збільшуючи робочу напругу  $U$ , можна сконструювати економічну лінію передачі на будь-яку потужність (1880 р.). Цю ж тезу підтвердив Депре, який збудував лінію передачі  $l = 57$  км, при  $U = 2000$  В, потужність  $\sim 1,5$  кВт (1882 р.).

## Розділ 2. Лінійні електричні кола однофазного синусоїдного струму.

### Тема 2.1. Основні властивості кола синусоїдного струму і його розрахунок.

#### 2.1.1. Основні властивості синусоїдного струму. Часові та векторні діаграми.

Синусоїдним струмом чи напругою будемо називати струм і напругу, які змінюються за законом:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

де  $i$ ,  $u$  – миттєві значення,

$I_m$ ,  $U_m$  – амплітудні значення,

$\omega$  – кутова частота,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  – частота зміни струму чи напруги. Для промислових електромереж  $f = 50$  Гц,  $\omega = 314$  рад/с.

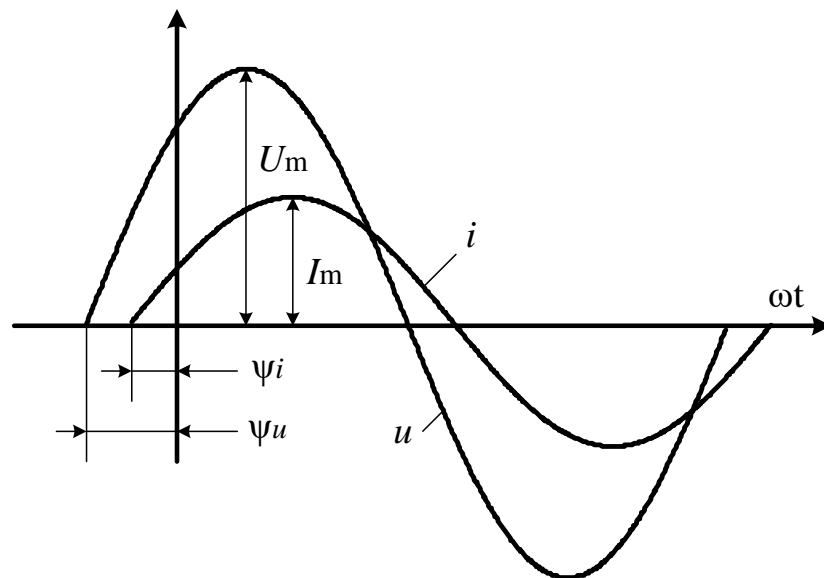


Рис. 2.1

Аргумент функції синуса, який визначається від моменту переходу функції через нуль від від'ємного до додатного значення називається фазою струму чи напруги.

При відліку фази ціле число періодів відкидають. Значення фази струму чи напруги в момент початку відліку називається початковою фазою (на рис. 2.1  $\psi_u > 0, \psi_i > 0$ ).

Різницю початкових фаз напруги і струму називають кутом зсуву фаз  $\varphi = \psi_u - \psi_i$ ;  $\psi_u > \psi_i, \varphi > 0$  – крива напруги  $u(t)$  випереджає криву струму  $i(t)$ ;  $\psi_u < \psi_i, \varphi < 0$  – крива напруги  $u(t)$  відстає від кривої струму  $i(t)$ .

Зображення кривих напруг і струмів в прямокутній системі координат називаються часовими (хвильовими) діаграмами. Вони дають уявлення про амплітуди напруг і струмів, фази цих величин.

### 2.1.2. Діюче значення періодичного змінного струму, напруги.

Діюче значення періодичного змінного струму це таке значення незмінного в часі струму  $I$ , який за час, що дорівнює періоду змінного струму виділяє в опорі  $R$  таку ж кількість тепла, що і змінний струм.

$Q_{\sim}$  – кількість тепла, яку виділяє в опорі  $R$  незмінний струм  $I$  за час  $T$

$$Q_{\sim} = R \cdot I^2 \cdot T.$$

$Q_{\sim}$  – кількість тепла, яку виділяє в опорі  $R$  змінний струм  $i$  за період  $T$

$$Q_{\sim} = \int_0^T R \cdot i^2 \cdot dt.$$

Якщо  $Q_{-} = Q_{\sim}$ , то діюче значення  $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$ . (2.1)

Формула (2.1) може бути використана для визначення діючого значення будь-якого періодичного струму.

Якщо маємо синусоїдний закон зміни струму, із (2.1) можна встановити співвідношення між діючим значенням і амплітудою синусоїдного струму

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m;$$

$$I = 0,707 I_m = I_m / \sqrt{2} \quad (2.2)$$

Аналогічно поняттю діючого значенню струму вводиться поняття про діюче значення напруги чи ЕРС, але тут мова не йде про тепловий еквівалент.

Для діючого значення синусоїдної напруги чи ЕРС можна записати співвідношення подібні (2.2):

$$U = 0,707 U_m = U_m / \sqrt{2} \quad (2.3)$$

$$E = 0,707 E_m = E_m / \sqrt{2} \quad (2.4)$$

Діючі значення напруг і струмів вимірюють приладами теплової, електромагнітної системи.

### 2.1.3. Зображення синусоїдних струмів і напруг обертовими векторами.

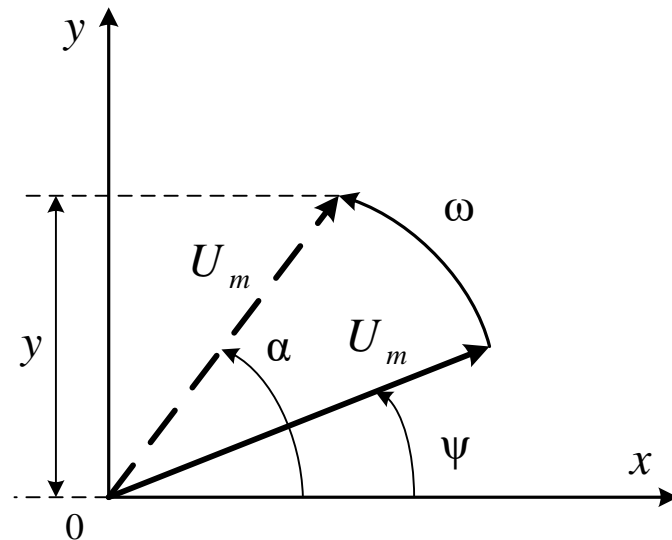


Рис. 2.2

$$y = U_m \sin \alpha, \quad \alpha = \psi + \omega t,$$

$$y = U_m \sin(\omega t + \psi) \tag{2.5}$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi) \tag{2.6}$$

Порівнюючи (2.5) і (2.6) приходимо до висновку, що будь-яку синусоїдну функцію можна розглядати як проекцію на вертикальну вісь вектора, який обертається з постійною швидкістю  $\omega$ . Довжина цього вектора дорівнює амплітуді синусоїдної функції. Якщо тепер для електричного кола побудувати для напруг і струмів цього кола відповідні вектори так, щоб довжини цих векторів відповідали амплітудам напруг і струмів, а самі вектори займали в момент зображення положення відносно осі  $Ox$ , яке відповідає початковим фазам цих напруг і струмів, то отримаємо векторну діаграму напруг і струмів. Використовуючи

векторні діаграми, можна легко знаходити результуючі напруги чи струми при виконанні операції додавання чи віднімання цих напруг і струмів. Операції додавання, віднімання векторів значно простіші, чим операції додавання, віднімання над миттєвими значеннями функції. Наприклад:

$$u_1 = U_{m1} \sin(\omega t + \psi_1); \quad u_2 = U_{m2} \sin(\omega t + \psi_2);$$

$$u_3 = U_{m3} \sin(\omega t + \psi_3); \quad u = u_1 + u_2 + u_3 = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

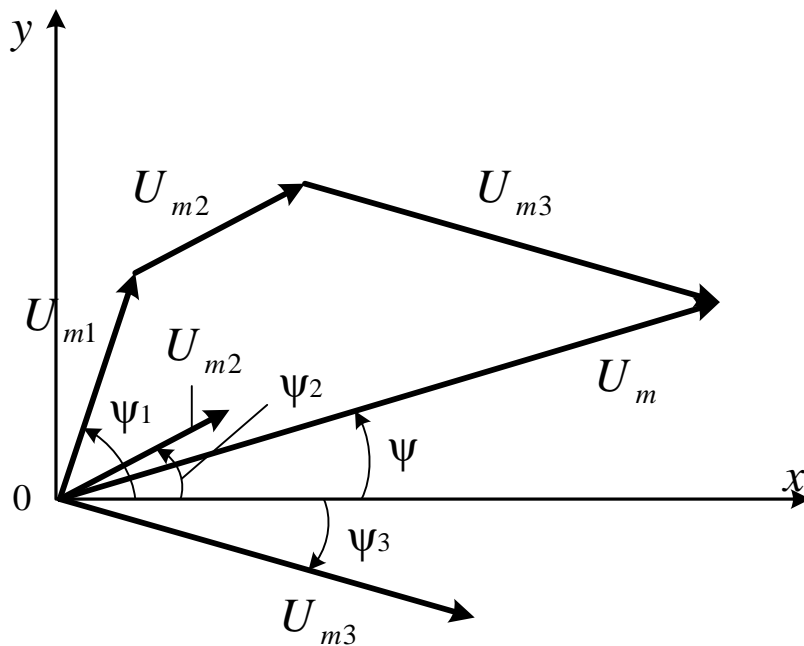


Рис. 2.3

$OX$  - вісь відліку кутів (рис. 2.3).

Результуюча напруга  $u$  може бути визначена за довжиною результуючого вектора  $U_m$ , а початкова фаза – величиною кута, який має цей результуючий вектор відносно осі  $OX$ .

#### 2.1.4. Зображення синусоїдних струмів і напруг комплексними функціями.

Використовуючи векторні діаграми, можна виконувати операції додавання і віднімання синусоїдних функцій струмів і напруг, проводячи ці операції над обертовими векторами.

Але, як будь-який графічний метод, цей метод не може давати високої точності розрахунків. Високу точність розрахунків може дати тільки аналітичний метод; цей метод був запропонований наприкінці дев'ятнадцятого століття американським інженером Штейнмецом і базується на використанні комплексних функцій для зображення синусоїдних струмів і напруг(рис. 2.4) .

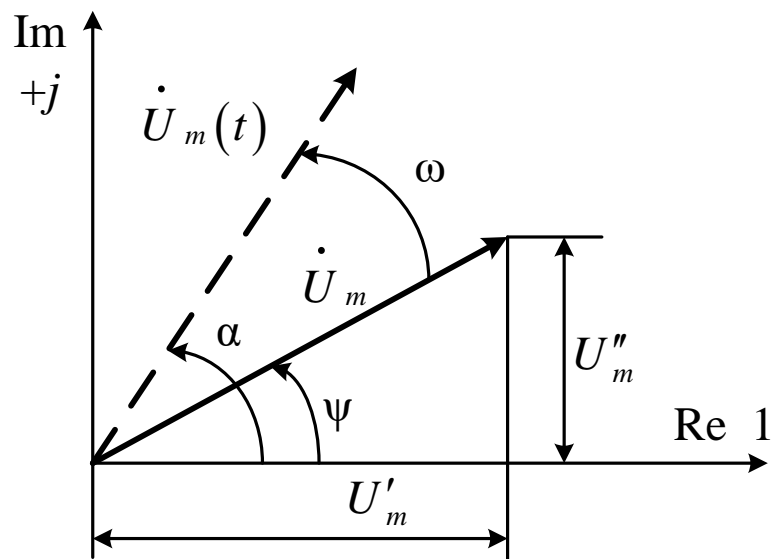


Рис. 2.4

$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi}$  - показникова форма запису комплексу  $\underline{U}_m$ ,

де  $U_m$  – модуль комплексу,  $\psi$  – аргумент;

$\underline{U}_m = U_m \angle \psi$  – спрощена показникова форма;

$\underline{U}_m = U'_m + jU''_m$  – алгебраїчна форма запису;  $\underline{U}_m = U'_m + jU''_m$

$\underline{U}_m = U_m \cos \psi + jU_m \sin \psi$  - тригонометрична форма запису.

$$\underline{U}_m(t) = U_m e^{j\alpha}, \quad \alpha = \omega t + \psi;$$

$$\underline{U}_m(t) = U_m e^{j(\omega t + \psi)} = U_m \cos(\omega t + \psi) + jU_m \sin(\omega t + \psi), \quad (2.7)$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \quad (2.8)$$

Порівнюючи (2.7) для комплексно-часової функції  $\underline{U}_m(t)$  з (2.8) для синусоїдної напруги бачимо, що синусоїдна напруга дорівнює уявній частині комплексної часової функції

$$u = \text{Im}(\underline{U}_m(t)) = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

•  
≡ - знак зображення.  
•

$$u \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\equiv}} \underline{U}_m(t), \quad \underline{U}_m(t) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\equiv}} u.$$

$$u \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\equiv}} \underline{U}_m(t) = U_m e^{j\omega t} e^{j\psi} = \underline{U}_m e^{j\omega t};$$

$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi}$  - комплексна амплітуда,  $e^{j\omega t}$  - поворотний множник.

Використовуючи комплексні функції для зображення синусоїдних струмів і напруг, отримаємо можливість, замість операцій над миттєвими значеннями синусоїдних струмів і напруг, проводити операції над їх зображеннями – комплексними амплітудами. Ці операції будуть значно простішими від операцій над миттєвими струмами і напругами. Так як це буде аналітичний метод, то при розрахунках можна отримати будь-яку бажану точність.

## 2.1.5. Особливості фізичних процесів в колі змінного струму.

### 2.1.5.1. Співвідношення між напругами і струмами на елементах кола змінного струму.

Процеси, які відбуваються в колі змінного струму досить складні. Так, при зміні струму в контурі виникає індукована ЕРС, величина якої впливає із закону електромагнітної індукції:

$$e_L = -\frac{d\psi_L}{dt}, \quad (2.9)$$

де  $\psi_L$  - потокозчеплення самоіндукції,  $e_L$  - ЕРС самоіндукції.

$\psi_L = L \cdot i$ ,  $L$  - індуктивність контуру.

$u_L = -e_L$  - напруга самоіндукції, що врівноважується ЕРС  $e_L$  (рис. 2.5).

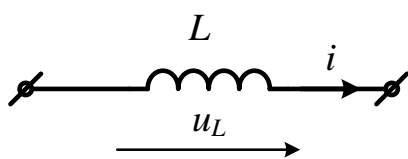


Рис. 2.5

$$u_L = \frac{d\psi_L}{dt} = L \frac{di}{dt}, \quad (L = const). \quad (2.10)$$

Якщо на якійсь ділянці кола змінюється в часі заряд, то це рівнозначно протіканню струму на цій ділянці. В свою чергу заряд ділянки  $q = Cu_C$ ,  $C$  - ємність ділянки.

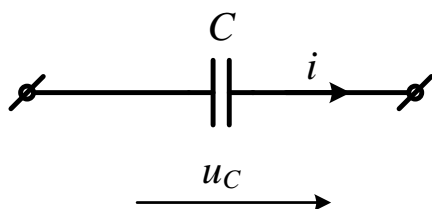


Рис. 2.6

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad (C = const) \quad (2.11)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt \quad (2.12)$$

У всіх частинах кола, де протікає струм, має місце незворотній процес перетворення електромагнітної енергії в тепло. Швидкість цього процесу - потужність  $p$ :

$$p = \frac{dW}{dt} = R \cdot i^2 \quad (2.13),$$

$R$  – активний опір; ділянки, де має місце цей незворотній процес – мають цей активний опір.

Всі вказані процеси в колі змінного струму взаємопов'язані, що ускладнює аналіз такого кола.

### 2.1.5.2. Розрахункова схема кола змінного струму.

Для спрощення аналізу кола змінного струму реальне коло замінюють ідеалізованим – так званою розрахунковою схемою. Елементами розрахункової схеми є: активний опір  $R$ , індуктивність  $L$  і ємність  $C$ . Кожному з цих елементів приписують тільки одну якість. Так активний опір  $R$  характеризує незворотній процес перетворення електромагнітної енергії в тепло, величина його визначається із співвідношення  $R = \frac{P}{i^2}$ .

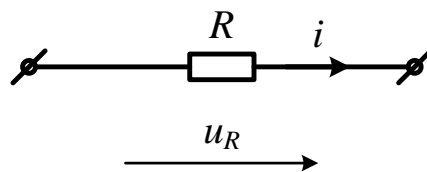


Рис. 2.7

$$u_R = R \cdot i. \quad (2.14)$$

Індуктивність  $L$  характеризує магнітне поле контуру  $W_M = \frac{Li^2}{2}$ , а також ЕРС самоіндукції. При цьому вважається, що магнітне поле існує тільки в контурі, а в навколишньому середовищі воно відсутнє.

Ємність  $C$  характеризує енергію електричного поля ділянки  $W_e = \frac{Cu^2}{2}$ , а також заряд ділянки  $q = Cu_C$ . Якщо в електричному колі протікає струм промислової частоти, або струм частотою не вище 1000 Гц, то для зображення такого кола необхідна обмежена кількість елементів  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Так, для зображення резистора  $R$  достатньо всього одного елемента (рис. 2.7).

Для зображення котушки індуктивності достатньо двох елементів (рис. 2.8).



Рис. 2.8

Розрахункова схема реального конденсатора може складатись як і з двох елементів (рис. 2.9), так і з трьох (рис. 2.10).

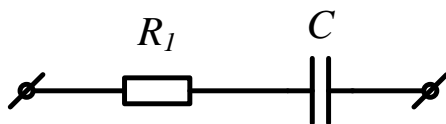


Рис. 2.9

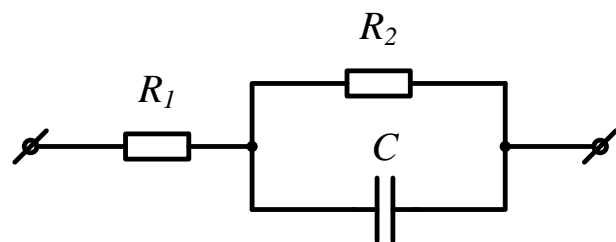


Рис. 2.10

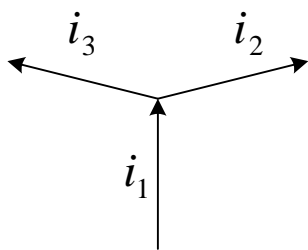
Розрахункові схеми реального кола з обмеженою кількістю елементів  $R$ ,  $L$ ,  $C$  отримали назву **схеми з зосередженими параметрами**.

Якщо ж в колі досліджують струм високої частоти, то розрахункові схеми такого кола ускладнюються. Так, наприклад, в котушці необхідно враховувати опір кожного витка, індуктивність кожного витка, міжвіткові ємності.

Для точного аналізу кола при високих та надвисоких частотах струму розрахункова схема повинна мати необмежено велику кількість елементів  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . В такому випадку коло і його розрахункову схему називають **колом або схемою з розподіленими параметрами**.

### 2.1.6. Закони Кірхгофа для кола змінного струму.

#### Перший закон Кірхгофа.



*Алгебраїчна сума миттєвих струмів віток, з'єднаних у вузол, дорівнює нулю*

$$\sum i_k = 0. \quad (2.15)$$

Представимо миттєві струми комплексами:

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) \rightarrow \underline{I}_1,$$

$$i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2) \rightarrow \underline{I}_2, \quad i_3 = I_{m3} \sin(\omega t + \psi_3) \rightarrow \underline{I}_3.$$

Тоді  $i_1 - i_2 - i_3 \rightarrow \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3$  або у загальному вигляді  $\sum \underline{I}_k = 0$ . (2.16)

*Алгебраїчна сума комплексів струмів у вузлі дорівнює нулю.*

#### Другий закон Кірхгофа.

Для реального кола змінного струму приходимо до неоднозначностей при визначенні напруги між двома певними точками, але розрахованої по різним шляхам. Тому виникла необхідність замінити реальне коло

ідеалізованим, в якому магнітні поля зосереджені тільки в індуктивностях, а в навколишньому середовищі вони відсутні. Тоді для такого ідеалізованого кола другий закон Кірхгофа можна сформулювати подібним чином як і для кола постійного струму.

В будь-якому замкненому контурі ідеалізованого кола алгебраїчна сума миттєвих напруг на ділянках контуру дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих ЕРС:

$$\sum u_k = \sum e_k, \quad (2.17)$$

$e_k$  – миттєва ЕРС  $k$ -тої вітки,  $u_k$  – миттєва напруга  $k$ -тої вітки.

$$u_k = u_{Rk} + u_{Lk} + u_{Ck} = R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt. \quad (2.18)$$

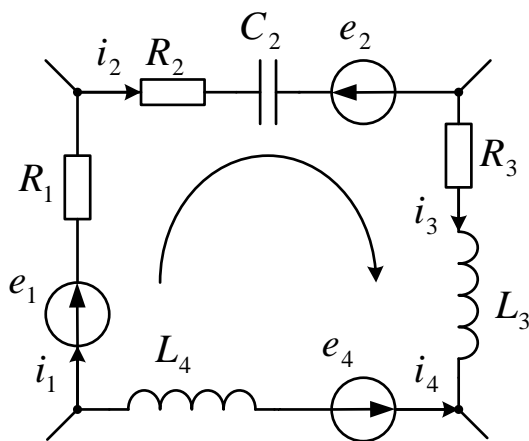


Рис. 2.11,б

Наприклад, для кола на рис. 2.11,б:

$$e_1 - e_2 - e_4 = i_1 R_1 + i_2 R_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + i_3 R_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} - L_4 \frac{di_4}{dt}.$$

В комплексній формі

$$\underline{E}_1 - \underline{E}_2 - \underline{E}_4 = \underline{I}_1 R_1 + \underline{I}_2 R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \underline{I}_2 + \underline{I}_3 R_3 + j\omega L_3 \underline{I}_3 - j\omega L_4 \underline{I}_4.$$

$$\underline{E}_1 - \underline{E}_2 - \underline{E}_4 = \underline{I}_1 R_1 + \underline{I}_2 \left( R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) + \underline{I}_3 (R_3 + j\omega L_3) - j\omega L_4 \underline{I}_4.$$

$$(2.19)$$

Позначимо  $\underline{Z}_1 = R_1$ ,  $\underline{Z}_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}$ ,  $\underline{Z}_3 = R_3 + j\omega L_3$ ,  $\underline{Z}_4 = j\omega L_4$ .

Тоді рівняння (2.19) набуде вигляду

$$\underline{E}_1 - \underline{E}_2 - \underline{E}_4 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_3 \underline{Z}_3 - \underline{I}_4 \underline{Z}_4. \quad (2.20)$$

В загальному вигляді другий закон Кірхгофа формулюється так: *алгебраїчна сума комплексів напруг пасивних елементів контура дорівнює алгебраїчній сумі комплексних ЕРС цього контура*

$$\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \underline{I}_k = \sum_{k=1}^m \underline{E}_k. \quad (2.21)$$

Якщо ЕРС перенести в ліву частину рівняння і записати комплексну напругу кожної вітки з урахуванням ЕРС, то другий закон Кірхгофа формулюється аналогічно першому

$$\sum_{k=1}^n \underline{U}_k = 0. \quad (2.22)$$

*Алгебраїчна сума комплексів напруг всіх віток контура дорівнює нулю.*

### **2.1.7. Елементи у колі синусоїдного струму. Активні і реактивні опори.**

Незважаючи на велику різноманітність споживачів електроенергії змінного струму і складність фізичних процесів, для побудови схеми заміщення (моделі) будь-якого пасивного компонента кола синусоїдного струму використовують три ідеалізованих елементи – резистивний, індуктивний та ємнісний. Кожний з них відображає одну найсуттєвішу сторону фізичного процесу.

Ідеалізований резистивний елемент відображає здатність реального об'єкта незворотно перетворювати електричну енергію на інші види енергії, а також випромінювати її.

У сучасних схемах заміщення ідеалізованим резистивним елементом враховують деякі пристрої, наприклад електромашинні двигуни, в яких електрична енергія перетворюється на механічну.

Ідеалізований індуктивний елемент відображає здатність під час проходження струму, збуджувати і утримувати в оточуючому просторі магнітне поле.

Ідеалізований ємнісний елемент відображає здатність реального об'єкта накопичувати електричний заряд  $Q$  і створювати в оточуючому просторі електричне поле.

### 2.1.7.1. Ідеалізований резистивний елемент у колі синусоїдного струму. (рис. 2.12).

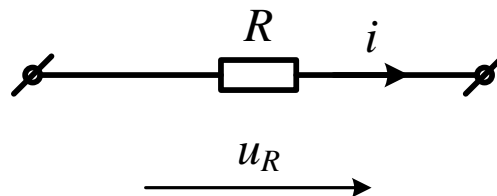


Рис. 2.12

Нехай струм, що тече через опір, змінюється за синусоїдним законом

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i). \quad (2.23)$$

Тоді за законом Ома напруга на опорі дорівнюватиме

$$u_R = Ri = R \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i). \quad (2.24)$$

$R \cdot I_m = U_{Rm}$  – амплітуда напруги на опорі  $R$ ;  $u_R = U_{Rm} \sin(\omega t + \psi_i)$ .

Коефіцієнт пропорційності  $R$  вважають параметром ідеалізованого резистивного елемента і називають активним опором на відміну від кіл постійного струму, де  $R$  називають омичним опором.

Аналізуючи вирази для миттєвих струму і напруги, можна зробити такі висновки:

1. Синусоїдна напруга створює в ідеалізованому резистивному елементі синусоїдний струм тієї ж частоти (і навпаки).

2. Напруга і струм збігаються за фазою  $\psi_u = \psi_i$ , отже кут зсуву фаз  $\varphi = \psi_u - \psi_i$  дорівнює нулю.

3. Закон Ома виконується для миттєвих значень  $u = iR$ ; амплітудних значень  $U_m = I_m R$ ; діючих значень  $U = IR$ .

Оскільки, струм і напруга на ідеалізованому резистивному елементі прямо пропорційні, то опір  $R$  не залежить від частоти прикладеної напруги і є сталим в часі.

Часові діаграми струму і напруги на резистивному елементі зображені на рис. 2.13, а.

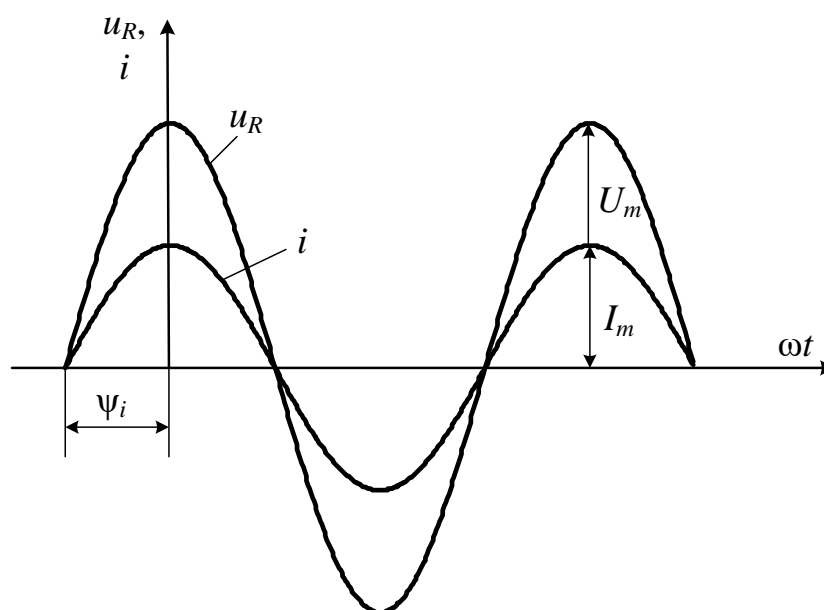


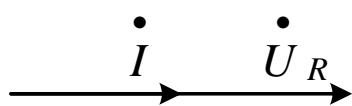
Рис. 2.13,а

Запишемо зображення струму і напруги резистора у комплексній формі.

$$\begin{aligned}
 \dot{i} &= \dot{\underline{I}}_m(t) = I_m e^{j\omega t} e^{j\psi_i} = \underline{I}_m e^{j\omega t}, \\
 \dot{i} &= \dot{\underline{I}}_m = I_m e^{j\psi_i}, \quad u_R = \dot{\underline{U}}_{Rm} = R \cdot \dot{\underline{I}}_m = R \cdot I_m e^{j\psi_i}; \\
 \underline{U}_{Rm} &= R \cdot \underline{I}_m, \quad \underline{U}_R = R \cdot \underline{I}. \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

(2.25) - закон Ома в комплексній формі.

$$\frac{\underline{U}_{Rm}}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}_R}{\underline{I}} = \underline{Z}_R - \text{комплексний опір активного елемента, } \underline{Z}_R = R.$$



Векторна діаграма резистивного елемента зображена на рис. 2.13,б.

Рис. 2.13,б

Миттєва потужність  $p_R$  ділянки з резистивним елементом  $R$  визначається як добуток миттєвих значень напруги і струму.

$$\begin{aligned}
 p_R &= u_R \cdot i = R \cdot i^2 = R \cdot I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) = 2R \cdot I^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) = \\
 &= R \cdot I^2 (1 - \cos 2(\omega t + \psi_i)). \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

Із формули (2.26) випливає, що миттєва потужність  $p_R$  має постійну складову і складову, яка змінюється з подвійною частотою відносно частоти струму.

Визначимо середнє  $P_R$  за період значення миттєвої потужності.

$$\begin{aligned}
 P_R &= \frac{1}{T} \int p_R dt = \frac{1}{T} \int RI^2 dt - \frac{1}{T} \int RI^2 \cos^2(\omega t + \psi_i) dt = RI^2. \\
 P_R &= RI^2 - \text{активна потужність} \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

Графіки зміни миттєвої потужності і струму зображені на рис. 2.14.

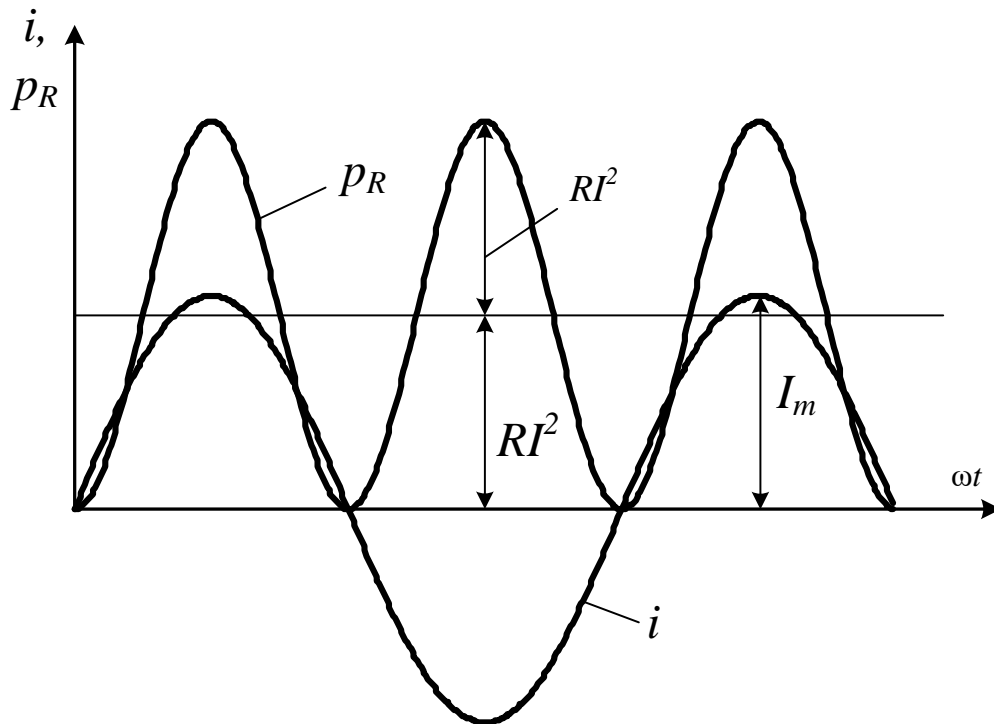


Рис. 2.14

### 2.1.7.2. Ідеалізований індуктивний елемент у колі синусоїдного струму. (рис. 2.15).

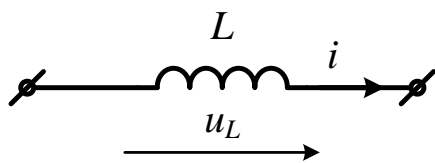


Рис. 2.15

Нехай струм, що тече через індуктивний елемент, змінюється за синусоїдним законом

$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ . Тоді напруга

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i), \quad (2.28)$$

де  $\omega L = X_L$  – реактивний опір індуктивності.

$X_L$  – розрахункова величина, враховує реакцію індуктивності на синусоїдний струм.

$$u_L = \omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i) = X_L I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.29)$$

Висновки:

1. Синусоїдний струм створює в ідеалізованому індуктивному елементі синусоїдну напругу тієї ж частоти  $\omega$  (і навпаки).

2. Струм відстає від напруги за фазою на кут  $\frac{\pi}{2}$ , відповідно кут зсуву фаз  $\varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}$ . В цьому випадку говорять, що крива напруги

$u_L$  випереджає криву струму на  $\frac{\pi}{2}$ .

3. Закон Ома для миттєвих значень не виконується ( $u \neq iX_L$ ), внаслідок зсуву фаз між напругою та струмом.

4. Закон Ома виконується для амплітудних значень  $U_m = I_m X_L$  та для діючих значень  $U = I X_L$ .

Реактивний опір індуктивності  $X_L$  можна визначити як відношення амплітудного чи діючого значень напруги до струму індуктивності.

Графіки миттєвих значень напруги і струму індуктивності зображені на рис. 2.16,а.

Комплексне зображення струму і напруги індуктивного елемента:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \stackrel{\cdot}{=} \underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i},$$

$$u_L = U_{Lm} \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\cdot}{=} \underline{U}_{Lm} = X_L \cdot \underline{I}_m = X_L \cdot I_m e^{j\psi_i} e^{j\frac{\pi}{2}};$$

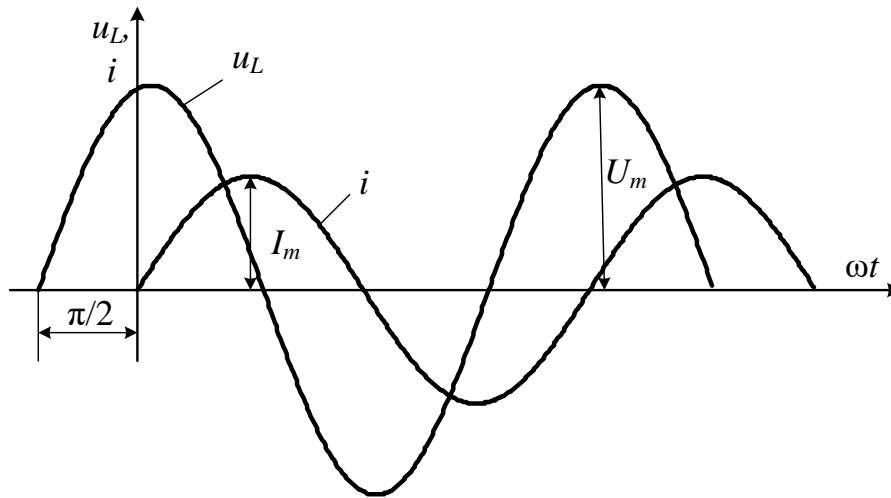


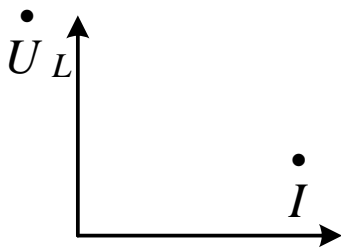
Рис. 2.16,а

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j,$$

$$\underline{U}_{Lm} = jX_L \cdot \underline{I}_m, \quad \underline{U}_L = jX_L \cdot \underline{I}, \quad (2.30)$$

(2.30) - закон Ома для ділянки з індуктивністю.

$$\frac{\underline{U}_{Lm}}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}} = \underline{Z}_L - \text{комплексний опір індуктивності, } \underline{Z}_L = jX_L = X_L e^{j\frac{\pi}{2}}.$$



Векторна діаграма індуктивного елемента зображена на рис. 2.16,б.

Рис. 2.16,б

$p_L$  миттєва потужність ділянки з індуктивністю:

$$\begin{aligned} p_L &= u_L \cdot i = X_L I_m \cos(\omega t + \psi_i) \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \\ &= 2X_L I^2 \cos(\omega t + \psi_i) \sin(\omega t + \psi_i) = 2X_L I^2 \sin 2(\omega t + \psi_i), \end{aligned}$$

$$p_L = 2X_L I^2 \sin 2(\omega t + \psi_i). \quad (2.31)$$

Із (2.31) видно, що миттєва потужність ділянки з індуктивністю при синусоїдному струмі є також синусоїдна функція, але має подвійну частоту по відношенню до струму. Середнє значення за період миттєвої потужності дорівнює нулю. Тому для характеристики миттєвої потужності  $p_L$  надалі буде використовуватись амплітудне значення  $X_L I^2$ .

$$X_L I^2 = Q_L \quad (2.32)$$

(2.32) – реактивна потужність індуктивності.

Графіки зображені на рис. 2.17.

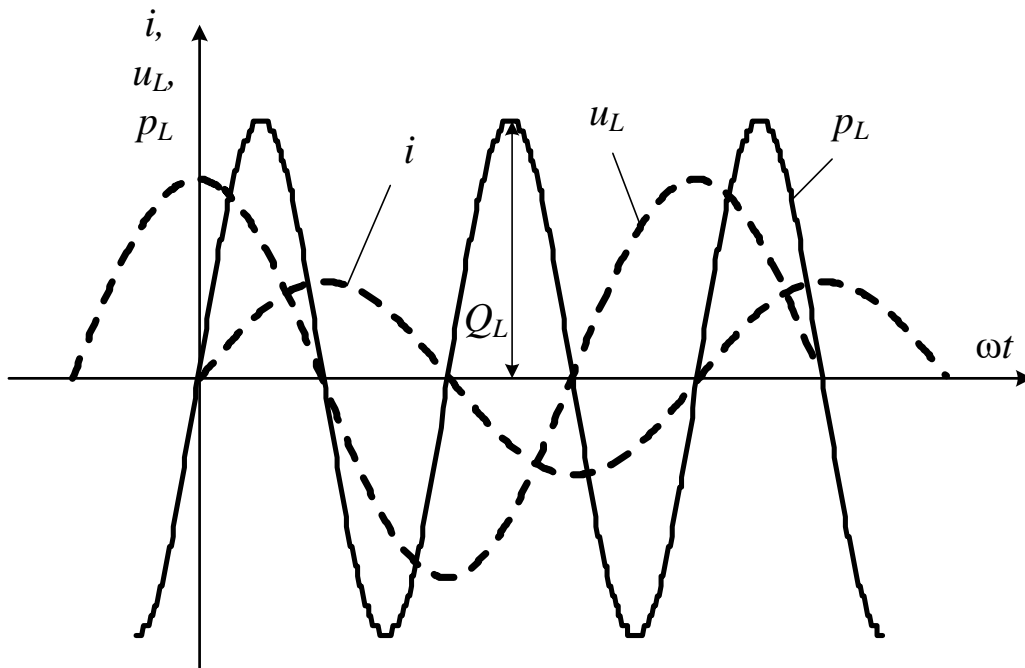


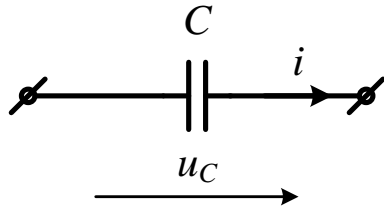
Рис. 2.17

### 2.1.7.3. Ідеалізований ємнісний елемент у колі синусоїдного струму.

(рис. 2.18).

Нехай струм змінюється за синусоїдним законом

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (2.33)$$



Тоді напруга

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = -\frac{I}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_i).$$

(2.34)

Рис. 2.18

$$\frac{1}{\omega C} = X_C \quad - \quad \text{реактивний опір}$$

ємності,

$$I_m \cdot X_C = U_{Cm} \quad - \quad \text{амплітуда напруги на ємності.}$$

$$\begin{aligned} u_C &= -I_m X_C \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = I_m X_C \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= U_{Cm} \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Аналізуючи вирази миттєвих значень струму і напруги можна зробити такі висновки:

1. Синусоїдний струм створює в ідеалізованому ємнісному елементі синусоїдну напругу тієї ж частоти  $\omega$  (і навпаки).

2. Струм випереджає напругу за фазою на кут  $\frac{\pi}{2}$ , відповідно кут

зсуву фаз  $\varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}$ . В цьому випадку говорять, що крива

напруги  $u_L$  відстає від кривої струму на  $\frac{\pi}{2}$ .

3. Закон Ома для миттєвих значень не виконується ( $u \neq iX_C$ ), внаслідок зсуву фаз між напругою та струмом.

4. Закон Ома виконується для амплітудних значень  $U_m = I_m X_C$  та для діючих значень  $U = IX_C$ .

$$X_C = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}.$$

Із останнього співвідношення реактивний опір ємності  $X_C$  можна визначити як відношення амплітудного чи діючого значень напруги до струму ємності.

Часові діаграми миттєвих значень напруги і струму ємнісного елемента приведено на рис. 2.19,а.

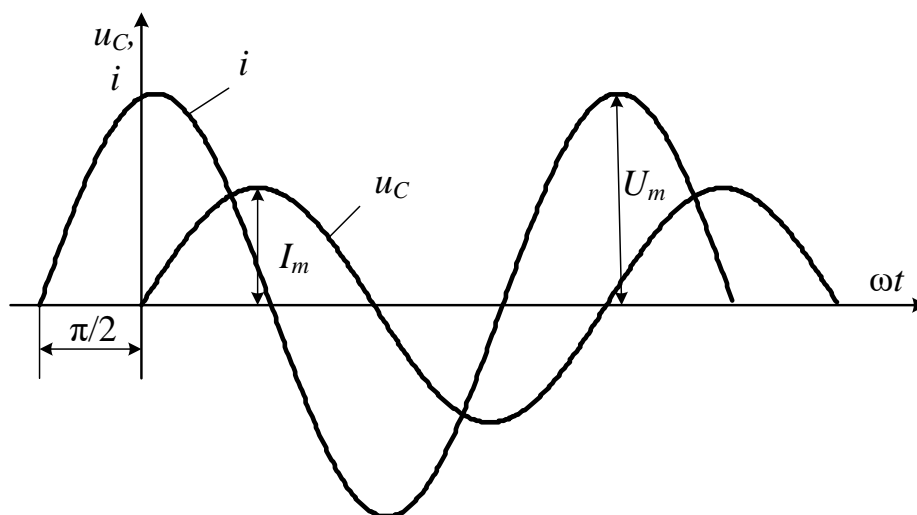


Рис. 2.19,а

Комплексні зображення струму і напругу ємності:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \stackrel{\cdot}{=} \underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i},$$

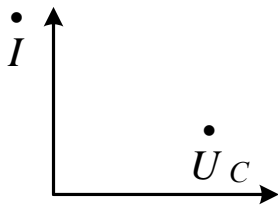
$$u_C = U_{Cm} \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\cdot}{=} \underline{U}_{Cm} = X_C \cdot \underline{I}_m = X_C \cdot I_m e^{j\psi_i} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -j,$$

$$\underline{U}_{Cm} = jX_C \cdot \underline{I}_m, \quad \underline{U}_C = -jX_C \cdot \underline{I} \quad (2.36)$$

- закон Ома для ділянки з ємністю.

$$\frac{\underline{U}_{Cm}}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}_C}{\underline{I}} = \underline{Z}_C \text{ - комплексний опір ємності, } \underline{Z}_C = -jX_C = X_C e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$



Векторну діаграму ємнісного елемента зображено на рис. 2.19,б.

Рис. 2.19,б

Миттєва потужність ділянки:

$$\begin{aligned} p_C &= u_C \cdot i = -X_C I_m \cos(\omega t + \psi_i) \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \\ &= -2X_C I^2 \cos(\omega t + \psi_i) \sin(\omega t + \psi_i) = -X_C I^2 \sin 2(\omega t + \psi_i). \end{aligned}$$

При синусоїдному струмі миттєва потужність  $p_C$  є також синусоїдною функцією, але має частоту, подвійну по відношенню до частоти струму. Середнє за період значення дорівнює нулю, тому для характеристики використовують амплітудне значення  $X_C I^2 = Q_C$  – реактивна потужність ємності.

Графіки миттєвої потужності, напруги і струму зображено на рис. 2.20.

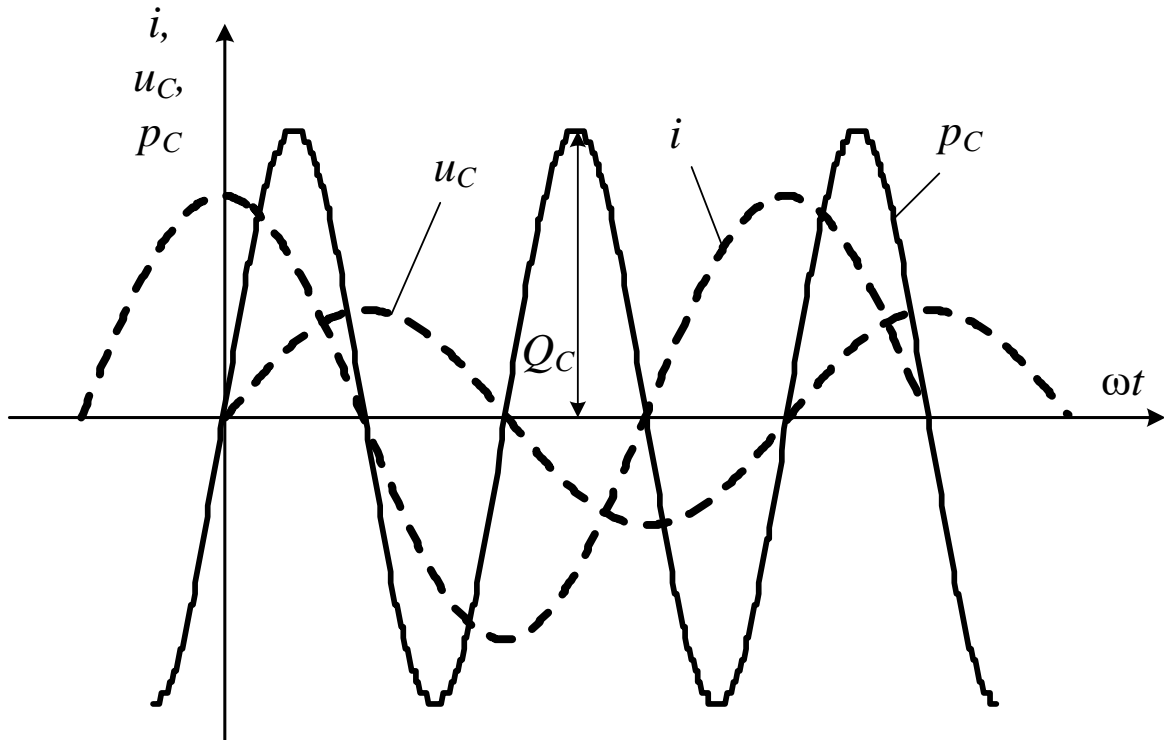


Рис. 2.20

**2.1.8. Послідовне з'єднання елементів  $R$ ,  $L$ ,  $C$  в колі синусоїдного струму.**

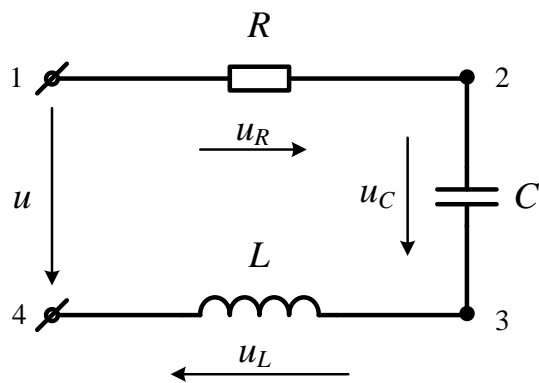


Рис. 2.21

Нехай в схемі на рис. 2.21 протікає синусоїдний струм

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad . \quad (2.37)$$

Тоді у відповідності із (2.24, 2.29, 2.35) миттєві напруги на елементах

$$u_R = R \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad , \quad (2.38)$$

$$u_L = X_L \cdot I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.39)$$

$$u_C = X_C \cdot I_m \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.40)$$

$$u = u_{14} = u_R + u_C + u_L = u_{12} + u_{24}. \quad (2.41)$$

Напруга на реактивних елементах

$$u_{24} = u_{23} + u_{34} = u_C + u_L = (X_L - X_C)I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.42)$$

$X_L - X_C = X$  – реактивний опір послідовного з'єднання  $L$  і  $C$ .

$X_L > 0, X_C > 0; \quad X > 0$ , якщо  $X_L > X_C$ ; тоді

$$u_{24} = (X_L - X_C)I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right).$$

$X < 0$ , якщо  $X_L < X_C$ , тоді

$$u_{24} = (X_L - X_C)I_m \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right).$$

$XI_m = U_{pm}$  – амплітуда реактивної складової напруги

$$u_p = U_{pm} \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right).$$

Реактивна складова напруги зсунута відносно струму на кут  $\pi/2$ .

Складові напруги у комплексній формі:

- Активна складова  $\underline{U}_{am} = \underline{U}_{Rm} = R \cdot \underline{I}_m$  збігається по фазі із струмом;

- Індуктивна складова  $\underline{U}_{Lm} = jX_L \cdot \underline{I}_m$  випереджає струм на  $\pi/2$ ;

- Ємнісна складова  $\underline{U}_{Cm} = -jX_C \cdot \underline{I}_m$  відстає від струму на  $-\pi/2$ ;

- Реактивна складова

$$\underline{U}_{pm} = X \cdot \underline{I}_m e^{j\psi_i} e^{j\frac{\pi}{2}} = X \cdot \underline{I}_m e^{j\frac{\pi}{2}} = jX \underline{I}_m. \quad (2.43)$$

Запишемо рівняння (2.41) комплексними амплітудами:

$$\underline{U}_m = \underline{U}_{Rm} + \underline{U}_{Lm} + \underline{U}_{Cm}, \quad (2.44)$$

$$\underline{U}_m = \underline{U}_{am} + \underline{U}_{pm}. \quad (2.45)$$

Враховуючи значення комплексних амплітуд складових рівнянь (2.44) і (2.45) отримаємо:

$$\underline{U}_m = R \underline{I}_m + jX_L \underline{I}_m - jX_C \underline{I}_m, \quad (2.46)$$

$$\underline{U}_m = R \underline{I}_m + jX \underline{I}_m, \quad (2.47)$$

$$\underline{U}_m = (R + jX) \underline{I}_m. \quad (2.48)$$

$R + jX = \underline{Z}$  - комплексний опір послідовного з'єднання  $R$ ,  $L$ ,  $C$ .

$$R + j(X_L - X_C) = \underline{Z}.$$

Побудуємо векторну діаграму (рис. 2.22) в комплексній площині у відповідності з рівняннями (2.47) та (2.48).

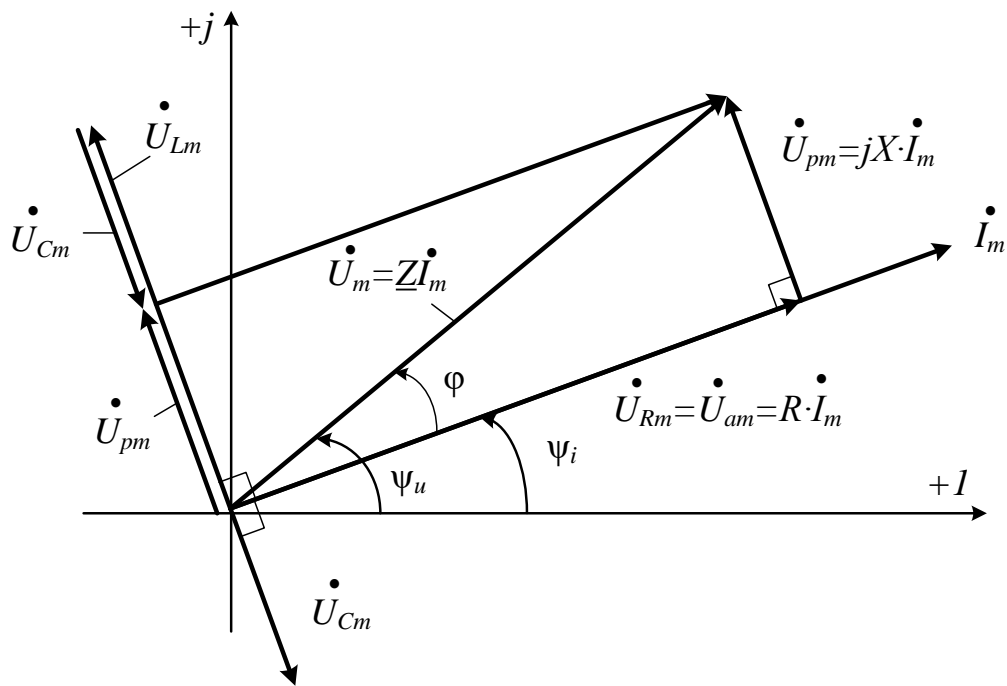


Рис. 2.22

### 2.1.9. Трикутники напруг і опорів.

Прямокутний трикутник, катетами якого є реактивна і активна напруги, називається трикутником напруг.

Якщо сторони трикутника напруг зменшити в  $I_m$  раз, то отримаємо новий трикутник подібний попередньому, катетами якого будуть опори  $R$ ,  $X$  і гіпотенуза  $Z$ . Цей трикутник називається трикутником опорів.

Розміщення трикутника опорів на комплексній площині приведено на рис. 2.23.

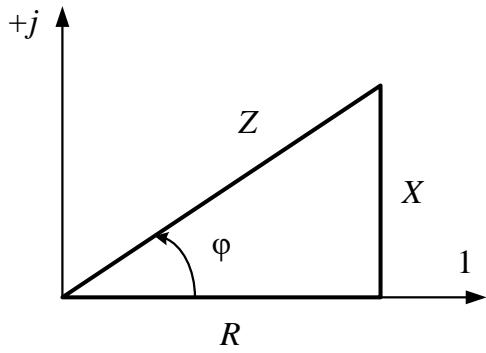


Рис. 2.23

$$X > 0, \quad \varphi > 0.$$

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}. \quad (2.50)$$

$Z$  - повний опір.

Співвідношення в трикутнику

опорів

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2},$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (2.51)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{X}{R}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right), \quad (2.52)$$

$$R = Z \cdot \cos \varphi, \quad (2.53)$$

$$X = Z \cdot \sin \varphi. \quad (2.54)$$

Закон Ома для послідовного з'єднання  $R$ ,  $L$ ,  $C$  в комплексній формі  
(2.55)

$$\underline{U}_m = \underline{Z} \underline{I}_m, \quad \underline{U} = \underline{Z} \underline{I}. \quad (2.55)$$

$$\underline{U} = Z e^{j\varphi} I e^{j\psi_i} = U e^{j\psi_u},$$

$U = Z \cdot I$  – закон Ома для діючих значень,

$U$  - діюче значення напруги,  $I$  - діюче значення струму.

### 2.1.10. Паралельне з'єднання елементів $R$ , $L$ , $C$ в колі синусоїдного струму.

Нехай тепер елементи  $R$ ,  $L$ ,  $C$  з'єднані паралельно (див. рис. 2.24).

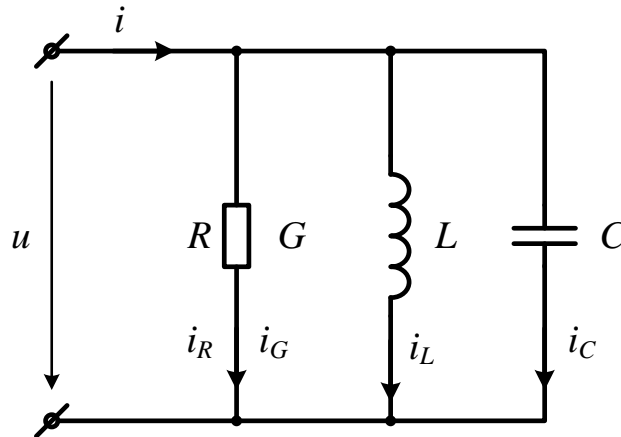


Рис. 2.24

До кола прикладено синусоїдну напругу

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \quad (2.56)$$

Струм в вітці з резистором

$$i_R = i_G = G \cdot u = G \cdot U_m \sin(\omega t + \psi_u) ;$$

$G \cdot U_m = I_{Gm} = I_{am}$  – амплітуда активної складової струму.

$$i_R = i_G = i_a = I_{am} \sin(\omega t + \psi_u). \quad (2.57)$$

Струм в вітці з котушкою індуктивності

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad i = \frac{1}{L} \int u dt, \quad i_L = -\frac{U_m}{\omega L} \cos(\omega t + \psi_u),$$

$\frac{1}{\omega L} = B_L$  – реактивна провідність ділянки з індуктивністю,

індуктивна провідність.

$$i_L = -B_L \cdot U_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right);$$

$B_L \cdot U_m = I_{Lm}$  – амплітуда струму;

$$i_L = I_{Lm} \sin\left(\omega t + \psi_u - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.58)$$

Знайдемо струм в вітці з конденсатором:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \omega C \cdot U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_u),$$

$\omega C = B_C$  – ємнісна провідність;

$\omega C \cdot U_m = B_C \cdot U_m = I_{Cm}$  – амплітуда струму;

$$i_C = I_{Cm} \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.59)$$

Реактивна складова струму  $i_p = i_L + i_C$

$$\begin{aligned} i_p &= B_L \cdot U_m \sin\left(\omega t + \psi_u - \frac{\pi}{2}\right) + B_C \cdot U_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= (B_L - B_C) \cdot U_m \sin\left(\omega t + \psi_u - \frac{\pi}{2}\right) = B \cdot U_m \sin\left(\omega t + \psi_u - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

$B_L - B_C = B$  – реактивна провідність;

Якщо  $B_L > B_C$ , то  $B > 0$ ; коли  $B_L < B_C$  то  $B < 0$ .

Складові струму у комплексній формі:

• Активна складова  $\underline{I}_{am} = \underline{I}_{Gm} = G \cdot U_m e^{j\psi_u} = G \cdot \underline{U}_m$  збігається за фазою із струмом; (2.60)

• Індуктивна складова

$$\underline{i}_L = \underline{I}_{Lm} = B_L e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot U_m e^{j\psi_u} = B_L e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \underline{U}_m = -jB_L \underline{U}_m$$

відстає від напруги на  $-\pi/2$ ; (2.61)

• Ємнісна складова

$$\dot{i}_C \equiv \underline{I}_{Cm} = B_C e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot U_m e^{j\psi_u} = B_C e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \underline{U}_m = jB_C \underline{U}_m$$

випереджає напругу на  $\pi/2$ ; (2.62)

• Реактивна складова

$$\dot{i}_p \equiv \underline{I}_{pm} = B e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot U_m e^{j\psi_u} = B e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \underline{U}_m = -jB \underline{U}_m. \quad (2.63)$$

З урахуванням (2.60)-(2.63) від миттєвих струмів  $i = i_G + i_L + i_C = i_a + i_p$  перейдемо до комплексів

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{Gm} + \underline{I}_{Lm} + \underline{I}_{Cm}, \quad (2.64)$$

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{am} + \underline{I}_{pm}, \quad (2.65)$$

$$\underline{I}_m = G \cdot \underline{U}_m - jB_L \underline{U}_m + jB_C \underline{U}_m, \quad (2.66)$$

$$\underline{I}_m = G \cdot \underline{U}_m - jB \underline{U}_m. \quad (2.67)$$

Векторну діаграму струмів в комплексній площині по (2.66) та (2.67) зображено на рис. 2.25.

$$\underline{I}_m = G \cdot \underline{U}_m - jB \underline{U}_m = (G - jB) \underline{U}_m = \underline{Y} \cdot \underline{U}_m,$$

$G - jB = \underline{Y}$  – комплексна провідність паралельного з'єднання.

$$\underline{I}_m = \underline{Y} \cdot \underline{U}_m, \quad \underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U}. \quad (2.68)$$

(2.68) - закон Ома для ділянки з паралельним з'єднанням активних та реактивних елементів.

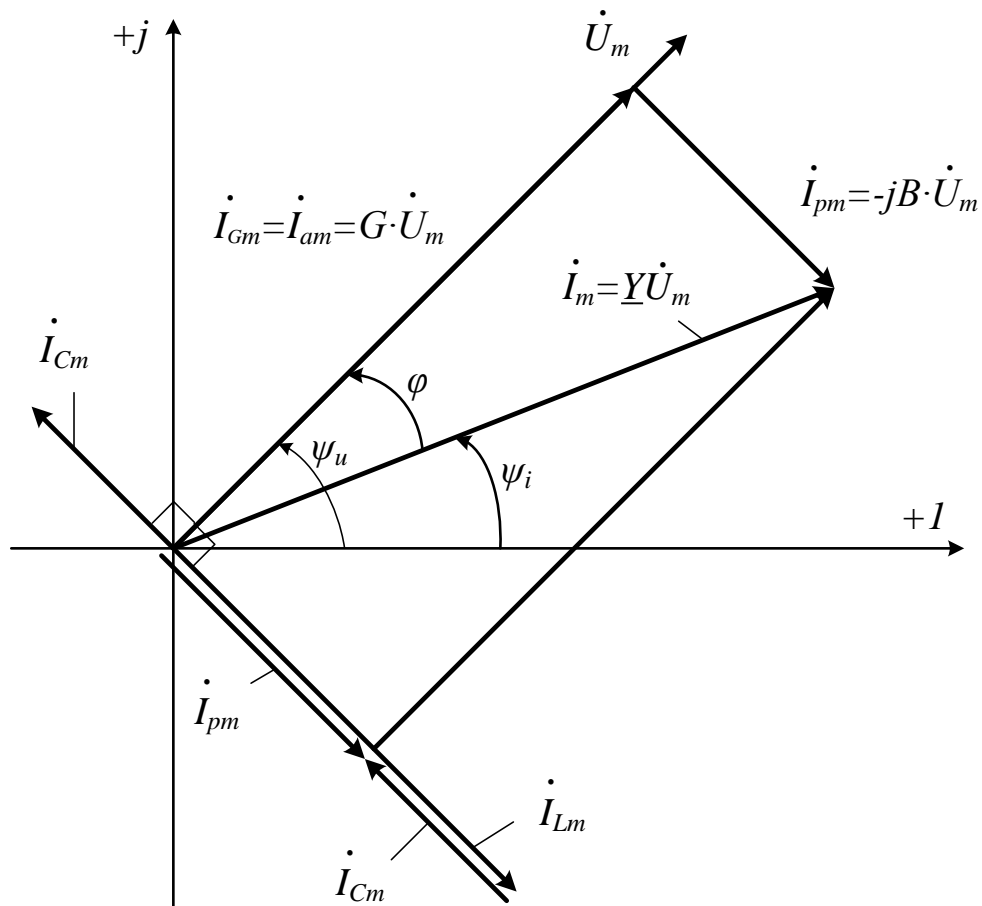


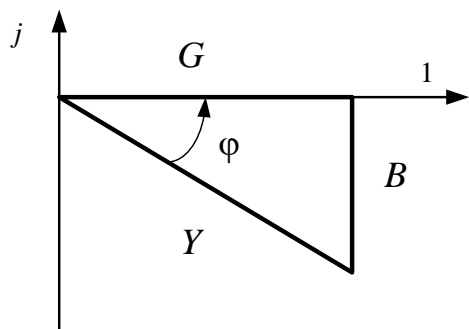
Рис. 2.25

### 2.1.11. Трикутники струмів і провідностей.

Прямокутний трикутник, катетами якого є активна і реактивна складові струму, називається трикутником струму.

Якщо трикутник струму зменшити в  $\underline{U}_m$  раз, то отримаємо трикутник провідностей.

Розміщення трикутника провідностей на комплексній площині зображено на рис. 2.26.



$$B > 0, \quad \varphi > 0,$$

$$\underline{Y} = Y e^{-j\varphi},$$

$Y$  - повна провідність.

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2},$$

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}; \quad (2.69)$$

Рис. 2.26

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{G}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{B_L - B_C}{G}\right), \quad (2.70)$$

$$G = Y \cdot \cos \varphi \quad (2.71)$$

$$B = Y \cdot \sin \varphi \quad (2.72)$$

$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} = Y e^{-j\varphi} \cdot U e^{j\psi_u} = Y U e^{j(\psi_u - \varphi)} = I e^{j\psi_i},$$

$Y \cdot U = I$  - закон Ома для діючих значень в колі з паралельним з'єднанням активних та реактивних елементів.

### 2.1.12. Пасивний двополюсник при синусоїдному струмі. Умови еквівалентності схем заміщення двополюсника.

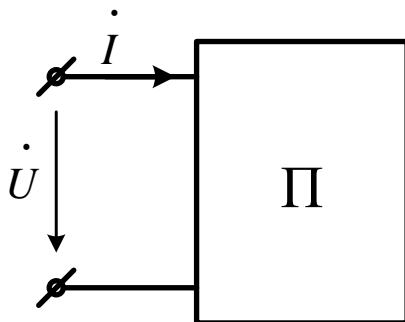


Рис. 2.27

Незалежно від кількості елементів двополюсника його можна замінити еквівалентними схемами, які матимуть 2 елементи, з'єднані або послідовно (рис. 2.28,а) або паралельно (рис. 2.28,б).

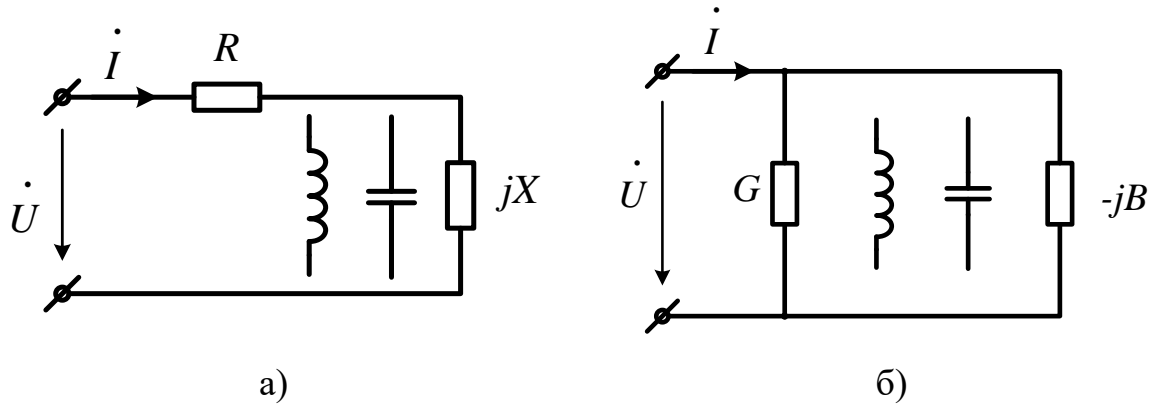


Рис. 2.28

Схеми рис. 2.28 будуть еквівалентні схемі рис. 2.27, якщо при однакових комплексних напругах будуть однакові струми.

$$\underline{Z} = R + jX; \quad \underline{Y} = G - jB.$$

$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} \text{ - для рис. 2.28,б.}$$

$$\text{Для рис. 2.28,а: } \underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I};$$

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{Y} \cdot \underline{U};$$

$$\underline{Z} \cdot \underline{Y} = 1. \quad (2.73)$$

Рівняння (2.73) вказує на те, що комплексна провідність і комплексний опір є величини, взаємно оберненими:

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z}; \quad (2.74)$$

$$\underline{Z} = 1/\underline{Y}. \quad (2.75)$$

Повні опори і провідності також величини взаємно обернені:

$$Y = 1/Z; \quad Z = 1/Y \quad (2.76)$$

Що стосується активних і реактивних опорів і провідностей, то це не є величини взаємно обернені, а визначаються по наступним співвідношенням:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = G - jB,$$

$$G - jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2};$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2}. \quad (2.77)$$

Виконавши подібний аналіз для  $R$ ,  $X$  отримаємо такі рішення:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G - jB} = R + jX$$

$$R + jX = \frac{1}{G - jB} = \frac{G + jB}{G^2 + B^2} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \frac{B}{G^2 + B^2}$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2}. \quad (2.78)$$

Вирази (2,77) (2.78) – називаються формулами еквівалентного переходу від опорів до провідностей чи від провідностей до опорів.

## 2.1.13. Потужність у колі синусоїдного струму.

### 2.1.13.1. Миттєва потужність і коливання енергії.

Розглянемо ділянку кола синусоїдного струму у вигляді двополюсника (рис. 2.27). За елементарний проміжок часу  $dt$  через переріз провода у додатньому напрямку струму  $i$  проходить заряд

$dQ = idt$ . Енергія, яку споживає двополюсник, витрачається на роботу  $dA$  по переміщенню заряду  $dQ$

$$dA = udQ = uidt.$$

Миттєва потужність, що споживається двополюсником, дорівнює швидкості виконання роботи  $dA$  у даний момент часу:

$$p = \frac{dA}{dt} = \frac{uidt}{dt} = ui.$$

З отриманої формули випливає наступне:

- Миттєва потужність  $p = 0$  у момент проходження через нуль напруги або струму;

- Миттєва потужність  $p > 0$ , якщо одночасно  $u > 0$ ,  $i > 0$ , або  $u < 0$ ,  $i < 0$ . Однакові знаки  $u$ ,  $i$  відповідають їх однаковим напрямкам на вході двополюсника. Додатне значення  $p$  означає, що двополюсник одержує енергію від зовнішньої частини кола.

- Миттєва потужність  $p < 0$  за умови, що  $u > 0$ ,  $i < 0$  або  $u < 0$ ,  $i > 0$ . Різні знаки  $u$ ,  $i$  відповідають їх протилежним напрямкам на вході двополюсника. Від'ємне значення  $p$  означає, що двополюсник віддає енергію до зовнішньої частини кола.

Електричне коло будь-якої складності відносно синусоїдальних напруг і струмів можна шляхом еквівалентних перетворень звести до простішого і подати схемою заміщення, зображеною на рис. 2.21.

Рівняння електричної рівноваги такого кола, складене за другим законом Кірхгофа:

$$u = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt.$$

Баланс миттєвих потужностей кола відповідно до закону збереження енергії:

$$p = p_R + p_L + p_C = u_R i + u_L i + u_C i ,$$

де:

• миттєва потужність ідеалізованого резистивного елемента  $p_R = u_R i = Ri i = Ri^2$  завжди додатна величина і характеризує незворотний процес поглинання енергії;

• миттєва потужність ідеалізованого індуктивного елемента

$$p_L = u_L i = L \frac{di}{dt} i = \frac{d}{dt} \frac{Li^2}{2} = \frac{d}{dt} W_m$$

за умови  $p_L > 0$  визначає швидкість надходження енергії у магнітне поле котушки, за умови  $p_L < 0$  швидкість повернення енергії з цього поля;

• миттєва потужність ідеалізованого ємнісного елемента

$$p_C = u_C i = u_C C \frac{du_C}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{d}{dt} W_{el}$$

за умови  $p_C > 0$  визначає швидкість надходження енергії в електричне поле конденсатора, за умови  $p_C < 0$  - швидкість її повернення з цього кола.

Надалі зроблено припущення, що  $U_L > U_C$ ; у такому разі напруга на вході кола випереджає за фазою струм на кут  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \sin(\omega t + \varphi) I_m \sin \omega t = U \sqrt{2} I \sqrt{2} \frac{1}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] = \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Розглянемо часові діаграми  $i$ ,  $u$ ,  $p$  на вході кола, зображені на рис. 2.28.

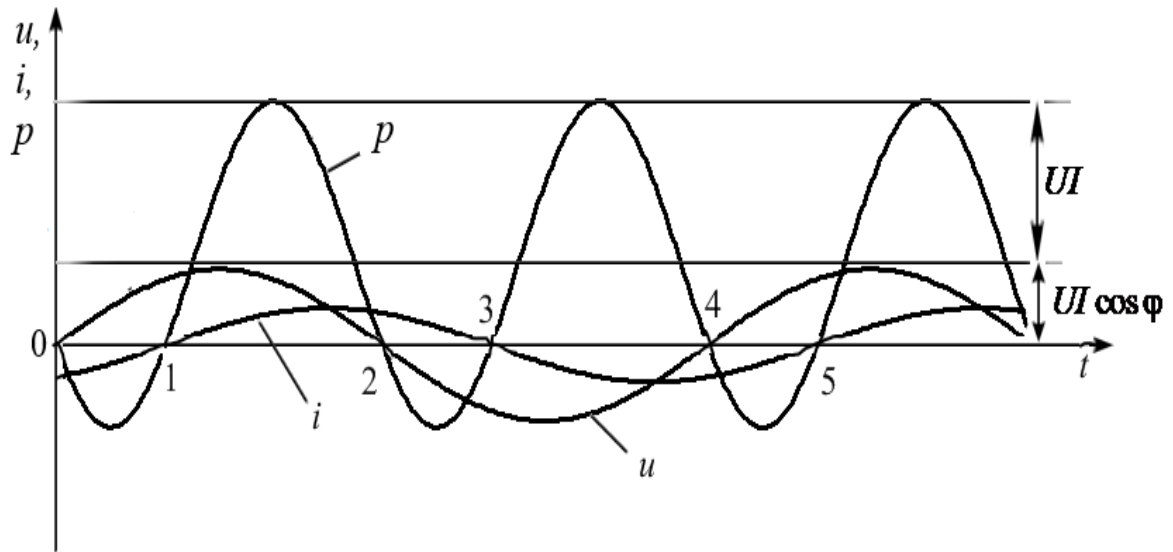


Рис. 2.28

В інтервалах часу (1-2), (3-4) миттєва потужність додатна  $p > 0$  і енергія надходить від джерела у коло, де частина її незворотно перетворюється у резистивному елементі на інші види енергії, а решта енергії запасається у електромагнітному полі кола (рис.2.29,а).

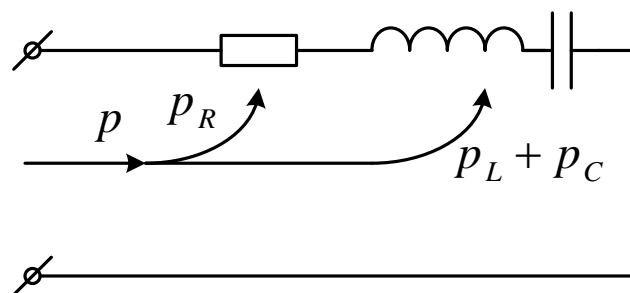


Рис.2.29,а

В інтервалах часу (0-1), (2-3), (4-5) миттєва потужність від'ємна  $p < 0$  і енергія, накопичена в електромагнітному полі, частково перетворюється у резистивному елементі на інші види енергії, а решта повертається до джерела(рис. 2.29,б).

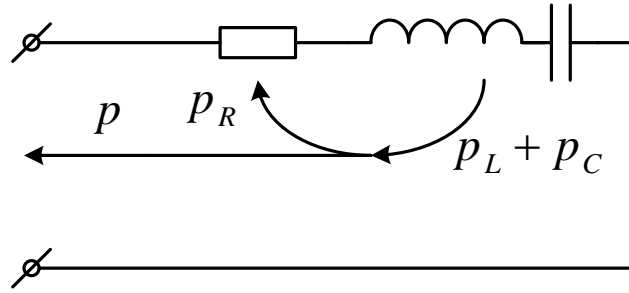


Рис. 2.29,б

На рис. 2.28 площа кривої  $p$  над віссю  $t$  пропорційна потужності, яку споживає коло від джерела. Площа кривої  $p$  під віссю  $t$  пропорційна потужності, що повертається колом джерелу. Оскільки резистивний елемент безперервно поглинає електричну енергію, перетворюючи її на інші види, то у коло надходить більше енергії, ніж повертається джерелу.

Варто звернути увагу на те, що в середині самого кола відбувається процес обміну енергією між індуктивним та ємнісним елементами. Для пояснення доцільно розглянути рівняння сумарної миттєвої потужності  $p_x$  індуктивного та ємнісного елементів:

$$p_x = p_L + p_C = U_L I \sin 2\omega t - U_C I \sin 2\omega t = (U_L - U_C) I \sin 2\omega t ,$$

а також побудувати в одній координатній площині графіки  $p_x, i, u_C$ , (рис. 2.30).

В інтервалах часу (0-1), (2-3) відбуваються такі процеси :

- струм  $i$  зростає, відповідно,  $p_L = \frac{dW_m}{dt} > 0$ ;
- напруга  $u_C$  зменшується за абсолютною величиною, відповідно

$$p_C = \frac{dW_{el}}{dt} < 0;$$

• сумарна миттєва потужність реактивних елементів  $p_x > 0$  , тобто енергія надходить у електромагнітне поле кола .

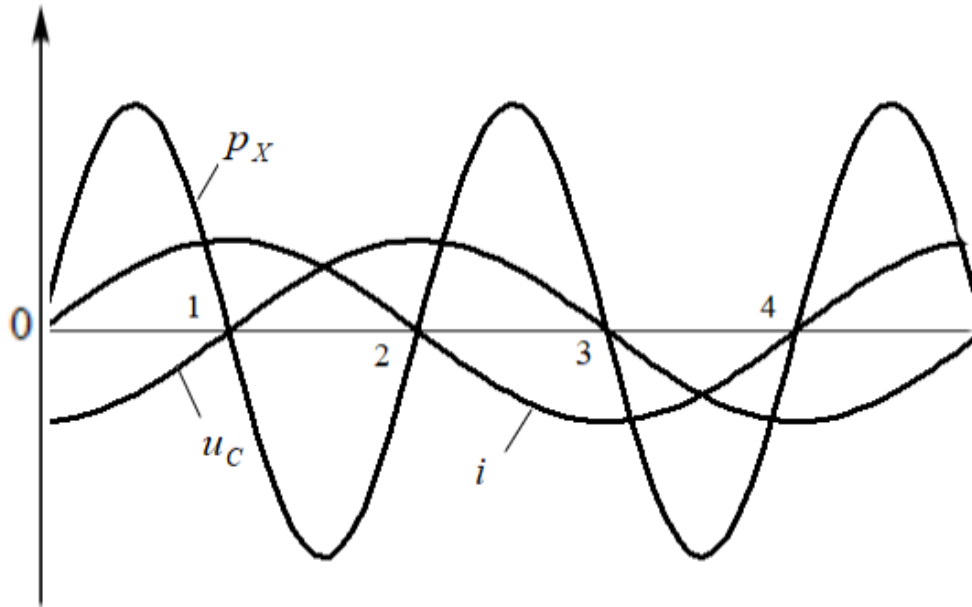


Рис. 2.30

Отже у магнітне поле індуктивного елемента одночасно надходить енергія з електричного поля ємнісного елемента і від джерела живлення. (рис. 2.31,а) .

В інтервалах часу (1-2), (3-4)

- струм  $i$  зменшується за абсолютною величиною, що відповідає  $p_L = \frac{dW_M}{dt} < 0$ ;

- напруга  $u_C$  збільшується, тож  $p_C = \frac{dW_{el}}{dt} > 0$ ;

- $p_x < 0$ , що означає повернення енергії з електромагнітного поля.

Отже, енергія, що була накопичена у магнітному полі індуктивного елемента, частково перекачується у електричне поле ємнісного елемента, а решта її віддається у зовнішнє коло (рис.2.31,б).

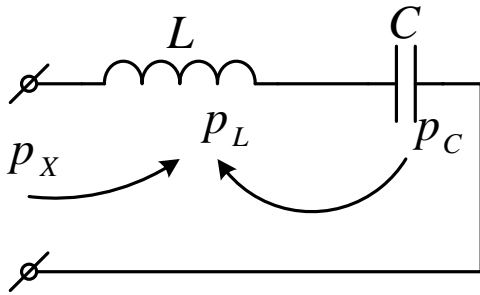


Рис. 2.31,а

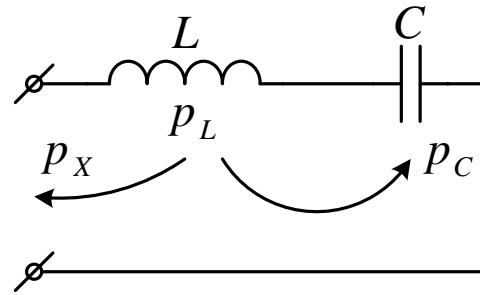


Рис. 2.31,б

### 2.1.13.2. Активна, реактивна і повна потужності кола.

Припустимо, що до двополюсника на рис.2.27 прикладено синусоїдну напругу  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$  і проходить струм  $i = I_m \sin \omega t$ .

Активною потужністю  $P$  електричного кола при періодичних процесах у ньому називають середнє значення миттєвої потужності за період  $T$ :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \int_0^T U_m \sin(\omega t + \varphi) I_m \sin \omega t dt = \frac{U_m I_m}{T} \int_0^T \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t dt = \\
 &= \frac{UI}{T} \int_0^T [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] dt = \frac{UI}{T} \int_0^T \cos \varphi dt - \frac{UI}{T} \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt
 \end{aligned}$$

Другий інтеграл дорівнює нулю, як інтеграл від гармонічної функції, взятий за період, тоді:

$$P = UI \cos \varphi. \quad (2.79)$$

Активна потужність характеризує інтенсивність передачі енергії від джерела до споживача і перетворення її на інші види енергії, тобто активний незворотний процес. Одиниця виміру  $P$  – ват [Вт].

Слід звернути увагу на те, що активна потужність  $P \geq 0$  (у супротивному випадку двополюсник не споживає а, навпаки, віддає потужність).

Електричні машини і апарати створюють для роботи за певних значень напруги і струму. Конструювати пристрої, базуючись тільки на активній потужності  $P = UI \cos \varphi$  неприпустимо, оскільки у більшості випадків величина  $\varphi$  залежить від режиму роботи. Електротехнічні пристрої характеризують повною потужністю  $S$ .

Під повною потужністю  $S = UI$  розуміють найбільше значення активної потужності, яке можна отримати за даних діючих значень напруги  $U$  та струму  $I$ . Одиниця виміру повної потужності – вольт-ампер [ВА]. Повна потужність  $S$  визначає експлуатаційні можливості багатьох електротехнічних пристроїв (генераторів, трансформаторів, електричних двигунів тощо), для яких вона вказується як номінальна:  $S_{\text{НОМ}} = U_{\text{НОМ}} I_{\text{НОМ}}$ .

Для аналізу процесів у колі за умови неповного використання енергетичних можливостей джерела, тобто при наявності у колі реактивних елементів, введено поняття реактивної потужності  $Q$ . Введення  $Q$  дозволяє більш точно відобразити сукупність фізичних процесів, що відбуваються в індуктивних та ємнісних елементах двополюсника.

Реактивна потужність  $Q$  характеризує інтенсивність обміну енергією між джерелом і двополюсником, причому в процесі обміну енергія не витрачається, тобто робота не виконується. У колі синусоїдного струму

$$Q = UI \sin \varphi. \quad (2.80)$$

Одиниця виміру  $Q$  - вольт-ампер реактивний [ВАр].

Якщо вхідний опір двополосника має активно-індуктивний характер, то  $\varphi > 0, Q > 0$  і такий двополосник споживає реактивну енергію із зовнішньої частини кола (наприклад, трансформатор, асинхронний двигун, індукційна піч тощо). Якщо вхідний опір двополосника має активно-ємнісний характер, то  $\varphi < 0, Q < 0$  і такий двополосник генерує реактивну потужність у зовнішню частину кола (наприклад, конденсатор, синхронний компенсатор).

Співвідношення між активною  $P$ , реактивною  $Q$  та повною  $S$  потужностями можна отримати, скориставшись формулами:

$$P = UI \cos \varphi, \quad Q = UI \sin \varphi, \quad S = UI,$$

$$P^2 + Q^2 = (UI)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = S^2.$$

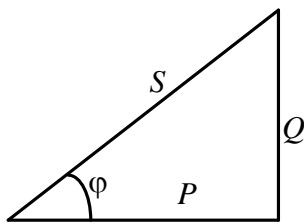


Рис.2.32

Співвідношенню  $P^2 + Q^2 = S^2$  відповідає співвідношення сторін прямокутного трикутника (рис. 2.32)

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI}, \quad \sin \varphi = \frac{Q}{UI}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}.$$

Для послідовно з'єднаних  $R, L, C$  елементів трикутник потужностей подібний до трикутника напруг і трикутника опорів (рис. 2.33); це впливає із співвідношень:

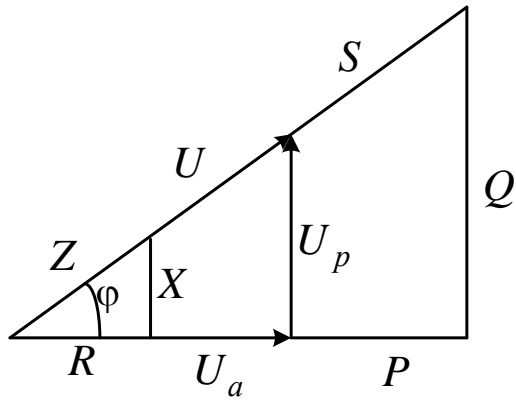


Рис. 2.33

$$\begin{aligned}
 P &= UI \cos \varphi = U_a I = I^2 R, \\
 Q &= UI \sin \varphi = U_p I = (U_L - U_C) I = \\
 &= (X_L - X_C) I^2 = I^2 X, \\
 S &= UI = I^2 Z.
 \end{aligned}$$

Для паралельного з'єднання  $R, L, C$  елементів трикутник потужностей подібний до трикутника струмів та трикутника провідностей (рис. 2.34); це впливає із співвідношень:

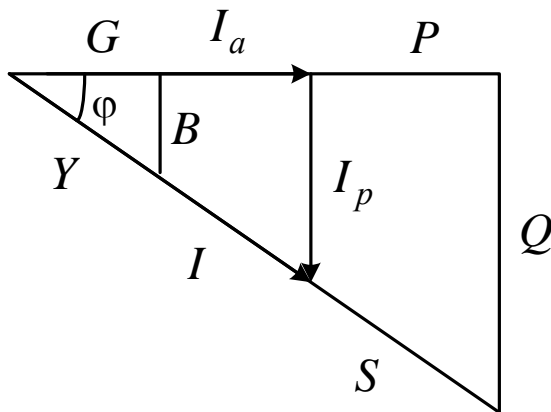


Рис. 2.34

$$\begin{aligned}
 P &= UI \cos \varphi = I_a U = U^2 G, \\
 Q &= UI \sin \varphi = I_p U = (I_L - I_C) U = \\
 &= (B_L - B_C) U^2 = U^2 B, \\
 S &= UI = U^2 Y.
 \end{aligned}$$

### 2.1.13.3. Комплексна потужність

а) Споживач.

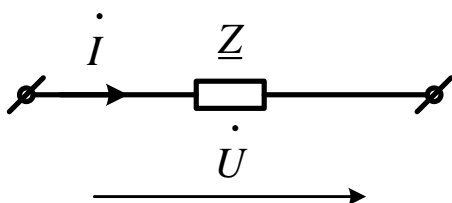


Рис. 2.35

$\underline{Z}$  – комплексний опір,

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}.$$

$$\underline{U} = U e^{j\psi_u}, \quad \underline{I} = I e^{j\psi_i},$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i.$$

$I^*$  – спряжений комплекс струму,  $I^* = Ie^{-j\psi_i}$ .

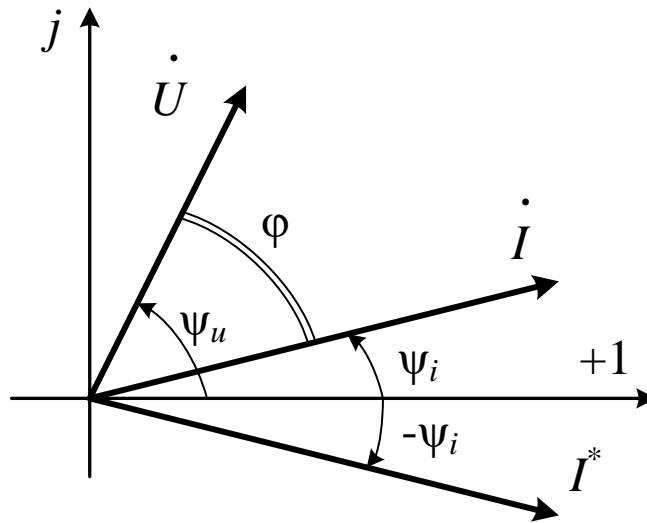


Рис. 2.36

$$\underline{U} \cdot I^* = Ue^{j\psi_u} \cdot Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{j\varphi} = Se^{j\varphi} = \tilde{S}. \quad (2.81)$$

$$\tilde{S} = UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ. \quad (2.82)$$

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z}$$

$$\tilde{S} = I^2 \underline{Z} = I^2(R + jX) = I^2 \cdot R + jI^2 \cdot X = P + jQ. \quad (2.83)$$

Із (2.83), що дійсна частина комплексу  $\tilde{S}$  – це активна потужність  $P$ , а уявна – це реактивна потужність  $Q$ .

Для пасивного двополюсника:

$$\varphi = 0 \div (\pm \pi/2), \text{ відповідно } P \geq 0;$$

Якщо  $\varphi > 0$ , то  $Q > 0$ ; якщо  $\varphi < 0$ , то  $Q < 0$ .

б) Джерело ЕРС (ДЕ).

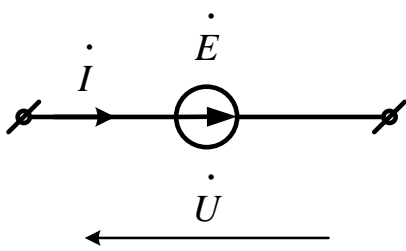


Рис. 2.37

$$\begin{aligned} \underline{E} &= Ue^{j\psi_e}, \quad \underline{I} = Ie^{j\psi_i}, \\ \tilde{S}_{ДЕ} &= \underline{E} \cdot \underline{I}^* = Ee^{j\psi_e} \cdot Ie^{-j\psi_i} = \\ &= EI \cdot e^{j(\psi_e - \psi_i)} = \\ &= EI \cos(\psi_e - \psi_i) + jEI \sin(\psi_e - \psi_i) = \\ &= P_{ДЕ} + jQ_{ДЕ}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$P_{ДЕ} = EI \cos(\psi_e - \psi_i)$$

$$P_{ДЕ} > 0 \text{ коли } |\psi_e - \psi_i| < \pi/2; \quad P_{ДЕ} < 0 \text{ коли } |\psi_e - \psi_i| > \pi/2;$$

$$Q_{ДЕ} > 0 \text{ коли } \psi_e > \psi_i; \quad Q_{ДЕ} < 0 \text{ коли } \psi_e < \psi_i.$$

Вказані співвідношення мають місце, якщо додатні напрямки ЕРС і струму збігаються, як на рис. 2.37.

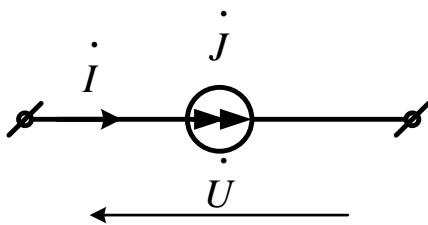


Рис. 2.38

в) Джерело струму (ДС)

$$\begin{aligned} \underline{J} &= Je^{j\psi_j}, \quad \underline{U} = Ue^{j\psi_u} \\ \tilde{S}_{ДС} &= \underline{U} \cdot \underline{J}^* = Ue^{j\psi_u} \cdot Je^{-j\psi_j} = \\ &= UJ \cdot e^{j(\psi_u - \psi_j)} = \\ &= UJ \cos(\psi_u - \psi_j) + jUJ \sin(\psi_u - \psi_j) = \\ &= P_{ДС} + jQ_{ДС}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$P_{ДС} = UJ \cos(\psi_u - \psi_j).$$

$$P_{ДС} > 0 \text{ коли } |\psi_u - \psi_j| < \pi/2; \quad P_{ДС} < 0 \text{ коли } |\psi_u - \psi_j| > \pi/2;$$

$$Q_{ДС} > 0 \text{ коли } \psi_u > \psi_j; \quad Q_{ДС} < 0 \text{ коли } \psi_u < \psi_j.$$

#### 2.1.13.4. Баланс потужностей кола синусоїдного струму.

Виходячи із закону збереження енергії, можна стверджувати, що сума активних потужностей джерел енергії дорівнює сумі активних потужностей, які надходять до споживачів.

$$\sum P_{k \text{ дж}} = \sum P_{k \text{ сп}}, \quad (2.86)$$

$$\sum P_{k \text{ дж}} = \sum P_{k \text{ де}} + \sum P_{k \text{ дс}}. \quad (2.87)$$

В теорії електричних кіл доведено (теорема Ланжевена), що алгебраїчна сума реактивних потужностей джерел енергії дорівнює алгебраїчній сумі реактивних потужностей споживачів.

$$\sum Q_{k \text{ дж}} = \sum Q_{k \text{ сп}}. \quad (2.88)$$

Співвідношення (2.87) та (2.88) можна поєднати:

$$\sum \tilde{S}_{k \text{ дж}} = \sum \tilde{S}_{k \text{ сп}}. \quad (2.89)$$

З урахуванням комплексних потужностей джерел енергії і комплексних потужностей споживачів маємо:

$$\sum \underline{E}_k I_k^* + \sum \underline{U}_k J_k^* = \sum I_k^2 \underline{Z}. \quad (2.90)$$

Вираз (2.90) являє собою баланс потужностей електричного кола в комплексній формі.

#### 2.1.13.5. Коефіцієнт потужності та способи його підвищення

Співвідношення між активною  $P$  і повною потужністю  $S$  двополюсника характеризують коефіцієнтом потужності:  $\cos \varphi = \frac{P}{UI}$ .

Коефіцієнт потужності  $\cos\varphi$  показує яка частина повної потужності  $S$  складає активну потужність  $P$ , або яка частина всієї споживаної електроенергії перетворюється у двополюснику на інші види енергії. Для кращого використання електротехнічного обладнання бажано, щоб  $\cos\varphi$  був наближений до одиниці.

Принцип роботи поширених електротехнічних пристроїв (трансформаторів, асинхронних двигунів, перетворювачів тощо) заснований на використанні енергії електромагнітного поля, яке утворюється у певній частині пристрою за допомогою обмоток зі струмом. Таке електрообладнання працює з додатним кутом зсуву фаз  $\varphi$  між напругою і струмом, у складі якого існує значна реактивна (індуктивна) складова. Наявність у струмі пристрою суттєвої індуктивної складової  $I_L$  спричинює такі негативні явища.

- За рахунок  $I_L$  збільшується величина струму  $I_{\text{Л}}$  у лінії електропередачі; відповідно зростають втрати енергії у струмопровідних частинах (у проводах лінії, обмотках генераторів, двигунів, трансформаторів тощо);

- Зазначені пристрої споживають значну реактивну потужність  $Q_L$ , яка циркулює між генератором і споживачами, не виконуючи корисної роботи. Циркуляція  $Q_L$  призводить до перевантаження генератора і лінії електропередачі реактивною потужністю і неповного їх використання.

Низьке значення  $\cos\varphi$  окремих пристроїв погіршує коефіцієнт потужності промислового підприємства в цілому.

Для підвищення  $\cos\varphi$  розроблені застосовують наступні заходи.

- Проектування пристроїв з максимально можливим коефіцієнтом потужності для найбільш тривалого режиму роботи.

- Правильний вибір електрообладнання, наприклад, по можливості замінюють асинхронні двигуни на синхронні, що мають значно більший  $\cos\varphi$ .

- Раціональний вибір режиму роботи електрообладнання (бажано, щоб пристрої працювали на повну потужність).

- Компенсація кута зсуву фаз.

Останній спосіб є найбільш радикальним, тому розглянемо його окремо. Сутність методу компенсації кута зсуву фаз полягає у тому, що до затискачів навантаження з низьким  $\cos\varphi$  підключають конденсаторну батарею (рис.17), струм якої практично випереджає напругу на затискачах на кут  $\pi/2$ .

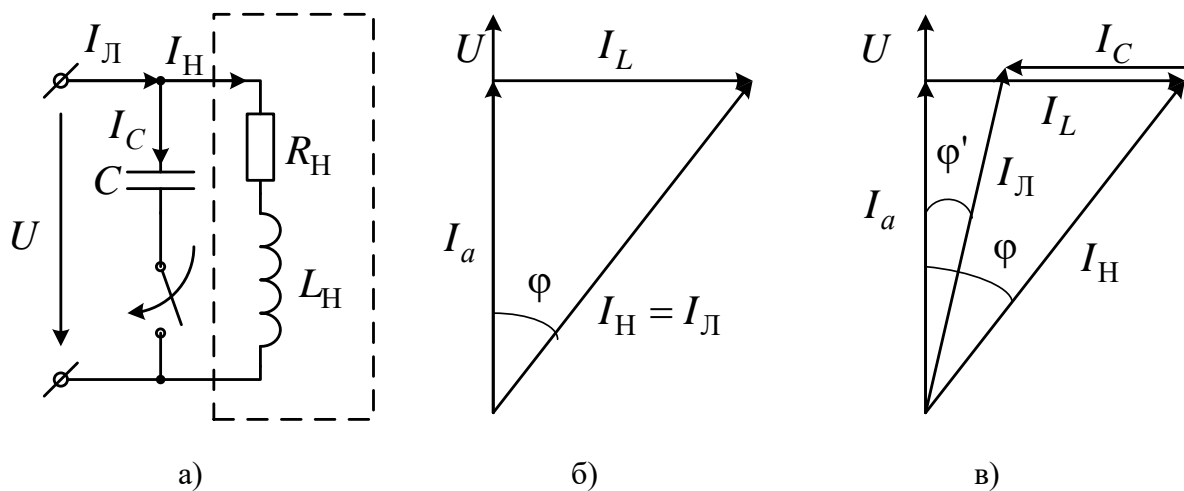


Рис. 2.39

До підключення конденсаторної батареї струм у лінії передачі  $I_L$  дорівнював струму навантаження  $I_H$  (рис. 2.39,а)  $I_L = I_H = \sqrt{I_a^2 + I_L^2}$ , де  $I_a$  - активна,  $I_L$  - індуктивна складові струму (рис. 2.39,б).

Після підключення конденсаторів їх струм  $I_C$  частково компенсує індуктивну складову  $I_L$  струму пристрою, внаслідок чого струм у лінії

зменшується  $I_{\text{Л}} = \sqrt{I_a^2 + (I_L - I_C)^2}$ . Одночасно скорочується кут між напругою та струмом лінії, що ілюструє векторна діаграма на рис. 2.39,в. Відповідно зменшенню величин  $I_{\text{Л}}$ ,  $\varphi$  зменшуються втрати енергії у струмопровідних частинах і зростає коефіцієнт потужності  $\cos \varphi$ . Ємність конденсаторної батареї повинна бути такою, щоб забезпечити заданий коефіцієнт потужності. Величину  $C$  обчислюють з наступних міркувань.

Електроспоживачі потужністю  $P = \text{const}$  при роботі з коефіцієнтом потужності  $\cos \varphi$ , споживають з мережі реактивну потужність  $Q = P \text{tg} \varphi$ . За даної величини  $\cos \varphi'$  ( $\cos \varphi' > \cos \varphi$ ) вони будуть споживати реактивну потужність  $Q' = P \text{tg} \varphi'$ . Конденсаторна батарея повинна генерувати реактивну потужність  $Q_C$ , яка компенсує  $Q - Q'$ :

$$Q_C = Q - Q' = P(\text{tg} \varphi - \text{tg} \varphi').$$

З іншого боку, реактивну потужність конденсаторів можна визначити за формулою:

$$Q_C = B_C U^2 = \omega C U^2 = 2\pi f C U^2.$$

З порівняння двох вищенаведених виразів  $Q_C$  впливає формула:

$$C = \frac{P(\text{tg} \varphi - \text{tg} \varphi')}{2\pi f U^2}. \quad (2.91)$$

За допомогою конденсаторної батареї можна досягти  $\cos \varphi = 1$  (режим повної компенсації), але у цьому разі потрібна велика ємність  $C$ , забезпечення якої вимагає підключення додаткових конденсаторів. З економічної доцільності зазвичай обмежуються значеннями  $\cos \varphi = 0,95 - 0,97$ .

#### **2.1.14. Символічний метод розрахунку кола синусоїдного струму (метод комплексних амплітуд).**

Із попереднього аналізу видно, що при запису рівнянь кола синусоїдного струму комплексними функціями інтегрально-диференціальні співвідношення для миттєвих значень перетворюються в алгебраїчні рівняння для комплексних амплітуд. Рішення рівнянь Кірхгофа, записаних комплексними амплітудами, будуть значно простішими, ніж рішення інтегрально-диференціальних співвідношень для миттєвих значень. Це відомі рішення рівнянь (метод Гауса, метод Крамера), тобто ці рішення будуть подібні рішенням рівнянь електричного кола для постійного струму. Крім рівнянь Кірхгофа в комплексній формі, можна також використати відомі із попереднього аналізу рівняння через контурні струми та через вузлові потенціали чи напруги. Але в рівняннях для комплексних амплітуд є певні відмінності від рівнянь для кола постійного струму. В рівняннях для кола постійного струму були присутні дійсні функції струмів, дійсні опори чи провідності. В рівняннях же для комплексних амплітуд на відміну від рівнянь постійного струму, присутні не дійсні синусоїдні функції струму, а їх комплексні амплітуди, які виступають як певні символи дійсних синусоїдних функцій та наруг, а замість опорів та провідностей віток в ці рівняння входять комплексні опори чи провідності. Розв'язавши рівняння, отримаємо комплексні струми чи напруги, по яких потім необхідно встановити дійсні синусоїдні функції струму та напруги. Тому такий метод використання комплексних функцій для аналізу кола синусоїдного струму отримав назву символічного методу, бо при цьому комплексні амплітуди струмів і наруг є тільки відповідностями для синусоїдних струмів і наруг. В дійсності ж мова йде тільки про форму запису рівнянь, складених на основі законів

Кірхгофа чи іншими методами (МКС, МВП) з використанням комплексних амплітуд.

## **Тема 2.2. Електричні кола з індуктивно-зв'язаними елементами та їх розрахунок.**

### **2.2.1. Рівняння індуктивно-зв'язаних контурів для поточозчеплень і напруг.**

Два елементи називаються індуктивно-зв'язаними, якщо при зміні струму в одному з них в іншому виникає ЕРС. Ця ЕРС називається ЕРС взаємоіндукції. Нехай, наприклад, два контури розміщені недалеко один від одного (рис. 2.40).

Нехай в першому контурі проходить струм  $i_1$ , а у другому контурі струм відсутній  $i_2 = 0$  (рис. 2.40,а). Струм  $i_1$  в першому контурі створює потік самоіндукції  $\Phi_{1L}$  та потік розсіювання  $\Phi_{1S}$ , а у другому контурі - потік взаємоіндукції  $\Phi_{2M}$ .

$$\Phi_{1L} = \Phi_{1S} + \Phi_{2M}.$$

Поточозчеплення самоіндукції першого контуру:

$$\Psi_{1L} = L_1 \cdot i_1, \quad L_1 - \text{індуктивність першого контуру};$$

поточозчеплення взаємоіндукції другого контуру:

$$\Psi_{2M} = M \cdot i_1, \quad M - \text{коефіцієнт взаємоіндукції (взаємна індуктивність)}.$$

Індуктивність  $L_1$  залежить від геометричних розмірів контуру та магнітної проникності середовища  $\mu$ , в якому знаходиться контур.

Взаємна індуктивність  $M$  між контурами залежить від геометричних розмірів контурів, від середовища та від взаємного розміщення контурів один відносно одного.

Розглянемо випадок, коли є струм у другому контурі, а в першому відсутній (рис. 2.40,б). Струм  $i_2$  у другому контурі створює потік самоіндукції  $\Phi_{2L}$  та потік розсіювання  $\Phi_{2S}$ , а у першому контурі - потік взаємоіндукції  $\Phi_{1M}$ .

$$\Phi_{2L} = \Phi_{2S} + \Phi_{1M}.$$

$\Psi_{2L} = L_2 \cdot i_2$  – потокозчеплення самоіндукції другої котушки;

$\Psi_{1M} = M \cdot i_2$  – потокозчеплення взаємоіндукції першої котушки.

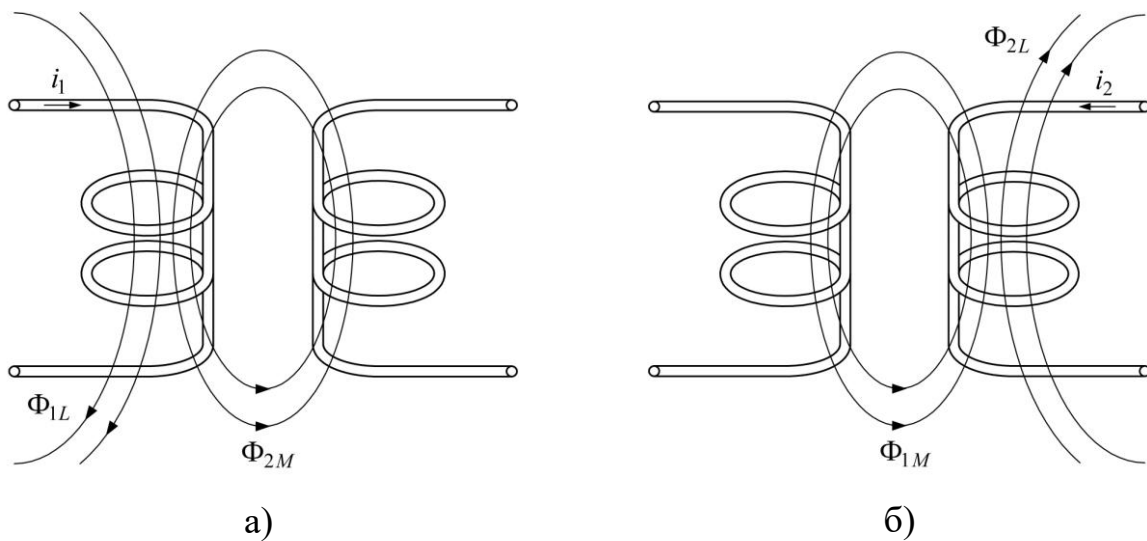


Рис. 2.40

Нехай струми проходять в обох контурах одночасно (рис. 2.41). Якщо взаємне орієнтування потоків таке, як вказано на рис. 2.41, то повні потокозчеплення контурів визначаються як суми потокозчеплень взаємоіндукції і самоіндукції.

Тобто маємо:

$\Psi_1$  – повне потокозчеплення першого контуру

$$\Psi_1 = \Psi_{1L} + \Psi_{1M} = L_1 i_1 + M i_2, \quad (2.92)$$

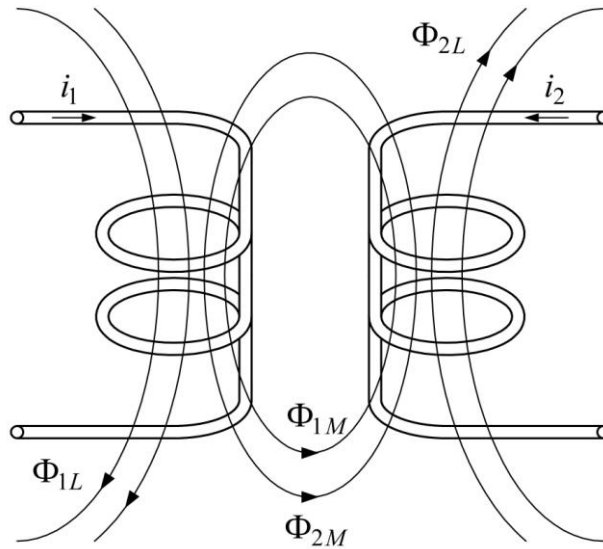


Рис. 2.41

$\Psi_2$  – повне потокозчеплення другого контуру,

$$\Psi_2 = \Psi_{2L} + \Psi_{2M} = L_2 i_2 + M i_1. \quad (2.93)$$

Якщо результуюче потокозчеплення визначається як сума потокозчеплень самоіндукції та взаємоіндукції (2.92) і (2.93), то говорять, що в цьому випадку маємо узгоджені напрямки струмів в контурах. Узгоджені напрямки маємо на рис. 2.41. *Полюси контурів (катушок), відносно яких узгоджені струми орієнтовані однаково, називаються однойменними.* Однойменні полюси позначаються на схемах та на реальних пристроях відповідними мітками: зірки, П, К і ін.

Якщо на індуктивно зв'язаних елементах однойменні полюси позначені, то тоді необов'язково викреслювати контури так, щоб було

видно, як вони намотані. Тоді схему рис. 2.41 можна замінити схемою рис. 2.42.

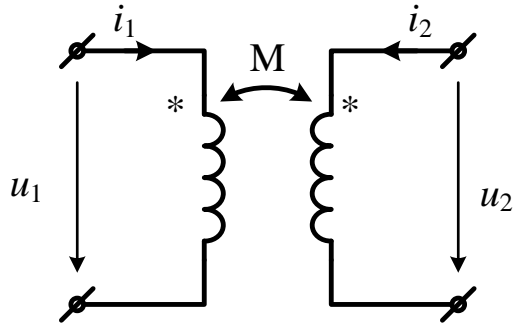


Рис. 2.42

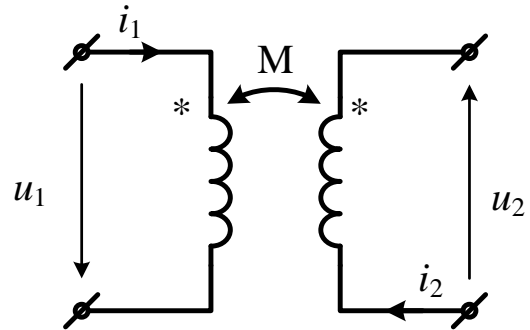


Рис. 2.43

Якщо змінити напрямок струму в одному з контурів (рис. 2.43), тоді для поточозчеплень рівняння матиме вигляд:

$$\Psi_1 = \Psi_{1L} - \Psi_{1M} = L_1 i_1 - M i_2, \quad (2.94)$$

$$\Psi_2 = \Psi_{2L} - \Psi_{2M} = L_2 i_2 - M i_1. \quad (2.95)$$

Якщо струми в контурах змінюються в часі, то змінюється і поточозчеплення в контурах. Це призводить до виникнення в контурах ЕРС.

Напруги на контурах визначаються за (2.94) та (2.95):

$$u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}, \quad (2.96)$$

$$u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}. \quad (2.97)$$

Якщо струми в контурах змінюються за синусоїдним законом з однаковою частотою, тоді рівняння (2.96) і (2.97) можна записати в комплексній формі рівняннями (2.98) та (2.99):

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 \pm j\omega M \cdot \underline{I}_2, \quad (2.98)$$

$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 \cdot \underline{I}_2 \pm j\omega M \cdot \underline{I}_1. \quad (2.99)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{1L} + \underline{U}_{1M}, \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_{2L} + \underline{U}_{2M};$$

$\underline{U}_{1L} = j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1$  - напруга самоіндукції першого контуру,

$\underline{U}_{1M} = \pm j\omega M \cdot \underline{I}_2$  - напруга взаємоіндукції першого контуру;

$\underline{U}_{2L} = j\omega L_2 \cdot \underline{I}_2$  - напруга самоіндукції другого контуру,

$\underline{U}_{2M} = \pm j\omega M \cdot \underline{I}_1$  - напруга взаємоіндукції другого контуру.

### 2.2.2. Послідовне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок.

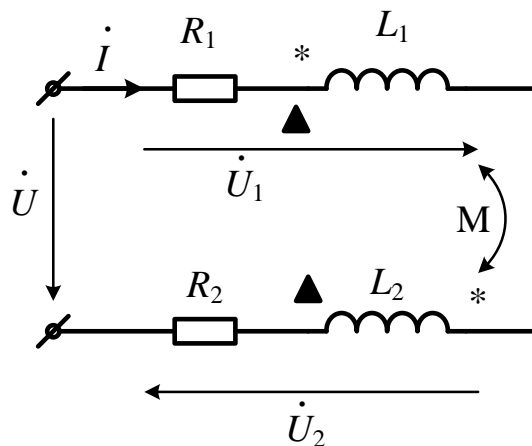


Рис. 2.44

(\*) – узгоджене включення, (▲) – зустрічне включення.

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2; \quad (2.100)$$

$$\underline{U}_1 = R_1 \cdot \underline{I} + j\omega L_1 \cdot \underline{I} \pm j\omega M \cdot \underline{I}; \quad (2.101)$$

$$\underline{U}_2 = R_2 \cdot \underline{I} + j\omega L_2 \cdot \underline{I} \pm j\omega M \cdot \underline{I}. \quad (2.102)$$

Напруга взаємної індукції  $j\omega M \cdot \underline{I}$  враховується із знаком «+», якщо котушки включені узгоджено, і з знаком «-», якщо зустрічно.

$$\underline{U} = (R_1 + R_2)\underline{I} + j(\omega L_1 + \omega L_2 \pm 2\omega M)\underline{I}; \quad (2.103)$$

$$\underline{U} = R_e \underline{I} + jX_e \underline{I}; \quad (2.104)$$

$$R_e = R_1 + R_2, \quad (2.105)$$

$R_e$  – еквівалентний активний опір, величина якого не залежить від включення котушок.

$$X_{e\text{узГ}} = \omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M, \quad (2.106)$$

$$X_{e\text{зуСТР}} = \omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M. \quad (2.107)$$

Із (2.106) та (2.107) видно, що величина еквівалентного реактивного опору  $X_e$  залежить від включення котушок. Якщо котушки включені узгоджено, то  $X_e$  розраховується по формулі (2.106), якщо зустрічно, то по формулі (2.107).

За формулами (2.106) і (2.107), маючи значення реактивних опорів послідовно з'єднаних котушок при узгодженому та зустрічному включенні котушок, можна визначити взаємну індуктивність  $M$  по співвідношенню (2.108)

$$M = \frac{X_{e\text{узГ}} - X_{e\text{зуСТР}}}{4\omega}; \quad (2.108)$$

$$\omega = 2\pi f, \quad f = 50 \text{ Гц}, \quad \omega = 314 \text{ рад/с}.$$

По приведеним рівнянням для напруг (2.103) - (2.104) побудуємо векторні діаграми послідовного з'єднання, окремо для кожного варіанту включення.

а) узгоджене включення:

$$\varphi_1 > 0, \quad \varphi_2 > 0, \quad \varphi > 0.$$

При послідовному узгодженому включенні всі кути  $\varphi$  додатні.

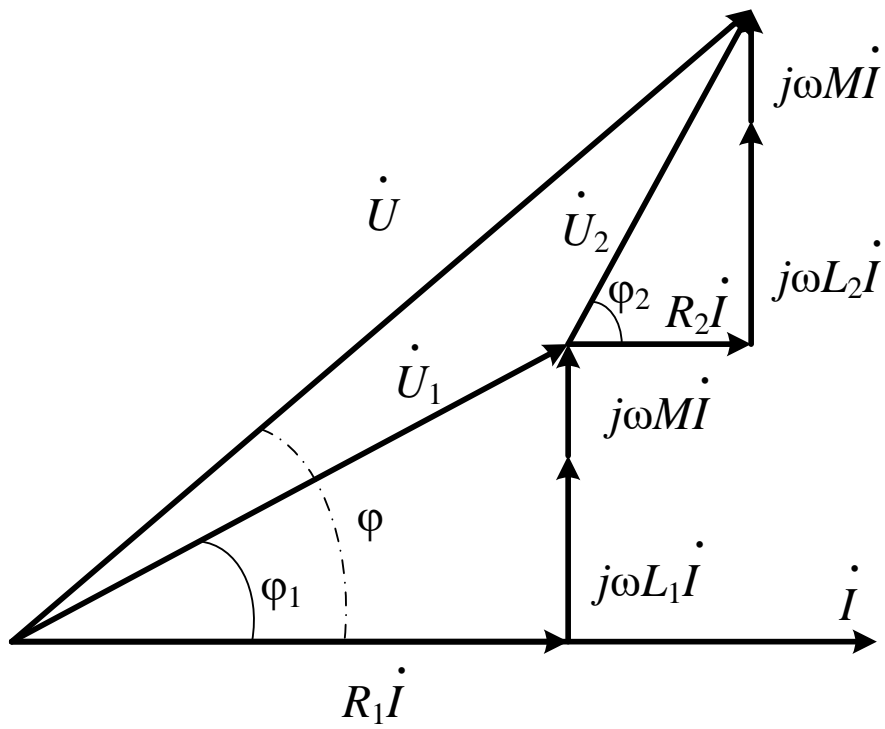


Рис. 2.45

б) зустрічне включення:

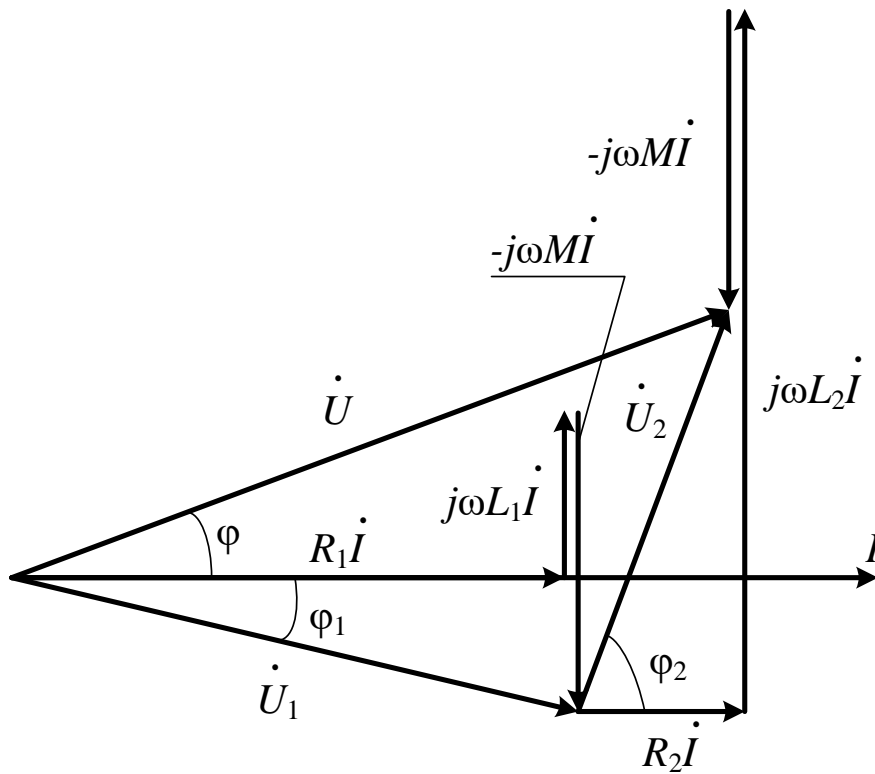


Рис. 2.46

$\varphi_1 < 0$  – ефект «хибної» ємності ( $L_1 < M$ ),  $\varphi_2 > 0$ ,  $\varphi > 0$ .

### 2.2.3. Паралельне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок.

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2; \quad (2.109)$$

$$\underline{U} = R_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 \pm j\omega M \cdot \underline{I}_2; \quad (2.110)$$

$$\underline{U} = R_2 \cdot \underline{I}_2 + j\omega L_2 \cdot \underline{I}_2 \pm j\omega M \cdot \underline{I}_1. \quad (2.111)$$

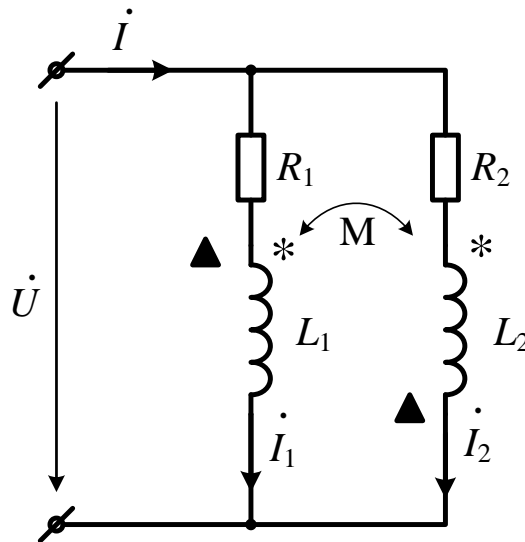


Рис. 2.47

$R_1 + j\omega L_1 = \underline{Z}_1$  - комплексний опір першої котушки без взаємоіндукції,

$R_2 + j\omega L_2 = \underline{Z}_2$  - комплексний опір другої котушки без взаємоіндукції,

$j\omega M = \underline{Z}_M$  - комплексний опір взаємоіндукції.

$$\underline{U} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 \pm \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_2, \quad (2.112)$$

$$\underline{U} = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 \pm \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_1. \quad (2.113)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (2.112), (2.113) відносно невідомих струмів.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \pm \underline{Z}_M \\ \pm \underline{Z}_M & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \underline{U} & \pm \underline{Z}_M \\ \underline{U} & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{U}(\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{U} \\ \pm \underline{Z}_M & \underline{U} \end{vmatrix} = \underline{U}(\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M);$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}, \quad (2.114)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}, \quad (2.115)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}. \quad (2.116)$$

Із формул (2.114), (2.115) та (2.116) для комплексних еквівалентних опорів першої, другої котушки та всього кола з врахуванням взаємодукції матимемо:

$$\underline{Z}_{1e} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M} = R_{1e} + jX_{1e}, \quad (2.117)$$

$$\underline{Z}_{2e} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M} = R_{2e} + jX_{2e}, \quad (2.118)$$

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M} = R_e + jX_e \quad (2.119)$$

Якщо  $\underline{Z}_M = 0$ , то  $\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ , тобто маємо відому формулу для

паралельного з'єднання.

При наявності взаємоіндукції змінюються не тільки реактивні опори, але також і активні  $R_{1e}$  та  $R_{2e}$ . Із формули (2.118) також видно, якщо  $L_1 < M$ , то при узгодженому включенні у другій котушці (на відміну від послідовного з'єднання) буде спостерігатися ефект «хибності ємності».

По формулам (2.112) та (2.113) побудуємо векторні діаграми струмів і напруг окремо для узгодженого і зустрічного включення.

а) узгоджене включення котушок:

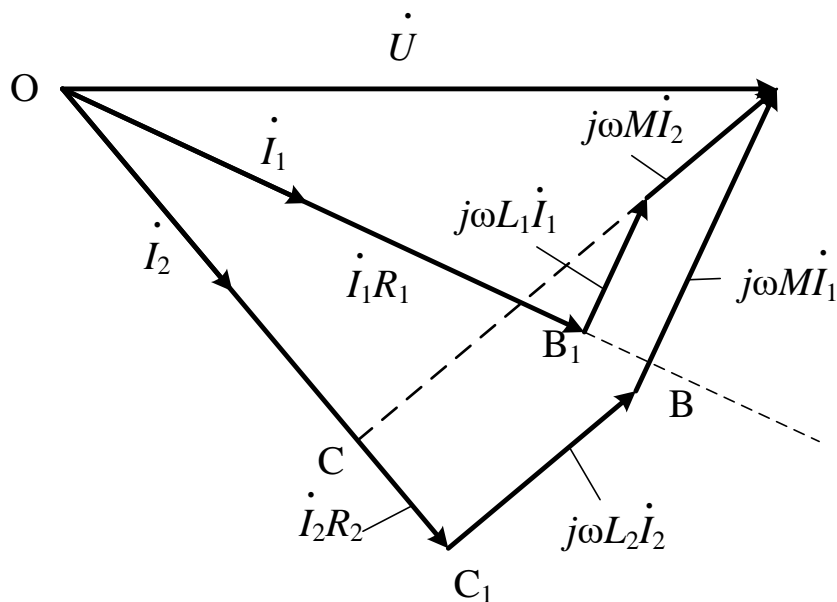


Рис. 2.48

Як видно із приведеної векторної діаграми, відрізок  $OB_1 < OB$ , тобто  $I_1 R_1 < I_1 R_{1e}$ ;  $OC_1 > OC$ , тобто  $I_2 R_2 > I_2 R_{2e}$ ; відповідно маємо:

$$I_1^2 R_1 < I_1^2 R_{1e}, P_{1T} < P_{1a}; \quad I_2^2 R_2 > I_2^2 R_{2e}, P_{2T} > P_{2a}.$$

Останні нерівності вказують на те, що в першу котушку надходить активна потужність від джерела енергії, більша ніж теплові втрати першої

катушки. Надлишок активної потужності із першої катушки магнітним потоком передається в другу катушку, де теплові втрати більші ніж активна потужність, що надходить від джерела. Баланс активної потужності виконується:

$$P_{1a} + P_{2a} = P_{1T} + P_{2T}.$$

б) зустрічне включення.

Векторну діаграму будуюмо у відповідності з рівнянням (2.112) та (2.113) відповідного аналізу, при умові, що необхідно враховувати нижні знаки цих рівнянь

$$\underline{U} = R_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 - j\omega M \cdot \underline{I}_2; \underline{U} = R_2 \cdot \underline{I}_2 + j\omega L_2 \cdot \underline{I}_2 - j\omega M \cdot \underline{I}_1.$$

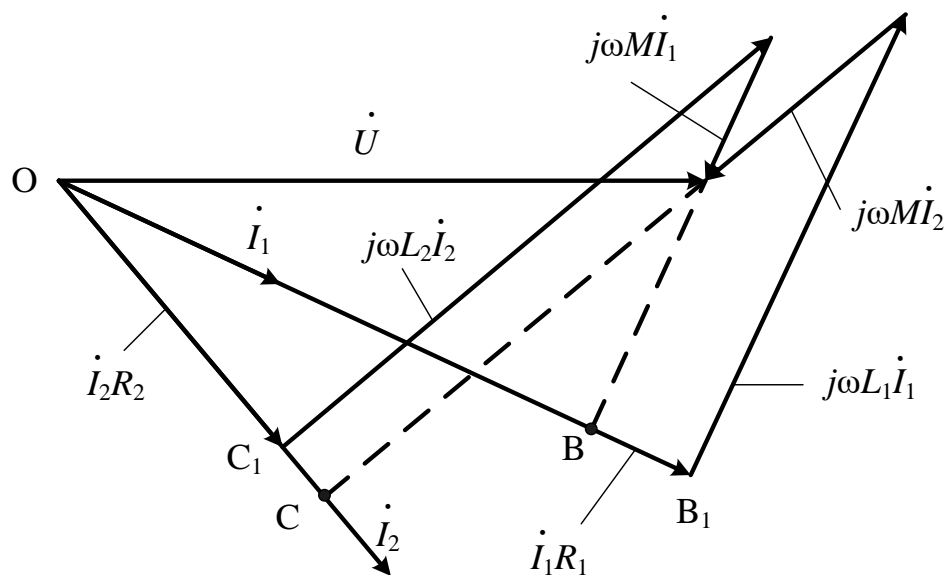


Рис. 2.49

Як видно з векторної діаграми, відрізок  $OB < OB_1$ , тому  $I_1 R_1 > I_1 R_{1e}$ ; також відрізок  $OC > OC_1$ , тому  $I_2 R_2 < I_2 R_{2e}$ . Із співвідношень для напруг випливають наступні співвідношення для потужностей:

$$I_1^2 R_1 > I_1^2 R_{1e}, \quad P_{1T} > P_{1a};$$

$$I_2^2 R_2 < I_2^2 R_{2e}, \quad P_{2T} < P_{2a}.$$

Таким чином за наявності вказаних нерівностей магнітним потоком передається активна потужність з другої котушки у першу.

Баланс потужностей:

$$P_{1a} + P_{2a} = P_{1T} + P_{2T}.$$

#### 2.2.4. Передача енергії індуктивно зв'язаними елементами кола.

Виділимо із складного кола два індуктивно зв'язаних елементи, а решту кола розглянемо як активний чотирьополіусник (рис. 2.50).

Визначимо комплексні потужності взаємоіндукції першої і другої котушки:

$\tilde{S}_{1M}$  – комплексна потужність взаємоіндукції першої котушки,

$\tilde{S}_{2M}$  – комплексна потужність взаємоіндукції другої котушки.

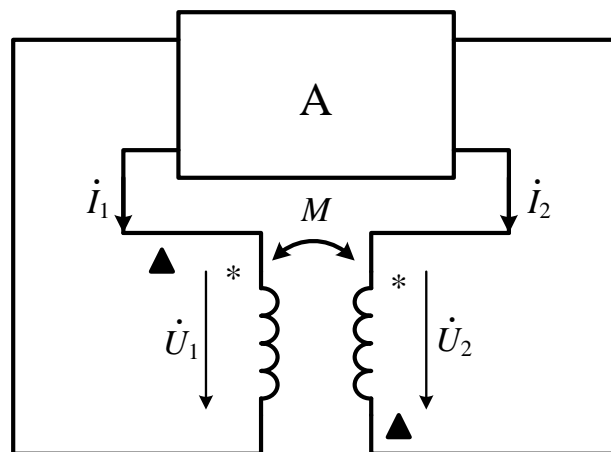


Рис. 2.50

(\*) – узгоджені струми, (▲) – зустрічні струми.

$$\underline{U} = R_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 \pm j\omega M \cdot \underline{I}_2;$$

$$\underline{U} = R_2 \cdot \underline{I}_2 + j\omega L_2 \cdot \underline{I}_2 \pm j\omega M \cdot \underline{I}_1.$$

$$\tilde{S}_{1M} = \underline{U}_{1M} \cdot I_1^*, \quad \underline{U}_{1M} = j\omega M \cdot \underline{I}_2; \quad (2.120)$$

$$\tilde{S}_{2M} = \underline{U}_{2M} \cdot I_2^*, \quad \underline{U}_{2M} = j\omega M \cdot \underline{I}_1; \quad (2.121)$$

$$\tilde{S}_{1M} = \pm j\omega M \underline{I}_2 \cdot I_1^*, \quad \tilde{S}_{2M} = \pm j\omega M \underline{I}_1 \cdot I_2^*. \quad (2.122)$$

$$\underline{I}_1 = I_1 e^{j\psi_{i_1}}, \quad \underline{I}_2 = I_2 e^{j\psi_{i_2}}.$$

$$\tilde{S}_{1M} = \pm j\omega M \cdot I_2 e^{j\psi_{i_2}} \cdot I_1 e^{-j\psi_{i_1}}, \quad \tilde{S}_{2M} = \pm j\omega M \cdot I_1 e^{j\psi_{i_1}} \cdot I_2 e^{-j\psi_{i_2}}. \quad (2.123)$$

Знак «+» ставиться у випадку узгоджених струмів, для неузгоджених струмів ставиться «-».

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{1M} &= \pm j\omega M \cdot I_2 \cdot I_1 e^{j\left(\frac{\pi}{2} - (\psi_{i_1} - \psi_{i_2})\right)} = \\ &= \pm \omega M \cdot I_2 \cdot I_1 \sin(\psi_{i_1} - \psi_{i_2}) \pm \\ &\pm j\omega M \cdot I_2 \cdot I_1 \cos(\psi_{i_1} - \psi_{i_2}) = \pm P_{1M} \pm jQ_{1M}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Враховуючи вираз (2.124) для  $\tilde{S}_{2M}$  і виконавши перетворення подібні для  $\tilde{S}_{1M}$ , то для  $\tilde{S}_{2M}$  отримаємо остаточний вираз (2.125):

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{2M} &= \pm \omega M \cdot I_2 \cdot I_1 \sin(\psi_{i_2} - \psi_{i_1}) \pm \\ &\pm j\omega M \cdot I_2 \cdot I_1 \cos(\psi_{i_2} - \psi_{i_1}) = \pm P_{2M} \pm jQ_{2M}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Порівнюючи формули (2.124) і (2.125) для комплексних потужностей  $\tilde{S}_{1M}$  і  $\tilde{S}_{2M}$ , приходимо до висновку:

$$1) P_{1M} = -P_{2M},$$

$$2) Q_{1M} = Q_{2M} = Q_M,$$

$$3) \tilde{S}_{1M} + \tilde{S}_{2M} = \pm 2jQ_M. \quad (2.126)$$

У співвідношення (2.126) знак «+» для узгоджених струмів, «-» - для неузгоджених.

$$\tilde{S}_{1M} + \tilde{S}_{2M} = \pm j2\omega MI_1 I_2 \cos(\psi_{i_1} - \psi_{i_2}). \quad (2.127)$$

Активні і реактивні складові потужності взаємоіндукції, крім діючих значень струмів  $I_1$ ,  $I_2$  та взаємоіндукції  $M$ , залежать від значень початкових фаз струмів.

1) Якщо  $\psi_{i_1} = \psi_{i_2}$ , то активні складові дорівнюють 0:  $P_{1M} = P_{2M} = 0$ , а  $Q_M = Q_{Mmax}$  – при послідовному з'єднанні котушок.

2) Якщо  $0 < \psi_{i_1} - \psi_{i_2} < \pi$  і струми узгоджені, то  $P_{1M} > 0$ ,  $P_{2M} < 0$ ; це свідчить про те, що активна потужність надходить від джерела в першу котушку, магнітним потоком взаємоіндукції передається в другу котушку і далі повертається в коло.

Для неузгоджених струмів матимемо зворотній напрямок передачі активної потужності взаємоіндукції від джерела в другу котушку, через магнітне поле в першу котушку, а далі в коло.

### 2.2.5. Розрахунок електричного кола з індуктивно зв'язаними елементами.

Для розрахунку таких кіл можна використовувати метод рівнянь Кірхгофа та метод контурних струмів. Метод вузлових потенціалів для кола з індуктивно зв'язаними елементами використовувати не можна, бо різниця потенціалів індуктивно зв'язаної пари визначається не тільки струмом і індуктивністю даної вітки, а також і струмом другої вітки.

Не можна також використовувати метод еквівалентних перетворень в такому вигляді, як це було розглянуто раніше.

Якщо ж для розрахунку кола використовується метод рівнянь Кірхгофа чи метод контурних струмів, то порядок розрахунку такий:

- 1) вибираємо додатні напрямки струмів ;
- 2) визначаємо кількість вузлів та контурів;
- 3) встановлюємо магнітні положення індуктивно зв'язаних елементів, тобто струми узгоджені чи не узгоджені в індуктивно зв'язаних елементах. При цьому однойменні затискачі індуктивно зв'язаних котушок повинні бути вказані за умовою;
- 4) складаємо необхідну кількість рівнянь вибраним методом через струми віток чи контурні струми.
- 5) розв'язавши рівняння, знаходимо струми віток чи контурні струми. Вихідні рівняння записуються в комплексній формі і після розв'язання цих рівнянь отримаємо комплекси струмів. Далі необхідно перейти від комплексів до миттєвих значень.

#### **2.2.5.1. Метод рівнянь Кірхгофа.**

Довільно задають додатні напрямки струмів у вітках і складають рівняння за першим законом Кірхгофа так само, як за відсутності індуктивного зв'язку. Довільно задають напрямки обходу вибраних незалежних контурів і складають рівняння за другим законом Кірхгофа. Зазначені рівняння мають особливість, а саме: вони містять додаткові складові  $\underline{U}_{nk}$ , якими враховують напругу взаємної індукції, створену на котушці  $n$  струмом у котушці  $k$ . Знак напруги взаємної індукції  $\underline{U}_{nk}$  у рівняннях визначають наступним чином: якщо на схемі напрямок обходу

індуктивного елементу  $n$  і напрямом струму в індуктивному елементі  $k$  однакові відносно одноіменних затискачів, то необхідно брати знак „+”, у супротивному випадку - „-”.

Для прикладу складемо рівняння за законами Кірхгофа для схеми на рис. 2.51.

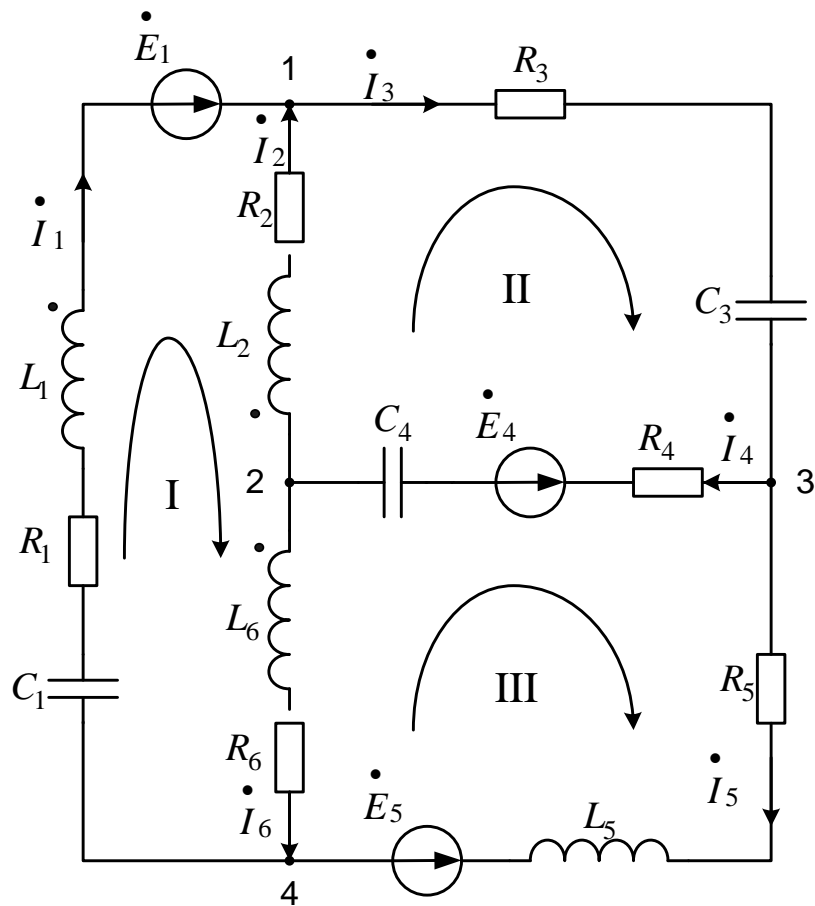


Рис.2.51

Позначимо на схемі умовні додатні напрями струмів і запишемо рівняння за першим законом Кірхгофа. Оскільки у схемі 4 вузли, необхідна кількість таких рівнянь ( $n_{\text{вуз}} - 1$ ) дорівнює 3:

$$1 \text{ вузол: } -\underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0;$$

$$2 \text{ вузол: } \underline{I}_2 + \underline{I}_6 - \underline{I}_4 = 0; \quad \underline{I}_2 + \underline{I}_6 - \underline{I}_4 = 0$$

$$3 \text{ вузол: } -\underline{I}_3 + \underline{I}_4 + \underline{I}_5 = 0.$$

Як бачимо, у цій частині розрахунку ніяких особливостей немає.

Довільно обираємо напрямок обходу незалежних контурів, припустимо за годинниковою стрілкою, і складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа. Для більшої ясності напруги в рівняння записуємо в порядку розміщення елементів контуру без приведення подібних доданків.

I контур:

$$\begin{aligned} \underline{E}_1 = & -j\frac{1}{\omega C_1}\underline{I}_1 + R_1\underline{I}_1 + j\omega L_1\underline{I}_1 + \underline{U}_{12} + \underline{U}_{16} + R_2\underline{I}_2 - j\omega L_2\underline{I}_2 + \\ & + \underline{U}_{21} + \underline{U}_{26} + j\omega L_6\underline{I}_6 + \underline{U}_{61} + \underline{U}_{62} + R_6\underline{I}_6. \end{aligned}$$

$\underline{U}_{12} = -j\omega M_{12}\underline{I}_2$  оскільки напрямок обходу першої котушки і напрямок струму у другій різні відносно однойменних затискачів;

$\underline{U}_{16} = -j\omega M_{16}\underline{I}_6$  оскільки напрямок обходу першої котушки і напрямок струму у шостій різні відносно однойменних затискачів;

$\underline{U}_{21} = j\omega M_{21}\underline{I}_1$  оскільки напрямок обходу другої котушки і напрямок струму у першій однакові відносно однойменних затискачів

$\underline{U}_{26} = -j\omega M_{26}\underline{I}_2$  оскільки напрямок обходу другої котушки і напрямок струму у шостій різні відносно однойменних затискачів;

$\underline{U}_{61} = -j\omega M_{61}\underline{I}_1$  оскільки напрямок обходу шостої котушки і напрямок струму у першій різні відносно однойменних затискачів;

$\underline{U}_{62} = j\omega M_{62}\underline{I}_2$  оскільки напрямок обходу шостої котушки і напрямок струму у другій однакові відносно однойменних затискачів;

$$\begin{aligned} \underline{E}_1 = & -j\frac{1}{\omega C_1}\underline{I}_1 + R_1\underline{I}_1 + j\omega L_1\underline{I}_1 - j\omega M_{12}\underline{I}_2 - j\omega M_{16}\underline{I}_6 + R_2\underline{I}_2 - j\omega L_2\underline{I}_2 + \\ & + j\omega M_{21}\underline{I}_1 - j\omega M_{26}\underline{I}_6 + j\omega L_6\underline{I}_6 - j\omega M_{61}\underline{I}_1 + j\omega M_{62}\underline{I}_2 + R_6\underline{I}_6. \end{aligned}$$

II контур:

$$-\underline{E}_4 = R_3 \underline{I}_3 - j \frac{1}{\omega C_3} \underline{I}_3 + R_4 \underline{I}_4 - j \frac{1}{\omega C_4} \underline{I}_4 + j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M_{21} \underline{I}_1 + \\ + j\omega M_{26} \underline{I}_6 + R_2 \underline{I}_2.$$

III контур:

$$\underline{E}_4 - \underline{E}_5 = j \frac{1}{\omega C_4} \underline{I}_4 - R_4 \underline{I}_4 + R_5 \underline{I}_5 + j\omega L_5 \underline{I}_5 - R_6 \underline{I}_6 - j\omega L_6 \underline{I}_6 + \\ + j\omega M_{61} \underline{I}_1 - j\omega M_{62} \underline{I}_2$$

У рівняннях виділені напруги, спричинені магнітним зв'язком елементів  $L_1, L_2, L_6$ .

### 2.2.5.2. Метод контурних струмів.

Довільно задають додатні напрямки контурних струмів. Рівняння, складені за методом контурних струмів, записують у звичайній формі, але у вирази власних і спільних опорів контурів вводять додаткові складові  $\pm \underline{Z}_M$ , якими враховують явище взаємної індукції. Знак  $\underline{Z}_M$  визначають так: якщо контурні струми  $\underline{I}_{nn}$  і  $\underline{I}_{kk}$  проходять через свої індуктивні елементи  $n$  і  $k$  відповідно в однаковому напрямку щодо одноіменних затискачів, то  $\underline{Z}_M$  слід брати зі знаком „+”, у супротивному випадку – зі знаком „-”.

Для прикладу розглянемо схему на рис 14. Вибираємо незалежні контури, позначаємо напрямки контурних струмів  $\underline{I}_{11}$ ,  $\underline{I}_{22}$ ,  $\underline{I}_{33}$  за годинниковою стрілкою, складаємо систему рівнянь у загальному вигляді:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11}I_{11} + \underline{Z}_{12}I_{22} + \underline{Z}_{13}I_{33} = \underline{E}_{11}, \\ \underline{Z}_{21}I_{11} + \underline{Z}_{22}I_{22} + \underline{Z}_{23}I_{33} = \underline{E}_{22}, \\ \underline{Z}_{31}I_{11} + \underline{Z}_{32}I_{22} + \underline{Z}_{33}I_{33} = \underline{E}_{33}. \end{cases}$$

Розраховуємо власні опори контурів  $\underline{Z}_{11}$ ,  $\underline{Z}_{22}$ ,  $\underline{Z}_{33}$ :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} = R_1 + R_2 + R_6 + j \left( \omega L_1 + \omega L_2 + \omega L_6 - \frac{1}{\omega C_1} \right) + \\ + j2\omega M_{12} - j2\omega M_{16} - j2\omega M_{26} \end{aligned}$$

Три останніх виділених доданка зумовлені тим, що у перший контур одночасно входять три індуктивно зв'язані елементи -  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_6$ . Для контурного струму  $I_{11}$  елементи  $L_1$  та  $L_2$  увімкненні послідовно узгоджено, а елементи  $L_1$  та  $L_6$  і  $L_2$  та  $L_6$  - послідовно зустрічно;

$$\underline{Z}_{22} = R_2 + R_3 + R_4 + j \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_3} - \frac{1}{\omega C_4} \right);$$

$$\underline{Z}_{33} = R_4 + R_5 + R_6 + j(\omega L_5 + \omega L_6)$$

(елементи  $L_6$  і  $L_5$  індуктивно не зв'язані)

Запишемо вирази спільних опорів контурів:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -(R_2 + j\omega L_2) - j\omega M_{12} + j\omega M_{26};$$

$$\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = -(R_6 + j\omega L_6) + j\omega M_{16} + j\omega M_{26};$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32} = - \left( R_4 - j \frac{1}{\omega C_4} \right) - j\omega M_{26}.$$

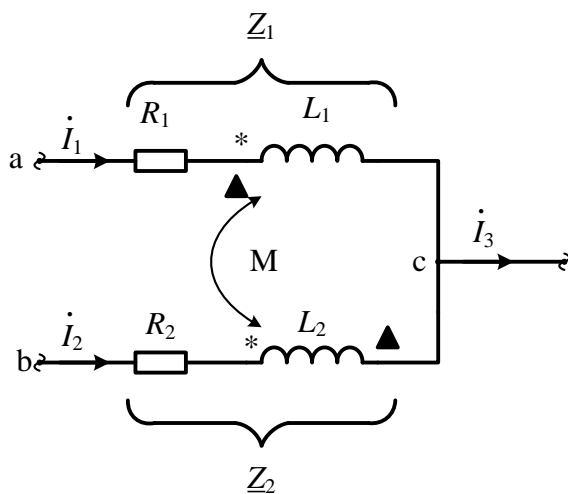
Опір взаємної індукції додатній, якщо відносно **своїх контурних струмів** індуктивності зв'язані узгоджено і від'ємний, якщо зустрічно. Знак „-” перед дужками зумовлений тим, що контурні струми проходять через спільні вітки у протилежних напрямках.

Контурні ЕРС розраховуються, як звичайно:

$$\underline{E}_{11} = \underline{E}_1; \quad \underline{E}_{22} = -\underline{E}_4; \quad \underline{E}_{33} = \underline{E}_4 - \underline{E}_5.$$

### 2.2.5.3. Еквівалентні перетворення індуктивних зв'язків. Магнітна розв'язка.

Еквівалентні перетворення в електричному колі з індуктивно



зв'язаними елементами виконувати безпосередньо неможливо; необхідно виконання магнітної розв'язки індуктивно зв'язаних елементів. (\*) - узгоджене включення котушок; (Δ) - зустрічне включення.

Рис. 2.52

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1, \quad \underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2, \quad \underline{Z}_M = j\omega M.$$

$$\underline{U}_{ac} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 \pm \underline{I}_2 \underline{Z}_M, \quad (2.140)$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 \pm \underline{I}_1 \underline{Z}_M, \quad (2.141)$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2. \quad (2.142)$$

В формулах (2.140), (2.141) знак «+» ставиться у разі узгодженого включення котушок.

Виключимо з (2.140) струм  $\underline{I}_2$ , а з (2.141) струм  $\underline{I}_1$ , скориставшись (2.142):  $\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_3 - \underline{I}_1, \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_3 - \underline{I}_2.$$

$$\underline{U}_{ac} = \underline{I}_1(\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M) \pm \underline{I}_3 \underline{Z}_M; \quad (2.143)$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{I}_2(\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M) \pm \underline{I}_3 \underline{Z}_M. \quad (2.144)$$

Рівнянням (2.142) - (2.143) відповідає така еквівалентна схема:

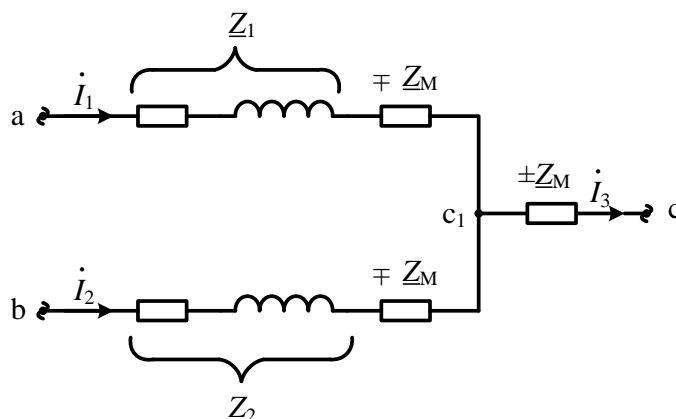


Рис. 2.53

В схемі рис. 2.53 на відміну від рис. 2.52 немає індуктивно пов'язаних елементів. На рис. 2.53 у вітках 1 та 2 маємо додатковий елемент  $\mp \underline{Z}_M$ . Від спільної точки цих віток у вітці, де протікає струм  $\underline{I}_3$ , з'являється ще один додатковий елемент  $\pm \underline{Z}_M$ . Верхні знаки ставляться у разі узгодженого включення котушок, а нижні – для зустрічного (для схеми, в якій були індуктивні зв'язки). Але в схемі рис. 2.53 індуктивних зв'язків уже немає. Точка «с» в схемі рис. 2.53 порівняно з схемою рис. 2.52 змістилась (знаходиться після елемента  $\pm \underline{Z}_M$ ).

Схему рис. 2.53, яка вже немає індуктивних зв'язків, можна використовувати для подальших еквівалентних перетворень, як будь-яку схему. Її також можна використовувати для розрахунку методом вузлових потенціалів. Для отримання еквівалентної схеми рис. 2.53 при виводі

співвідношень для еквівалентних параметрів спочатку були вказані додатні напрямки струмів; однойменні затискачі індуктивно зв'язаних елементів повинні бути наперед вказані. Але для того, щоб виконати магнітну розв'язку (отримати схему рис. 2.53), необов'язково вказувати попередньо додатні напрямки струмів.

Орієнтуючись на схеми рис. 2.52 та рис. 2.53 можна рекомендувати таке правило магнітної розв'язки:

1) знаходимо спільну точку індуктивно зв'язаних елементів (точка «с» в рис. 2.52);

2) встановлюємо, як приєднані до цієї точки індуктивно зв'язані елементи: однойменними чи різнойменними початками;

3) якщо до спільної точки індуктивно зв'язані елементи приєднані однойменними початками, то у вітки, де знаходяться індуктивно зв'язані елементи включаємо додатковий елемент  $-\underline{Z}_M$ , а у вітці, яка відходить від спільної точки  $+\underline{Z}_M$  (для рис. 2.53).

Якщо ж індуктивно зв'язані елементи приєднані до спільної точки різнойменними початками, тоді навпаки: у вітки, де стояли індуктивно зв'язані елементи, включають додатковий елемент  $+\underline{Z}_M$ , а у вітку, яка відходить  $-\underline{Z}_M$ .

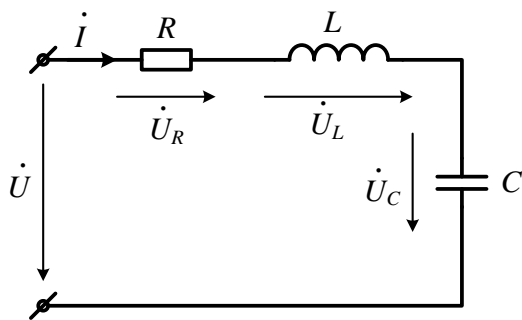
4) Схема рис. 2.53 являє собою схему без магнітних зв'язків і надалі може використовуватись як звичайна електрична схема і для еквівалентних перетворень і для використання інших розрахунків.

## Тема 2.3. Резонансні явища і частотні характеристики.

### 2.3.1. Резонанс у послідовному електричному колі.

Резонансом називають такий стан кола синусоїдного струму, при якому в колі, що має реактивні елементи, кут зсуву фаз між струмом і напругою дорівнює нулю.

У разі послідовного з'єднання елементів  $R$ ,  $L$ ,  $C$  виникає *резонанс напруг*, у разі паралельного - *резонанс струмів*.



$$\varphi = 0, \quad (2.145)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R},$$

$$X = 0, \quad (2.146)$$

$$X_L - X_C = 0,$$

Рис. 2.54

Умова резонансу напруг

$$X_L = X_C, \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (2.147)$$

$$\omega^2 \cdot LC = 1 \quad (2.148)$$

Вираз (2.148) вказує на те, що в послідовному контурі резонанс можна досягти змінюючи одну з величин:  $\omega$ ,  $L$ ,  $C$ .

$$L_P = \frac{1}{\omega^2 C}, \quad C_P = \frac{1}{\omega^2 L}, \quad \omega_P = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Виходячи із (2.147), бачимо, що реактивні опори при резонансі однакові.

$$X_{LP} = X_{CP} = \rho,$$

$\rho$  – характеристичний опір контуру.

$$\rho = \sqrt{L/C}. \quad (2.149)$$

Повний опір кола при резонансі  $Z_p = \sqrt{R^2 + X^2} = R$  є активним і має мінімальне значення.

Струм в колі при резонансі  $I_p = U/Z_p$  максимальний.

Вхідна напруга  $U = I_p \cdot R$ ;

напруги на реактивних елементах при резонансі  $U_{LP} = U_{CP} = I_p \cdot \rho$ .

Відношення напруги на реактивному елементі до вхідної напруги називається добротністю  $Q$ :

$$Q = \frac{U_{LP}}{U} = \frac{U_{CP}}{U} = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}.$$

$Q > 1$  ( $Q \approx 10$  для електротехнічних пристроїв),

( $Q \approx 100$  для радіотехнічних пристроїв).

Векторна діаграма для схеми рис. 2.54 зображена на рис. 2.55. Схема заміщення реального кола зображена на рис. 2.56.

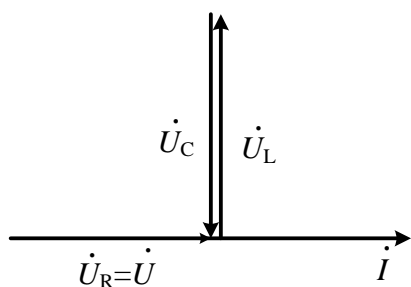


Рис. 2.55

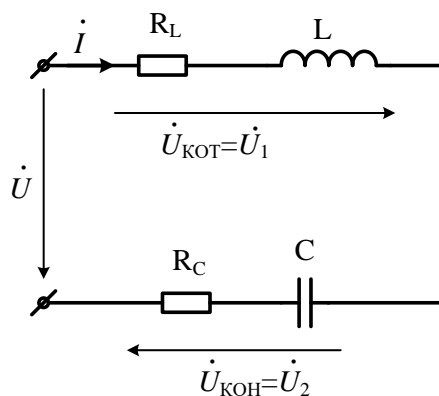


Рис. 2.56

Векторна діаграма для схеми рис. 2.56 зображена на рис. 2.57.

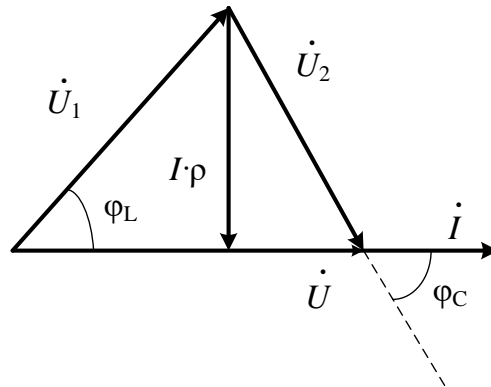


Рис. 2.57

### 2.3.2. Настроювальні характеристики послідовного контуру.

Настроювальними характеристиками є залежності  $U_L$ ,  $U_C$ ,  $I$ ,  $\varphi$  від індуктивності чи ємності контуру. Аналіз цих залежностей проведемо, орієнтуючись на схему рис. 2.54. Незмінними активний опір кола  $R$  та діюче значення вхідної напруги  $U$ .

а) Настроювальні характеристики при зміні індуктивності контуру.

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}; \quad (2.150)$$

$$U_L = \omega L \cdot I = \frac{U \cdot \omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}; \quad (2.151)$$

$$U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{U}{\omega C \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}; \quad (2.152)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right). \quad (2.153)$$

1) Коли  $L_1 = 0$ ,  $I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (-1/\omega C)^2}}$  ;

$$U_{L1} = 0, U_{C1} = \frac{I_1}{\omega C}, \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\omega C \cdot R}\right)$$

2) Коли величина індуктивності відповідає резонансному значенню  $L = L_p$ , то  $X_{LP} = X_{CP}$ ,  $X = 0$ .

$$I = I_p = U/R, U_{LP} = U_{CP} = I_p \cdot \rho, \varphi_p = 0.$$

3)  $L \rightarrow \infty, I \rightarrow 0, U_C \rightarrow 0, U_L \rightarrow U, \varphi \rightarrow \pi/2$ .

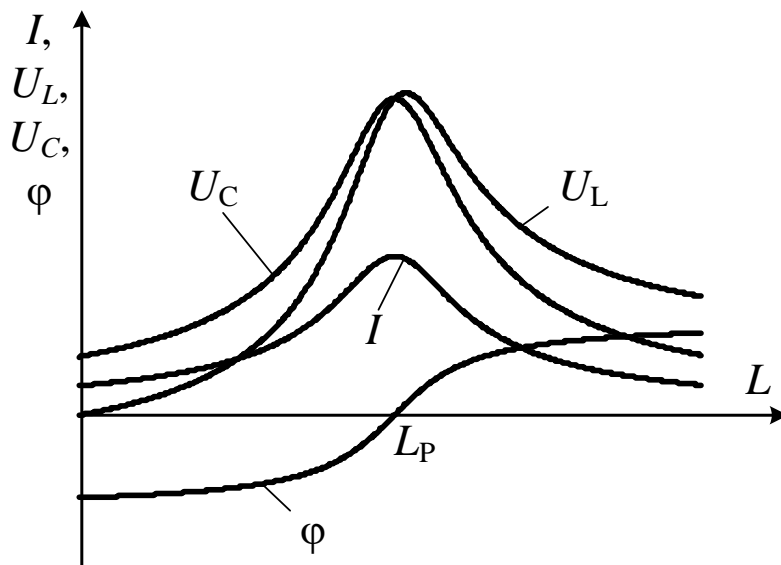


Рис. 2.58

### 2.3.3. Частотні характеристики послідовного контуру.

Частотними характеристиками є залежності  $X_L$ ,  $X_C$ ,  $X$ ,  $Z$ ,  $\varphi$ ,  $I$ ,  $U_L$ ,  $U_C$  від частоти струму в контурі (рис. 2.59-2.61). Вважаємо, що активний опір контуру не залежить від частоти, а також, що діюче значення вхідної напруги залишається незмінним. Аналіз проведемо стосовно ідеалізованої схеми рис. 2.54. Для побудови цих залежностей приведемо аналітичні співвідношення для  $X_L$ ,  $X_C$ ,  $X$ ,  $Z$ , а формули для  $I$ ,  $U_L$ ,  $U_C$ ,  $\varphi$  приведені в попередньому аналізі (2.150)-(2.153).

$$X_L = \omega L, \quad (2.154)$$

$$X_C = 1/\omega C, \quad (2.155)$$

$$X = X_L - X_C = \omega L - 1/\omega C, \quad (2.156)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (2.157)$$

Проведемо спочатку аналіз зміни опорів елементів. Як видно із (2.154) та (2.155) із зростанням частоти  $X_L$  зростає,  $X_C$  спадає,  $X$  – знаходимо по (2.156).

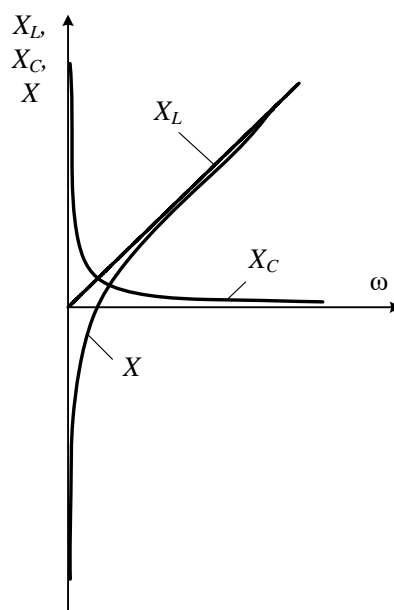


Рис. 2.59

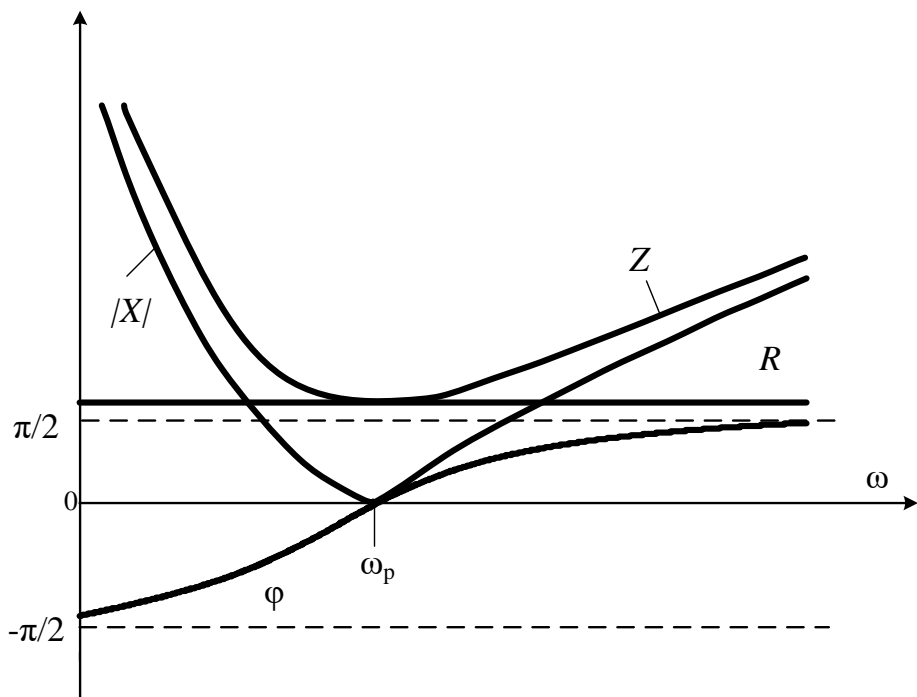


Рис. 2.60

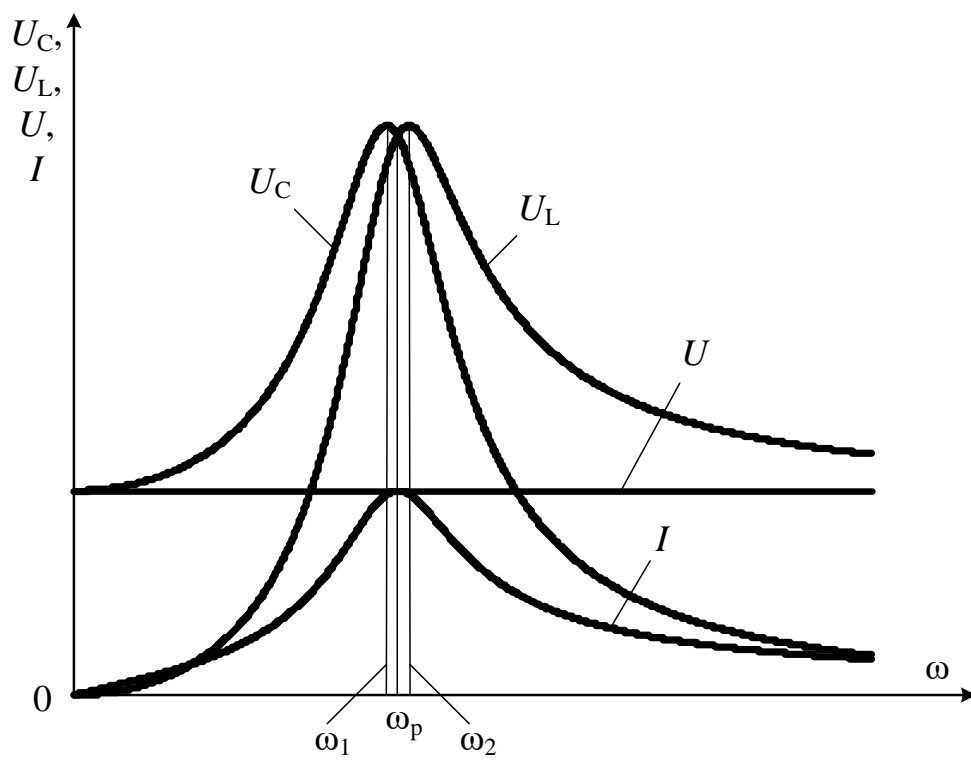


Рис. 2.61

Приведені на рис. 2.61 залежності  $U_C$ ,  $U_L$ ,  $I$  мають місце для контуру з високою добротністю ( $Q \gg 1$ ). При добротності контуру  $Q \leq \sqrt{2}$  екстремуми в кривих  $U_L$  і  $U_C$  відсутні. При зростанні частоти  $U_L$  неперервно зростає від нуля до  $U$ , а  $U_C$  неперервно зменшується від  $U$  до нуля.

### 2.3.4. Енергетичні процеси при резонансі в послідовному контурі.

Розглянемо схему послідовного ідеалізованого контуру (рис. 2.62).

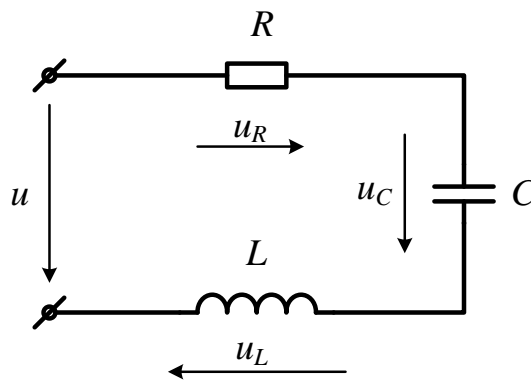


Рис. 2.62

Нехай в колі має місце резонанс:

$$i = I_m \sin \omega_p t.$$

Тоді напруга конденсатора відповідно дорівнюватиме:

$$u_C = I_m \cdot \rho \sin(\omega_p t - \pi/2), \quad i = \sqrt{2}I \sin \omega_p t,$$

$$u_C = -\sqrt{2}I \cdot \rho \cos \omega_p t.$$

Енергії електричних і магнітних полів відповідно дорівнюють:

$$W_M = \frac{Li^2}{2} = LI^2 \sin^2 \omega_p t, \quad (2.158)$$

$$W_E = \frac{Cu_C^2}{2} = CI^2 \cdot \frac{L}{C} \cdot \cos^2 \omega_p t = LI^2 \cos^2 \omega_p t. \quad (2.159)$$

Із (2.158) та (2.159) видно, що амплітуди енергій магнітного і електричного полів однакові:

$$W_{Mmax} = W_{Emax} = LI^2.$$

Графіки зміни струму в контурі, напруги на ємності та енергій зображено на рис. 2.63.

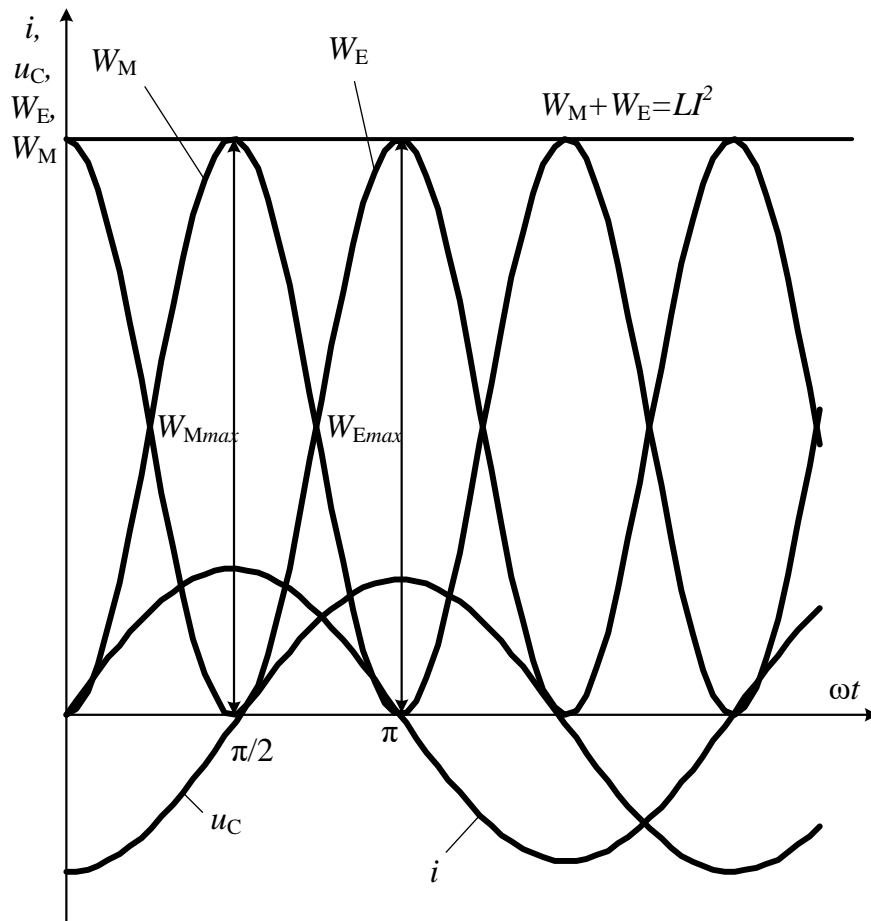


Рис. 2.63

Сумарна енергія електричного і магнітного поля є сталою

$$W_E + W_M = LI^2(\cos^2 \omega_p t + \sin^2 \omega_p t) = LI^2 = \text{const}. \quad (2.160)$$

В інтервалі від 0 до  $\pi/2$  струм зростає і енергія  $W_M$  зростає, при цьому на ємності напруга зменшується по абсолютному значенню і зменшується енергія електричного поля конденсатора. Вона з електричного поля конденсатора надходить в магнітне поле котушки. При  $\pi/2$  струм в колі має найбільше значення, а напруга на ємності дорівнює нулю; відповідно енергія магнітного поля найбільша. При збільшенні  $\omega t$  струм в контурі зменшується, а напруга на ємності починає зростати. При цьому енергія із магнітного поля контуру починає надходити в електричне поле конденсатора. Відповідно до (2.160), сума енергій електричного і магнітного полів в будь-який момент часу незмінна, тому від джерела енергія надходить тільки в активний опір кола, де перетворюється в тепло. Обмін енергії між джерелом і електромагнітним полем контуру немає. Коливання електричного і магнітного полів відбувається тільки в середині контуру. Тому в цілому контур веде себе тільки як активний опір.

### **2.3.5. Резонанс при паралельному з'єднанні котушки і конденсатора. Резонанс струмів.**

Розглянемо паралельне з'єднання реальної котушки і конденсатора (рис. 2.64).

Для кола, яке перебуває в резонансному стані

$$\varphi = 0, \quad (2.161)$$

$$\varphi = \text{arctg}\left(\frac{B}{G}\right) = 0.$$

$$\text{Реактивна провідність } B = 0. \quad (2.162)$$

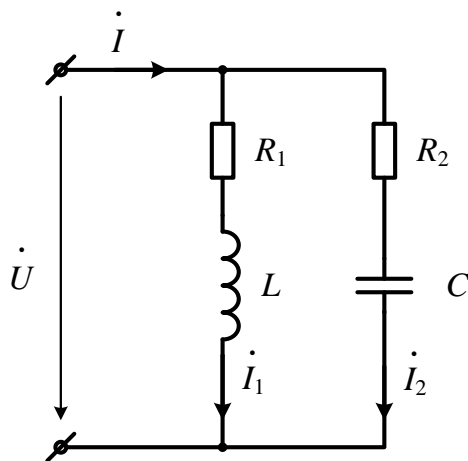


Рис. 2.64

$$B_1 - B_2 = 0, B_1 = B_2. \quad (2.163)$$

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1/\omega C}{R_2^2 + (1/\omega C)^2}, \quad (2.164)$$

$$\omega^2 LC \cdot \frac{Z_2^2}{Z_1^2} = 1. \quad (2.165)$$

Із (2.164) бачимо, що резонанс в паралельному контурі (рис. 2.58) можна отримати, змінюючи не тільки  $L$ ,  $C$ ,  $\omega$ , але також змінюючи  $R_1$  та  $R_2$  – активні опори віток. Із (2.164) для резонансної частоти можна отримати таке рішення:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{L}{C} - R_1^2}}{\sqrt{\frac{L}{C} - R_2^2}}, \quad (2.165)$$

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho - \text{хвильовий (характеристичний) опір контуру}. \quad (2.166)$$

Із рівняння (2.165) видно, що змінюючи частоту, резонанс можна отримати в таких випадках:

- 1)  $\rho > R_1, \rho > R_2$ ;
- 2)  $\rho < R_1, \rho < R_2$ ;

3)  $R_1 = R_2 = \rho$  - особливий випадок, для якого  $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{0}{0}$  це

невизначеність.

Виходячи з того, що в третьому варіанті  $\omega_p$  невизначеність, дослідимо, як залежить вхідний опір від частоти:

$$\underline{Z}_{\text{ВХ}} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(\rho + j\omega L) \left( \rho - \frac{j}{\omega C} \right)}{2\rho + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \rho.$$

Це означає, що резонанс можливий на всіх частотах.

На практиці -  $\rho \gg R_1$ ,  $\rho \gg R_2$ . (2.167)

Визначимо струми віток кола при резонансі і виконанні умови (2.167):

$$Y_{1P} = \frac{1}{Z_{1P}} = \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}};$$

$$B_{1P} = \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} \approx \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{\rho}; \quad G_{1P} = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} \approx \frac{R_1}{\rho^2};$$

$$Y_{2P} = \frac{1}{Z_{2P}} = \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + (1/\omega C)^2}};$$

$$B_{2P} = \frac{1/\omega C}{R_1^2 + (1/\omega C)^2} \approx \frac{1}{\rho}; \quad G_{2P} = \frac{R_2}{R_2^2 + (1/\omega C)^2} \approx \frac{R_2}{\rho^2}.$$

Струми в паралельних вітках  $I_{1P} \approx I_{2P} \approx \frac{U}{\rho}$ , оскільки

$$Z_{1P} \cong Z_{2P} \cong \rho.$$

Вхідний струм визначається провідністю всього кола:

$$B_P = 0, G_P = G_{1P} + G_{2P} = \frac{R_1 + R_2}{\rho^2},$$

$$I_P \approx U \cdot \frac{R_1 + R_2}{\rho^2}.$$

Відношення струму вітки до вхідного струму при резонансі дорівнюватиме:

$$\frac{I_{1P}}{I_P} \approx \frac{I_{2P}}{I_P} = \frac{\rho}{R_1 + R_2} > 1.$$

При наявності такого співвідношення струми віток більші вхідного струму, тому таке явище отримало назву *резонансу струмів*.

Векторна діаграма кола при резонансі приведена на рис.2.65.

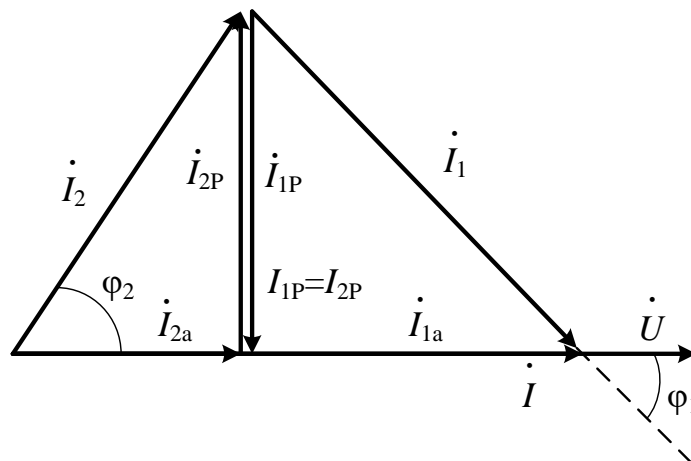


Рис. 2.65

При резонансі струм в колі дорівнює сумі активних складових струмів паралельних віток

$$I = I_{1a} + I_{2a}.$$

### 2.3.6. Умова передачі максимальної потужності до споживача.

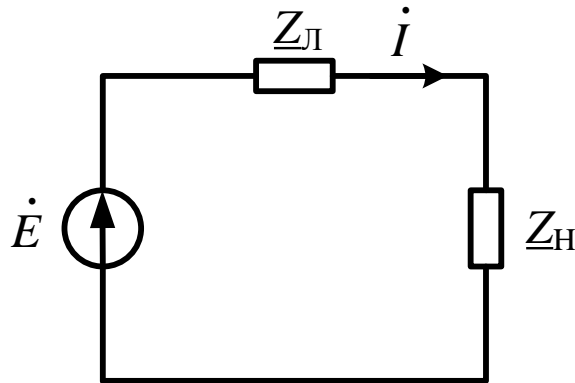


Рис. 2.66

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R_L + R_H)^2 + (X_L + X_H)^2}}$$

Струм в колі максимальний, якщо

$$X = 0, X_L + X_H = 0,$$

$$X_L = -X_H. \quad (2.168)$$

Тоді  $I = \frac{E}{R_L + R_H}$ .

Потужність навантаження визначається співвідношенням:

$$P_H = R_H I^2 = \frac{R_H \cdot E^2}{(R_L + R_H)^2}.$$

Максимальне значення потужності при зміні  $R_H$  навантаження буде

мати місце, коли  $\frac{dP_H}{dR_H} = 0$ :

$$\frac{d}{dR_H} \left( \frac{R_H \cdot E^2}{(R_L + R_H)^2} \right) = 0,$$

звідки  $R_L = R_H$ . (2.169)

В більшості випадків опори лінії мають активно-індуктивний характер. Щоб реалізувати першу вимогу передачі максимальної потужності до споживача (2.168), потрібно, щоб реактивний опір

споживача мав ємнісний характер. Але частина споживачів (наприклад, електричні двигуни) мають індуктивний характер. Тому потрібні додаткові заходи. Відносно другої умови, (2.169), для енергетичних установок реалізовувати не бажано, оскільки в цьому випадку ККД лінії електропередачі складає 50%. Та для радіотехнічних пристроїв, де на першому місці стоїть отримання максимальної потужності споживача, це співвідношення часто реалізується.

### 2.3.7. Частотні характеристики реактивних двополюсників.

Частотна характеристика – це залежність вхідного опору двополюсника (рис. 2.61) від частоти, тобто залежність реактивного опору від частоти.

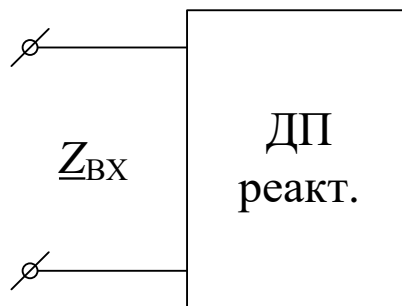


Рис. 2.61

Ці залежності вже досліджувались для деяких двополюсників (рис. 2.62):

Введемо поняття – *нуль* і *полюс* частотної характеристики.

Нулем частотної характеристики будемо називати таке значення частоти  $\omega_0$ , при якому вхідний опір реактивного двополюсника дорівнює нулю

$$\omega = \omega_0 \rightarrow X_{\text{ВХ}}(\omega_0) = 0.$$

Полюсом частотної характеристики будемо називати таке значення  $\omega_{\Pi}$  при якому вхідний опір дорівнює  $\pm\infty$

$$\omega = \omega_{\Pi} \rightarrow X_{\text{ВХ}}(\omega_{\Pi}) = \pm\infty.$$

Із приведених на рис. 2.62 залежностей бачимо, що нулем частотної характеристики схеми а) є значення  $\omega_0 = 0$ , для схеми б) -  $\omega_0 = \infty$ , для

схеми в) -  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Для: а)  $\omega_{\Pi} = \infty$ ; б)  $\omega_{\Pi} = 0$ ; в)  $\omega_{\Pi 1} = 0$ ,  $\omega_{\Pi 2} = \infty$ .

Підсумовуючи наведене вище, бачимо:


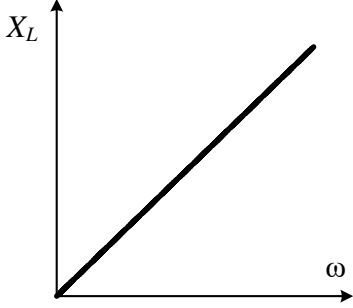
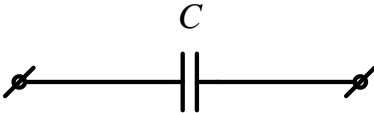

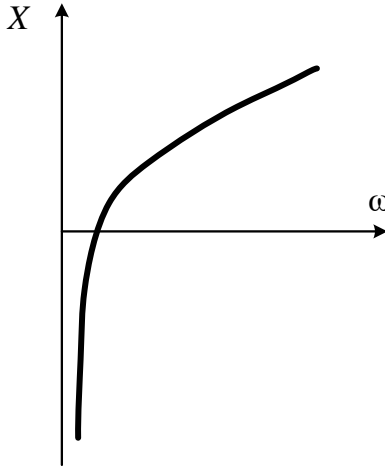
1) кількість нулів та плюсів частотної характеристики дорівнює кількості реактивних елементів плюс один:  $n_0 + n_{\Pi} = n_{\text{Р.Е.}} + 1$ ;

2) нулю і полюси чергуються;

3) якщо в схемі двополюсника є шлях для постійного струму, то його частотна характеристика починається з нуля.

Вхідний опір кола може бути представлений у вигляді дроби  
:  $X(\omega) = \frac{H(\omega)}{F(\omega)}$ .

Чисельник  $H(\omega)$  і знаменник  $F(\omega)$  є функціями частоти. Для визначення нулів частотної характеристики необхідно чисельник прирівняти до нуля  $H(\omega)=0$ , а для визначення полюса – знаменник  $F(\omega)=0$ . Нулі частотної характеристики визначають частоти резонансу напруг, а полюси – частоти резонансу струмів.

Схема двополюсника	Рівняння частотної характеристики	Графік частотної характеристики
	$X_L = \omega L$	
а)		
	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	
б)		
	$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$	
в)		
Рис. 2.62		

Чисельник  $H(\omega)$  і знаменник  $F(\omega)$  є функціями частоти. Для визначення нулів частотної характеристики необхідно чисельник прирівняти до нуля  $H(\omega)=0$ , а для визначення полюса – знаменник  $F(\omega)=0$ . Нулі частотної характеристики визначають частоти резонансу напруг, а полюси – частоти резонансу струмів.

Розглянемо паралельне з'єднання (рис. 2.63).

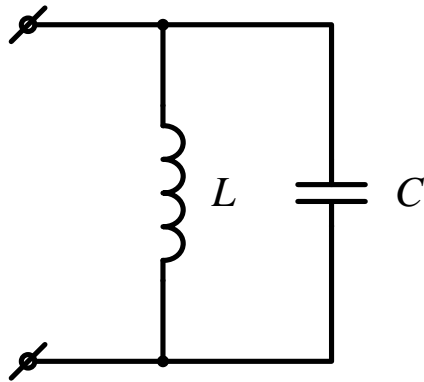


Рис. 2.63

$$\begin{aligned} Z_{\text{ВХ}} &= \frac{j\omega L \cdot \left(-\frac{j}{\omega C}\right)}{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \\ &= -j \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} = jX_{\text{ВХ}}. \\ X_{\text{ВХ}} &= -\frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1}. \end{aligned} \quad (2.170)$$

Відповідно маємо такі нулі і полюси частотної характеристики схеми рис. 2.63:

$$\omega = 0, X_{\text{ВХ}} = 0, \omega_{01} = 0;$$

$$\omega \rightarrow \infty, X_{\text{ВХ}} \rightarrow 0, \omega_{02} = \infty;$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, X_{\text{ВХ}} = \pm\infty, \omega_{\text{П}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Із рішення (2.170) випливає таке додаткове уточнення:

4) якщо вхідний опір має вигляд дроби, то показник многочлену чисельника відрізняється від показника знаменника на  $\pm 1$ .

Частотна характеристика схеми рис. 2.63 зображена на рис. 2.64.

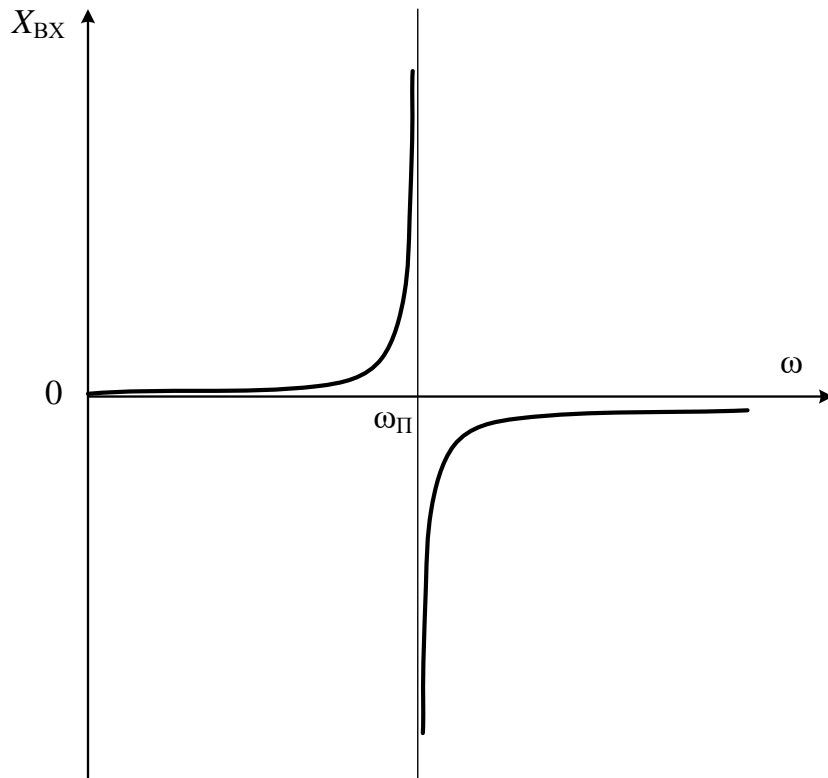


Рис. 2.64

Для підтвердження сформульованих раніше узагальнень, дослідимо частотну характеристику двополюсника (рис. 2.65):

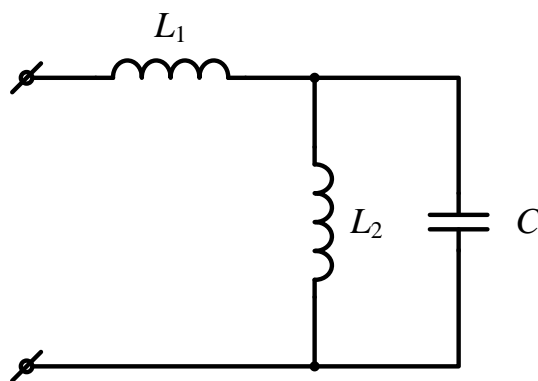


Рис. 2.65

З врахуванням вхідного опору паралельної ділянки (формула (2.170)), вхідний опір схеми (рис. 2.65):

$$X_{\text{ВХ}} = \omega L_1 - \frac{\omega L_2}{\omega^2 L_2 C - 1} = \frac{\omega^3 L_1 L_2 C - \omega L_1 - \omega L_2}{\omega^2 L_2 C - 1} = \frac{N(\omega)}{M(\omega)}. \quad (2.171)$$

При  $\omega = 0$ ,  $X_{\text{ВХ}} = 0$ ,  $\omega_{01} = 0$ ;

$$M(\omega) = 0, X_{\text{ВХ}} = \infty, \omega_{\text{П1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}};$$

$$N(\omega) = 0, X_{\text{ВХ}} = 0, \omega_{02} = \frac{L_1 + L_2}{\sqrt{L_1 L_2 C}}.$$

Позначимо  $L_e = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$ .

Враховуючи, що  $L_e < L_2$ , то  $\omega_{02} > \omega_{\text{П1}}$ .

Побудуємо частотну характеристику (рис. 2.66) для схеми рис. 2.65.

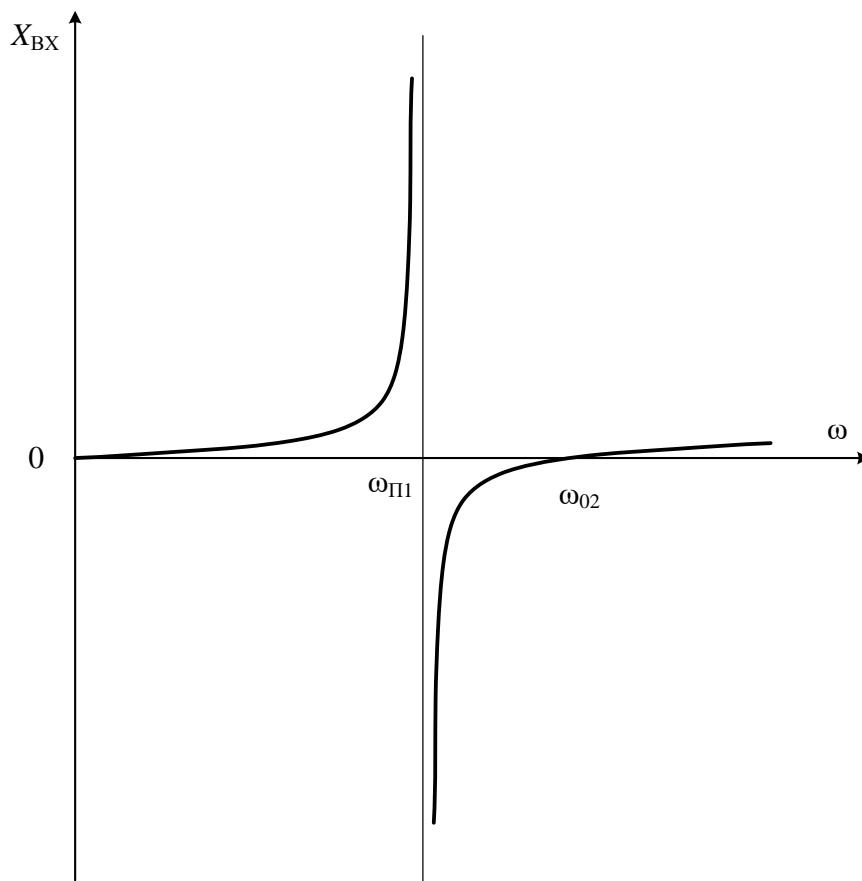


Рис. 2.66

$$n_0 + n_{\Pi} = 4, (n_0 = 2, n_{\Pi} = 2);$$

$$\omega \rightarrow \infty, X_{BX} \rightarrow \infty, \omega_{\Pi 2} = \infty.$$

## Тема 2.4. Основи теорії чотириполюсників

### 2.4.1. Класифікація чотириполюсників

Чотириполюсником називають частину кола довільної конфігурації, яка має дві пари (4 полюси) затискачів, коли досліджуються струм і напруга на цих затискачах, а струм і напруга всередині кола не досліджуються.

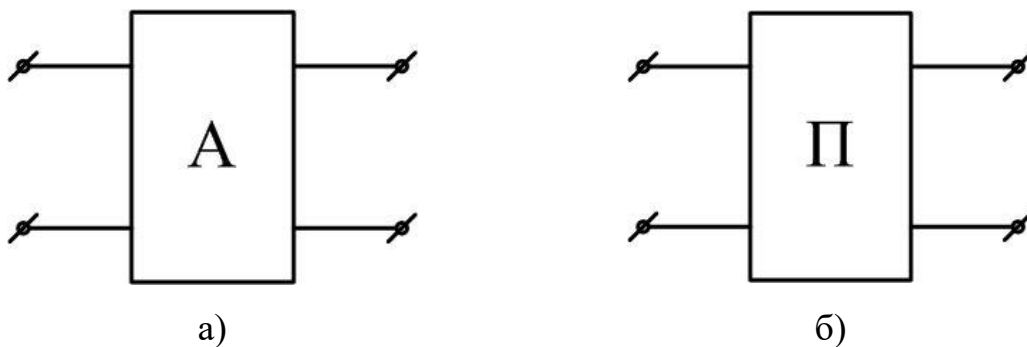


Рис. 2.67

Чотириполюсники можна поділити за різними ознаками.

**За наявністю чи відсутністю джерел енергії всередині, чотириполюсники – активні чи пасивні.**

*Активні* чотириполюсники мають в собі джерела енергії, дія яких на розімкнених затискачах не скомпенсована.

*Пасивні* не мають джерел енергії всередині. Надалі ми будемо вивчати лише пасивні чотириполюсники.

Чотириполюсники поділяються **на лінійні і нелінійні.**

Якщо всередині чотириполюсника є хоч один нелінійний елемент, то чотириполюсник вважають нелінійним. Надалі будуть досліджуватися лише лінійні чотириполюсники.

**За схемою внутрішніх з'єднань** – Г-, Т-, П- подібні, мостові, Т- подібні мостові.

Розрізняють **оборотні і необоротні** чотириполюсники.

*Оборотним* називають чотириполюсник, для якого відношення струму на виході до вхідної напруги не залежить від того, для якої пари затискачів це розглядається.

Всі лінійні пасивні чотириполюсники є оборотними, бо для них виконується властивість взаємності.

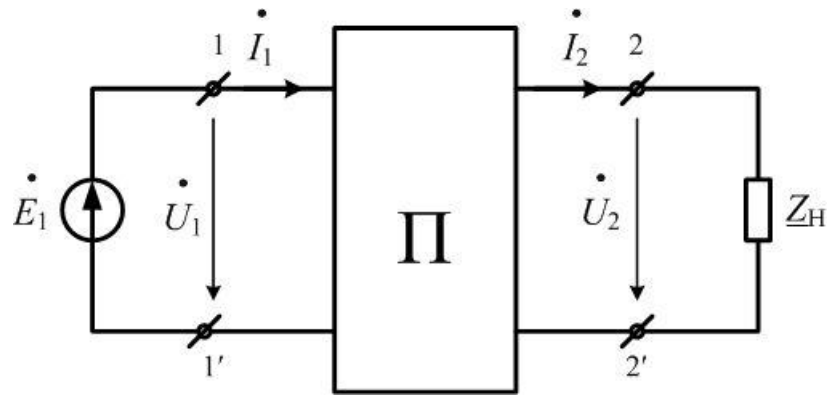
*Симетричним* називається чотириполюсник, для якого заміна вихідних затискачів на вхідні не приводить до зміни струмів і напруг на його вході і виході.

Два чотириполюсники називають *еквівалентними*, якщо заміна одного чотириполюсника на інший не приведе до зміни струмів і напруг в решті частини кола.

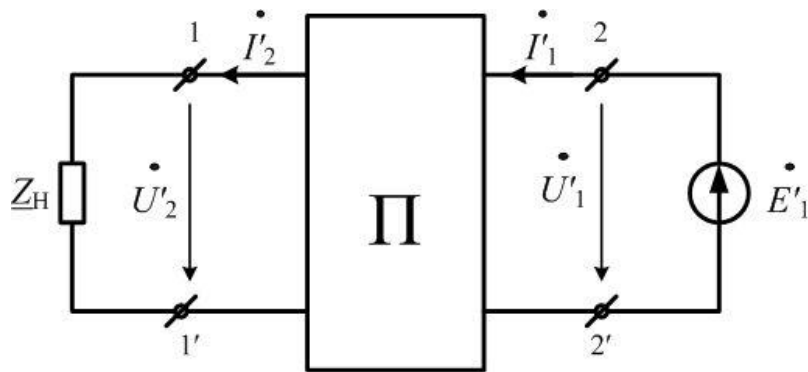
Режим роботи будь-якого двополюсника є повністю визначеним, якщо відомі  $\underline{U}_1, \underline{I}_1, \underline{U}_2, \underline{I}_2$ . Типовою є задача, коли за двома відомими величинами необхідно знайти дві невідомі. Для цього використовують систему рівнянь, яку називають основними рівняннями чотириполюсника.

### **Режими роботи пасивного чотириполюсника**

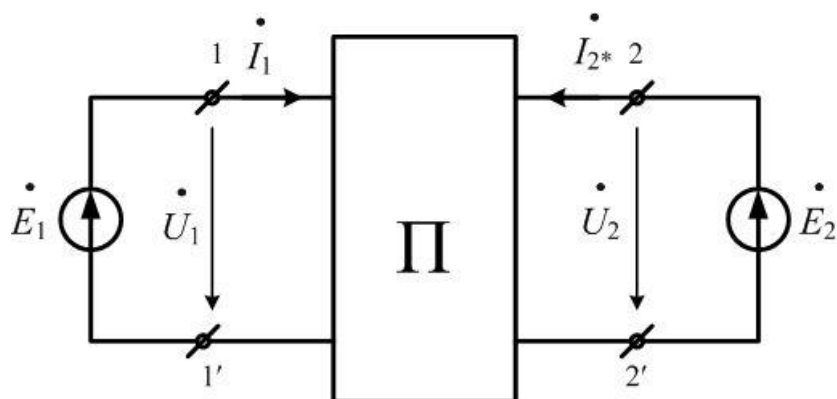
1. **Режим прямої передачі.** Енергія передається від первинних полюсів до вторинних.



2. Режим зворотної передачі – енергія передається від вторинних полюсів до первинних.



3. Режим двостороннього живлення. Енергія споживається у середині чотирьохполюсника



## 2.4.2. Основні рівняння чотириполюсників

### 2.4.2.1. Рівняння чотириполюсника в $[Y]$ -формі

Ці рівняння встановлюють залежність між вхідними і вихідними струмами і напругами чотириполюсника.

Нехай маємо пасивний чотириполюсник в якому джерела живлення під'єднанні до обох пар затискачів (рис. 2.68). Додатні напрямки струмів такі, як вказано на рис. 2.68.

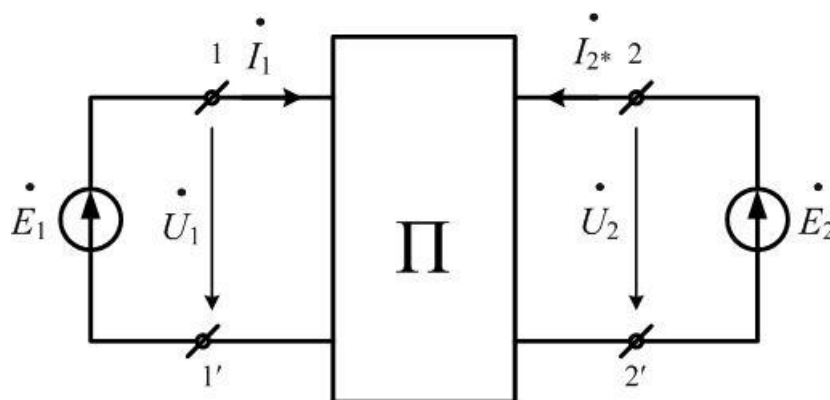


Рис. 2.68

Виходячи з методу накладання, для  $I_1$  і  $I_{2^*}$  можна записати:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{E}_1 \underline{Y}_{11} - \underline{E}_2 \underline{Y}_{12}; \\ \underline{I}_{2^*} &= -\underline{E}_1 \underline{Y}_{21} + \underline{E}_2 \underline{Y}_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (2.172)$$

Перепишемо (2.172) через напруги:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{U}_1 \underline{Y}_{11} - \underline{U}_2 \underline{Y}_{12}; \\ \underline{I}_{2^*} &= -\underline{U}_1 \underline{Y}_{21} + \underline{U}_2 \underline{Y}_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (2.173)$$

(2.172) і (2.173) – рівняння чотириполюсника у формі  $[Y]$ .

$\underline{Y}_{11}$ ,  $\underline{Y}_{22}$  - вхідні провідності.

$\underline{Y}_{12}$ ,  $\underline{Y}_{21}$  - взаємні провідності.

Із (2.173) вхідні і взаємні провідності можна визначити за допомогою таких співвідношень:

$$\underline{Y}_{11} = \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right)_{U_2=0}, \underline{Y}_{22} = \left( \frac{\underline{I}_2^*}{\underline{U}_2} \right)_{U_1=0}; \quad (2.174)$$

$$\underline{Y}_{12} = \left( -\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right)_{U_1=0}, \underline{Y}_{21} = \left( -\frac{\underline{I}_2^*}{\underline{U}_1} \right)_{U_2=0}. \quad (2.175)$$

Із (2.175) для взаємних провідностей  $\underline{Y}_{12}$ ,  $\underline{Y}_{21}$  приходимо до висновку, що для лінійного пасивного чотириполюсника (має місце властивість взаємності):

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}. \quad (2.176)$$

Це є оборотний чотириполюсник.

Таким чином в рівнянні (2.173) тільки три із чотирьох коефіцієнтів є лінійно незалежними.

Рівняння в матричній формі:

$$\begin{vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & -\underline{Y}_{12} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{vmatrix}. \quad (2.177)$$

#### 2.4.2.2. Рівняння чотириполюсника в $[\underline{Z}]$ -формі

Рівняння чотириполюсника в  $[\underline{Z}]$ -формі встановлює залежність напруг  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$  від  $\underline{I}_1, \underline{I}_2^*$  через  $\underline{Z}$  - параметри. Отримаємо ці рівняння, виходячи із рівнянь (2.173) в формі  $[\underline{Y}]$ .

$$\underline{\Delta}_Y = \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & -\underline{Y}_{12} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{vmatrix} = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \cdot \underline{Y}_{21};$$

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_1 &= \begin{vmatrix} \underline{I}_1 & -\underline{Y}_{12} \\ \underline{I}_2^* & \underline{Y}_{22} \end{vmatrix} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{I}_2^*, \\ \underline{\Delta}_2 &= \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{I}_1 \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{I}_2^* \end{vmatrix} = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{I}_2^* + \underline{I}_1 \cdot \underline{Y}_{21}. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \frac{\underline{\Delta}_1}{\underline{\Delta}_Y} = \underline{I}_1 \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{\Delta}_Y} + \underline{I}_2^* \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{\Delta}_Y}; \\ \underline{U}_2 &= \frac{\underline{\Delta}_2}{\underline{\Delta}_Y} = \underline{I}_1 \frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{\Delta}_Y} + \underline{I}_2^* \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{\Delta}_Y}. \end{aligned} \right\} \quad (2.178)$$

Коефіцієнти при струмах в рівняннях (2.177) мають розмірність опорів. Тому отримали назву  $\underline{Z}$  – параметрів.

$$\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{\Delta}_Y} = \underline{Z}_{11}, \quad \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{\Delta}_Y} = \underline{Z}_{12}, \quad \frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{\Delta}_Y} = \underline{Z}_{21}, \quad \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{\Delta}_Y} = \underline{Z}_{22}. \quad (2.179)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{I}_1 \underline{Z}_{11} + \underline{I}_2^* \underline{Z}_{12}; \\ \underline{U}_2 &= \underline{I}_1 \underline{Z}_{21} + \underline{I}_2^* \underline{Z}_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (2.180)$$

$$\text{З урахуванням } \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}, \text{ маємо } \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}. \quad (2.181)$$

Тобто в рівняннях (2.180) тільки 3 з чотирьох коефіцієнтів є незалежними.

$\underline{Z}$ -параметри чотирьохполосника можна визначити із співвідношень (2.179). Є й інша можливість визначення  $\underline{Z}$ -параметрів.

Із (2.180) матимемо:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{I}_2^*=0}; & \underline{Z}_{22} &= \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2^*} \right)_{\underline{I}_1=0}; \\ \underline{Z}_{12} &= \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2^*} \right)_{\underline{I}_1=0}; & \underline{Z}_{21} &= \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{I}_2^*=0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.182)$$

Рівняння (2.180) в матричній формі має вигляд:

$$[\underline{U}] = [\underline{Z}] \cdot [\underline{I}]. \quad (2.183)$$

### 2.4.2.3. Рівняння чотирьохполюсників в $[\underline{A}]$ -формі

Рівняння чотирьохполюсника в формі  $[\underline{A}]$  пов'язують вхідні напругу і струм через вихідні напругу і струм.

Ці рівняння використовуються для аналізу чотирьохполюсника при односторонньому живленні: коли на затискачах 1-1' включене джерело, а на затискачах 2-2' навантаження (рис. 2.69).

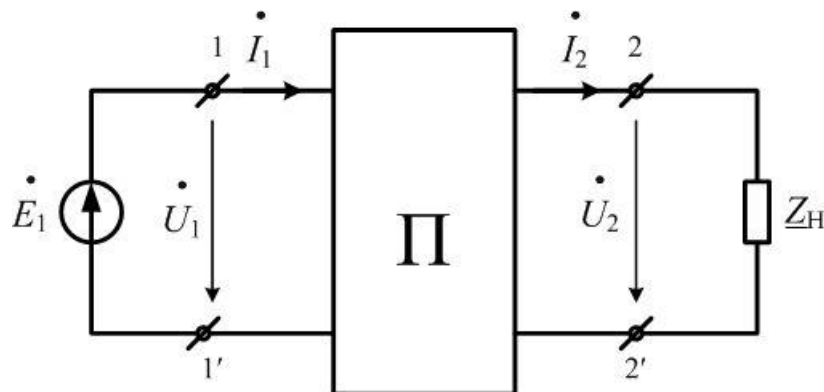


Рис. 2.69

Якщо скористатися теоремою компенсації і замінити опір  $\underline{Z}_H$  на  $\underline{E}_2$ , то матимемо рис. 2.68, але треба врахувати, що  $\underline{I}_2$  матиме напрям, протилежний напрямку струму  $\underline{I}_2^*$  в схемі рис. 2.68

$$(\underline{I}_2^* = -\underline{I}_2). \quad (2.184)$$

З урахуванням (2.184) рівняння (2.173) для схеми рис. 2.69 матимуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{U}_1 \underline{Y}_{11} - \underline{U}_2 \underline{Y}_{12}; \\ \underline{I}_2 &= \underline{U}_1 \underline{Y}_{21} - \underline{U}_2 \underline{Y}_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (2.185)$$

З рівнянь (2.185) отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} + \underline{I}_2 \frac{1}{\underline{Y}_{21}}; \\ \underline{I}_1 &= \underline{U}_2 \left( \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \underline{Y}_{11} - \underline{Y}_{12} \right) + \underline{I}_2 \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.186)$$

Введемо такі позначення:

$$\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} = \underline{A}_{11}, \quad \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \underline{Y}_{11} - \underline{Y}_{12} = \underline{A}_{21}, \quad \frac{1}{\underline{Y}_{21}} = \underline{A}_{12}, \quad \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} = \underline{A}_{22}. \quad (2.187)$$

Коефіцієнти  $\underline{A}_{11}$  і  $\underline{A}_{22}$  – безрозмірні величини,  $\underline{A}_{12}$  має розмірність опору,  $\underline{A}_{21}$  має розмірність провідності.

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.188)$$

Рівняння (2.188) використовуються при аналізі чотирьохполюсника з одностороннім живленням, коли джерело підключене на затискачі (1-1'), а споживач на (2-2').

Коефіцієнти рівнянь (2.188) є комплексними величинами, які залежать від елементів  $R, L, C$  чотирьохполюсника і частоти струму чи ЕРС на вході. Визначник системи (2.187):

$$\underline{\Delta} = \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{vmatrix} = \underline{A}_{11} \underline{A}_{22} - \underline{A}_{21} \underline{A}_{12} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} - \frac{1}{\underline{Y}_{21}} \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \underline{Y}_{11} + \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{21}} = 1;$$

$$\underline{A}_{11} \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} = 1. \quad (2.189)$$

Тут, як і раніше, лише три коефіцієнти з чотирьох є незалежними.

#### 2.4.2.4. Зворотнє включення чотириполюсника. Умова симетрії

При зворотньому включенні джерело вмикають на затискачі 2-2', а навантаження на 1-1' (рис. 2.70).

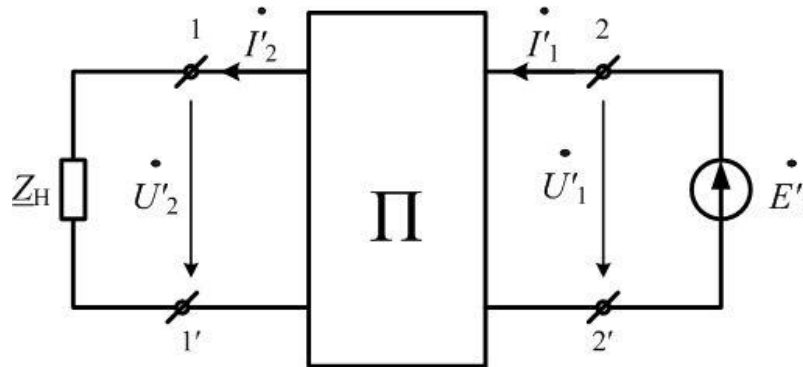


Рис. 2.70

Порівнявши рис. 2.69 і рис. 2.70, можна встановити такі відповідності:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &\rightarrow \underline{U}'_2, & \underline{I}_1 &\rightarrow (-\underline{I}'_2), \\ \underline{U}_2 &\rightarrow \underline{U}'_1, & \underline{I}_2 &\rightarrow (-\underline{I}'_1). \end{aligned} \quad (2.190)$$

З урахуванням співвідношень (2.190) рівняння чотириполюсника в формі  $[A]$  для зворотнього включення матимуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}'_2 &= \underline{A}_{11}\underline{U}'_1 + \underline{A}_{12}(-\underline{I}'_1); \\ -\underline{I}'_2 &= \underline{A}_{21}\underline{U}'_1 + \underline{A}_{22}(-\underline{I}'_1). \end{aligned} \right\} \quad (2.191)$$

Ці рівняння виражають вихідні величини  $\underline{U}'_2, \underline{I}'_2$  через вхідні  $\underline{U}'_1, \underline{I}'_1$ .

Для того щоб, як і раніше, мати рішення для вхідних величин  $\underline{U}'_1, \underline{I}'_1$ , потрібно рівняння (2.190) розв'язати відносно  $\underline{U}'_1, \underline{I}'_1$ .

$$\underline{\Delta}' = \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} - \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} - \underline{A}_{22} \end{vmatrix} = -\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = -1.$$

Складаємо доповнення:

$$\underline{\Delta}'_1 = \begin{vmatrix} \underline{U}'_2 & -\underline{A}_{12} \\ -\underline{I}'_2 & -\underline{A}_{22} \end{vmatrix} = -\underline{A}_{22}\underline{U}'_2 - \underline{A}_{12}\underline{I}'_2,$$

$$\underline{\Delta}'_2 = \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{U}'_2 \\ \underline{A}_{21} & -\underline{I}'_2 \end{vmatrix} = -\underline{A}_{11}\underline{I}'_2 - \underline{A}_{21}\underline{U}'_2 = -\underline{A}_{21}\underline{U}'_2 - \underline{A}_{11}\underline{I}'_2.$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}'_1 &= \frac{\underline{\Delta}'_1}{\underline{\Delta}'} = \underline{A}_{22}\underline{U}'_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}'_2; \\ \underline{I}'_1 &= \frac{\underline{\Delta}'_2}{\underline{\Delta}'} = \underline{A}_{21}\underline{U}'_2 + \underline{A}_{11}\underline{I}'_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.192)$$

Якщо порівняти отримані рівняння (2.192) з рівняннями (2.188) для прямого включення, то бачимо, що в останніх рівняннях помінялися місцями  $\underline{A}_{22}$  і  $\underline{A}_{11}$ . У випадку коли

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}, \quad (2.193)$$

то тоді немає значення, які затискачі вхідні, а які вихідні (вихідні – де включене джерело, вихідні – навантаження).

В такому випадку умови передачі енергії від вхідних до вихідних затискачів не залежать від того, яка пара затискачів є вхідною, тобто такий чотириполіусник є **симетричним**.

Таким чином рівняння (2.193) є умовою симетрії пасивного чотириполіусника.

### 2.4.3. Еквівалентні схеми заміщення пасивного чотириполюсника

При аналізі рівнянь чотириполюсника у формах  $[Y]$ ,  $[Z]$ ,  $[A]$  було вказано, що тільки три коефіцієнти із чотирьох в системах рівнянь чотириполюсника є незалежні.

Таким чином пасивний чотириполюсник можна зобразити трьохелементною еквівалентною схемою заміщення. Це відповідно Т – чи П – схеми заміщення (рис. 2.71 і рис. 2.72 відповідно).

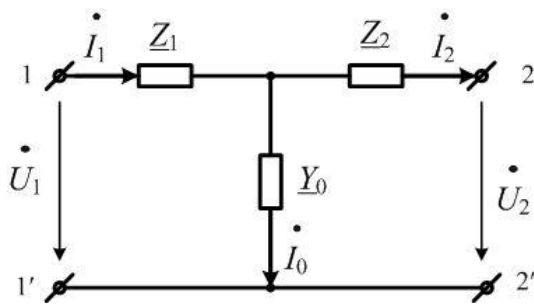


Рис. 2.71

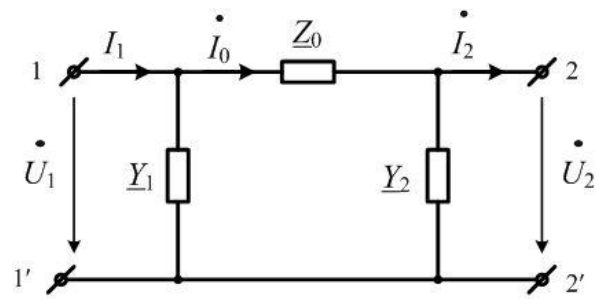


Рис. 2.72

Будь-який чотириполюсник можна звести до однієї з них.

Встановимо залежності між коефіцієнтами рівнянь форми  $[A]$  і параметрами схем заміщення. Для цього встановимо зв'язки між вхідними і вихідними напругами, струмами та параметрами схем заміщення.

**а) Т-схема заміщення (рис. 2.71).**

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2;$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 + \underline{I}_2 = (\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2) \underline{Y}_0 + \underline{I}_2 = \underline{U}_2 \underline{Y}_0 + \underline{I}_2 (1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0); \quad (2.194)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \underline{Z}_1 \underline{Y}_0 + \underline{I}_2 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2;$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 (1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0) + \underline{I}_2 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0). \quad (2.195)$$

Порівнюємо рівняння (2.194, 2.195) із рівняннями чотириполюсника у формі  $[\underline{A}]$ :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2. \end{aligned} \right\}$$

Встановлюємо такі співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} \underline{A}_{11} &= 1 + \underline{Z}_1\underline{Y}_0; & \underline{A}_{12} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Y}_0; \\ \underline{A}_{21} &= \underline{Y}_0; & \underline{A}_{22} &= 1 + \underline{Z}_2\underline{Y}_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.196)$$

Співвідношення (2.196) встановлюють залежності між коефіцієнтами рівнянь форми  $[\underline{A}]$  чотириполюсника та параметрами його еквівалентної Т-схеми заміщення.

Якщо ж відомі  $[\underline{A}]$  - параметри чотириполюсника, то елементи Т-схеми заміщення можна визначити через співвідношення (2.197):

$$\left. \begin{aligned} \underline{Y}_0 &= \underline{A}_{21}; \\ \underline{Z}_1 &= (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{A}_{21}; \\ \underline{Z}_2 &= (\underline{A}_{22} - 1) / \underline{A}_{21}. \end{aligned} \right\} \quad (2.197)$$

**б) П-схема заміщення** (рис. 2.72).

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \underline{I}_0 \underline{Z}_0 = \underline{U}_2 + (\underline{I}_2 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2) \underline{Z}_0 = \\ &= \underline{U}_2 (1 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_0) + \underline{I}_2 \underline{Z}_0. \end{aligned} \quad (2.198)$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_0 + \underline{U}_1 \underline{Y}_1 = \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2 + \underline{U}_2 \underline{Y}_1 + \underline{U}_2 \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0 + \underline{I}_2 \underline{Z}_0 \underline{Y}_1 = \\ &= \underline{U}_2 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0) + \underline{I}_2 (1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}_0). \end{aligned} \quad (2.199)$$

Порівнявши (2.198, 2.199) з рівняннями (2.188) чотириполюсника, встановлюємо такі співвідношення між його П-схемою заміщення та коефіцієнтами рівнянь  $[A]$ :

$$\left. \begin{aligned} \underline{A}_{11} &= 1 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_0; & \underline{A}_{12} &= \underline{Z}_0; \\ \underline{A}_{21} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0; & \underline{A}_{22} &= 1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.200)$$

Якщо ж відомі  $[A]$  - параметри чотириполюсника, то параметри П-схеми заміщення можна визначити через співвідношення (3.101):

$$\underline{Z}_0 = \underline{A}_{12}; \quad \underline{Y}_1 = (\underline{A}_{22} - 1) / \underline{A}_{12}; \quad \underline{Y}_2 = (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{A}_{12}. \quad (2.201)$$

#### 2.4.4. Визначення коефіцієнтів рівнянь форми $[A]$ із режимів неробочого ходу та короткого замикання

По отриманих в попередньому параграфі рішеннях можна визначити коефіцієнти рівнянь в формі  $[A]$ , якщо маємо відповідно Т-чи П-схему заміщення чотириполюсника і відомі параметри ( $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Y}_0, \dots$ ). Можна скористатися подібним аналізом і отримати рішення для коефіцієнтів в формі  $[A]$  і в тому випадку, коли схеми з'єднань чотириполюсника відрізняються від розглянутих Т- чи П-схем, але схема з'єднань і параметри схеми відомі. Та у випадку коли схема з'єднань і параметри невідомі, то подібний аналіз провести неможливо.

В цьому випадку коефіцієнти рівнянь знаходять експериментально в результаті вимірів в режимах неробочого ходу та короткого замикання при прямому і зворотному включенні чотириполюсника (рис. 2.69 та рис. 2.67).

При вимірах фіксуються покази вольтметра, амперметра, фазометра (або ватметра).

При цьому аналізі будемо виходити з рівнянь для прямого та зворотного включення чотириполюсника:

для прямого включення

для зворотного включення

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2. \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \underline{U}'_1 &= \underline{A}_{22}\underline{U}'_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}'_2; \\ \underline{I}'_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}'_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}'_2. \end{aligned} \right\}$$

**а) режим неробочого ходу на затискачах 2-2':**

$$\underline{I}_2 = 0, \quad \underline{Z}_H = \infty,$$

$$\underline{U}_{10} = \underline{A}_{11}\underline{U}_{20}, \quad \underline{I}_{10} = \underline{A}_{21}\underline{U}_{20};$$

$$\frac{\underline{U}_{10}}{\underline{I}_{10}} = \underline{Z}_{10} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}; \quad (2.202)$$

$$\underline{Z}_{10} = Z_{10}e^{j\varphi_{10}}, \quad \varphi_{10} - \text{показ фазометра};$$

$$Z_{10} = \frac{U_{10}}{I_{10}}, \quad U_{10}, I_{10} - \text{покази вольтметра та амперметра.}$$

**б) режим короткого замикання на затискачах 2-2':**

$$\underline{Z}_H = 0, \quad \underline{U}_2 = 0,$$

$$\underline{U}_{1K} = \underline{A}_{12}\underline{I}_{2K}; \quad \underline{I}_{1K} = \underline{A}_{22}\underline{I}_{2K};$$

$$\frac{\underline{U}_{1K}}{\underline{I}_{1K}} = \underline{Z}_{1K} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}, \quad (2.203)$$

$$\underline{Z}_{1K} = Z_{1K}e^{j\varphi_{1K}}.$$

**в) режим неробочого ходу на затискачах 1-1' при зворотному включенні:**

$$\underline{I}'_2 = 0, \quad \underline{Z}_H = \infty;$$

$$\underline{U}'_{10} = \underline{A}_{22}\underline{U}'_{20}, \quad \underline{I}'_{10} = \underline{A}_{21}\underline{U}'_{20};$$

$$\frac{\underline{U}_{10}}{\underline{I}_{10}} = \underline{Z}_{20} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}; \quad (2.204)$$

$$\underline{Z}_{20} = Z_{20} e^{j\varphi_{20}}.$$

г) режим короткого замикання на затискачах 1-1' при зворотному включенні:

$$\underline{Z}_H = 0, \quad \underline{U}'_2 = 0;$$

$$\underline{U}'_{1K} = \underline{A}_{12} \underline{I}'_{2K}, \quad \underline{I}'_{1K} = \underline{A}_{11} \underline{I}'_{2K};$$

$$\frac{\underline{U}_{1K}}{\underline{I}_{1K}} = \underline{Z}_{2K} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}; \quad (2.205)$$

$$\underline{Z}_{2K} = Z_{2K} e^{j\varphi_{2K}}.$$

Із отриманих рішень маємо:

$$\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{20}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}; \quad \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}} \quad (2.206)$$

$$\frac{\underline{Z}_{1K}}{\underline{Z}_{2K}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}; \quad \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}} \quad (2.207)$$

$$\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{20}} = \frac{\underline{Z}_{1K}}{\underline{Z}_{2K}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}} \quad (2.208)$$

Таким чином достатньо виконати три досліди, а четвертий використати для перевірки.

Скористаємося встановленими раніше співвідношенням між коефіцієнтами рівнянь форми [A] (3.89):

$$\underline{A}_{11} \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} = 1.$$

Для визначення  $\underline{A}_{11}$  виразимо  $\underline{A}_{22}$ ,  $\underline{A}_{12}$ ,  $\underline{A}_{21}$ , через коефіцієнт  $\underline{A}_{11}$  та опори неробочого ходу і короткого замикання:

$$\underline{A}_{22} = \underline{A}_{11} \cdot \underline{Z}_{20} / \underline{Z}_{10}, \quad (2.209)$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} \cdot \underline{Z}_{2K}, \quad (2.210)$$

$$\underline{A}_{21} = \underline{A}_{11} / \underline{Z}_{10}. \quad (2.211)$$

$$\underline{A}_{11}^2 \cdot \underline{Z}_{20} / \underline{Z}_{10} - \underline{A}_{11}^2 \cdot \underline{Z}_{2K} / \underline{Z}_{10} = 1.$$

Отже: 
$$\underline{A}_{11}^2 \left( \frac{\underline{Z}_{20} - \underline{Z}_{2K}}{\underline{Z}_{10}} \right) = 1. \quad (2.212)$$

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{2K}}}. \quad (2.213)$$

Таким чином, якщо виконані виміри опорів неробочого ходу  $\underline{Z}_{20}$  та короткого замикання  $\underline{Z}_{2K}$  відносно затискачів 2-2' та опору неробочого ходу  $\underline{Z}_{10}$  відносно 1-1', можна розрахувати значення  $\underline{A}_{11}$ . Решта коефіцієнтів  $\underline{A}_{22}$ ,  $\underline{A}_{12}$ ,  $\underline{A}_{21}$  знаходять по співвідношенням (2.209–2.211).

Якщо відома схема з'єднань і відомі параметри елементів схеми, то ці опори можна розрахувати, виходячи із схеми з'єднань та електричних параметрів схеми.

#### 2.4.5. Вторинні параметри чотириполюсника

##### а) Характеристичні опори чотириполюсника.

До вторинних параметрів відносяться характеристичні опори та коефіцієнт поширення. Характеристичні опори чотириполюсника це такі опори  $\underline{Z}_{C1}$  та  $\underline{Z}_{C2}$ , які задовольняють наступним вимогам:

- вхідний опір  $\underline{Z}_{BX1}$  відносно затискачів 1-1' чотириполюсника навантаженого на  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{C2}$ ,  $\underline{Z}_{BX1} = \underline{Z}_{C1}$ ;

- вхідний опір  $\underline{Z}_{\text{BX}2}$  чотириполюсника відносно затискачів 2-2', навантаженого на затискачах 1-1' на  $\underline{Z}_{\text{H}} = \underline{Z}_{\text{C}1}$ ,  $\underline{Z}_{\text{BX}2} = \underline{Z}_{\text{C}2}$  .

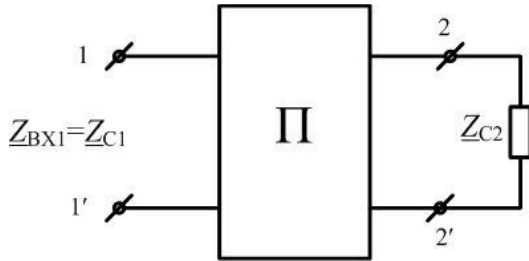


Рис. 2.73

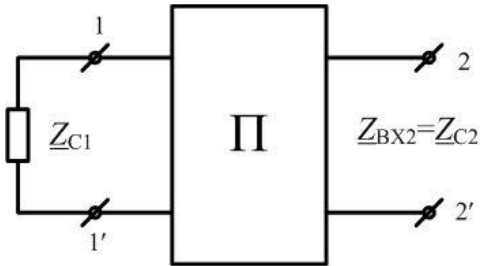


Рис. 2.74

$\underline{Z}_{\text{C}1}$  та  $\underline{Z}_{\text{C}2}$  – це два конкретні опори, які залежать від параметрів елементів чотириполюсника.

Встановимо залежність між характеристичними опором чотириполюсника та коефіцієнтами рівнянь у формі  $[A]$ :

$$\underline{Z}_{\text{BX}1} = \frac{U_1}{I_1} = \underline{Z}_{\text{C}1} = \frac{A_{11}I_2\underline{Z}_{\text{C}2} + A_{12}I_2}{A_{21}I_2\underline{Z}_{\text{C}2} + A_{22}I_2};$$

$$\underline{Z}_{\text{C}1} = \frac{A_{11}\underline{Z}_{\text{C}2} + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_{\text{C}2} + A_{22}}. \quad (2.214)$$

$$\underline{Z}_{\text{C}2} = \frac{A_{22}\underline{Z}_{\text{C}1} + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_{\text{C}1} + A_{11}}; \quad (2.215)$$

$$\underline{Z}_{\text{C}1}A_{21}\underline{Z}_{\text{C}2} + A_{22}\underline{Z}_{\text{C}1} = A_{11}\underline{Z}_{\text{C}2} + A_{12};$$

$$\underline{Z}_{\text{C}2}A_{21}\underline{Z}_{\text{C}1} + A_{11}\underline{Z}_{\text{C}2} = A_{22}\underline{Z}_{\text{C}1} + A_{12};$$

$$A_{22}\underline{Z}_{\text{C}1} = A_{11}\underline{Z}_{\text{C}2}, \quad \underline{Z}_{\text{C}1} / \underline{Z}_{\text{C}2} = A_{11} / A_{22}; \quad (2.216)$$

$$\underline{Z}_{\text{C}2} \cdot A_{21}\underline{Z}_{\text{C}1} = A_{12}, \quad \underline{Z}_{\text{C}1} \cdot \underline{Z}_{\text{C}2} = A_{12} / A_{21}. \quad (2.217)$$

Із рівнянь (2.216, 2.217) отримаємо:

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{22}}}, \quad (2.218)$$

$$\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11}}}. \quad (2.219)$$

Від рівнянь (2.218), (2.219) можна перейти до опорів неробочого ходу та короткого замикання:

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\underline{Z}_{10} \cdot \underline{Z}_{1K}}, \quad (2.220)$$

$$\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\underline{Z}_{20} \cdot \underline{Z}_{2K}}. \quad (2.221)$$

Формули (2.20), (2.221) вказують на те, що характеристичні опори чотириполюсника є середньгеометричними із опорів неробочого ходу та короткого замикання відносно первинних чи вторинних затискачів. Якщо чотириполюсник симетричний, то  $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$  :

$$\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}}. \quad (2.222)$$

**Повторний опір чотириполюсника  $\underline{Z}_{\Pi}$** : опір, включивши який на вихідні затискачі чотириполюсника, відносно вхідних отримаємо такий же самий опір. Для симетричного чотириполюсника характеристичний опір є його повторним опором.

#### **б) Коефіцієнт поширення чотириполюсника:**

Це комплексна характеристика, що характеризує умови передачі енергії через чотириполюсник в режимі узгодженого навантаження.

**Режимом узгодженого навантаження чотириполюсника** називається такий режим, коли опір навантаження дорівнює характеристичному опору.

$\underline{\gamma} = A + jB$  – коефіцієнт поширення,  $A$  – коефіцієнт згасання,  $B$  – коефіцієнт фази.

Визначається коефіцієнт поширення із співвідношення :

$$\underline{\gamma} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}_2} \quad (2.223)$$

Крім формули (2.223) можна дати і інші вирази для коефіцієнта поширення. Приймаючи до уваги, що це характеристика режиму узгодженого навантаження чотирьохполюсника, матимемо:

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_{C2}, \quad \underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_{C1}.$$

З рівняння (2.223) маємо:

$$\underline{\gamma} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{I}_1 \underline{Z}_{C1} \underline{I}_1}{\underline{I}_2 \underline{Z}_{C2} \underline{I}_2} = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}}, \quad (2.224)$$

$$\underline{\gamma} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{U}_1^2 \underline{Z}_{C2}}{\underline{U}_2^2 \underline{Z}_{C1}} = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}}}. \quad (2.225)$$

З формули (2.224) маємо:  $\underline{\gamma} = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}}$ .

Відповідно:  $\underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \cdot \underline{I}_2 \underline{Z}_{C2} + \underline{A}_{22} \underline{I}_2$  Тоді  $\underline{\gamma} = \ln(\underline{A}_{21} \underline{Z}_{C2} + \underline{A}_{22}) \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}}$ .

Враховуючи, що  $\sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}}$ ,  $\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}} \cdot \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}}$ ,

після відповідних перетворень отримаємо:

$$\underline{\gamma} = \ln\left(\sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}\right). \quad (2.226)$$

Із формули (2.226) випливає, що маємо однакове значення  $\underline{\gamma}$  відносно вхідних і вихідних затискачів.

Для симетричного чотириполюсника ( $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ ) матимемо:

$$\underline{\gamma} = \ln\left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\right) = \ln\left(Me^{j\xi}\right) = \ln M + j\xi, \quad (3.127)$$

або  $\underline{\gamma} = A + jB$ , тоді  $\ln M = A$  – коефіцієнт згасання,  $\xi = B$  – коефіцієнт фази.

#### 2.4.6. Коефіцієнт поширення симетричного чотириполюсника

Для симетричного чотириполюсника  $\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_C$ .

Тоді формули (2.224) і (2.225) матимуть вигляд:  $\underline{\gamma} = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}$ ,

де  $\underline{I}_1 = I_1 e^{j\Psi_{i1}}$ ;  $\underline{I}_2 = I_2 e^{j\Psi_{i2}}$ ;  $\underline{U}_1 = U_1 e^{j\Psi_{u1}}$ ;  $\underline{U}_2 = U_2 e^{j\Psi_{u2}}$ .

Матимемо:  $\underline{\gamma} = \ln\left(\frac{I_1}{I_2} e^{j(\Psi_{i1} - \Psi_{i2})}\right) = \ln \frac{I_1}{I_2} + j(\Psi_{i1} - \Psi_{i2})$ ;

$\underline{\gamma} = \ln\left(\frac{U_1}{U_2} e^{j(\Psi_{u1} - \Psi_{u2})}\right) = \ln \frac{U_1}{U_2} + j(\Psi_{u1} - \Psi_{u2})$ ;

$$A = \ln \frac{I_1}{I_2} = \ln \frac{U_1}{U_2} \text{ – коефіцієнт згасання;} \quad (2.228)$$

$B = \Psi_{i1} - \Psi_{i2} = \Psi_{u1} - \Psi_{u2}$  – коефіцієнт фази.

Таким чином коефіцієнт згасання вказує на зміну вихідних струму і напруги порівняно з вхідними по модулю, а коефіцієнт фази на зміну фази вихідних струму чи напруги. Якщо скористатися рівнянням (2.228) для

визначення коефіцієнта згасання, тобто через  $\ln$ , отримаємо  $A$  в неперах. Згасанню в 1 Нп буде відповідати зміна вихідного струму чи напруги порівняно з вхідними в  $e$  раз.

$$A = 1 \text{ Нп} \Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = e = 2,718 \text{ раз.}$$

Крім неперів, згасання вимірюють і в белах (Б) або децибелах (дБ):

$$A_{\text{Б}} = 2 \log \frac{U_1}{U_2} = 2 \log \frac{I_1}{I_2}.$$

Згасання в 1 Б буде при  $\frac{U_1}{U_2} = 10^{0,5} = \sqrt{10} = 3,162$  раз.

1 Б = 10 дБ; 1 дБ  $\Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = 1,122$  раз.

$$A_{\text{Б}} = 2 \log e^{A_{\text{Нп}}} = 2 A_{\text{Нп}} \log e = 0,8686 A_{\text{Нп}};$$

$$1 \text{ Нп} = 0,8686 \text{ Б} = 8,68 \text{ дБ.}$$

#### 2.4.7. Рівняння чотириполюсника, записані через вторинні параметри

До вторинних параметрів чотириполюсника відносяться характеристичні опори  $\underline{Z}_{C1}$ ,  $\underline{Z}_{C2}$  та коефіцієнт поширення  $\underline{\gamma}$ .

Виходимо з рівнянь чотириполюсника в формі  $[\underline{A}]$ :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2. \end{aligned} \right\}$$

Щоб знайти рішення для коефіцієнтів форми  $[\underline{A}]$ , скористаємося отриманими раніше співвідношеннями:

$$\underline{\gamma} = \ln \left( \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right), \quad (2.229)$$

$$e^{\underline{\gamma}} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}, \quad (2.230)$$

$$e^{-\underline{\gamma}} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} - \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}, \quad (2.231)$$

$$\sqrt{\underline{Z}_{C1}\underline{Z}_{C2}} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}}, \quad (2.232)$$

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}}. \quad (2.233)$$

За формулами Ейлера:

$$\frac{e^{\underline{\gamma}} + e^{-\underline{\gamma}}}{2} = \text{ch } \underline{\gamma}, \quad (2.234)$$

$$\frac{e^{\underline{\gamma}} - e^{-\underline{\gamma}}}{2} = \text{sh } \underline{\gamma}. \quad (2.235)$$

Із приведених рівнянь (2.229)-(2.235) отримуємо:

$$\text{ch } \underline{\gamma} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}}, \quad (2.236)$$

$$\text{sh } \underline{\gamma} = \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}, \quad (2.237)$$

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} \text{ch } \underline{\gamma}, \quad (2.238)$$

$$\underline{A}_{12} = \sqrt{\underline{Z}_{C1}\underline{Z}_{C2}} \text{sh } \underline{\gamma}, \quad (2.239)$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\text{sh } \underline{\gamma}}{\sqrt{\underline{Z}_{C1}\underline{Z}_{C2}}}, \quad (2.240)$$

$$\underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}}} \text{ch } \underline{\gamma}. \quad (2.241)$$

Формули (2.238–2.241) дають можливість визначити коефіцієнти  $[\underline{A}]$ , якщо відомі вторинні параметри чотириполюсника  $\underline{Z}_{C1}, \underline{Z}_{C2}, \underline{\gamma}$ . З

урахуванням останніх формул від рівнянь чотириполюсника у формі [A] перейдемо до рівнянь чотириполюсника з вторинними параметрами:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} \left( \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} + \underline{I}_2 \underline{Z}_{C2} \operatorname{sh} \underline{\gamma} \right), \\ \underline{I}_1 &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}}} \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{C2}} \operatorname{sh} \underline{\gamma} + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (2.242)$$

Для симетричного чотириполюсника  $\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_C$

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \left( \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \operatorname{sh} \underline{\gamma} \right), \\ \underline{I}_1 &= \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \underline{\gamma} + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (2.243)$$

Для симетричного чотириполюсника в узгодженому режимі навантаження  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_C \Rightarrow \underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_C$ .

Таким чином:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \left( \operatorname{ch} \underline{\gamma} + \operatorname{sh} \underline{\gamma} \right) = \underline{U}_2 e^{\underline{\gamma}}, \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 \left( \operatorname{sh} \underline{\gamma} + \operatorname{ch} \underline{\gamma} \right) = \underline{I}_2 e^{\underline{\gamma}}. \end{aligned} \quad (2.244)$$

#### 2.4.8. Каскадне з'єднання чотириполюсників

Каскадним з'єднанням називається з'єднання, коли вихідні затискачі 1-го чотириполюсника вмикаються на вхідні затискачі другого, вихідні затискачі другого на вхідні затискачі третього і т.д. (рис. 2.75)

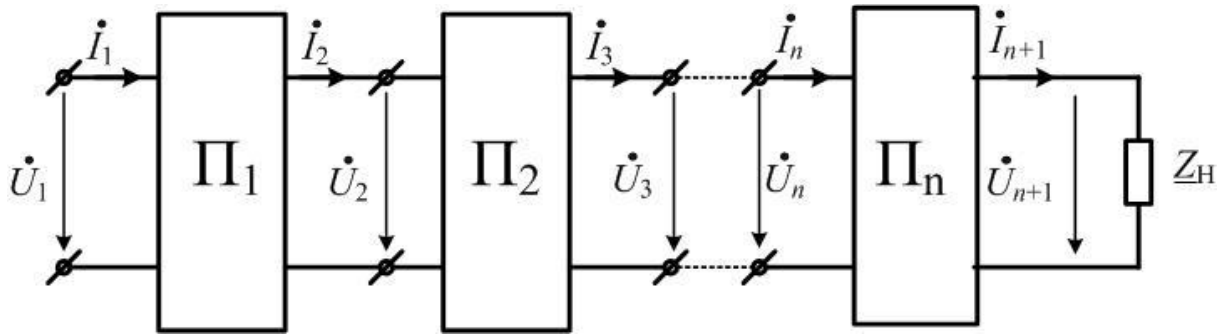


Рис. 2.75

Рівняння в формі  $[A]$  для першого чотириполюсника:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2.$$

В матричній формі:

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = \underline{A}_1 \begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix}; \quad - \text{ для чотириполюсника}$$

$\Pi_1$ ;

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix} = \underline{A}_2 \begin{vmatrix} \underline{U}_3 \\ \underline{I}_3 \end{vmatrix}; \quad - \text{ для чотириполюсника } \Pi_2.$$

Для останнього чотириполюсника:

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_n \\ \underline{I}_n \end{vmatrix} = \underline{A}_n \begin{vmatrix} \underline{U}_{n+1} \\ \underline{I}_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Запишемо вхідні  $\underline{U}_1, \underline{I}_1$  на вході каскадного з'єднання через  $\underline{U}_{n+1}$  та  $\underline{I}_{n+1}$  на виході цього з'єднання.

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = \|\underline{A}_1\| \|\underline{A}_2\| \|\underline{A}_3\| \dots \dots \dots \|\underline{A}_n\| \begin{vmatrix} \underline{U}_{n+1} \\ \underline{I}_{n+1} \end{vmatrix}, \quad (2.245)$$

$$\|\underline{A}_1\| \|\underline{A}_2\| \|\underline{A}_3\| \dots \dots \dots \|\underline{A}_n\| = \underline{A}_e \quad (2.246)$$

$|\underline{A}_e|$  – еквівалентна матриця  $[\underline{A}]$  – параметрів каскадного з'єднання.

$$\text{Звідси } \begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = |\underline{A}_e| \begin{vmatrix} \underline{U}_{n+1} \\ \underline{I}_{n+1} \end{vmatrix}. \quad (2.247)$$

Будь-який чотириполіусник, можна розглядати як каскадне з'єднання одноелементних чотириполіусників. Визначивши матрицю кожного із одноелементних, за формулою (2.246) знаходимо  $|\underline{A}_e|$  цього з'єднання, тобто матрицю складного чотириполіусника.

Приклад.

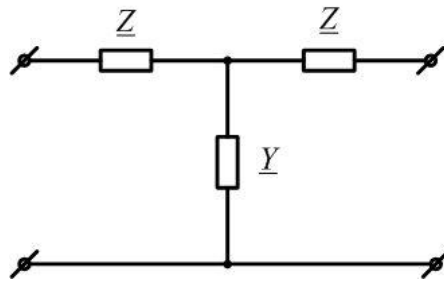


Рис 2.76

Схему рис. 2.76 можна розглядати як каскадне з'єднання одноелементних чотириполіусників (рис. 2.77).

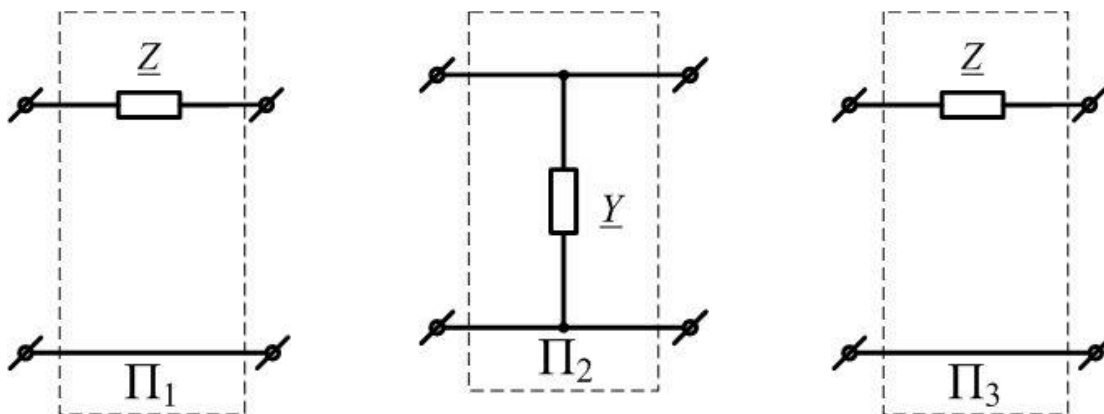


Рис. 2.77

Матриці  $[\underline{A}]$  для чотириполіусників  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ :

$$|\underline{A}_1| = \begin{vmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad |\underline{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{vmatrix}, \quad |\underline{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для схеми рис. 2.76 за умови  $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ :

$$|\underline{A}_e| = \|\underline{A}_1\| \|\underline{A}_2\| \|\underline{A}_3\|, \quad |\underline{A}_e| = \begin{vmatrix} 2 & 3\underline{Z} \\ \underline{Y} & 2 \end{vmatrix},$$

Що відповідає матриці  $[\underline{A}]$  чотириполюсника рис. 2.75.

### 2.4.9. Ланцюгова схема

Ланцюгова схема являє собою касадне з'єднання симетричних однакових чотириполюсників.

Ланцюгова схема використовується при моделюванні й аналізі розподілу напруг та струмів в гірляндах ізоляторів або обмотках трансформатора чи генератора.

Кожен із чотириполюсників (комірка), які входять в ланцюгову схему, являє собою набір елементів  $RLC$ , з'єднаних по Т- чи по П- схемі.

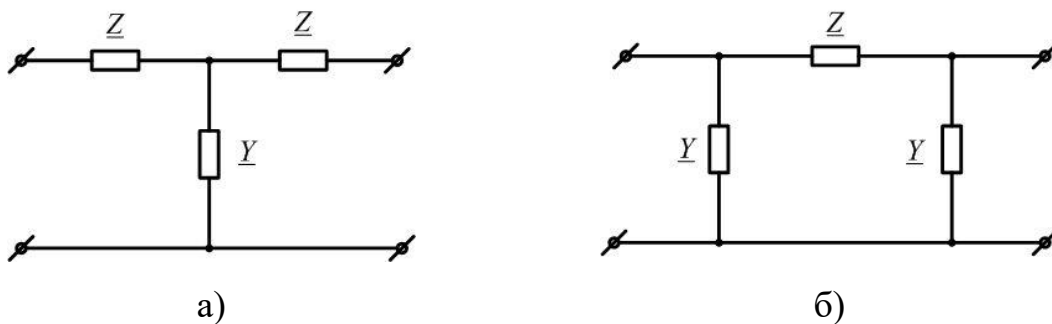


Рис. 2.76

Приймаючи до уваги, що всі чотиріполіусники однакові і симетричні, кожна із комірок матиме характеристичний опір  $\underline{Z}_C$ . Характеристичний опір всієї ланцюгової схеми теж буде дорівнювати  $\underline{Z}_C$ .

Якщо таку ланцюгова схему навантажити на  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_C$ , то матимемо узгоджений режим ланцюгової схеми і кожної комірки; тоді  $\frac{U_{\text{ВХ}}}{U_{\text{ВИХ}}}$  в

кожній комірці становитиме:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_3} = \dots = \frac{\underline{U}_n}{\underline{U}_{n+1}} = e^{\underline{\gamma}},$$

де  $\underline{\gamma}$  – коефіцієнт поширення одної комірки.

Відношення вхідної напруги до вихідної для ланцюгової схеми становитиме:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_{n+1}} = e^{n\underline{\gamma}} = e^{\underline{\gamma}_{\text{ЛСХ}}},$$

де  $\underline{\gamma}$  – коефіцієнт поширення 1-ої комірки;

$\underline{\gamma}_{\text{ЛСХ}}$  – коефіцієнт поширення ланцюгової схеми.

$$\underline{\gamma}_{\text{ЛСХ}} = n\underline{\gamma}, \quad \underline{\gamma}_{\text{ЛСХ}} = A_{\text{ЛСХ}} + jB_{\text{ЛСХ}};$$

$A_{\text{ЛСХ}}$  – коефіцієнт згасання ланцюгової схеми;

$A_{\text{ЛСХ}} = nA$ ;  $A$  – коефіцієнт згасання комірки;

$B_{\text{ЛСХ}} = nB$ ;  $B$  – коефіцієнт фази комірки;

$n$  – кількість комірок ланцюгової схеми.

Таким чином, рівняння напруги і струму  $k$ -ої комірки зручно записати через вторинні параметри  $\underline{Z}_C$  і  $\underline{\gamma}$ . Матимемо:

$$\begin{aligned} \underline{U}_k &= \underline{U}_{n+1} \operatorname{ch}(n-k+1)\underline{\gamma} + \underline{I}_{n+1} \underline{Z}_C \operatorname{sh}(n-k+1)\underline{\gamma}, \\ \underline{I}_k &= \frac{\underline{U}_{n+1}}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh}(n-k+1)\underline{\gamma} + \underline{I}_{n+1} \operatorname{ch}(n-k+1)\underline{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.248)$$

Для напруги і струму на вході із рівняння (2.248) отримаємо:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_{n+1} \operatorname{ch} n\underline{\gamma} + \underline{I}_{n+1} \underline{Z}_C \operatorname{sh} n\underline{\gamma}, \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{n+1}}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} n\underline{\gamma} + \underline{I}_{n+1} \operatorname{ch} n\underline{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.249)$$

### Література:

1. Маляр В.С. Теоретичні основи електротехніки: Підручник: – Львів: Видавництво «Львівська політехніка», 2018. – 416 с.
2. Матвієнко М. П. Основи електротехніки та електроніки. Підручник. – К.: Видавництво «Ліра-К», 2017. – 504 с.
3. Хілов В.С. Теоретичні основи електротехніки: Дніпро: Національний технічний університет “Дніпровська політехніка”, 2021.- 433 с.
4. Карпов Ю.О., Кацев С.Ш., Кухарчук В.В., Ведміцький Ю.Г. Теоретичні основи електротехніки. усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами. Підручник. – Херсон: «Олді-Плюс+», 2019. – 326 с.
5. Паначевний Б.І., Свергун Ю.Ф. Загальна електротехніка. Підручник. – К.: «Каравела», 2018. – 296 с.
6. «Теоретичні основи електротехніки. Збірник задач: навчальний посібник» / укл. О.В.Корощенко, В.Ф.Денник, О.А.Журавель та ін.; за заг.ред. О.В.Корощенка.- Донецьк, ДВНЗ «ДонНТУ», 2012.- 673 с.

7. Гуржій А.М., Мещанінов С.К., Нельга А.Т., Співак В.М. Електротехніка та основи електроніки : Підручник. - Київ: «Літера ЛТД», 2020. - 288 с
8. Nilsson J.W. & Riedel S.A. Electric circuits. Tenth edition. Pearson Education Limited. 2020. <https://ktuee.files.wordpress.com/2019/11/electric-circuits-by-james-w.-nilsson-susan-riedel-10th-edition.pdf>
9. Дистанційний курс «Теоретична електротехніка»  
<https://do.ipk.kpi.ua/course/view.php?id=40>,  
<https://do.ipk.kpi.ua/course/view.php?id=41>.
10. Навчально-методичний посібник з курсу “Електротехніка”. Розділ “Розрахунок лінійних кіл постійного струму” / укл. Щерба А. А., Грудська В. П., Спінул Л.Ю - К.: ІВЦ «Політехніка».- 2004.
11. Навчально-методичний посібник з курсу “Електротехніка”. Розділ “Розрахунок лінійних кіл однофазного синусоїдного струму” / укл. Щерба А.А.,Грудська В. П., Спінул Л.Ю. - К.: ІВЦ «Політехніка».- 2004.
12. Навчально-методичний посібник “Взаємна індукція у колах змінного струму ”. / укл. Щерба А.А., Грудська В. П., Чибеліс В.І., Спінул Л.Ю. - К.: ВПЦ «Політехніка».- 2006.
13. Розрахунок електричних кіл постійного струму. Навчальне видання. / Уклад.: І.А. Курило, І.Н. Намацалюк, А.А. Щерба. – К.: НТУУ “КПІ”, ФЕА, 2006. – 51 с.
14. Розрахунок електричних кіл синусоїдного однофазного струму. Методичні вказівки до виконання розрахункових робіт. / Уклад.: І.А. Курило, І.Н. Намацалюк, А.А. Щерба. – К.: НТУУ “КПІ”, 2004. – 82 с.
15. Методичні вказівки до лабораторних робіт з теоретичних основ електротехніки: цикл 1./ Укл. А.А. Щерба, В.С. Бойко, В.І. Чибеліс, І.А. Курило.– К., НТУУ "КПІ", 2008. – 28 с.

16. Методичні вказівки до лабораторних робіт з теоретичних основ електротехніки: цикл 2./ Укл. А.А. Щерба, В.С. Бойко, В.І. Чибеліс та інші. – К., НТУУ "КПІ", 2008. – 36 с.