

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Частина 2

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітніми програмами «Електричні системи і мережі», «Електричні станції»
«Електричні машини і апарати», «Управління, захист та автоматизація енергосистем»
«Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та
електромобільність»,
«Електротехнічні пристрої та електротехнологічні комплекси»
«Нетрадиційні та відновлювані джерела енергії»
спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент: *Чумак Вадим Володимирович*, канд. техн. наук, доц .
Відповідальний редактор *Островецький Микола Якович*, д-р техн. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол №6 від 24 червня 2022 р.)
за поданням Вченої ради факультету електроенергетичної та автоматичної
(протокол № 10 від 20 червня 2022 р.)*

Електронне мережне навчальне видання
Спінул Людмила Юріївна, канд. техн. наук, доц.
Бурик Микола Петрович, канд. техн. наук, доц.
Лободзинський Вадим Юрійович, канд. техн. наук, доц.
Білецький Олег Олександрович, канд. техн. наук, доц.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Частина 2

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Теоретичні основи електротехніки Частина 2: Навчальний посібник [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітніми програмою «Електричні системи і мережі», «Електричні станції», «Електричні машини і апарати», «Управління, захист та автоматизація енергосистем», «Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність», «Електротехнічні пристрої та електротехнологічні комплекси», «Нетрадиційні та відновлювані джерела енергії» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / Л.Ю.Спінул, М.П.Бурик, В.Ю.Лободзинський; О.О.Білецький, КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 9 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 167 с.

Наведено основні положення для аналізу електричних кіл трифазного синусоїдного струму. Наведено методи розрахунку трифазного кола із статичним і динамічним навантаженням (метод симетричних складових). Розглянуто розрахунок і вимірювання потужності у трифазному колі. У другій частині посібника наведено теоретичні положення розрахунку лінійного кола з несинусоїдною ЕРС. Третя частина посібника присвячена вивченню методів аналізу перехідних процесів у лінійних колах- класичний метод, операторний метод, спектральний метод і метод інтеграла Дюамеля.

Навчальний посібник призначений здобувачів ступеня бакалавра денної форми навчання за спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка». Посібник також буде корисним для здобувачів ступеня бакалавра, які вивчають споріднені кредитні модулі.

© Л. Ю. Спінул, М. П. Бурик, В. Ю. Лободзинський, О. О. Білецький
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

Зміст

Вступ	6
Розділ 3. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО ЗМІННОГО СТРУМУ	7
Тема 3.1. Трифазні електричні кола та їх розрахунки	7
3.1.1. Основні визначення і класифікація багатофазних систем	7
3.1.2. Види з'єднань трифазного електричного кола. Співвідношення між фазними і лінійними напругами і струмами трифазного електричного кола	9
3.1.3. Розрахунок симетричного трифазного кола	13
3.1.4. Розрахунок несиметричних трифазних кіл із статичним навантаженням	17
3.1.5. Потужності трифазного кола	28
3.1.6. Вимірювання активної потужності трифазного кола	31
3.1.7. Вимірювання потужностей симетричного трифазного споживача	34
3.1.8. Обертове магнітне поле	37
3.1.9. Симетричні складові трифазної системи напруг чи струмів	42
3.1.10. Властивості трифазного кола по відношенню до симетричних складових	45
3.1.11. Опори симетричного трифазного кола для прямої, зворотної і нульової послідовностей. Розрахункові схеми	47
3.1.12. Розрахунок симетричного трифазного кола з динамічним навантаженням при несиметричній системі входних напруг	50
3.1.13. Розрахунок трифазного кола при несиметричному споживачі (несиметричному навантаженні (поперечна несиметрія))	52
3.1.14. Розрахунок трифазного кола при несиметрії в лінії (повздовжна несиметрія)	56
Тема 3.2. Електричні кола несинусоїдного періодичного струму	60
3.2.1. Розкладання періодичної несинусоїдної ЕРС в тригонометричний ряд Фур'є	60
3.2.2. Розрахунок миттєвих струмів в лінійному колі з несинусоїдними джерелами енергії	63
3.2.3. Діючі значення несинусоїдних струмів і напруг	65
3.2.4. Потужність кола несинусоїдного струму	67
3.2.5. Вплив параметрів кола на форми кривих струму при несинусоїдній напрузі	69
3.2.6. Коефіцієнти , що характеризують несинусоїдні струми та напруги	71
3.2.7. Вищі гармоніки в трифазному колі	73
3.2.7.1. Системи прямої, зворотної, нульової послідовностей фаз в несинусоїдних струмах і напругах трифазного кола	73

3.2.7.2. З'єднання генератора і споживача зіркою	75
3.2.7.3. З'єднання генератора трикутником.....	77
Розділ 4. РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ	79
Тема 4.1. Класичний метод розрахунку перехідних процесів	79
4.1.1. Причини виникнення перехідних процесів.....	79
4.1.2. Закони комутації	80
4.1.3. Початкові умови.....	82
4.1.4. Перехідний, вимушений та вільний режими електричного кола ...	83
4.1.5. Послідовність розрахунку перехідного процесу електричного кола класичним методом	91
4.1.6. Перехідні процеси в RL колі	100
4.1.6.1. Характеристика вільного режиму кола	100
4.1.6.2. Вмикання RL кола до джерела постійної ЕРС	102
4.1.6.3. Вмикання RL кола на джерело синусоїдної ЕРС.....	103
4.1.6.4. Коротке замикання RL кола	105
4.1.6.5. Особливості перехідного процесу в RL колі з реальною котушкою ($R_K \neq 0$)	107
4.1.7. Перехідні процеси в RC колі	108
4.1.7.1. Рішення для вільного режиму	108
4.1.7.2. Вмикання RC кола на постійну ЕРС	109
4.1.7.3. Вмикання RC кола на джерело синусоїдної ЕРС	111
4.1.7.3. Коротке замикання RC кола.....	114
4.1.8. Перехідні процеси в електричному колі з послідовним з'єднанням RLC	115
4.1.8.1. Аперіодичний розряд конденсатора на RL коло.....	117
4.1.8.2. Коливальний розряд конденсатора	119
4.1.8.3. Граничний аперіодичний розряд конденсатора	122
4.1.8.4. Вмикання RLC кола на джерело постійної ЕРС	123
4.1.9. Особливості розрахунку перехідного процесу при миттєвій частковій зміні індуктивності чи ємності кола.....	125
Тема 4.2. Операторний метод розрахунку перехідних процесів	127
4.2.1. Пряме перетворення Лапласа	127
4.2.2. Деякі властивості перетворення Лапласа	129
4.2.3. Закон Ома в операторній формі. Операторні схеми	131
4.2.4. Закони Кірхгофа в операторній формі	133
4.2.5. Перехід від зображень струмів до оригіналів. Формула розкладання	136
4.2.6. Порядок розрахунку перехідного процесу операторним методом	143

4.2.7. Особливості розрахунку перехідних процесів за наявності синусоїдних, постійних та експоненціальних ЕРС	149
Тема 4.3. Розрахунок перехідного процесу при дії ЕРС довільної форми	150
4.3.1. Перехідні та імпульсні характеристики електричного кола	150
4.3.2. Інтеграл Дюамеля	153
Тема 4.4. Спектральний метод розрахунку перехідних процесів.....	158
4.4.1. Спектральний метод розрахунку перехідних процесів	158
4.4.2. Приклади розрахунку спектрів сигналів	160
Застосування спектрального методу для диференціювання та інтегрування сигналів.....	162
Література:.....	165

Вступ

Мета і завдання кредитного модуля «Теоретичні основи електротехніки-2»

До навчального посібника названого кредитного модуля ввійшли такі розділи дисципліни «Теоретичні основи електротехніки»:

- «Розділ 3. Лінійні електричні кола періодичного змінного струму»;
- «Розділ 4. Розрахунок перехідних процесів в лінійних електричних колах».

В свою чергу 3-ій розділ конспекту містить важливі для спеціалістів електроенергетичного та електротехнічного напрямів теми:

- трифазні електричні кола та їх розрахунки;
- електричні кола несинусоїдного періодичного струму.

З врахуванням змісту 3-ого розділу конспекту вивчення матеріалу кредитного модуля дає можливість користувачам конспекту опанувати знаннями:

- методів розрахунку симетричного чи несиметричного трифазного кола із статичним та динамічним навантаженням;
- особливостей електромагнітних процесів в колах з періодичним несинусоїдними джерелами енергії;
- методів аналізу перехідних процесів в лінійних електричних колах з зосередженими параметрами;
- енергетичних процесів в електричних колах.

Розділ 3. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО ЗМІННОГО СТРУМУ

Тема 3.1. Трифазні електричні кола та їх розрахунки

3.1.1. Основні визначення і класифікація багатофазних систем

Багатофазним називається генератор із кількома обмотками, в яких діють ЕРС однієї частоти, але які зсунуті в часі одна відносно одної по фазі. Зсув ЕРС по фазі обумовлений тим, що самі обмотки зміщені одна відносно одної в осерді статора генератора. Кількість обмоток визначає кількість фаз такого генератора. Тому надалі термін фаза буде вживатися в двох якостях:

- 1) для позначення стадії періодичного процесу;
- 2) для позначення частини трифазного кола, в яку входять обмотка генератора і частина навантаження.

Конструктивно багатофазні генератори виконані так, що обмотки зміщені одна відносно одної на один і той же кут.

Нехай m – число обмоток генератора (фаз). Тоді кут зміщення між осями обмоток: $\alpha = 2\pi / m$.

Якщо ЕРС, які індукуються в обмотках генератора, мають однакові амплітуди, зсунуті одна відносно одної на один і той же кут, то такі ЕРС створюють *симетричну* систему. Симетричною може бути також система напруг чи система струмів багатофазного кола. При цьому має бути симетричний генератор і однакове навантаження всіх фаз системи.

Багатофазні системи поділяють на врівноважені і неуврівноважені.

Врівноваженою називають таку систему, в якій сума миттєвих потужностей всіх фаз є величиною постійною, незалежною від часу:

$$\sum p_k = const.$$

Всі симетричні багатофазні системи з кількістю фаз три і більше є врівноваженими. Неврівноваженою є однофазна система.

Черговість проходження миттєвих ЕРС чи напруг через однакові значення називають *порядком чергування фаз* чи *послідовністю фаз*. Позначимо для трифазної системи великими літерами A, B, C фази генератора. Для трифазного генератора розрізняють пряме чергування фаз, зворотнє чергування фаз і нульове чергування фаз.

Для *прямого чергування* фаз ЕРС чи напруга наступної фази, фази B , відстає від ЕРС попередньої фази A на 120° , а для фази C відповідно на 240° . Тоді миттєві ЕРС прямого чергування можна записати такими співвідношеннями:

$$e_A = E_m \sin(\omega t + \psi), \quad e_B = E_m \sin(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3}), \quad e_C = E_m \sin(\omega t + \psi - \frac{4\pi}{3}).$$

Векторна діаграма цих ЕРС зображена на рис.3.1, а графіки їх миттєвих значень – на рис.3.2, за умови, що $\psi = \pi/2$.

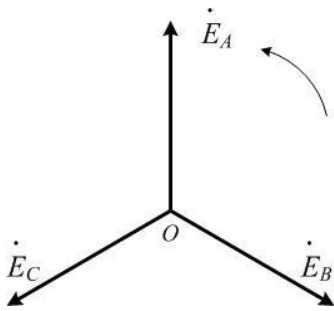


Рис. 3.1

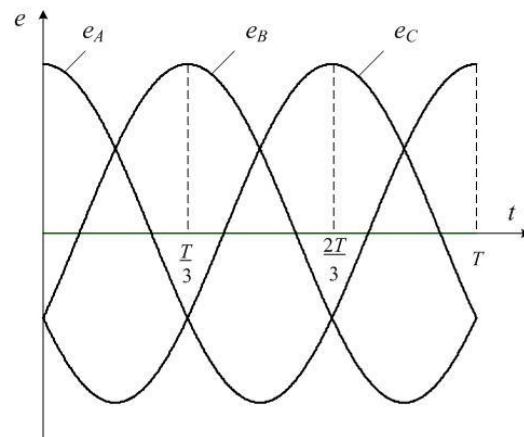


Рис. 3.2

Векторна діаграма ЕРС зворотної послідовності зображена на рис.3.3, нульової послідовності на рис.3.4.

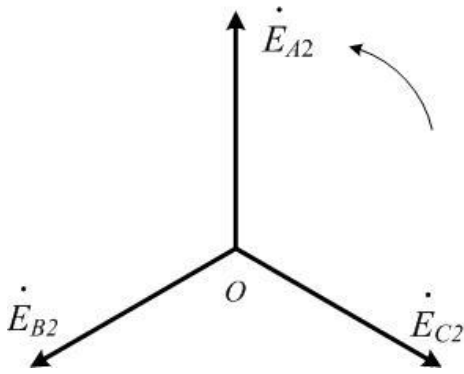


Рис. 3.3

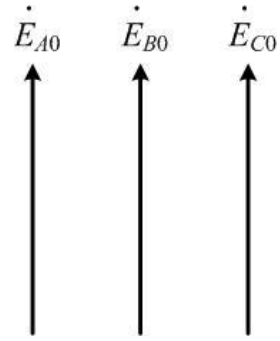


Рис. 3.4

3.1.2. Види з'єднань трифазного електричного кола. Співвідношення між фазними і лінійними напругами і струмами трифазного електричного кола

На початку розвитку багатофазних систем вони використовувались як незв'язані багатофазні кола. В сучасній електротехніці використовуються в основному зв'язані багатофазні електричні кола, бо вони мають ряд переваг порівняно з незв'язаними системами, окремі фази яких не мають електричних зв'язків між собою. В сучасній електротехніці Розглянемо з'єднання "зіркою" та з'єднання "трикутником" для зв'язаних трифазних систем (трифазних кіл).

а) З'єднання «зіркою».

З'єднання трифазного генератора і споживача „зіркою” отримаємо, якщо кінці обмоток генератора з'єднаємо в один вузол, а кінці фаз споживача – в інший вузол. Початки обмоток генератора і початки фаз споживача з'єднаємо між собою. Отримані вузли (N, n) обмоток генератора і споживача називають ще *нульовими* або *нейтральними* точками.

Провід, який з'єднує ці нейтральні точки (вузли) генератора та споживача, називається *нейтральним*.

Проводи, які з'єднують початки фаз генератора та споживача, називаються *лінійними* проводами (рис.3.5).

Струми, які протікають в лінійних проводах, називаються лінійними струмами $I_{\text{л}}$.

Струми, які протікають в обмотках генератора чи фазах споживача, називаються фазними струмами $I_{\text{ф}}$.

При з'єднанні «зіркою» лінійні і фазні струми однакові: $I_{\text{л}} = I_{\text{ф}}$.

Струми в лінійних проводах мають додатні напрямки від генератора до споживача, струм в нейтральному проводі - навпаки. Тоді рівняння для струмів при з'єднанні «зіркою» в комплексній формі: $\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C$.

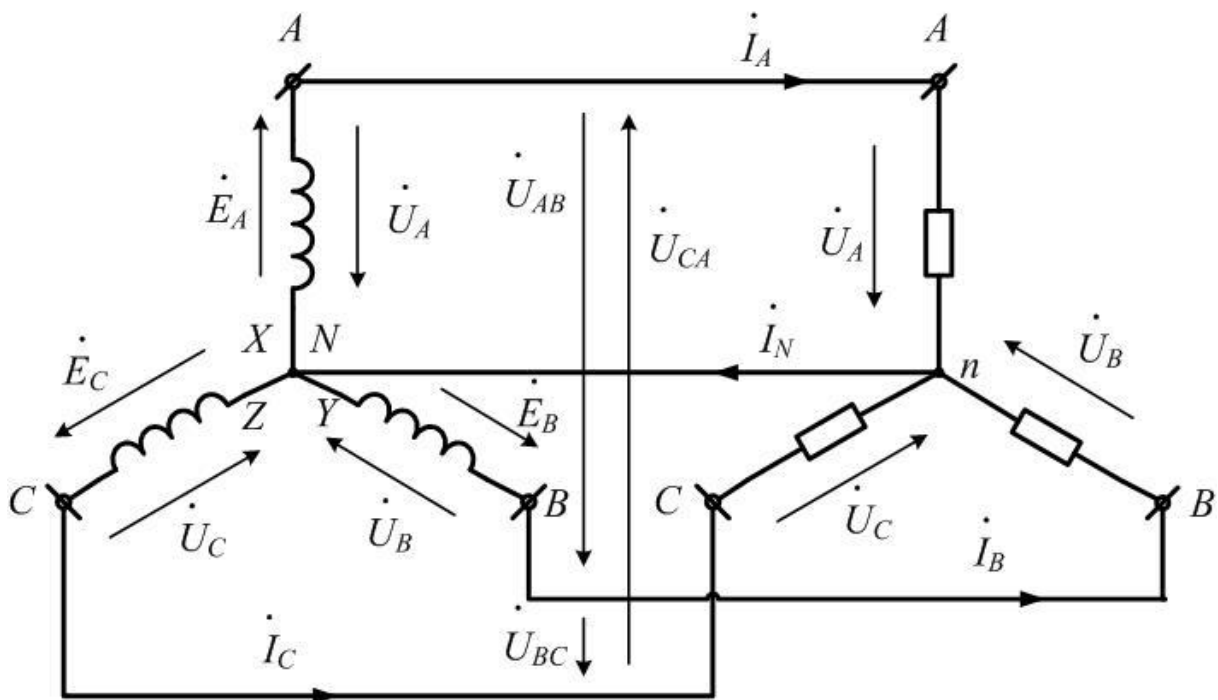


Рис. 3.5

При симетричній системі лінійних струмів їх сума дорівнює нулю і струм в нейтральному проводі буде відсутній навіть при наявності нейтрального проводу.

В практичних випадках симетричну систему струмів отримати дуже складно; тому бажано мати нейтральний провід, але з меншим діаметром.

Напруги на обмотках генератора або фазах споживача називаються фазними ($\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$). Напруги між лінійними проводами називаються лінійними ($\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$).

Напруга між вузлами n і N - напруга зміщення нейтралі (\underline{U}_{nN}).

Для симетричного генератора лінійні та фазні напруги пов'язані співвідношенням: $U_{\text{л}} = \sqrt{3}U_{\text{ф}}$.

Це співвідношення можна отримати з векторної діаграми фазних та лінійних напруг, зображеної на рис. 3.6

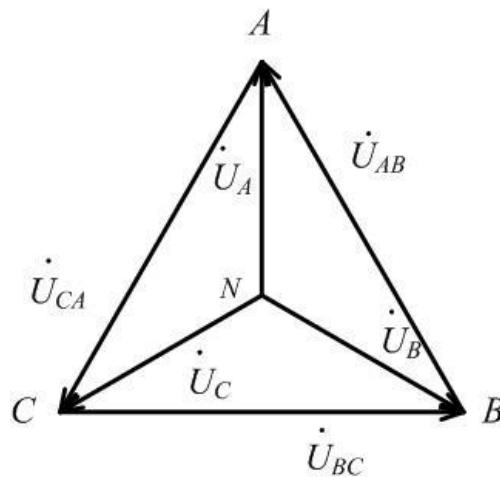


Рис. 3.6

б) З'єднання «трикутником».

З'єднання генератора і споживача трикутником отримаємо, якщо початок обмотки першої фази генератора з'єднаємо з кінцем обмотки третьої фази, початок третьої фази з'єднаємо з кінцем другої фази, початок обмотки другої фази з'єднаємо з кінцем першої фази. Теж саме зробимо з початками і кінцями фаз споживача. Вузли з'єднань обмоток генератора і фаз споживача з'єднуємо лінійними проводами. Тоді отримаємо рис. 3.7.

Додатні напрямки ЕРС в обмотках генератора у відповідності з рис. 3.7, проти годинникової стрілки, тобто від B до A , від A до C , від C до B . Додатні напрямки напруг в фазах генератора і споживача орієнтовані за годинниковою стрілкою (рис. 3.7). Такі ж додатні напрямки і для струмів в фазах споживача.

При з'єднанні «трикутником» лінійні напруги відповідно дорівнюють фазним напругам: $U_{\text{Л}} = U_{\text{Ф}}$.

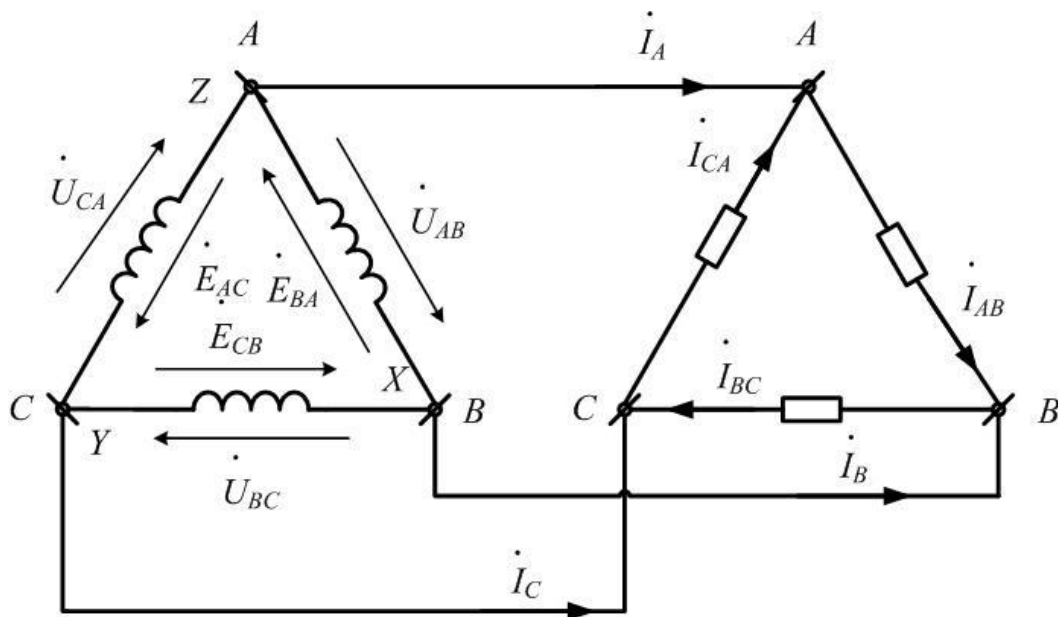


Рис. 3.7

У відповідності з прийнятими додатними напрямками струмів можна записати такі співвідношення між лінійними і фазними струмами споживача: $I_A = I_{AB} - I_{CA}$; $I_B = I_{BC} - I_{AB}$; $I_C = I_{CA} - I_{BC}$.

Для симетричної системи струмів $I_{\text{Л}} = \sqrt{3}I_{\text{Ф}}$. Векторну діаграму струмів зображено на рис. 3.8.

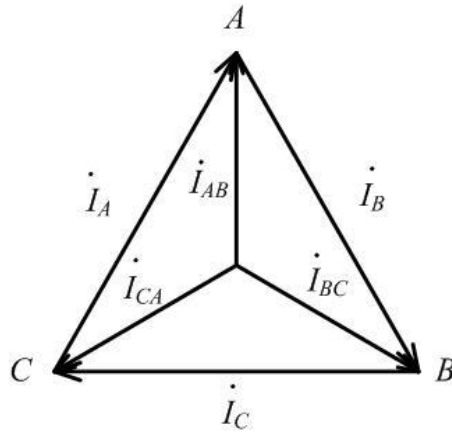


Рис. 3.8

3.1.3. Розрахунок симетричного трифазного кола

Якщо в колі діє симетричний генератор і навантаження фаз однакове, то і системи струмів в лінійних проводах і фазах споживачів, а також спади напруг будуть створювати симетричні системи. Такий режим кола називають симетричним режимом.

Оскільки в симетричному режимі умови роботи фаз однакові, то при розрахунку симетричного трифазного кола можна обмежитися розрахунками струмів і напруг якоїсь однієї (базової) фази, наприклад, фази А. Тоді рішення для струмів та напруг інших двох фаз неважко записати, враховуючи відповідні зміни в початкових фазах струмів і напруг.

Розрахункову схему на фазу із загальної схеми трифазного кола легко отримати, якщо і генератор і всі споживачі з'єднані «зіркою». Якщо ж серед частини споживачів є такі, що з'єднані в «трикутник», то для виділення елементів окремої фази необхідно попередньо виконати

еквівалентні перетворення схем, з'єднаних «трикутником», в схеми з'єднання «зіркою».

Якщо навіть на окремих ділянках кола нейтральний провід відсутній, це не створить проблем при побудові розрахункової схеми на фазу. На ділянках, де немає нейтрального проводу, його можна ввести в розгляд і це не вплине на роботу всієї схеми, бо в симетричному режимі струми в нейтральних проводах не протікають і всі нейтральні точки мають однакові потенціали.

Нехай маємо симетричне трифазне коло, схема якого зображена на рис. 3.9.

$$\text{Опір еквівалентної зірки: } \underline{Z}_{2Y} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_2}{3\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_2}{3}.$$

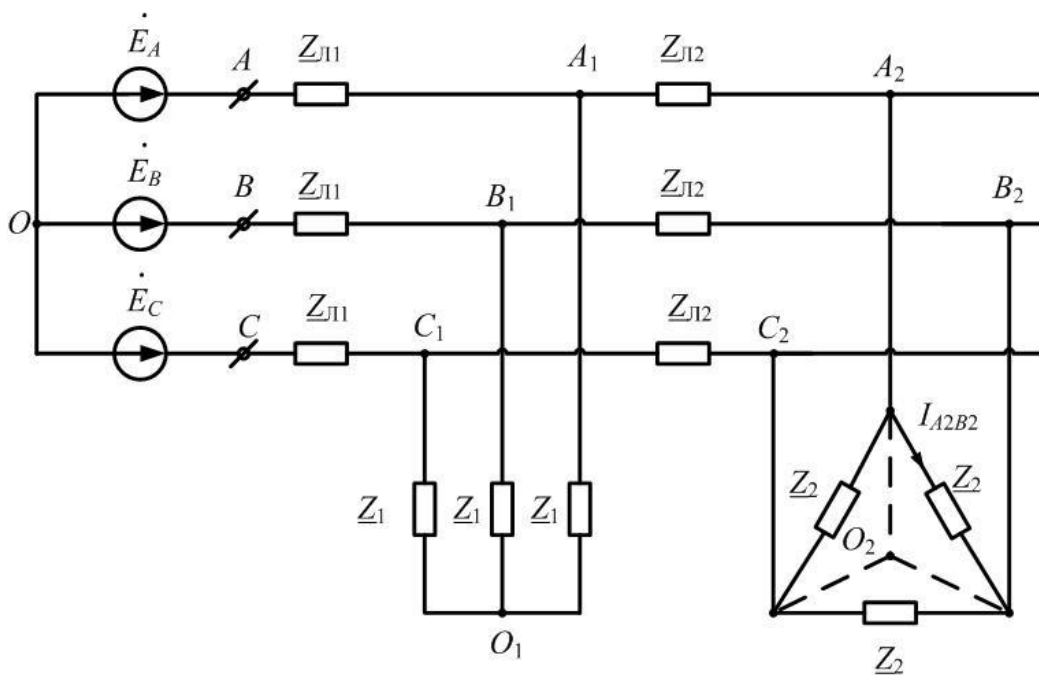


Рис. 3.9

З'єднавши нейтральні точки генератора і споживачів O , O_1 , O_2 , маємо можливість виділити елементи окремої фази A ; тоді розрахункова схема на фазу матиме вигляд рис. 3.10.

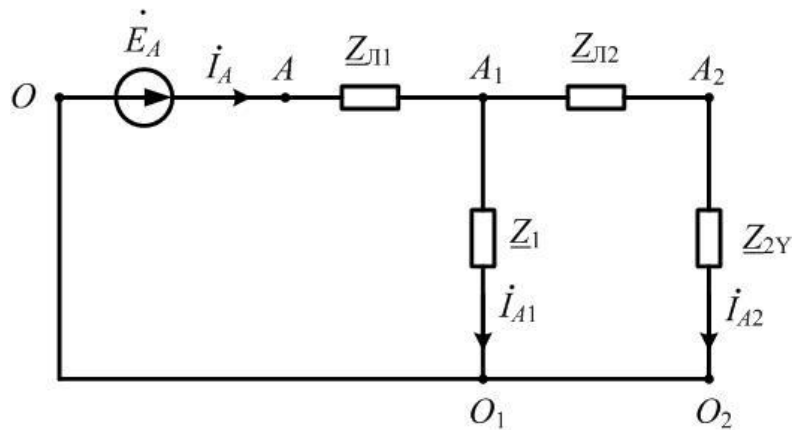


Рис. 3.10

Схема рис. 3.10 являє собою послідовно-паралельне з'єднання, для її розрахунку можна скористатися законом Ома в комплексній формі.

$$\text{Струм фази } A \text{ генератора: } \underline{I}_A = \underline{E}_A / \underline{Z}_{e\Phi}, \quad \underline{U}_{A_1O_1}$$

$$\underline{Z}_{e\Phi} = \underline{Z}_{Л1} + \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_{Л2} + \underline{Z}_{2Y})}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{Л2} + \underline{Z}_{2Y}}.$$

Визначаємо $\underline{U}_{A_1O_1}$:

$$\underline{U}_{A_1O_1} = \underline{E}_A - \underline{I}_A \underline{Z}_L;$$

$$\text{Тоді } \underline{I}_{A_1} = \frac{\underline{U}_{A_1O_1}}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{I}_{A_2} = \frac{\underline{U}_{A_1O_1}}{\underline{Z}_{2Y} + \underline{Z}_{Л2}}.$$

Визначаємо решту спадів напруг:

$$\underline{U}_{AA_1} = \underline{I}_A \underline{Z}_{Л1}, \quad \underline{U}_{A_1A_2} = \underline{I}_{A_2} \underline{Z}_{Л2}, \quad \underline{U}_{A_2O_2} = \underline{I}_{A_2} \underline{Z}_{2Y}.$$

Приведені формули дозволяють визначити всі струми і спади напруг в схемі рис. 3.10.

Значення струмів і спадів напруг в фазах *B* і *C* схеми можна легко отримати, виходячи із знайдених рішень для опорної фази *A* з врахувань, що в фазі *B* відповідні струми і напруги зміщені відносно струмів і напруг фази *A* на -120° , а в фазі *C* на $+120^\circ$.

Приймаючи до уваги, що в вихідній схемі частина споживачів була з'єднана «трикутником», необхідно знайти ще напруги і струми в фазах трикутника.

Виходячи із діаграми для лінійних і фазних напруг «зірки», (див. рис. 3.6 попередньої лекції) для напруг можемо записати:

$$\underline{U}_{A_2B_2} = \sqrt{3}\underline{U}_{A_2O_2} e^{j30^\circ}, \quad \underline{U}_{B_2C_2} = \underline{U}_{A_2B_2} e^{-j120^\circ}, \quad \underline{U}_{C_2A_2} = \underline{U}_{A_2B_2} e^{j120^\circ}.$$

За напругами знаходимо струми у фазах трикутника:

$$\underline{I}_{A_2B_2} = \frac{\underline{U}_{A_2B_2}}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{I}_{B_2C_2} = \frac{\underline{U}_{B_2C_2}}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{I}_{C_2A_2} = \frac{\underline{U}_{C_2A_2}}{\underline{Z}_2}.$$

Після розрахунку струмів і напруг складаємо баланс потужностей. Приймаючи до уваги, що в симетричному режимі всі фази знаходяться в однакових умовах, комплексні потужності трифазного кола можна визначити як потроєне значення комплексної потужності одної фази.

$$\tilde{S}_{3\Phi\Gamma} = 3\underline{E}_A \underline{I}_A^*;$$

$$\tilde{S}_{3\text{СП}} = 3|\underline{I}_A|^2 \underline{Z}_{Л_1} + 3|\underline{I}_{A_1}|^2 \underline{Z}_1 + 3|\underline{I}_{A_2}|^2 \underline{Z}_{Л_2} + 3|\underline{I}_{A_2B_2}|^2 \underline{Z}_2;$$

$$\tilde{S}_{3\Phi\Gamma} = \tilde{S}_{3\text{СП}}$$

Після перевірки виконання балансу потужностей будемо суміщену векторну діаграму (рис. 3.11). Для однозначності побудови діаграми будемо вважати опори лінії $\underline{Z}_{Л_1}$ чисто активними. Опори споживача \underline{Z}_1 теж чисто активні.

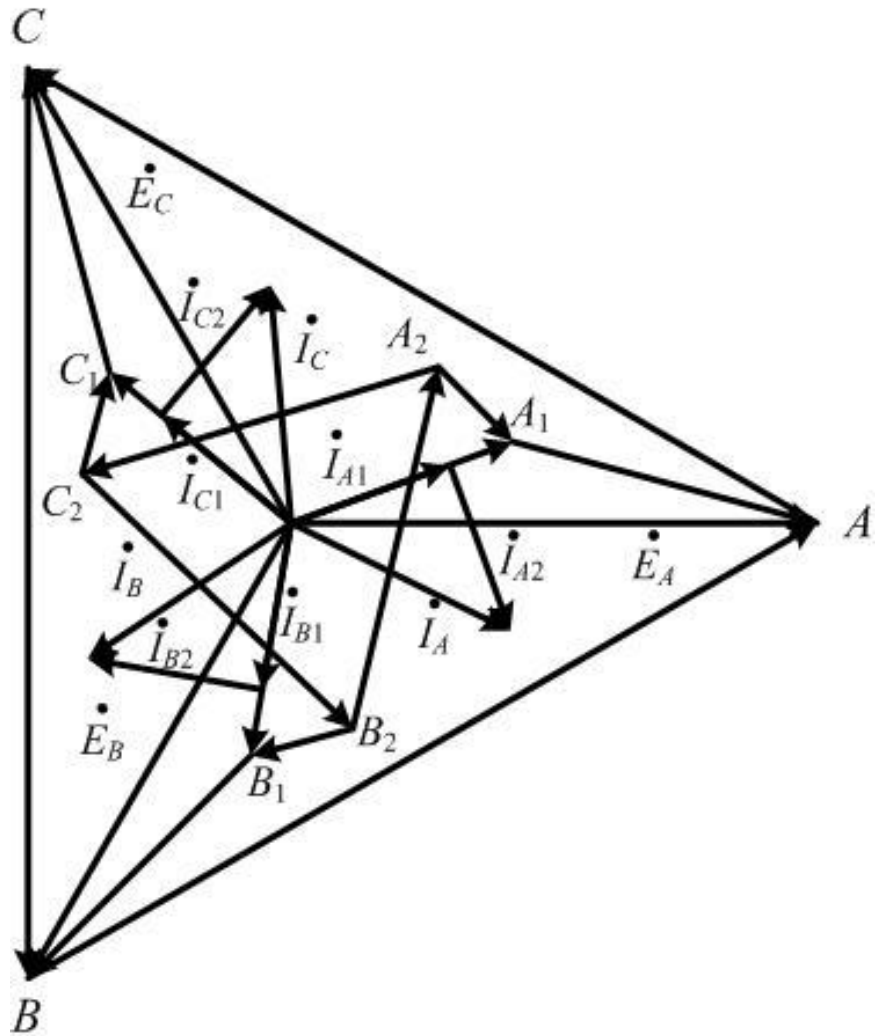


Рис. 3.11

3.1.4. Розрахунок несиметричних трифазних кіл із статичним навантаженням

Якщо в трифазному колі існує симетричний режим, то немає значення, яке навантаження, статичне чи динамічне, знаходиться в цьому колі.

До динамічного навантаження відносять електродвигуни. Якщо ж елементами кола є реостати, реактори, батареї конденсаторів, то ці споживачі називають статичним навантаженням.

При симетричному режимі роботи кола струми і напруги кола створюють тільки пряме чергування фаз і немає необхідності поділу споживачів по названим класам; розрахунок ведеться, як було показано раніше, по одній фазі. Якщо ж режим роботи кола несиметричний, то тоді систему струмів і напруг такого кола можна розглядати як суму симетричних складових прямого, зворотного і нульового чергування фаз. В цьому випадку методи розрахунку несиметричного режиму роботи кола при наявності споживачів, віднесених до динамічного навантаження (електродвигуни), і методи розрахунку кола тільки із статичним навантаженням будуть відрізнятися. Це обумовлено тим, що для електродвигунів опори прямої, зворотної і нульової послідовності будуть різними; відмінності в опорах електродвигунів для вказаних послідовностей обумовлені тим, що магнітне поле статора перетинає, для цих послідовностей, ротор з різними швидкостями. Те саме можна сказати і про внутрішні опори генератора, вони також будуть різними для різних послідовностей і це необхідно враховувати при наявності в трифазному колі електродвигунів та при врахуванні внутрішніх опорів генератора. Тому для розрахунку несиметричного режиму трифазного кола з динамічним навантаженням буде використовуватись спеціальний метод розрахунку, так званий, метод симетричних складових. Якщо ж в трифазному колі відсутні електродвигуни, не враховані внутрішні опори генератора і маємо статичне навантаження, то для розрахунку такого кола можна використати відомі методи розрахунку складного кола синусоїдного струму.

З врахуванням вищесказаного при розрахунку несиметричних режимів трифазного кола із статичним навантаженням будемо виходити із таких обмежень:

- 1) внутрішні опори генератора не враховуються;
- 2) електродвигуни в колі відсутні.

Оскільки генератори електромереж зазвичай генерують симетричну трифазну систему ЕРС прямого чергування, то, якщо немає інших вказівок, будемо виходити із цього припущення.

Методи розрахунку трифазного кола із статичним навантаженням будуть залежити від схеми з'єднань споживачів і генератора, а також від того, які ЕРС чи напруги генератора задані: фазні чи лінійні. Це відомі методи розрахунку складного кола: МКС, МВП, метод еквівалентних перетворень. Тому подальший аналіз буде проведено з врахуванням особливостей вихідних даних генератора і схем з'єднання споживачів.

а) *З'єднання споживача і генератора «зіркою», відомі фазні ЕРС генератора.*

Розрахункова схема приведена на рис. 3.12.

Відомо: 1) $\underline{E}_A, \underline{E}_B, \underline{E}_C$ ($\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$);

2) $\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$.

Визначити струми і напруги споживача і нейтрального проводу.

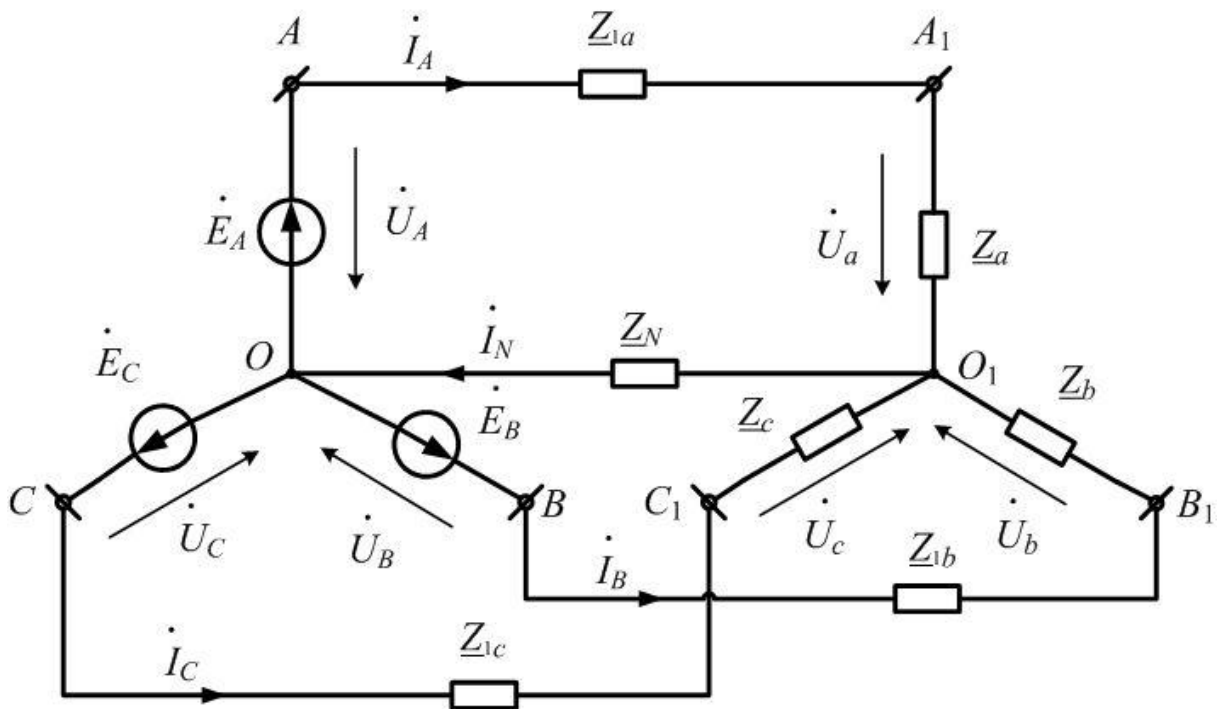


Рис. 3.12

В досліджуваній схемі всього два вузли, тому найбільш раціональним методом її розрахунку буде метод вузлової напруги.

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_{1a} + \underline{Z}_a; \rightarrow \underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A};$$

$$\underline{Z}_B = \underline{Z}_{1b} + \underline{Z}_b; \rightarrow \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B};$$

$$\underline{Z}_C = \underline{Z}_{1c} + \underline{Z}_c; \rightarrow \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C};$$

$$\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}.$$

Розрахуємо напругу зміщення нейтралі:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_A + \underline{E}_B \underline{Y}_B + \underline{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}. \quad (3.1)$$

Далі визначаємо напруги на фазах споживача:

$$\underline{U}_{AO_1} = \underline{U}_A - \underline{U}_{O_1O}, \quad \underline{U}_{BO_1} = \underline{U}_B - \underline{U}_{O_1O}, \quad \underline{U}_{CO_1} = \underline{U}_C - \underline{U}_{O_1O}. \quad (3.2)$$

Знаходимо струми в фазах споживача, струм нейтрального проводу:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \frac{\underline{U}_{AO_1}}{\underline{Z}_A} = \frac{\underline{U}_A - \underline{U}_{O_1O}}{\underline{Z}_A}, \\ \underline{I}_B &= \frac{\underline{U}_{BO_1}}{\underline{Z}_B} = \frac{\underline{U}_B - \underline{U}_{O_1O}}{\underline{Z}_B}, \\ \underline{I}_C &= \frac{\underline{U}_{CO_1}}{\underline{Z}_C} = \frac{\underline{U}_C - \underline{U}_{O_1O}}{\underline{Z}_C}, \\ \underline{I}_N &= \frac{\underline{U}_{O_1O}}{\underline{Z}_N}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Рішення (3.4) може бути використане для перевірки правильності відповідей для знайдених струмів:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C. \quad (3.4)$$

Векторна діаграма розрахованих струмів і напруг приведена на рис. 3.13.

Якщо в схемі рис. 3.11 нейтральний провід відсутній і, як і раніше, відома система фазних ЕРС генератора, то і в цьому випадку можна скористатися рішенням (3.1) для визначення напруги зміщення нейтралі. Після розрахунку струмів споживача і при використанні рівняння (3.4) повинно бути: $\dot{I}_N = 0$.

Коли нейтральний провід відсутній, часто замість фазних ЕРС генератора вказують його лінійні напруги, тоді послідовність розрахунку такої схеми зміниться.

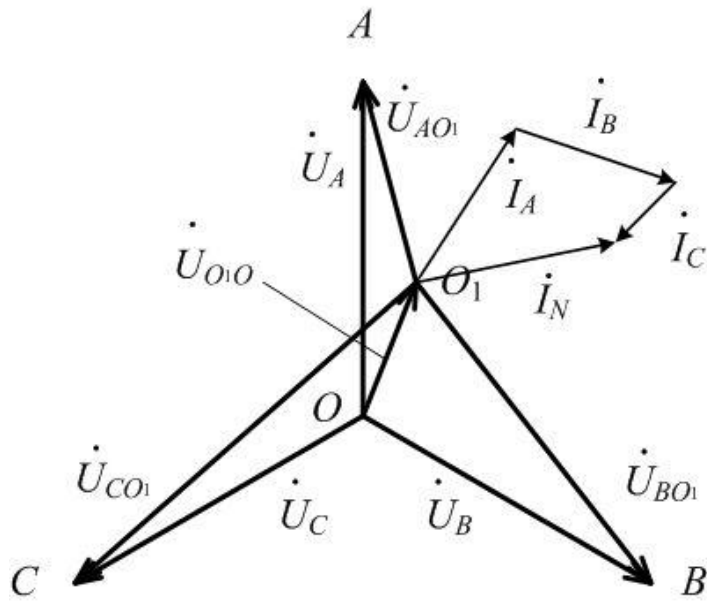


Рис. 3.13

б) Споживач з'єднаний „зіркою”, відомі лінійні напруги.

Відомо: 1) $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$ - лінійні напруги;

2) $\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$.

Визначити струми і напруги споживачів.

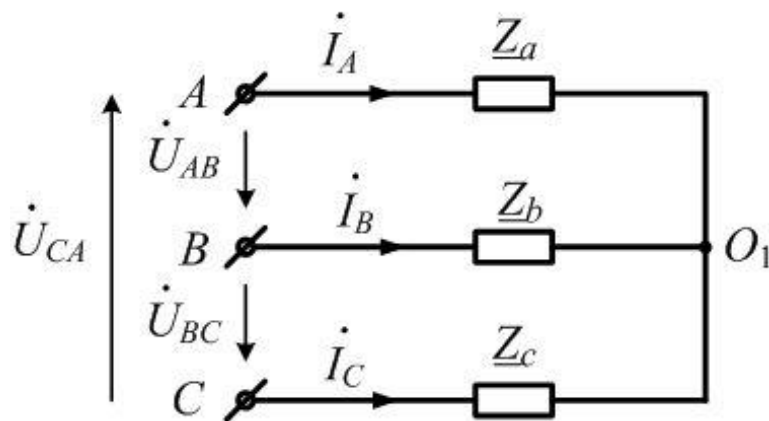


Рис. 3.14

Для розрахунку скористаємося векторною діаграмою (рис. 3.15) кола.

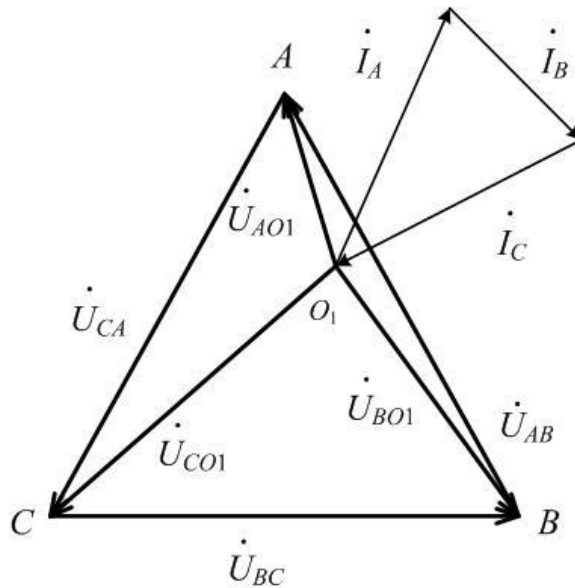


Рис. 3.15

$\underline{U}_{AO_1}, \underline{U}_{BO_1}, \underline{U}_{CO_1}$ - фазні напруги споживача.

Із векторної діаграми рис. 3.15:

$$\underline{U}_{BO_1} = \underline{U}_{AO_1} - \underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AO_1} + \underline{U}_{BA}, \quad (3.5)$$

$$\underline{U}_{CO_1} = \underline{U}_{AO_1} + \underline{U}_{CA}, \quad (3.6)$$

$$\underline{I}_A = \underline{U}_{AO_1} \underline{Y}_A, \quad \underline{I}_B = \underline{U}_{BO_1} \underline{Y}_B, \quad \underline{I}_C = \underline{U}_{CO_1} \underline{Y}_C. \quad (3.7)$$

Для схеми рис. 3.14, яка не має нейтрального проводу:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0. \quad (3.8)$$

З врахуванням (3.8) після відповідних перетворень отримаємо:

$$\underline{U}_{AO_1} = \frac{\underline{U}_{AB} \underline{Y}_B + \underline{U}_{AC} \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}. \quad (3.9)$$

Аналогічно виразу (3.9) для $\underline{U}_{BO_1}, \underline{U}_{CO_1}$ можемо записати:

$$\underline{U}_{BO_1} = \frac{\underline{U}_{BA}\underline{Y}_A + \underline{U}_{BC}\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \quad \underline{U}_{CO_1} = \frac{\underline{U}_{CB}\underline{Y}_B + \underline{U}_{CA}\underline{Y}_A}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}. \quad (3.10)$$

Знаходимо фазні напруги споживача, далі по співвідношенню (3.7) визначаємо струми, рівняння (3.8) є перевіркою розрахунків.

Векторна діаграма напруг і струмів зображена на рис. 3.15.

в) *Відома система лінійних напруг, споживач з'єднаний «трикутником»* (рис.3.16).

Відомо: 1) $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$;

2) $\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_3$.

Визначити фазні і лінійні струми.

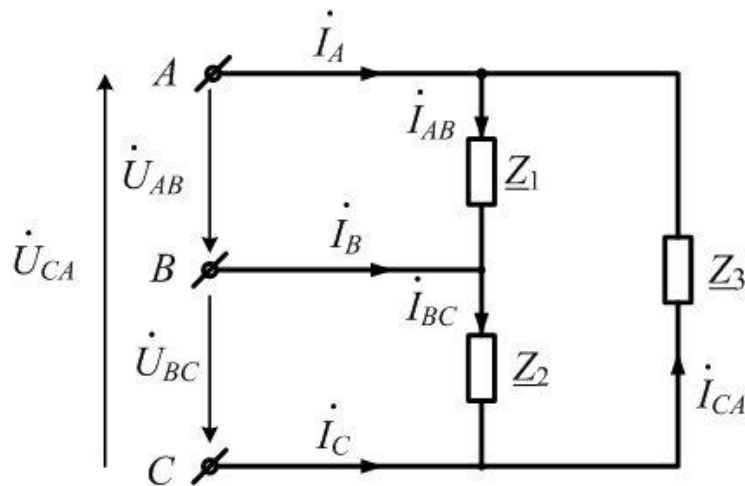


Рис. 3.16

Оскільки лінійні напруги є одночасно фазними напругами споживача, то дуже просто знайти фазні струми споживача:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_3}.$$

Лінійні струми визначаємо, виходячи із першого закону Кірхгофа:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA}, \quad \underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB}, \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC}.$$

Векторна діаграма струмів і напруг приведена на рис. 3.17.

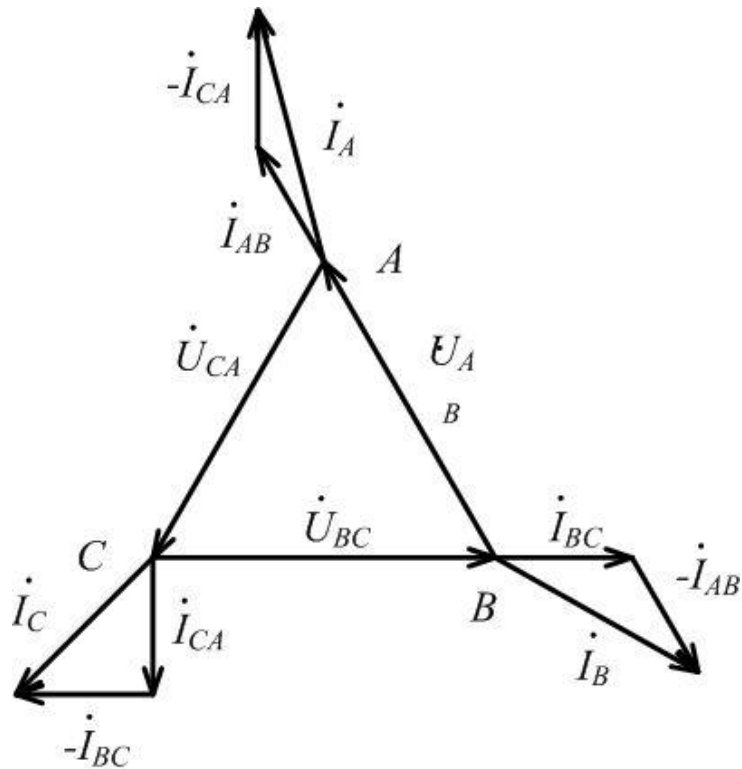


Рис. 3.17

$$\varphi_{AB} = 0; \quad \varphi_{BC} = 0; \quad \varphi_{CA} < 0.$$

г) Відома система лінійних напруг, споживач з'єднаний «трикутником», але опори лінійних проводів не дорівнюють нулю (рис. 3.18).

Відомо: 1) $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$;

2) $\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_3, \underline{Z}_{Л1} \neq \underline{Z}_{Л2} \neq \underline{Z}_{Л3}$.

Визначити: фазні і лінійні струми, спади напруг в лініях та споживача.

Розглянемо два варіанти розрахунку:

1) Перетворення «трикутника» опорів в еквівалентну «зірку».

$$\underline{Z}_{1Y} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}; \quad \underline{Z}_{2Y} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}; \quad \underline{Z}_{3Y} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$$

Далі визначаємо еквівалентні опори фаз:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_{Л1} + \underline{Z}_{1Y}; \quad \underline{Z}_B = \underline{Z}_{Л2} + \underline{Z}_{2Y}; \quad \underline{Z}_C = \underline{Z}_{Л3} + \underline{Z}_{3Y}.$$

З врахуванням приведених перетворень отримаємо схему, подібну схемі рис. 3.14 у варіанті б). Аналіз цієї схеми можна провести так, як це робилось у варіанті б): визначаємо напруги, а далі струми. Після цього визначаються спади напруг в лініях та напруги на фазах. Наприклад:

$$\underline{U}_{A_1B_1} = \underline{U}_{AB} - \underline{I}_A \underline{Z}_{Л1} + \underline{I}_B \underline{Z}_{Л2}.$$

Після розрахунку фазних напруг «трикутника» $\underline{U}_{A_1B_1}, \underline{U}_{B_1C_1}, \underline{U}_{C_1A_1}$ знаходимо фазні струми в «трикутнику» $(\underline{I}_{A_1B_1}, \underline{I}_{B_1C_1}, \underline{I}_{C_1A_1})$ за законом Ома:

$$\underline{I}_{A_1B_1} = \frac{\underline{U}_{A_1B_1}}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{I}_{B_1C_1} = \frac{\underline{U}_{B_1C_1}}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{I}_{C_1A_1} = \frac{\underline{U}_{C_1A_1}}{\underline{Z}_3}.$$

2) Схему рис. 3.18 можна також розрахувати, використавши метод контурних струмів.

Введемо контурні струми $\underline{I}_{K1}, \underline{I}_{K2}, \underline{I}_{K3}$.

$$\underline{I}_{K1} \underline{Z}_{11} + \underline{I}_{K2} \underline{Z}_{12} + \underline{I}_{K3} \underline{Z}_{13} = \underline{E}_{K1},$$

$$\underline{I}_{K1} \underline{Z}_{21} + \underline{I}_{K2} \underline{Z}_{22} + \underline{I}_{K3} \underline{Z}_{23} = \underline{E}_{K2},$$

$$\underline{I}_{K1} \underline{Z}_{31} + \underline{I}_{K2} \underline{Z}_{32} + \underline{I}_{K3} \underline{Z}_{33} = \underline{E}_{K3}.$$

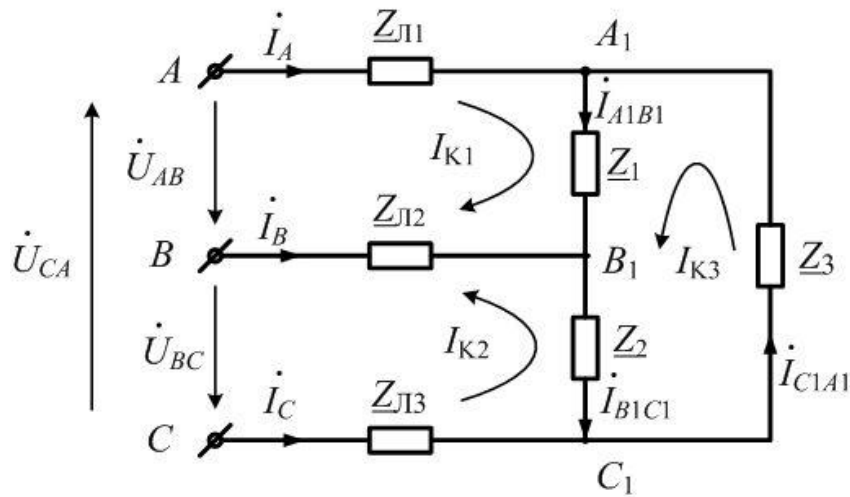


Рис. 3.18

Власні контурні опори:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{Л1} + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{Л2},$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{Л2} + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{Л3},$$

$$\underline{Z}_{33} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3.$$

Міжконтурні опори:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{Л2},$$

$$\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_1,$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32} = -\underline{Z}_2.$$

Контурні ЕРС:

$$\underline{E}_{K1} = \underline{U}_{AB}; \quad \underline{E}_{K2} = -\underline{U}_{BC}; \quad \underline{E}_{K3} = 0.$$

Після визначення контурних опорів і контурних ЕРС розв'язуємо систему рівнянь і знаходимо контурні струми $\underline{I}_{K1}, \underline{I}_{K2}, \underline{I}_{K3}$ та лінійні струми

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{K1}, \quad \underline{I}_B = -(\underline{I}_{K1} + \underline{I}_{K2}), \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{K2}.$$

Після розрахунку струмів віток визначаємо спади напруг.

3.1.5. Потужності трифазного кола

Розрахунок потужності трифазного кола залежить від режиму роботи кола (симетричний чи несиметричний). Аналіз симетричного режиму трифазного кола був проведений раніше і рівняння для визначення потужностей симетричного режиму там приведено. Надалі, в основному, будуть аналізуватись несиметричні режими трифазного кола; при цьому розрахунок потужностей залежить від схеми з'єднань трифазного кола: за наявності або відсутності нейтрального проводу. Тому буде розглянуто два варіанти розрахунку потужностей:

а) *трифазна система має нейтральний провід, відомі фазні напруги генератора.*

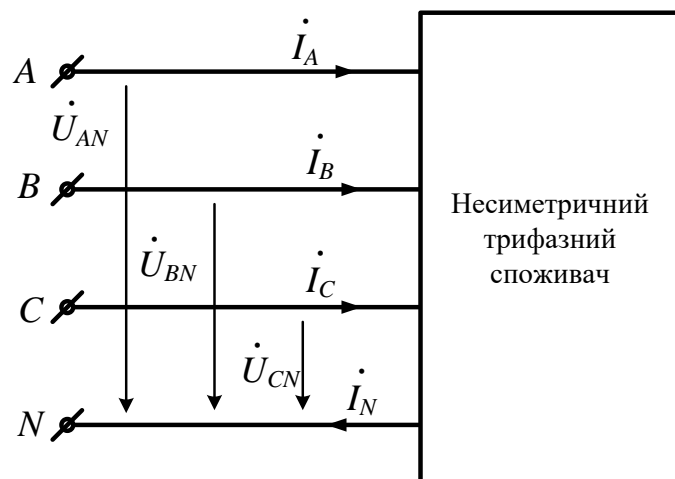


Рис. 3.19

При наявності нейтрального проводу відомими вважаються фазні напруги генератора.

Комплексну потужність трифазного генератора визначаємо як суму комплексних потужностей фаз генератора

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{3\Phi\Gamma} &= \tilde{S}_{A\Gamma} + \tilde{S}_{B\Gamma} + \tilde{S}_{C\Gamma} = \underline{U}_{AN} \cdot I_A^* + \underline{U}_{BN} \cdot I_B^* + \underline{U}_C \cdot I_C^* = \\ &= P_{3\Phi\Gamma} + jQ_{3\Phi\Gamma};\end{aligned}\quad (3.10)$$

$$P_{3\Phi\Gamma} = \operatorname{Re}\left(\underline{U}_{AN} \cdot I_A^* + \underline{U}_{BN} \cdot I_B^* + \underline{U}_C \cdot I_C^*\right); \quad (3.11)$$

$$Q_{3\Phi\Gamma} = \operatorname{Im}\left(\underline{U}_{AN} \cdot I_A^* + \underline{U}_{BN} \cdot I_B^* + \underline{U}_C \cdot I_C^*\right). \quad (3.12)$$

Комплексна потужність споживачів трифазного кола визначається як сума комплексних потужностей окремих віток:

$$\tilde{S}_{3\Phi\text{СП}} = \sum \tilde{S}_k = \sum (I_k^2 \underline{Z}_k). \quad (3.13)$$

\underline{Z}_k – комплексний опір ділянки кола.

За умови, що $Z_N \neq 0$, в (3.13) необхідно врахувати комплексну потужність нейтрального проводу:

$$\tilde{S}_N = I_N^2 \underline{Z}_N.$$

Баланс потужностей трифазного кола можна записати в комплексній формі:

$$\tilde{S}_{3\Phi\Gamma} = \tilde{S}_{3\Phi\text{СП}} \quad (3.14)$$

б) в схемі немає нейтрального проводу, відома система лінійних напруг.

Виходячи із приведеного раніше рівняння (3.10):

$$\tilde{S}_{3\Phi\Gamma} = \underline{U}_{AN} \cdot I_A^* + \underline{U}_{BN} \cdot I_B^* + \underline{U}_C \cdot I_C^*.$$

N – умовна нейтральна точка (наприклад, вузол з'днання обмоток генератора).

При відсутності нейтрального проводу співвідношення між струмами:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0. \quad (3.15)$$

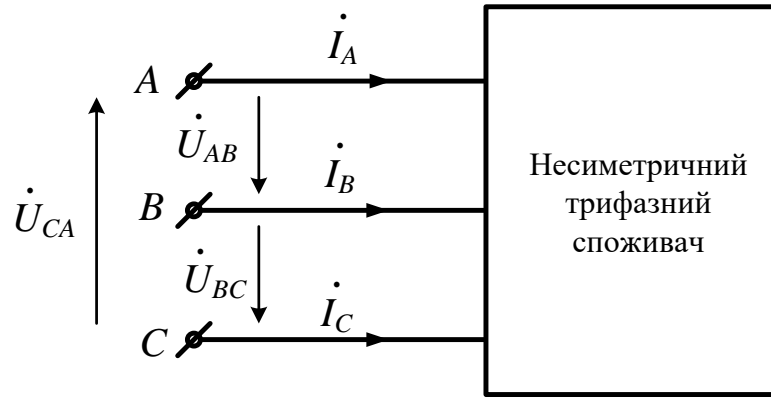


Рис. 3.20

Із рівняння (3.15):

$$\underline{I}_C = -(\underline{I}_A + \underline{I}_B), \quad (3.16)$$

$$\underline{I}_C^* = -(\underline{I}_A^* + \underline{I}_B^*) . \quad (3.17)$$

Співвідношення (3.17) врахуємо в рівнянні (3.10):

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{3\Phi\Gamma} &= \underline{U}_{AN} \cdot I_A^* + \underline{U}_{BN} \cdot I_B^* - \underline{U}_{CN} \cdot (\underline{I}_A^* + \underline{I}_B^*) = \\ &= (\underline{U}_{AN} - \underline{U}_{CN}) \cdot I_A^* + (\underline{U}_{BN} - \underline{U}_{CN}) \cdot I_B^* = \underline{U}_{AC} \cdot I_A^* + \underline{U}_{BC} \cdot I_B^* . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Формула (3.18) отримана при умові, що із рівняння (3.10) виключався струм \underline{I}_C^* за співвідношенням (3.17).

Якщо виключати струм I_B^* чи струм I_A^* , то отримаємо ще два варіанти формул для визначення комплексної потужності трифазного генератора при відсутності нейтрального проводу:

$$\tilde{S}_{3\Phi\Gamma} = \underline{U}_{AB} \cdot I_A^* + \underline{U}_{CB} \cdot I_C^* , \quad (3.19)$$

$$\tilde{S}_{3\Phi\Gamma} = \underline{U}_{BA} \cdot I_B^* + \underline{U}_{CA} \cdot I_C^* . \quad (3.20)$$

При визначенні комплексної потужності споживачів в схемі рис. 3.20 можна користуватися формулами (3.18 - 3.20).

3.1.6. Вимірювання активної потужності трифазного кола

Схеми вимірювання активної потужності трифазного кола будуть залежати від режиму роботи трифазного кола (симетричний чи несиметричний), а також від схеми з'єднань кола (чи є в схемі нейтральний провід, чи він відсутній).

Розглянемо спочатку загальний випадок несиметричного режиму роботи трифазного кола за наявності нейтрального проводу (рис. 3.21, а).

Для вимірювання потужностей в цьому режимі необхідно включити три ватметри, так як показано на рис. 3.21, а.

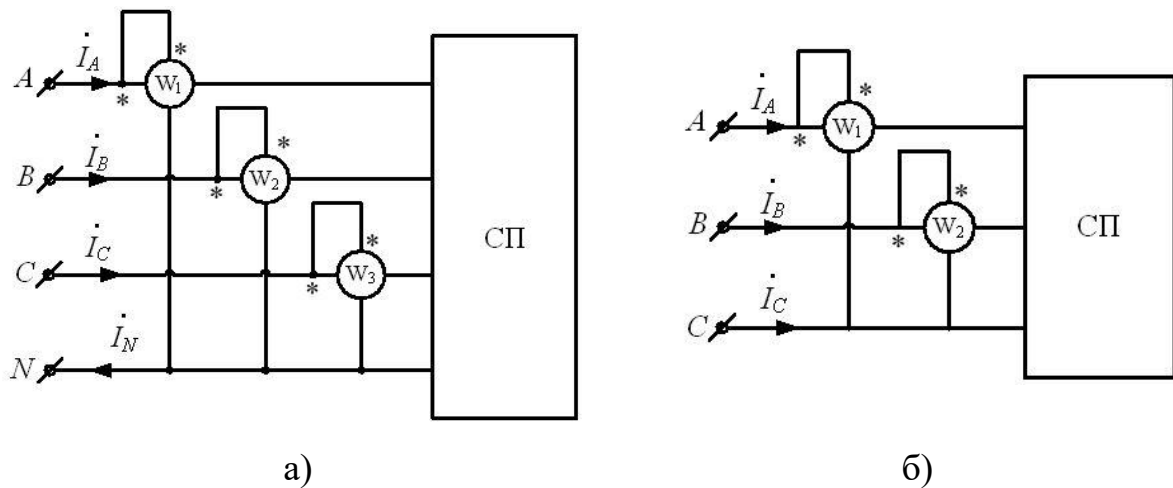


Рис. 3.21

Для показів ватметрів матимемо:

$$W_1 \rightarrow P_1 = U_{AN} I_A \cos(\angle U_{AN}, I_A), \quad (3.21)$$

$$W_2 \rightarrow P_2 = U_{BN} I_B \cos(\angle U_{BN}, I_B), \quad (3.22)$$

$$W_3 \rightarrow P_3 = U_{CN} I_C \cos(\angle U_{CN}, I_C). \quad (3.23)$$

Сума показів ватметрів дорівнює:

$$P_1 + P_2 + P_3 = U_{AN} I_A \cos(\angle U_{AN}, I_A) + \\ + U_{BN} I_B \cos(\angle U_{BN}, I_B) + U_{CN} I_C \cos(\angle U_{CN}, I_C). \quad (3.24)$$

Порівнюючи формулу (3.24) для суми показів ватметрів, із формулою (3.11) попереднього параграфу для активної потужності трифазного кола, бачимо їх відповідність. Таким чином, сума показів ватметрів в схемі рис.3.21, а) буде дорівнювати активній потужності трифазного кола:

$$P_1 + P_2 + P_3 = P_{3\Phi}. \quad (3.25)$$

Якщо режим роботи споживача симетричний, то покази кожного ватметра в схемі рис.3.21, а) будуть однаковими і тоді достатньо виміряти активну потужність тільки однієї з фаз, а потужність всього кола буде дорівнювати потроєному значенню цієї величини.

$$P_{3\Phi} = 3P_1 = 3U_{\Phi}I_{\Phi} \cos \varphi, \quad (3.26)$$

φ - кут зсуву фаз.

Якщо симетричний споживач не має нейтральної точки, то для виміру активної потужності в цьому випадку нейтральну точку можна створити штучно і підключити ватметр так, як показано на рис. 3.22.

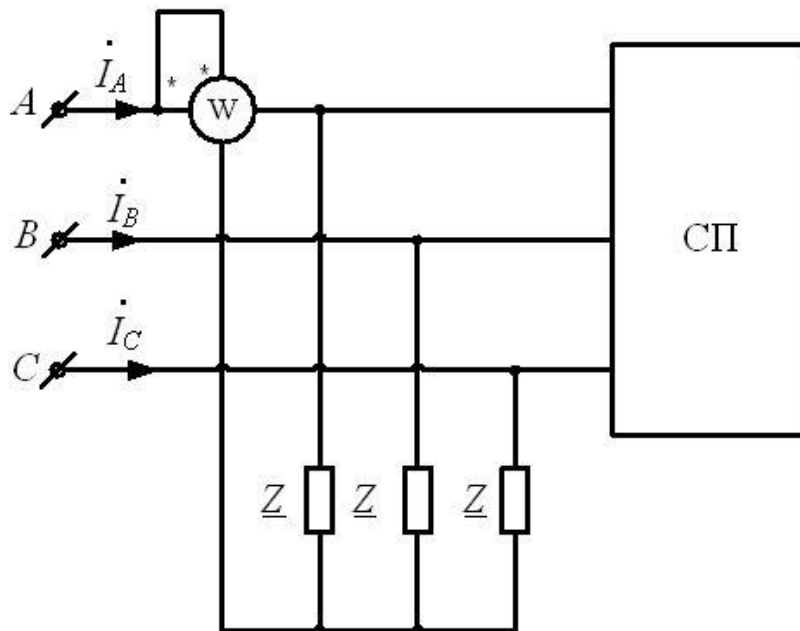


Рис. 3.22

Для створення штучної нейтральної точки необхідно, щоб опори Z додаткових елементів були значно більшими еквівалентних опорів фаз споживача.

При розгляді активної потужності трифазного споживача без нейтрального проводу були запропоновані варіанти визначення цієї потужності через лінійні напруги та струми. Ці розрахункові формули мали по дві складові (формули (3.18 - 3.20)).

Виходячи з цих формул можна запропонувати варіанти схем виміру активної потужності двома ватметрами (рис. 3.21,б).

Схема виміру на рис. 3.21, б) реалізує варіант розрахункової формули (3.18).

Покази ватметрів в схемі рис.3.21, б) відповідно дорівнюють:

$$W_1 \rightarrow P_1 = U_{AC} I_A \cos(\angle U_{AC}, I_A), \quad (3.27)$$

$$W_2 \rightarrow P_2 = U_{BC} I_B \cos(\angle U_{BC}, I_B). \quad (3.28)$$

В свою чергу P_{W1} та P_{W2} можна визначити з таких співвідношень:

$$P_{W1} = \operatorname{Re}[\underline{U}_{AC} I_A^*], \quad (3.29)$$

$$P_{W2} = \operatorname{Re}[\underline{U}_{BC} I_B^*]. \quad (3.30)$$

Формули (3.27) і (3.28) переходять в формули (3.29) і (3.30), якщо скористатися комплексними напругами і струмами.

Приймаючи до уваги, що формули (3.29) і (3.30) будуть складовими формули (3.18) попереднього параграфу, для активної потужності трифазного кола будемо мати:

$$(P_{W1} + P_{W2}) = P_{3\text{ФСП}}. \quad (3.31)$$

Покази ватметрів в схемі рис. 3.21, б) можуть бути як додатні, так і від'ємні. Якщо стрілка ватметра відхиляється в сторону, де немає шкали, то необхідно змінити полярність на обмотці напруги цього ватметра з допомогою перемикача і враховувати показ цього ватметра як від'ємну величину. Сума ж показів ватметрів завжди величина додатна, при умові, що справа від ватметрів – пасивні елементи.

3.1.7. Вимірювання потужностей симетричного трифазного споживача

а) Вимірювання активної потужності

Векторна діаграма трифазного кола в симетричному режимі зображена на рис. 3.23. Як видно із діаграми рис. 3.23:

$$W_1 \rightarrow P_1 = U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi_1, \quad (3.32)$$

$$W_2 \rightarrow P_2 = U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi_2. \quad (3.33)$$

З врахування значень φ_1 і φ_2 для показів ватметрів матимемо:

$$P_1 = U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos(30^\circ - \varphi),$$

$$P_2 = U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos(30^\circ + \varphi);$$

$$\begin{aligned} P_1 &= U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos 30^\circ \cos \varphi + U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin 30^\circ \sin \varphi = \\ &= \left(\sqrt{3} / 2\right) U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi + (1 / 2) U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi; \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$P_2 = \left(\sqrt{3} / 2\right) U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi - (1 / 2) U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi; \quad (3.35)$$

$$P_1 + P_2 = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi = P_{3\varphi}. \quad (3.36)$$

Із формул (3.34) і (3.35) видно, що при чисто активному навантаженні фаз покази кожного із ватметрів в схемі рис. 3.21, б) в симетричному режимі однакові. Якщо кут зсуву фаз φ змінюється в широких межах від 0 до $\pi/2$, то покази ватметрів відрізняються один від

одного і можуть бути як додатні, так і від'ємні. Якщо кут $\varphi > 0$, тобто індуктивний, то показ першого ватметра завжди додатній.

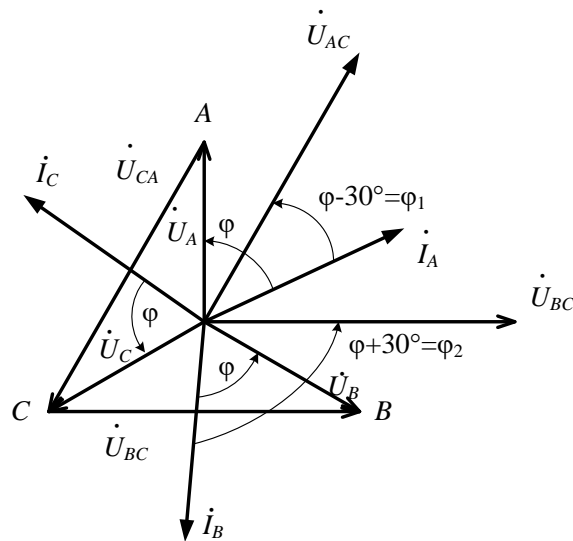


Рис. 3.23

При цьому показ другого ватметра із зростанням індуктивного кута зсуву фаз спочатку буде зменшуватись і при $\varphi = 60^\circ$ стане $P_2 = 0$, а при подальшому зростанні φ показ другого ватметра буде від'ємним.

Якщо споживач має ємнісний характер, то із зростанням абсолютної величини $|\varphi|$ від 0° до 60° показ ватметра W_1 зменшується, при $\varphi = -60^\circ$, $P_1 = 0$, а якщо $|\varphi| > 60^\circ$, $P_1 < 0$; показ другого ватметра весь час буде додатнім.

б) Вимірювання реактивної потужності

Покази ватметрів, включених по схемі рис. 3.21, б), можна використати також для визначення реактивної потужності симетричного трифазного кола. Як видно з формул (3.34) та (3.35), різниця показів ватметрів:

$$W_1 - W_2 = U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi.$$

Приймаючи до уваги, що реактивна потужність симетричного трифазного кола визначається співвідношенням: $Q_{3\Phi} = \sqrt{3}U_{\text{Л}}I_{\text{Л}} \sin \varphi$, очевидно, що реактивну потужність цього кола можна визначити через різницю показів ватметрів формулою:

$$Q_{3\Phi} = \sqrt{3}(W_1 - W_2). \quad (3.37)$$

Є можливість реактивну потужність трифазного кола в симетричному режимі виміряти одним ватметром. Для цього необхідно його включити по схемі рис. 3.24.

Показ ватметра в схемі рис. 3.24:

$$W_1 = U_{BC} I_A \cos(\angle U_{BC}, I_A) = U_{BC} I_A \cos(90^\circ - \varphi) = U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi.$$

Реактивна потужність всього трифазного кола:

$$Q_{3\Phi} = \sqrt{3}W_1 = \sqrt{3} \cdot U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi.$$

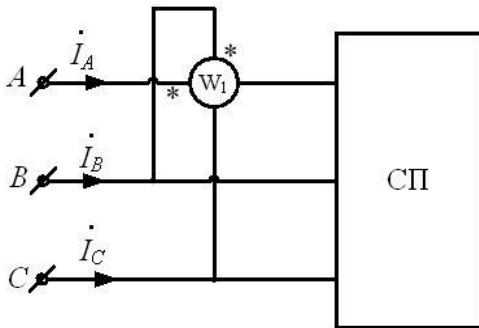


Рис. 3.24

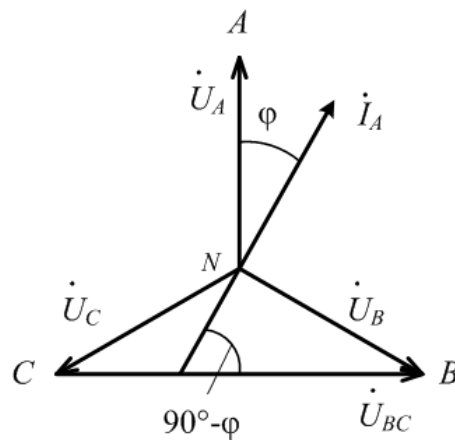


Рис. 3.24,a

3.1.8. Обертове магнітне поле

Спрощена картина магнітного поля нерухомої котушки, по витках якої протікає струм i показана на рис. 3.25.

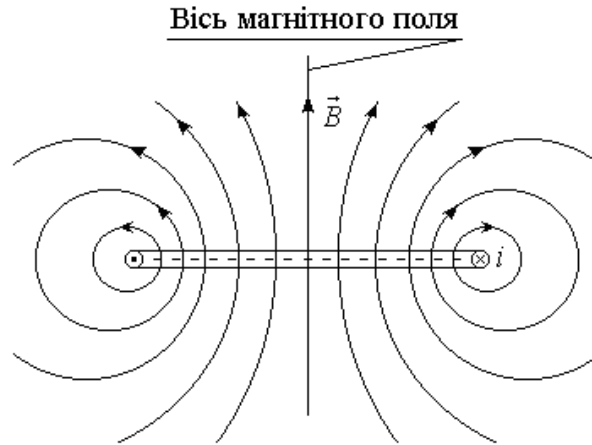


Рис. 3.25

Напрям, вздовж якого вектор магнітної індукції має максимальне значення називається віссю магнітного поля. Очевидно, що вісь магнітного поля, створеного струмом котушки, співпадає з геометричною віссю котушки.

Якщо струм i – синусоїдний, тобто $i = I_m \sin \omega t$, то і магнітна індукція на осі пропорціональна струму, теж буде синусоїдна: $B = B_m \sin \omega t$

Магнітне поле за цих умов називають пульсуючим, тому що магнітна індукція на осі, змінюється протягом періоду в межах від B_m до $-B_m$.

Кожна із трьох жорстко зв'язаних між собою під кутом 120° нерухомих котушок із струмами створює пульсуюче магнітне поле. Вектори магнітної індукції пульсуючих магнітних полів на осях котушок $\vec{B}_A, \vec{B}_B, \vec{B}_C$ показані на рис. 3.26.

Якщо струми котушок утворюють симетричну трифазну систему:

$$i_A = I_m \sin \omega t, \quad i_B = I_m \sin(\omega t - 120^\circ), \quad i_C = I_m \sin(\omega t + 120^\circ),$$

то магнітна індукція на осі кожної із котушок:

$$B_A = B_m \sin \omega t, \quad B_B = B_m \sin(\omega t - 120^\circ), \quad B_C = B_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$

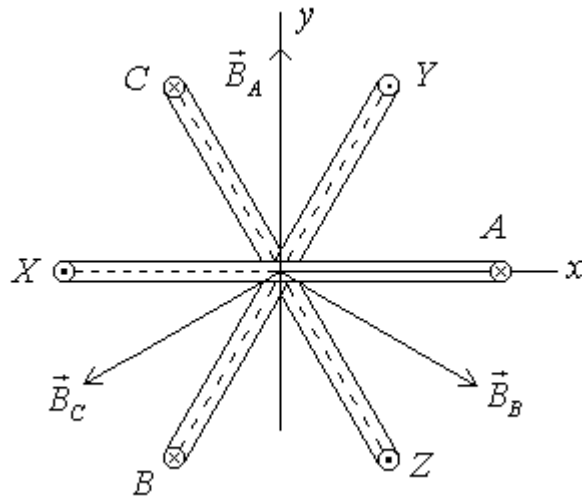


Рис. 3.26

Алгебраїчна сума проєкцій магнітних індукцій на осі x і y декартової системи координат (рис. 3.26):

$$\begin{aligned} B_x &= B_B \cos 30^\circ - B_C \cos 30^\circ = B_m \cos 30^\circ \left[\sin(\omega t - 120^\circ) - \sin(\omega t + 120^\circ) \right] = \\ &= B_m \underbrace{\cos 30^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[2 \cos \omega t \cdot \underbrace{\sin(-120^\circ)}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \right] = -\frac{3}{2} B_m \cos \omega t. \end{aligned}$$

Остаточно $B_x = -\frac{3}{2} B_m \cos \omega t.$

$$\begin{aligned} B_y &= B_A - B_B \cos 60^\circ - B_C \cos 60^\circ = \\ &= B_m \sin \omega t - B_m \cos 60^\circ \left[\sin(\omega t - 120^\circ) + \sin(\omega t + 120^\circ) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B_m \sin \omega t - B_m \underbrace{\cos 60^\circ}_{0.5} \left[2 \sin \omega t \cdot \underbrace{\cos(-120^\circ)}_{-0.5} \right] = \\
&= B_m \sin \omega t - B_m \cdot 0.5 \cdot 2 \sin \omega t \cdot 0.5 = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t.
\end{aligned}$$

$$B_y = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t.$$

Визначимо модуль вектора магнітної індукції B_p і орієнтацію у просторі осі результуючого магнітного поля (рис. 3.27).

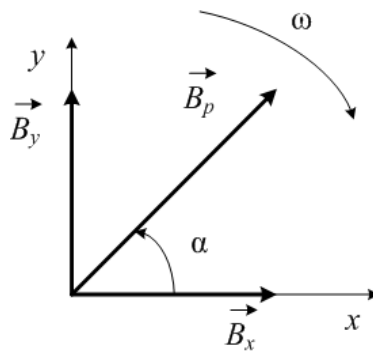


Рис. 3.27

$$B_p = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} B_m\right)^2 \cdot (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)} = \frac{3}{2} B_m.$$

Кут нахилу вектора \vec{B}_p до горизонтальної осі x : $\alpha = \arctg \frac{B_y}{B_x} = -\omega t$ Отже,

модуль результуючого вектора магнітної індукції $B_p = \frac{3}{2} B_m$ не залежить від часу. Вісь магнітного поля обертається у просторі зі сталою кутовою швидкістю ω . Кінець вектора \vec{B}_p описує у просторі коло. Таке магнітне поле називається обертним магнітним полем.

Розглянемо положення вектора \vec{B}_p для різних моментів часу:

1. Момент часу $\omega t = 0$ (рис. 3.28).

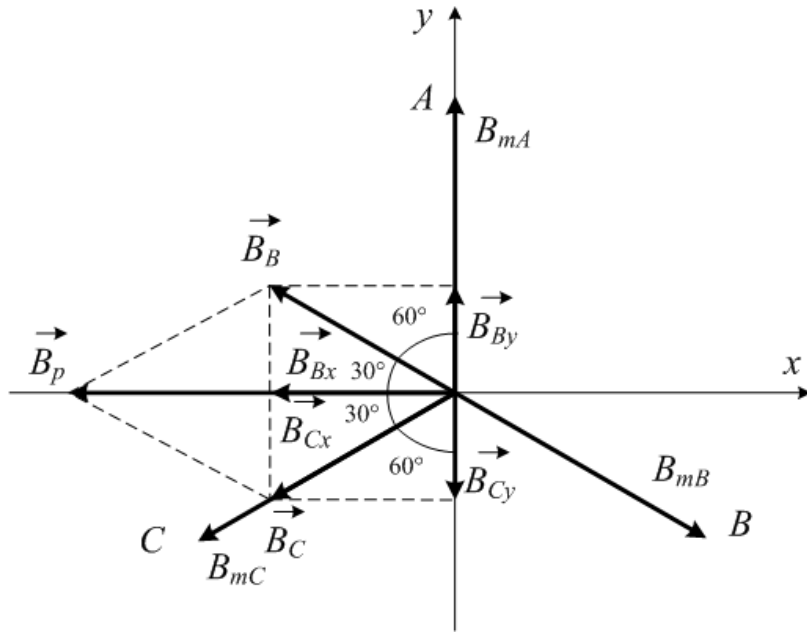


Рис. 3.28

$$\vec{B}_p = \vec{B}_A + \vec{B}_B + \vec{B}_C = 0 + \left| B_m \underbrace{\sin(-120^\circ)}_{\frac{-\sqrt{3}}{2}} \right| + B_m \underbrace{\sin(120^\circ)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Проекції \vec{B}_B і \vec{B}_C на осі x і y :

$$\vec{B}_x = \vec{B}_{Bx} + \vec{B}_{Cx} = B_m \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 30^\circ + B_m \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 30^\circ = 2B_m \frac{3}{4} = \frac{3}{2} B_m;$$

$$\vec{B}_y = \vec{B}_{By} - \vec{B}_{Cy} = B_m \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 30^\circ - B_m \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 30^\circ = 0.$$

$$\vec{B}_p = \vec{B}_x + \vec{B}_y = \frac{3}{2} B_m.$$

2. Момент часу $\omega t = \frac{\pi}{2}$ (рис. 3.29).

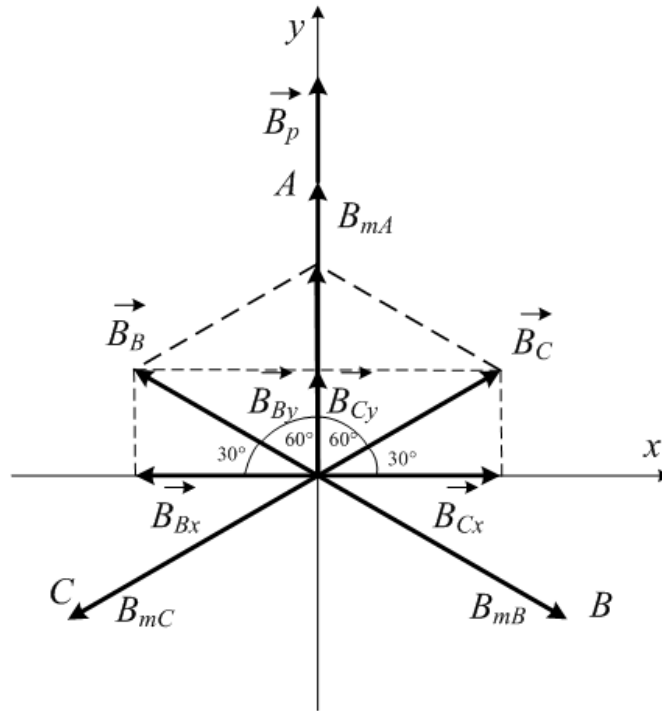


Рис. 3.29

$$\vec{B}_p = \vec{B}_A + \vec{B}_B + \vec{B}_C = B_m \sin \frac{\pi}{2} + \left| B_m \underbrace{\sin(-30^\circ)}_{-0.5} \right| + \left| B_m \underbrace{\sin(-150^\circ)}_{-0.5} \right|.$$

Проекції $\vec{B}_A, \vec{B}_B, \vec{B}_C$ на осі x і y :

$$\vec{B}_x = \vec{B}_{Ax} + \vec{B}_{Bx} + \vec{B}_{Cx} = B_m \cos 90^\circ + \left| B_m \underbrace{\sin(-30^\circ)}_{-0.5} \right| \cos 30^\circ - \left| B_m \underbrace{\sin(-150^\circ)}_{-0.5} \right| \cos 30^\circ = 0;$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_y &= \vec{B}_{Ay} + \vec{B}_{By} - \vec{B}_{Cy} = B_m \sin \frac{\pi}{2} \cos 0^\circ + \left| B_m \underbrace{\sin(-30^\circ)}_{-0.5} \right| \cos 60^\circ + \left| B_m \underbrace{\sin(-150^\circ)}_{-0.5} \right| \cos 60^\circ = \\ &= B_m + \frac{1}{2} B_m + \frac{1}{2} B_m = \frac{3}{2} B_m. \end{aligned}$$

$$\vec{B}_p = \vec{B}_x + \vec{B}_y = \frac{3}{2} B_m.$$

Самостійно визначити B_p для моментів часу $\omega t = \pi$ і $\omega t = \frac{3}{2}\pi$

(рис. 3.30, а, б).

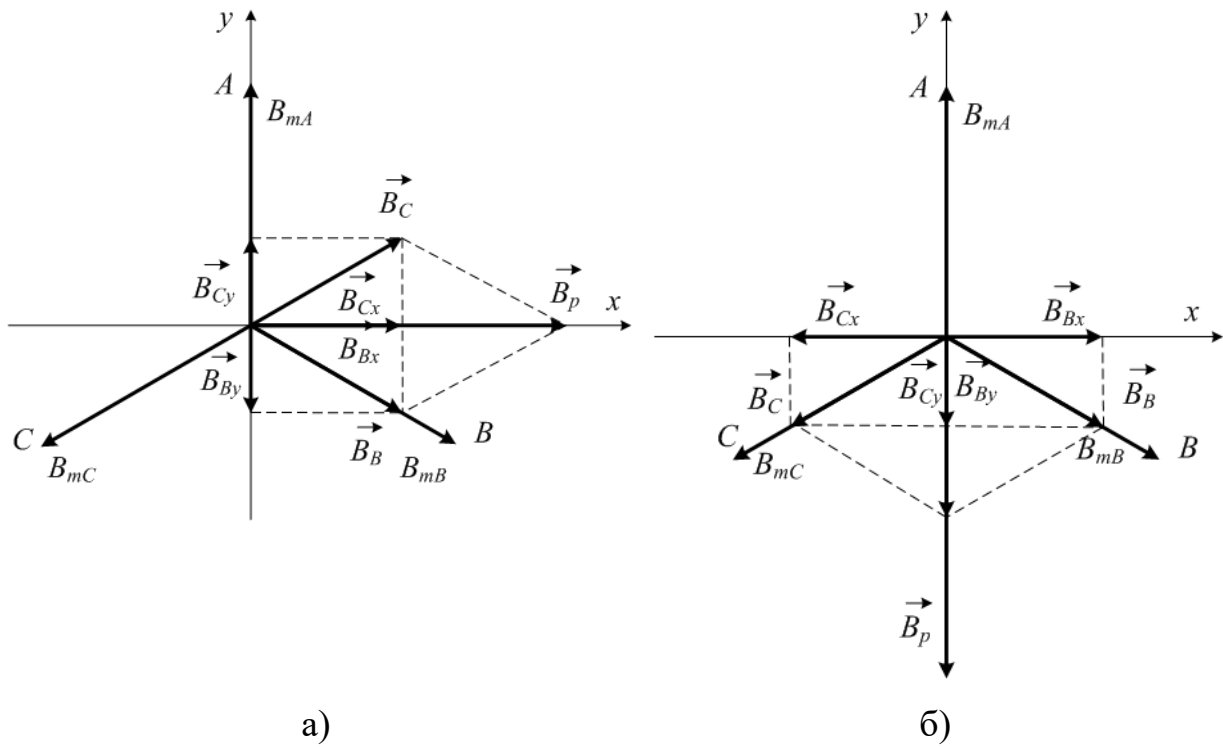


Рис. 3.30

Діаграми на рис. 3.28-3.30 наочно показують обертання осі магнітного поля.

3.1.9. Симетричні складові трифазної системи напруг чи струмів

Будь-яку трифазну систему напруг чи струмів можна розглядати як суму симетричних складових прямої, зворотної та нульової послідовностей.

Нехай \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , – трифазна система напруг чи струмів.

Тоді можна записати:

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_0; \\
\bar{B} &= \bar{B}_1 + \bar{B}_2 + \bar{B}_0; \\
\bar{C} &= \bar{C}_1 + \bar{C}_2 + \bar{C}_0.
\end{aligned}
\tag{3.38}$$

$\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1$ – симетричні складові прямої послідовності.

Пряма послідовність – це симетрична зірка трьох векторів, які обертаються проти годинникової стрілки у напрямку прямого чергування перших літер латинського алфавіту – A, B, C . Вектор \bar{A}_1 випереджає вектор \bar{B}_1 , а вектор \bar{B}_1 випереджає вектор \bar{C}_1 .

$$e_{A_1} = E_m \sin(\omega t + \psi), \quad e_{B_1} = E_m \sin\left(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3}\right), \quad e_{C_1} = E_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{2\pi}{3}\right).$$

$\bar{A}_2, \bar{B}_2, \bar{C}_2$ – симетричні складові зворотної послідовності,

Зворотна послідовність – це симетрична зірка трьох векторів, які обертаються проти годинникової стрілки в напрямку зворотного чергування перших літер латинського алфавіту – C, B, A . Зворотна послідовність така ж, як і пряма, тільки обертається в протилежну сторону. Вектор \bar{C}_2 опережає вектор \bar{B}_2 , а вектор \bar{B}_2 опережає вектор \bar{A}_2 .

$$e_{A_2} = E_m \sin(\omega t + \psi), \quad e_{B_2} = E_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{2\pi}{3}\right), \quad e_{C_2} = E_m \sin\left(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3}\right).$$

$\bar{A}_0, \bar{B}_0, \bar{C}_0$ – симетричні складові нульової послідовності. Ці вектори однакові за модулем і напрямком.

$$e_{A_0} = e_{B_0} = e_{C_0} = E_m \sin(\omega t + \psi).$$

Векторні діаграми послідовностей зображені на рис. 3.31 (а, б, в).

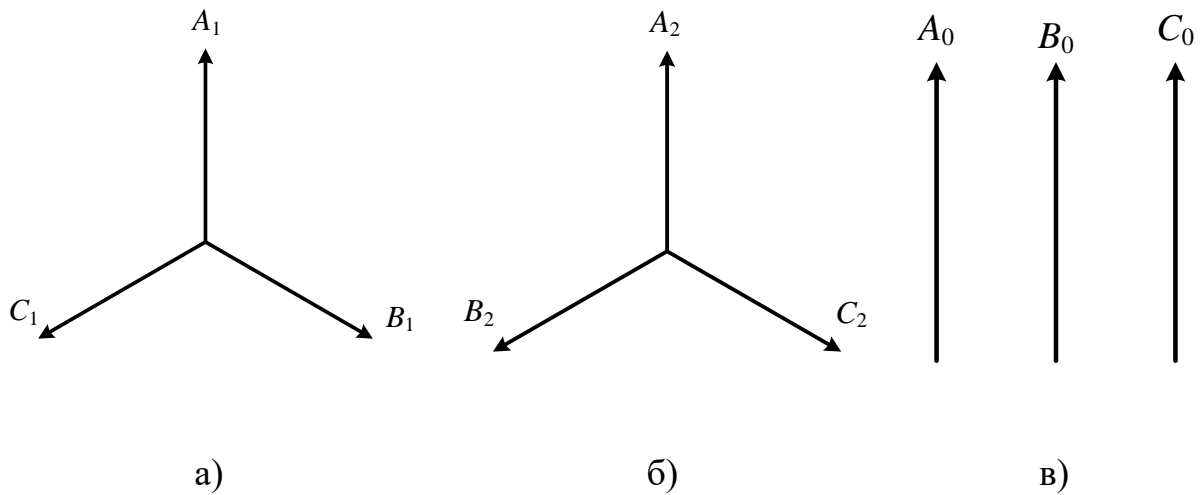


Рис. 3.31

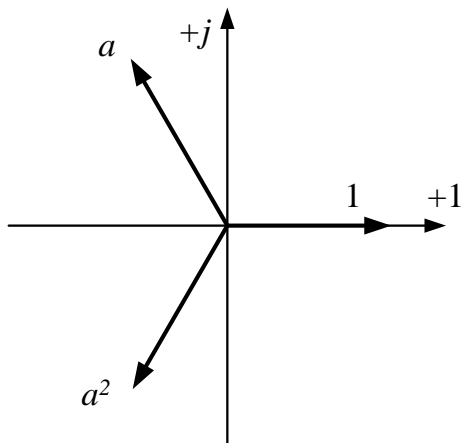


Рис. 3.32

Введемо в розгляд множник $a = e^{j120^\circ}$ – фазовий множник, $a^2 = e^{j240}$

$$1 + a + a^2 = 0 \quad (3.39)$$

Це рівняння відображено на векторній діаграмі рис. 3.32.

Використовуючи фазовий множник, співвідношення між векторами прямої і зворотної послідовності запишемо так:

$$\bar{B}_1 = a^2 \bar{A}_1; \quad \bar{C}_1 = a \bar{A}_1; \quad (3.40)$$

$$\bar{B}_2 = a \bar{A}_2; \quad \bar{C}_2 = a^2 \bar{A}_2. \quad (3.41)$$

Для нульової послідовності: $\bar{A}_0 = \bar{B}_0 = \bar{C}_0$.

Рівняння (3.38) можна подати у вигляді (3.42), виключаючи з розгляду $B_1, B_2, B_0; C_1, C_2, C_0$ (виразити їх через A_1, A_2, A_0 і a).

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_0; \\
\bar{B} &= a^2 \bar{A}_1 + a \bar{A}_2 + \bar{A}_0; \\
\bar{C} &= a \bar{A}_1 + a^2 \bar{A}_2 + \bar{A}_0.
\end{aligned}
\tag{3.42}$$

Із (3.42) можна отримати рішення для симетричних складових через відомі \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} .

Ці рішення записані формулами (3.43 – 3.45):

$$\bar{A}_0 = \frac{1}{3}(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}), \tag{3.43}$$

$$\bar{A}_1 = \frac{1}{3}(\bar{A} + a\bar{B} + a^2\bar{C}), \tag{3.44}$$

$$\bar{A}_2 = \frac{1}{3}(\bar{A} + a^2\bar{B} + a\bar{C}). \tag{3.45}$$

3.1.10. Властивості трифазного кола по відношенню до симетричних складових

1) Як видно із векторних діаграм (рис. 3.31), сума струмів в лінійних проводах для симетричних складових прямої чи зворотної послідовностей завжди дорівнює нулю:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_{A_1} + \underline{I}_{B_1} + \underline{I}_{C_1} &= 0; \\
\underline{I}_{A_2} + \underline{I}_{B_2} + \underline{I}_{C_2} &= 0.
\end{aligned}$$

Тому струм нейтрального проводу від цих складових:
 $I_{N_1} = I_{N_2} = 0$.

2) Для симетричних складових нульової послідовності (рис. 3.31, в) маємо: $\underline{I}_{A_0} = \underline{I}_{B_0} = \underline{I}_{C_0} = \underline{I}_0$.

Тому струм нульової послідовності нейтрального проводу:

$$\underline{I}_{N_0} = 3\underline{I}_0.$$

При відсутності нейтрального проводу складові нульової послідовності не будуть протікати і в лінійних проводах.

3) Приймаючи до уваги, що сума лінійних напруг завжди дорівнює нулю: $\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA} = 0$, робимо висновок, що складові нульової послідовності в системі лінійних напруг відсутні.

Для фіксованої системи лінійних напруг симетричні складові прямої і зворотної послідовностей також фіксовані; відмінності можуть бути тільки в складових нульової послідовності.

Нехай маємо два варіанти симетричних складових фазних напруг для фіксованої системи лінійних напруг:

$U_{AN'_1}, U_{BN'_1}, U_{CN'_1}$ - симетричні складові фазних напруг прямої послідовності;

$U_{AN'_2}, U_{BN'_2}, U_{CN'_2}$ - симетричні складові фазних напруг зворотної послідовності;

$U_{AN'_0}, U_{BN'_0}, U_{CN'_0}$ - для нульової послідовності;

$U_{AN''_1}, U_{BN''_1}, U_{CN''_1}$ - пряма послідовність другого варіанту;

$U_{AN''_0}, U_{BN''_0}, U_{CN''_0}$ - нульова послідовність другого варіанту;

$U_{AN''_2}, U_{BN''_2}, U_{CN''_2}$ - зворотна послідовність другого варіанту.

Враховуючи вище наведене, можемо записати:

$$\begin{aligned} U_{AN'_1} &= U_{AN''_1}, & U_{BN'_1} &= U_{BN''_1}, & U_{CN'_1} &= U_{CN''_1}, \\ U_{AN'_2} &= U_{AN''_2}, & U_{BN'_2} &= U_{BN''_2}, & U_{CN'_2} &= U_{CN''_2}, \\ U_{AN'_0} &\neq U_{AN''_0}, & U_{BN'_0} &\neq U_{BN''_0}, & U_{CN'_0} &\neq U_{CN''_0}. \end{aligned}$$

3.1.11. Опори симетричного трифазного кола для прямої, зворотної і нульової послідовностей. Розрахункові схеми

а) Статичне навантаження

Якщо в електричному колі (рис. 3.33) діють напруги прямої, зворотної чи нульової послідовностей, то в фазах кола будуть протікати струми цих послідовностей.

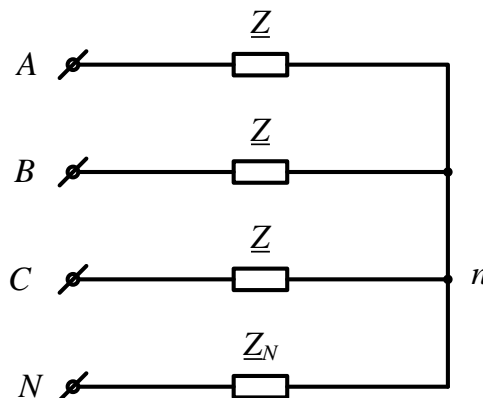


Рис. 3.33

Відношення комплексної напруги до комплексного струму прямої, зворотної чи нульової послідовностей називається комплексним опором цієї послідовності.

\underline{Z}_1 - комплексний опір прямої послідовності:

$$\underline{Z}_1 = \underline{U}_{A_1} / \underline{I}_{A_1} = \underline{U}_1 / \underline{I}_1.$$

\underline{Z}_2 - комплексний опір зворотної послідовності:

$$\underline{Z}_2 = \underline{U}_{A_2} / \underline{I}_{A_2} = \underline{U}_2 / \underline{I}_2.$$

\underline{Z}_0 - комплексний опір нульової послідовності:

$$\underline{Z}_0 = \underline{U}_{A_0} / \underline{I}_{A_0} = \underline{U}_0 / \underline{I}_0.$$

Для статичного навантаження комплексні опори послідовностей однакові $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_0$ і частіше за все окремо для кожної послідовності не вказуються.

Раніше було наголошено, що суми лінійних струмів прямої і зворотної послідовностей завжди дорівнюють нулю і струм в лінійному проводі відсутній; тому при розрахунку цих послідовностей опір нейтрального проводу не враховують, бо струму в ньому не буде.

Таким чином розрахункова схема для прямої і зворотної послідовностей повинна мати вигляд, зображений на рис. 3.34, а розрахункова схема на фазу – на рис. 3.35.

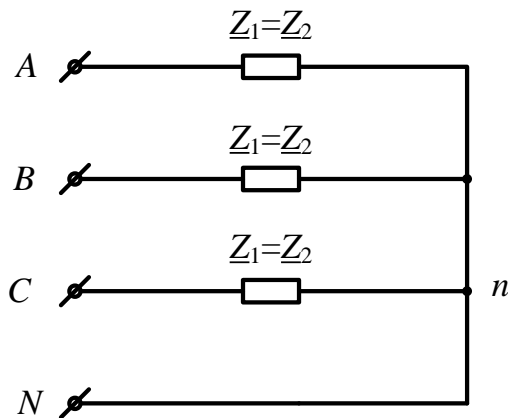


Рис. 3.34

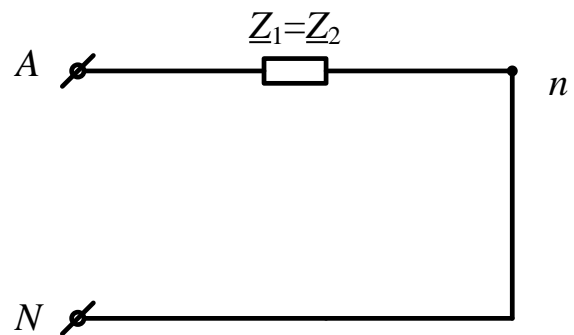


Рис. 3.35

Приймаючи до уваги, що для нульової послідовності в нейтральному проводі протікає потроєне значення лінійного струму, схему рис. 3.33 для цієї послідовності можна замінити еквівалентною схемою рис. 3.36.

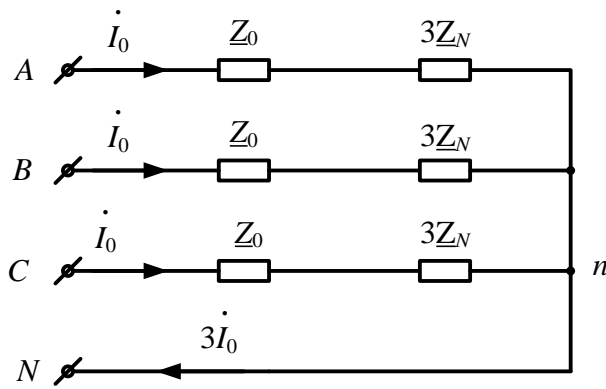


Рис. 3.36

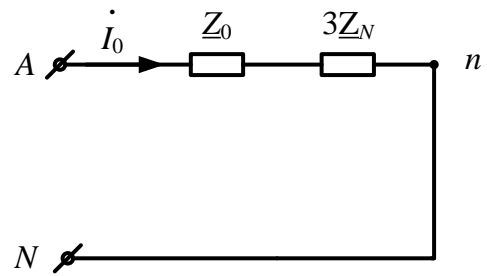


Рис. 3.37

Для схеми рис. 3.36 розрахункова схема нульової послідовності на фазу буде мати вигляд рис. 3.37.

б) Динамічне навантаження

При наявності в трифазному контурі електродвигунів, а також при врахуванні внутрішніх опорів генераторів необхідно мати на увазі, що опори прямої, зворотної і нульової послідовностей для цих пристроїв різні. Це обумовлено тим, що електромагнітні поля статора генератора чи електродвигуна обертаються відносно ротора з різними швидкостями для кожної із послідовностей.

Це є причиною того, що опори для цих послідовностей будуть відрізнятися між собою. Тому, при наявності електродвигуна чи врахуванні опорів генератора, при розрахунках такого кола повинні бути вказані опори для кожної із послідовностей. Самі ж розрахункові схеми будуються по тому ж принципу, як було розглянуто раніше, але з врахуванням вказаних особливостей відносно величин самих опорів.

3.1.12. Розрахунок симетричного трифазного кола з динамічним навантаженням при несиметричній системі вхідних напруг

Трифазні електродвигуни як правило являють собою симетричне навантаження. Якщо маємо в цьому режимі роботи кола симетричний, то і його розрахунок при динамічному навантаженні не буде відрізнятися від розрахунку симетричного трифазного кола із статичним навантаженням.

Але, якщо серед споживачів є однофазні споживачі значної потужності, несиметричні системи струмів будуть протікати і в трифазних генераторах, і в лініях, і в споживачах. Це призводить до того, що спади напруг в лініях будуть різними і, відповідно, система напруг споживача буде несиметричною. В такому випадку при наявності динамічного навантаження розрахунок трифазного кола можна виконати тільки з використанням методу симетричних складових. Сутність такого розрахунку покажемо на прикладі.

Нехай маємо симетричний трифазний споживач (електродвигун рис. 3.38) на вході якого діє несиметрична система напруг.

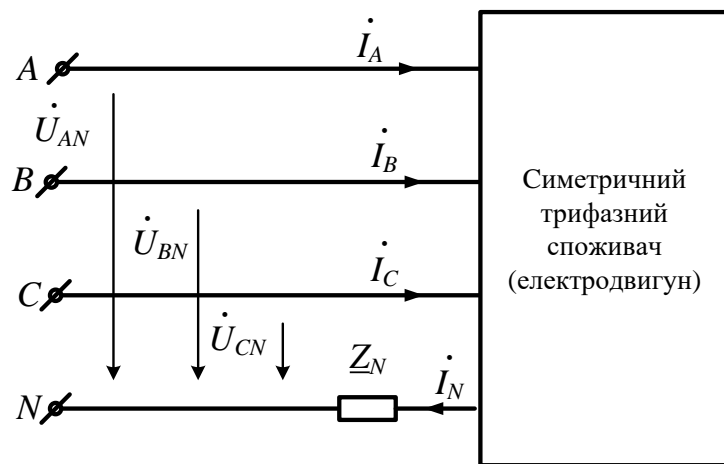


Рис. 3.38

Відомо:

- 1) $\underline{U}_{AN}, \underline{U}_{BN}, \underline{U}_{CN}$ - несиметрична система фазних напруг;

- 2) $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_0$ – опори прямої, зворотної, нульової послідовностей,
 \underline{Z}_N - опір нейтрального проводу.

Визначити: лінійні струми $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ та струм нейтралі \underline{I}_N .

Порядок розрахунку:

а) для вказаної несиметричної системи фазних напруг визначаємо симетричні складові опорної фази.

$\underline{U}_{A_1} = \underline{U}_1$ - складова прямої послідовності;

$\underline{U}_{A_2} = \underline{U}_2$ – складова зворотної послідовності;

$\underline{U}_{A_0} = \underline{U}_0$ – складова нульової послідовності.

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{3}(\underline{U}_{AN} + a\underline{U}_{BN} + a^2\underline{U}_{CN}),$$

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{3}(\underline{U}_{AN} + a^2\underline{U}_{BN} + a\underline{U}_{CN}),$$

$$\underline{U}_0 = \frac{1}{3}(\underline{U}_{AN} + \underline{U}_{BN} + \underline{U}_{CN}).$$

б) будемо розрахункові схеми на фазу для прямої, зворотної та нульової послідовностей (рис. 3.39 – 3.41).

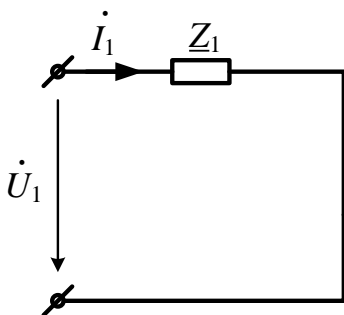


Рис. 3.39

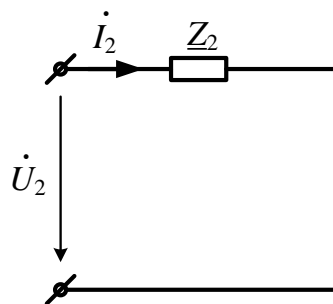


Рис. 3.40

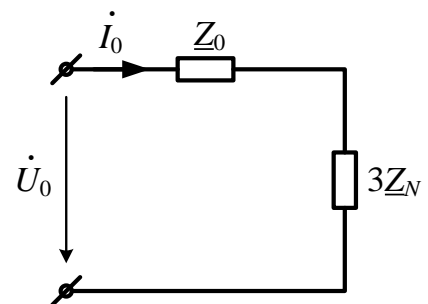


Рис. 3.41

в) розраховуємо струми прямої, зворотної і нульової послідовностей опорної фази:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}; \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2}; \quad \underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_N}.$$

По симетричним складовим знаходимо лінійні струми та струм нейтрального проводу.

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0; \\ \underline{I}_B &= a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 + \underline{I}_0; \\ \underline{I}_C &= a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 + \underline{I}_0; \\ \underline{I}_N &= 3\underline{I}_0 = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C. \end{aligned}$$

3.1.13. Розрахунок трифазного кола при несиметричному споживачі (несиметричному навантаженні (поперечна несиметрія))

Поперечна несиметрія при роботі кола може бути обумовлена, як вказувалось раніше, однофазними споживачами значної потужності чи аварійними режимами трифазних споживачів.

Якщо система струмів в трифазному колі несиметрична, що обумовлене несиметрією навантаження по фазах, і до того ж враховуються внутрішні опори трифазного генератора, то необхідно скористатись методом симетричних складових.

Розрахунок такого кола проведемо на прикладі схеми рис.3.42.

E_Φ - Фазна ЕРС симетричного генератора (пряма послідовність);

$$E_{A_1} = E_1 \quad (E_2 = 0, \quad E_0 = 0).$$

$\underline{Z}_{\Gamma_1}, \underline{Z}_{\Gamma_2}, \underline{Z}_{\Gamma_0}$ - внутрішні опори генератора для прямої, зворотної і нульової послідовностей.

$\underline{Z}_{L_1}, \underline{Z}_{L_2}, \underline{Z}_{L_0}$ - опори лінії для послідовностей;

$\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_0$ - опори симетричного споживача;

$\underline{U}_{A_1}, \underline{U}_{B_1}, \underline{U}_{C_1}$ - несиметрична система напруг на споживачах.

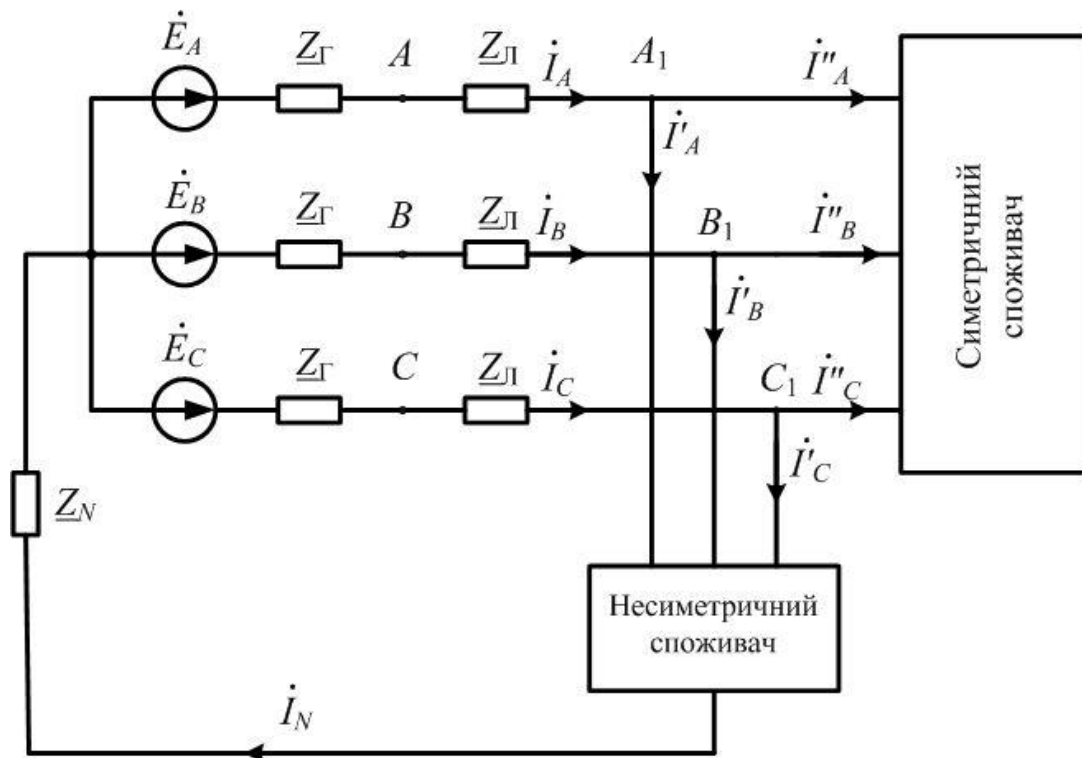


Рис. 3.42

Замість несиметричної системи напруг $\underline{U}_{A_1}, \underline{U}_{B_1}, \underline{U}_{C_1}$ і ЕРС, що їх врівноважують, вводимо симетричні складові цих величин.

$$\underline{U}_{A_1} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0 \text{ - для опорної фази;}$$

$$\underline{U}_{B_1} = a^2 \underline{U}_1 + a \underline{U}_2 + \underline{U}_0;$$

$$\underline{U}_{C_1} = a \underline{U}_1 + a^2 \underline{U}_2 + \underline{U}_0.$$

Після введення в розгляд симетричних складових несиметричної системи напруг $\underline{U}_{A_1}, \underline{U}_{B_1}, \underline{U}_{C_1}$ частина схеми рис. 3.42 матиме вигляд, зображений на рис. 3.43.

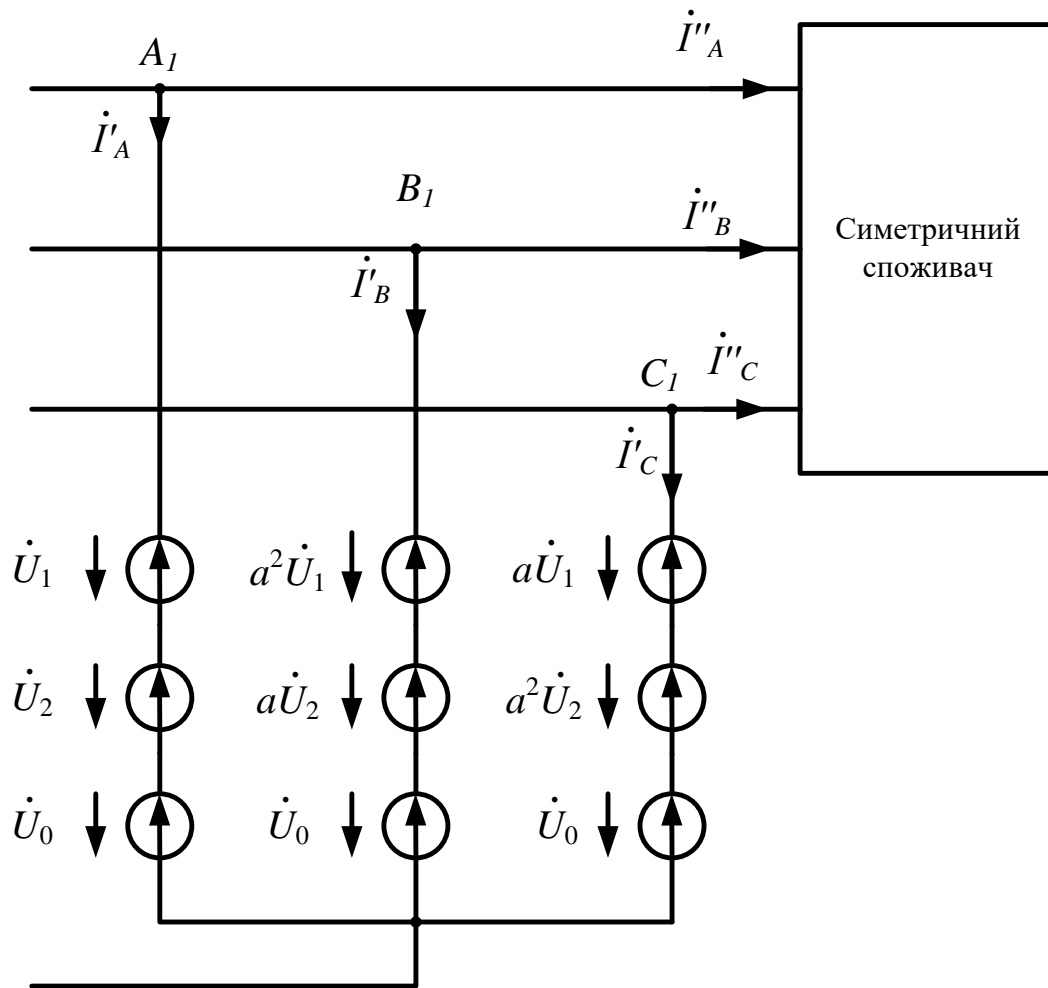


Рис. 3.43

Після відповідних перетворень з врахуванням параметрів кола для кожної із симетричних складових схема рис. 3.42 буде працювати в симетричному режимі і тоді можна запропонувати для кожної із симетричних складових розрахункові схеми на фазу рис. 3.44, рис. 3.45, рис. 3.46.

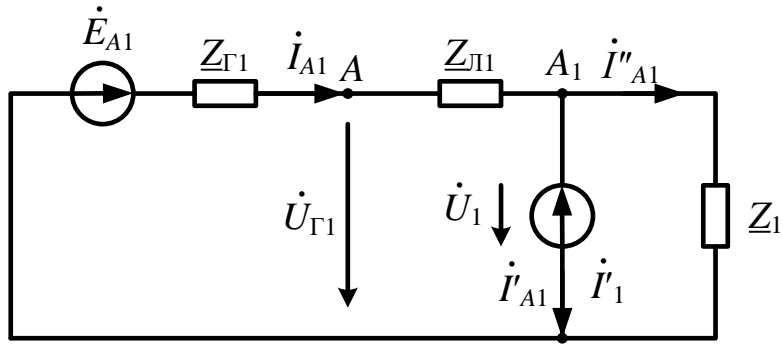


Рис. 3.44

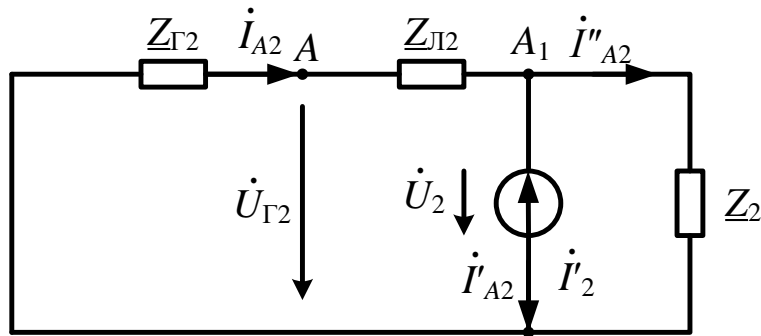


Рис. 3.45

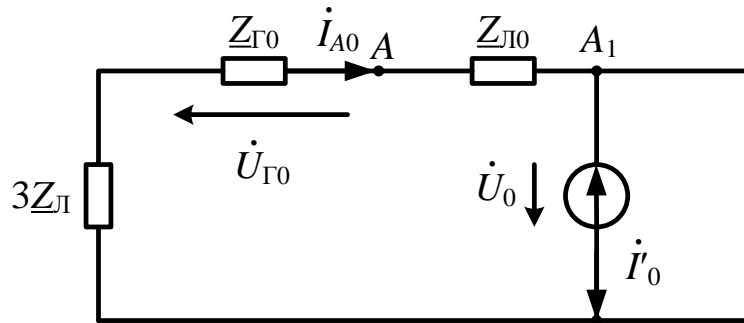


Рис. 3.46

У відповідності з розрахунковими схемами рис. 3.44 – 3.46 для прямої, зворотної та нульової послідовностей можуть бути складені такі рівняння:

$$\underline{E}_1 = \underline{I}_{A_1} (\underline{Z}_{Г1} + \underline{Z}_{Л1}) + \underline{U}_1 = \underline{U}_1 + \left(\underline{I}'_1 + \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} \right) (\underline{Z}_{Г1} + \underline{Z}_{Л1}).$$

$$0 = \underline{U}_2 + \left(\underline{I}'_2 + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} \right) (\underline{Z}_{\Gamma_2} + \underline{Z}_{Л_2}).$$

$$0 = \underline{U}_0 + \underline{I}'_0 (\underline{Z}_{\Gamma_0} + \underline{Z}_{Л_0} + 3\underline{Z}_{\Gamma}).$$

В приведених рівняннях 6 невідомих, тому для знаходження цих невідомих необхідні ще 3 додаткових рівняння. Ці рівняння складають, виходячи із умов несиметрії.

Нехай маємо коротке замикання в фазі А

$$\underline{U}_{A_1} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0 = 0.$$

При к.з. струм в коротко замкненій фазі набагато більше струмів інших фаз:

$$I'_C \approx 0, \quad I'_B \approx 0, \quad I'_A = I_{\text{к.з.}} - \text{струм короткого замикання.}$$

$$I'_0 = \frac{1}{3} I_{\text{к.з.}} = I'_1 = I'_2.$$

Отримавши таким чином 4 рівняння з 4-ма невідомими, знаходимо струми і напруги послідовностей, а далі знаходимо решту величин.

3.1.14. Розрахунок трифазного кола при несиметрії в лінії (повздовжня несиметрія)

Несиметрія в лінії може бути викликана різними причинами, наприклад, обривом одного із проводів в лінії чи різних опорів перехідних контактів і т.п. При таких випадках за наявності динамічного навантаження чи врахуванні внутрішніх опорів трифазного генератора використовують метод симетричних складових.

Більш детально розглянемо це на прикладі схеми рис. 3.47.

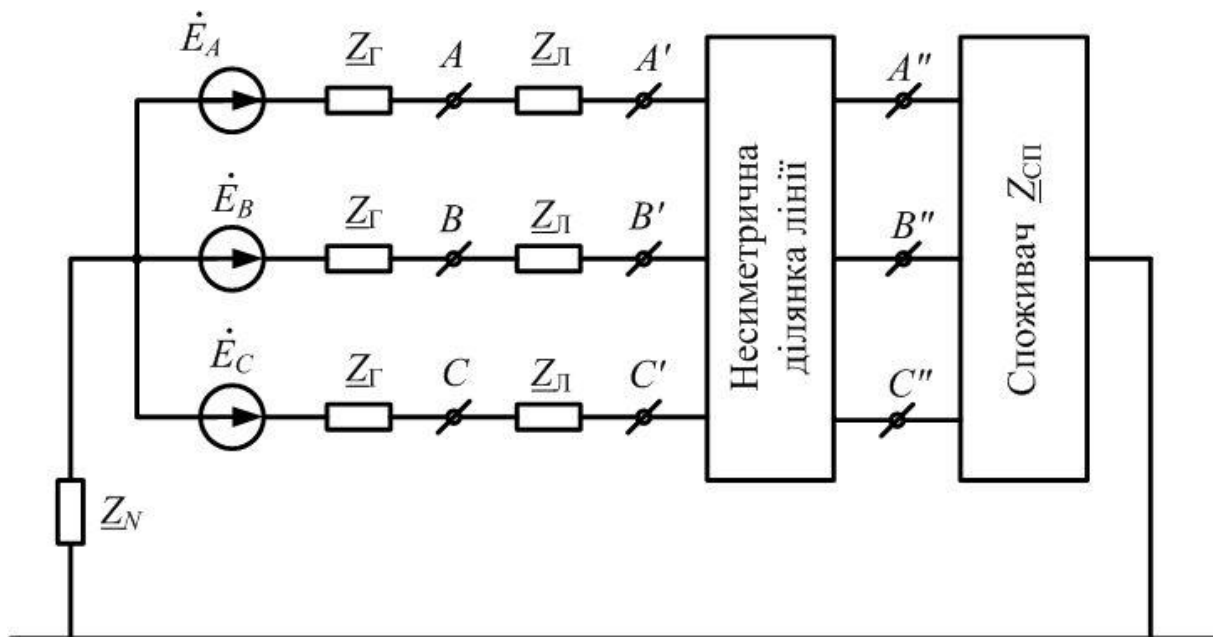


Рис. 3.47

1) Відомо: E_{Φ} - фазна ЕРС генератора;

$Z_{\Gamma_1}, Z_{\Gamma_2}, Z_{\Gamma_0}$ - внутрішні опори генератора для прямої, зворотної, нульової послідовностей;

$Z_{L_1}, Z_{L_2}, Z_{L_0}$ - опори симетричної ділянки лінії для послідовностей;

$Z_{СП_1}, Z_{СП_2}, Z_{СП_0}$ - опори прямої, зворотної, нульової послідовностей споживача;

Z_N - опір нейтрального проводу

2) Визначити: струми і спади напруг.

Замінюємо спади напруг на несиметричній ділянці лінії несиметричною системою ЕРС. Для несиметричної системи ЕРС і напруг, що їх врівноважують, вводимо симетричні складові прямої, зворотної і нульової послідовностей.

$$\underline{U}_{A'A''} = \underline{E}_{A'A''}; \quad \underline{U}_{B'B''} = \underline{E}_{B'B''}; \quad \underline{U}_{C'C''} = \underline{E}_{C'C''};$$

$$\underline{U}_{A'A''} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0 \text{ і т.д.}$$

Після цього для кожної із симетричних складових окремо режим роботи кола буде симетричний.

Тоді можна запропонувати розрахункові схеми на одну фазу для прямої, зворотної та нульової послідовностей: рис. 3.48, рис. 3.49, рис. 3.50.

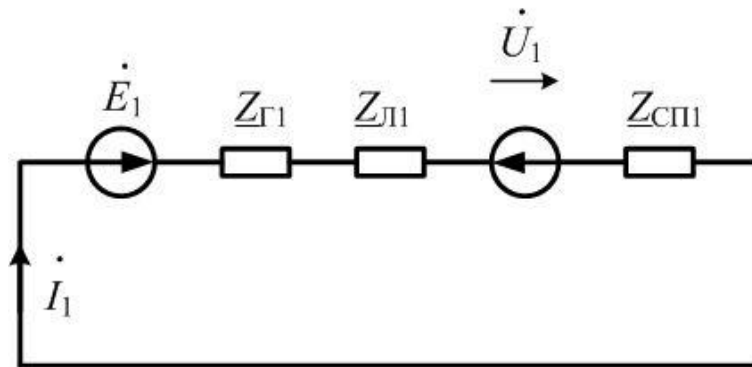


Рис. 3.48

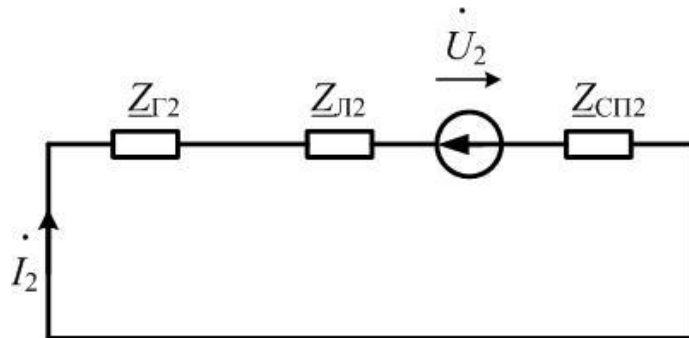


Рис. 3.49

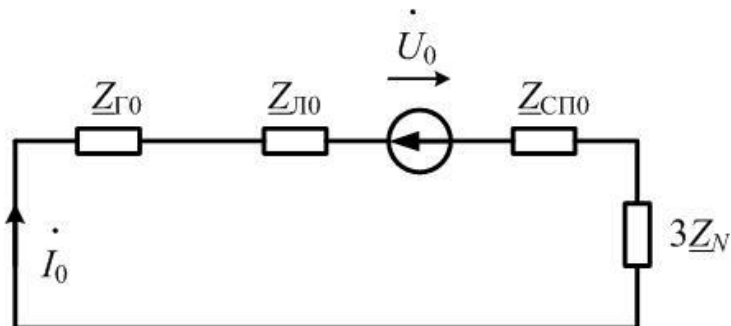


Рис. 3.50

Для приведених розрахункових схем (рис. 3.48 - 3.50) можна скласти три рівняння:

$$\begin{aligned} \underline{E}_1 &= \underline{I}_1 (\underline{Z}_{\Gamma_1} + \underline{Z}_{Л_1} + \underline{Z}_{СП_1}) + \underline{U}_1, \\ 0 &= \underline{I}_2 (\underline{Z}_{\Gamma_2} + \underline{Z}_{Л_2} + \underline{Z}_{СП_2}) + \underline{U}_2, \\ 0 &= \underline{I}_0 (\underline{Z}_{\Gamma_0} + \underline{Z}_{Л_0} + \underline{Z}_{СП_0} + 3\underline{Z}_N) + \underline{U}_0. \end{aligned}$$

Приймаючи до уваги, що в приведених рівняннях 6 невідомих, необхідно скласти ще додаткові три рівняння. Ці додаткові рівняння складаємо у відповідності з умовами несиметрії. На рис. 3.51 (а, б, в) показані варіанти несиметрії.

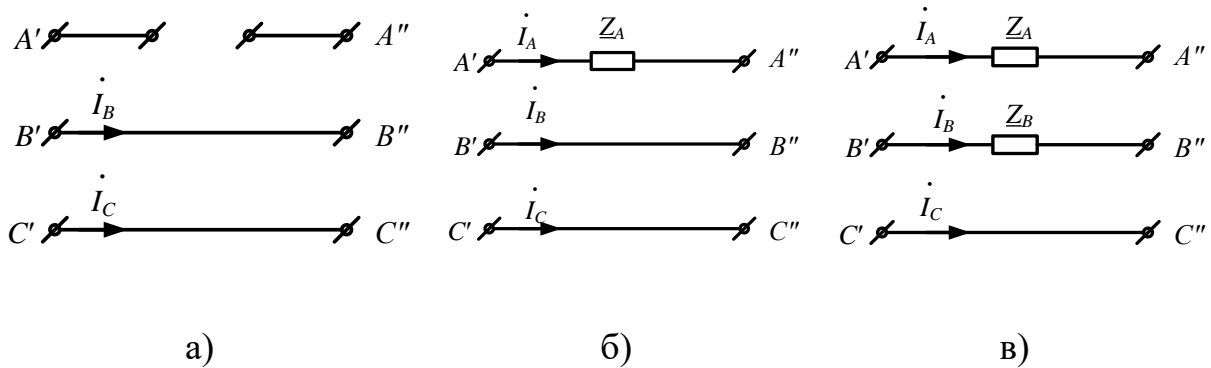


Рис. 3.51

Для варіантів несиметрії, зображених на рис. 3.51, додаткові умови можна записати такими рівняннями:

$$\begin{aligned} \text{а) } \underline{I}_A &= 0, \quad \underline{U}_{B' B''} = 0, \quad \underline{U}_{C' C''} = 0. \\ \text{б) } \underline{U}_{A' A''} &= \underline{I}_A \underline{Z}_A, \quad \underline{U}_{B' B''} = 0, \quad \underline{U}_{C' C''} = 0 \\ \text{в) } \underline{U}_{A' A''} &= \underline{I}_A \underline{Z}_A, \quad \underline{U}_{B' B''} = \underline{I}_B \underline{Z}_B. \quad \underline{U}_{C' C''} = 0. \end{aligned}$$

Записавши додаткові рівняння а),б),в) через симетричні складові, отримаємо для кожного із варіантів по 6 необхідних рівнянь, які дозволять визначати невідомі симетричні складові.

Так, наприклад, для варіанту а) напишемо такі 3 додаткові рівняння через симетричні складові:

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0 &= 0, \\ a^2 \underline{U}_1 + a \underline{U}_2 + \underline{U}_0 &= 0, \\ a \underline{U}_1 + a^2 \underline{U}_2 + \underline{U}_0 &= 0.\end{aligned}$$

Додаткові рівняння для варіантів б) та в) проаналізувати самостійно.

Розв'язавши повну систему рівнянь і визначивши всі симетричні складові, далі знаходимо спади напруг та струми у вихідній схемі.

Тема 3.2. Електричні кола несинусоїдного періодичного струму

3.2.1. Розкладання періодичної несинусоїдної ЕРС в тригонометричний ряд Фур'є

Якщо періодична функція задовольняє умовам Діріхле, то вона може бути записана тригонометричним рядом Фур'є:

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + \dots + A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots, \quad (3.46)$$

де A_0 – постійна складова,

$A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ – основна, перша гармонічна складова (має таку ж частоту, як і сама функція),

$A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$ – k -та гармонічна складова

$$\begin{aligned}A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) &= A_{km} \cos \psi_k \sin k\omega t + A_{km} \sin \psi_k \cos k\omega t = \\ &= B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t;\end{aligned} \quad (3.47)$$

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \sin(k\omega t) + C_k \cos(k\omega t)), \quad (3.48)$$

де A_0, B_k, C_k – коефіцієнти тригонометричного ряду Фур'є.

Коефіцієнти A_0, B_k, C_k визначаються із співвідношень:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d(\omega t), \quad (3.49)$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin(k\omega t) d(\omega t), \quad (3.50)$$

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cos(k\omega t) d(\omega t). \quad (3.51)$$

Формули (3.49 – 3.51) можуть бути використані для визначення коефіцієнтів, якщо функції задані на періоді аналітично.

Якщо ж функція має один із видів симетрії (парна, непарна чи симетрична відносно осі часу), то досить обмежитись інтегруванням за півперіоду.

Обмеження проміжку часу інтегрування спрощує розрахунки по визначенню коефіцієнтів ряду Фур'є. Тому перш ніж виконувати такі розрахунки необхідно дослідити, чи має дана функція якийсь із названих видів симетрії.

Визначивши коефіцієнти, можемо записати рівняння (3.48) ряду Фур'є, але для розрахунків зручніше користуватись рівнянням (3.46). Перехід від констант B_k і C_k до A_{km} виконується за відомими формулами (3.52) та (3.53).

$$A_{km} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}, \quad (3.52)$$

$$\Psi_k = \begin{cases} \arctg \frac{C_k}{B_k}, & B_k > 0; \\ \pm\pi + \arctg \frac{C_k}{B_k}, & B_k < 0. \end{cases} \quad (3.53)$$

Визначивши коефіцієнти ряду (3.46), можемо побудувати дискретні амплітудно-частотні та фазочастотні спектри несинусоїдної функції.

Нехай ряд Фур'є має такий вигляд:

$$f(\omega t) = A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + A_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots + A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k),$$

k – непарне. Тоді амплітудно-частотна характеристика і фазо- частотна характеристика цього ряду матимуть вигляд рис. 3.46 і рис. 3.47.

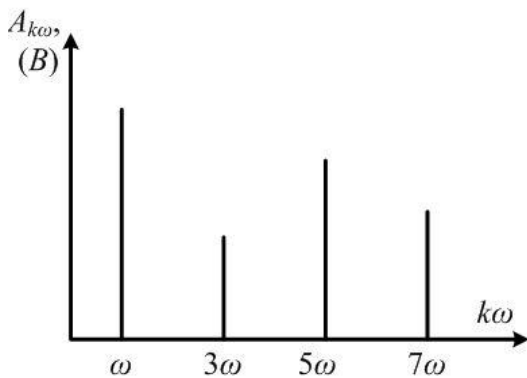


Рис. 3.52

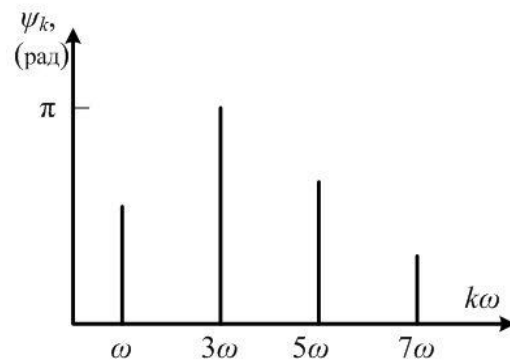


Рис. 3.53

Якщо ж функція задана у вигляді графіка, рівняння функції невідоме, то визначення коефіцієнта ряду Фур'є функції можна провести графо-аналітичним методом. Інтегралі формул (3.49 - 3.51) замінюють наближеними сумами.

Відомий також машинний чи приладний метод визначення амплітуд гармонік періодичної функції. Для цього використовують аналізатор гармонік.

3.2.2. Розрахунок миттєвих струмів в лінійному колі з несинусоїдними джерелами енергії

Можна запропонувати таку послідовність розрахунку миттєвих значень струмів в лінійному колі, в якому діють несинусоїдні джерела енергії:

1. Періодичні несинусоїдні функції ЕРС чи струмів джерел енергії розкладають в тригонометричні ряди Фур'є, це будуть нескінченні тригонометричні ряди виду (3.46): $e(\omega t)$, $j(\omega t)$ – нескінченні тригонометричні ряди;

2. Вибираємо із нескінченних тригонометричних рядів постійні складові та гармонічні складові трьох, чотирьох найбільш суттєвих гармонік; тоді матимемо наближені функції ЕРС джерел енергії з обмеженою кількістю складових.

$$e(\omega t) \cong E_0 + e_{(1)} + e_{(2)} + e_{(3)}$$

$$j(\omega t) \cong J_0 + j_{(1)} + j_{(2)} + j_{(3)}$$

Цим формулам відповідають такі схеми заміщення джерел енергії:

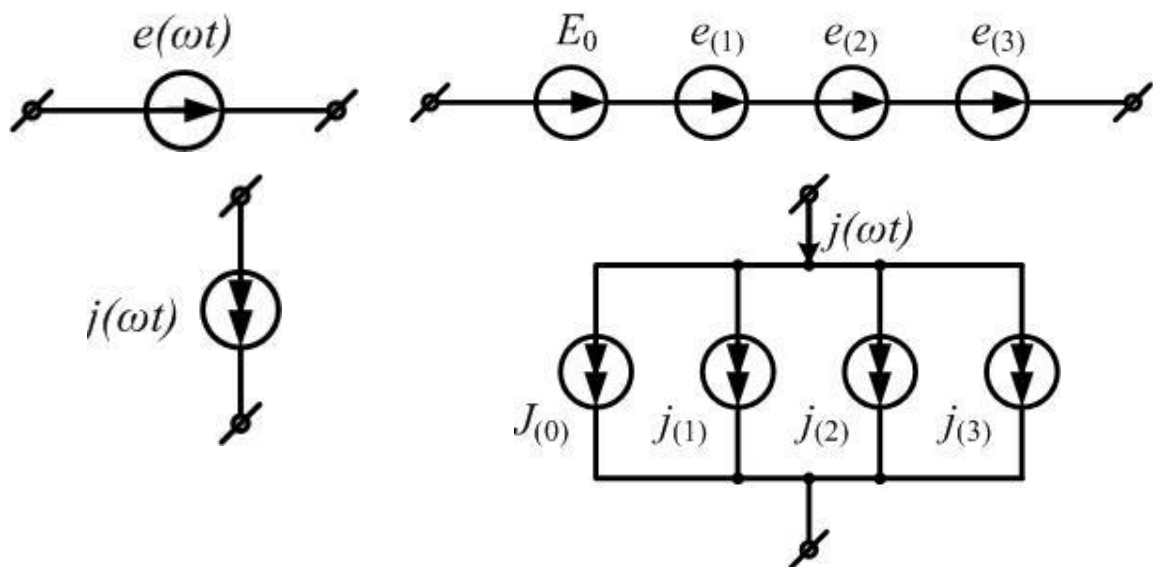


Рис. 3.54

3. Використання методу накладання для розрахунку миттєвих значень струму від кожної складової тригонометричного ряду джерела енергії.

3.1. Залишаємо в електричному колі постійні складові джерел енергії і використовуємо відповідний метод для розрахунку цього кола при дії постійних джерел енергії.

3.2. Замість постійних складових джерел енергії вводимо в коло гармонічні складові основної частоти ω . Використовуючи символічний метод, складаємо відповідні рівняння. Після розрахунку кола символічним методом і отримання комплексних складових струмів віток необхідно потім перейти до миттєвих значень цих складових.

3.3. Вводимо в коло складові джерел енергії наступної гармоніки ($k\omega$) і виконуємо подібні розрахунки кола з використанням символічного методу як і в етапі 3.2.

3.4. Виконуємо подібні розрахунки для решти гармонік джерел енергії. При розрахунку гармонічних складових струмів необхідно пам'ятати, що реактивні опори елементів із зміною номера гармоніки змінюються.

$X_{L(k)} = k\omega L$ – індуктивний опір на k -тій гармоніці;

$X_{C(k)} = \frac{1}{k\omega C}$ - реактивний опір ємності на частоті $k\omega$.

4. Виконуємо накладання дії всіх складових джерел енергії і знаходимо результуючі миттєві струми кожної вітки. В такому випадку миттєві струми будь-якої вітки кола можна записати виразом:

$$i = I_0 + i_{(1)} + i_{(2)} + i_{(3)}.$$

Накладання може використовуватись тільки для миттєвих значень струмів.

Якщо є необхідність побудови векторних діаграм електричного кола, то такі діаграми повинні будуватись для кожної гармонічної складової окремо.

3.2.3. Діючі значення несинусоїдних струмів і напруг

Діюче значення періодичного змінного струму визначається відомим виразом:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (3.54)$$

Нехай функція струму подана у вигляді тригонометричного ряду Фур'є:

$$i(\omega t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ik});$$
$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left(I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ik}) \right)^2 dt.$$

При знаходженні квадрату діючого значення струму необхідно буде знайти такі інтеграли:

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 dt = I_0^2,$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T I_0 I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ik}) dt = 0,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_{ik}) dt = \frac{I_{km}^2}{2} = I_k^2,$$

$$\int_0^T i_p i_q dt = 0, \quad p \neq q.$$

$$I^2 = I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2;$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}. \quad (3.55)$$

Діюче значення періодичного несинусоїдного струму дорівнює кореню із суми квадратів всіх складових: постійної і гармонічних. Аналогічно (3.55) можна записати відповідні формули для визначення діючих значень несинусоїдної напруги чи ЕРС:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}. \quad (3.56)$$

В деяких випадках необхідно визначити середнє за період значення

функції:
$$I_C = \frac{1}{T} \int_0^T i dt. \quad (3.57)$$

Якщо функція симетрична відносно осі часу, то середнє за період значення такої функції дорівнює нулю і тому його не можна використати для характеристики функції. Для неї характеристикою є середнє за період

значення модуля функції:
$$I_C = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt. \quad (3.58)$$

Для синусоїдної функції, якщо виходити із (3.58), тоді:

$$I_C = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I_m \sin(\omega t) d(\omega t), \quad I_C = \frac{2I_m}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I. \quad (3.59)$$

Діюче значення синусоїдних струмів чи напруг визначають прилади теплової, електромагнітної та електродинамічної систем. Постійну складову – прилади магнітоелектричної системи.

3.2.4. Потужність кола несинусоїдного струму

Нехай напруга і струм вітки кола подані тригонометричними рядами:

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k), \quad i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k),$$

ψ_k - початкова фаза напруги,

φ_k - кут зсуву фаз між напругою і струмом k -ї гармоніки.

Миттєва потужність p вітки визначається як добуток:

$$p = ui = \left[U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \right] \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) \right]. \quad (3.60)$$

Середнє за період значення миттєвої потужності для періодичних напруги і струму називається **активною потужністю P** : $P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt$. (3.61)

Для того, щоб визначити активну потужність, приймаючи до уваги вираз (3.60) для миттєвої потужності, необхідно буде розрахувати такі типи інтегралів:

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt = U_0 I_0,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) dt = 0,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_0 U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) dt = 0,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) dt =$$

$$= \frac{U_{km} I_{km}}{2} \cos \varphi_k = U_k I_k \cos \varphi_k - \text{активна потужність } k\text{-ої гармоніки вітки.}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_p i_q dt = 0, \quad p \neq q.$$

З врахуванням значень приведених інтегралів, для P матимемо:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k. \quad (3.62)$$

Таким чином активна потужність періодичного несинусоїдного струму дорівнює сумі активних потужностей всіх складових: постійної і гармонічних.

Реактивна потужність синусоїдного струму (амплітуда миттєвої потужності реактивного елементу) визначалось для синусоїдного струму виразом (3.63): $Q = UI \sin \varphi$. (3.63)

Якщо маємо несинусоїдний струм, який подано тригонометричним рядом, то для кожної гармонічної складової можемо визначити реактивну потужність: $Q_k = U_k I_k \sin \varphi_k$.

Реактивна потужність вітки несинусоїдного струму з кількома гармонічними складовими визначається як сума реактивних потужностей всіх складових $Q = \sum Q_k = \sum U_k I_k \sin \varphi_k$. (3.64)

Повна потужність періодичного струму визначається як добуток діючих значень напруги і струму $S = UI$.

Приймаючи до уваги формули для діючих значень напруг і струмів, для повної потужності матимемо:

$$S = \sqrt{\sum_0^{\infty} U_k^2} \sqrt{\sum_0^{\infty} I_k^2}. \quad (3.65)$$

Для синусоїдного струму співвідношення між потужностями має вигляд: $S^2 = P^2 + Q^2$. (3.66)

Для несинусоїдного струму це співвідношення часто не виконується.

Співвідношення між S , P , Q записується інакше:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + T^2; \quad (3.67)$$

$$T - \text{потужність спотворення}, \quad T = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}. \quad (3.68)$$

Ця потужність виникає в тих випадках, коли є реактивні елементи; тоді форми кривих струму і напруги відрізняються.

3.2.5. Вплив параметрів кола на форми кривих струму при несинусоїдній напрузі

Розглянемо, як наявність елементів R , L , C впливає на співвідношення між амплітудами гармонік U та I при наявності в електричному колі несинусоїдного джерела енергії.

а) Нехай маємо ділянку з активними опорами R .

Активний опір від частоти не залежить, хоча це не зовсім так, бо має місце поверхневий ефект і із збільшенням частоти активний опір зростає. Однак це зростання для частот нижче 1000Гц несуттєве. В промислових мережах амплітуди гармонік вище 1000Гц незначні і не можуть суттєво впливати на роботу споживачів.

$$U_{(1)} = RI_{(1)}; \quad U_{(k)} = RI_{(k)}; \quad \frac{U_{(k)}}{U_{(1)}} = \frac{I_{(k)}}{I_{(1)}}. \quad (3.69)$$

На ділянці з активним опором зберігається пропорційність між амплітудами гармонік напруги і струму (в межах до 1000Гц).

Тому на ділянці з активним опором форми кривих u і i подібні.

б) Ділянка з індуктивністю L .

Зв'язок між u_L і струмом: $u_L = L \frac{di}{dt}$.

$U_{L(1)} = \omega L I_{(1)}$ – для 1-ої гармоніки, $U_{L_k} = k\omega L I_{(k)}$ – для k -ої гармоніки;

$$\frac{U_{L(k)}}{U_{L(1)}} = k \frac{I_{(k)}}{I_{(1)}} . \quad (3.70)$$

З (3.70) випливає, що в кривій напруги на ділянці з L вищі гармоніки більш помітні, ніж в кривій струму, тобто індуктивність «згладжує» криву струму.

в) ділянка з ємністю C .

$I_{(1)} = \omega C U_{(1)}$ – для 1-ої гармоніки, $I_{(k)} = k\omega C U_{(k)}$ – для k -ої гармоніки;

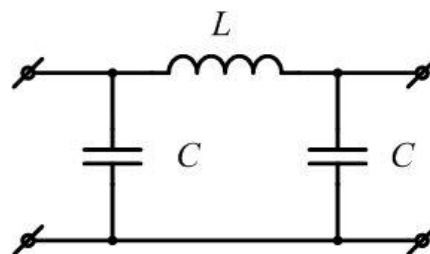
$$k \frac{U_{(k)}}{U_{(1)}} = \frac{I_{(k)}}{I_{(1)}} . \quad (3.71)$$

В кривій струму ємності вищі гармоніки більш помітні, ніж в кривій напруги, тобто ємність «згладжує» криву напруги.

Висновок: у вітці, де крім активних є і реактивні елементи, несинусоїдні криві напруги і струму не будуть подібні за формою.

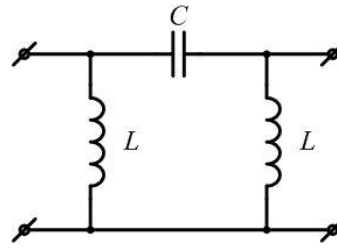
Враховуючи різку залежність опорів реактивних елементів від частоти, були розроблені і запропоновані електричні фільтри – чотиріполюсники, які складені із реактивних елементів і призначені для пропускання чи затримання струмів певних частот. Розрізняють такі фільтри:

фільтри нижніх частот-пропускають частоти від 0 до $\omega_{зр}$ (частота зрізу) з коефіцієнтом згасання $\alpha=0$;
 $0 < \omega < \omega_{зр}$

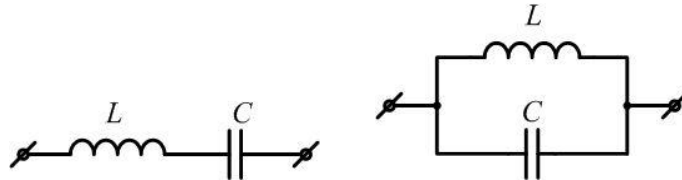


фільтри верхніх частот:

$$\alpha=0; \omega_{зр}<\omega<\infty$$



резонансні фільтри:



фільтри елементів живлення.

3.2.6. Коефіцієнти , що характеризують несинусоїдні струми та напруги

$$1) \text{ Коефіцієнт амплітуди } k_a = \frac{U_{\max}}{U} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2}}.$$

Для синусоїди $k_a = \sqrt{2}$.

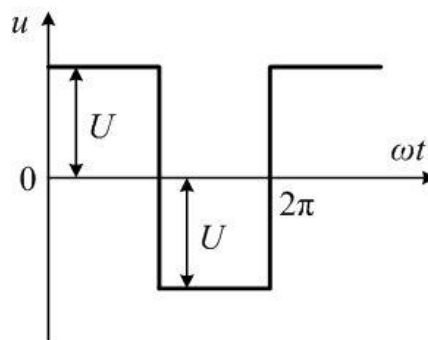


Рис. 3.55

Для кривої рис. 3.55: $U_{\max} = U = U_C$, $k_a = 1$, $k_\phi = 1$.

2) коефіцієнт форми

$$k_{\Phi} = \frac{U}{U_C} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}}{\frac{1}{T} \int_0^T |u| dt}.$$

Для синусоїди:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad U_C = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} U = \frac{2}{\pi} U_m; \quad k_{\Phi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11.$$

3) коефіцієнт гармонік

$$k_{\Gamma} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}}{U_1},$$

U_k – діючі значення вищих гармонік

Для ідеальних синусоїд $k_{\Gamma}=0$.

Для електричних мереж $k_{\Gamma} \leq 0.05$.

4) коефіцієнт спотворення (несинусоїдності):

$$k_{\text{нес}} = \frac{U_{(1)} - \text{діюче значення основної гармоніки}}{U - \text{діюче значення несинусоїдної функції}}.$$

Для синусоїди $k_{\text{нес}}=1$.

Для несинусоїдної функції $k_{\text{нес}} \leq 1$.

4) коефіцієнт потужності:

$$k_{\Pi} = \frac{P}{S} = \frac{\sum P_{(k)}}{UI} = \frac{\sum P_{(k)}}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}}.$$

Нехай $u = U_m \sin \omega t$.

Нехай струм споживача $i = i_{(1)} + i_{(3)} + i_{(5)}$, відсутні постійна складова і парні гармоніки.

Потужність споживача визначається тільки 1-ою гармонікою

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1,$$

φ_1 – кут зсуву фаз першої гармоніки.

$$S = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} = U_1 \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2};$$

$$k_{\Pi} = \frac{P}{S} = \frac{I_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}} = k_{\text{нec}} \cos \varphi_1.$$

Наявність нелінійного елемента приводить до зменшення потужності. $k_{\Pi} \leq \cos \varphi_1$.

3.2.7. Вищі гармоніки в трифазному колі

3.2.7.1. Системи прямої, зворотної, нульової послідовностей фаз в несинусоїдних струмах і напругах трифазного кола

Генератори дають симетричну систему ЕРС, тобто ЕРС мають однакові амплітуди і зсунуті на $\frac{T}{3}$. Форми цих ЕРС неідеальні. Тобто можна вважати, що кожна з фазних ЕРС, крім основної гармоніки, має ще вищі гармонічні складові: $k=1,3,5\dots$ непарні. Постійна складова і парні складові відсутні, бо крива симетрична осі часу.

$$\begin{aligned} e_A &= e(t) - \text{ЕРС в фазі } A, \\ e_B &= \left(e(t) - \frac{T}{3} \right) - \text{ЕРС в фазі } B, \\ e_C &= \left(e(t) + \frac{T}{3} \right) - \text{ЕРС в фазі } C. \end{aligned}$$

Нехай ЕРС фази A має непарні вищі гармонічні складові і основну:

$$e_A = \sum_{k=1}^{\infty} E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k), \quad k=1,3,5\dots$$

Для k -ої гармонічної складової по фазах матимемо:

$$\begin{aligned} e_{A(k)} &= E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k); \\ e_{B(k)} &= E_{km} \sin\left(k\omega t + \psi_k - k\frac{2\pi}{3}\right); \\ e_{C(k)} &= E_{km} \sin\left(k\omega t + \psi_k + k\frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Системи *прямого* чергування фаз: $k=1,7,13,19\dots$ $k=6n+1$, ($n=0,1,2,3\dots$).

Із приведених миттєвих значень ЕРС для гармоніки $k=3$ бачимо, що ці складові є синфазні, співпадають по фазі.

$$\begin{aligned} e_{A(3)} &= E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3); \\ e_{B(3)} &= E_{3m} \sin\left(3\omega t + \psi_3 - 3\frac{2\pi}{3}\right); \\ e_{C(3)} &= E_{3m} \sin\left(3\omega t + \psi_3 + 3\frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Гармоніки, кратні трьом, створюють системи *нульової* послідовності.

Для $k=5$:

$$\begin{aligned} e_{A(5)} &= E_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5); \\ e_{B(5)} &= E_{5m} \sin\left(5\omega t + \psi_5 - 5\frac{2\pi}{3}\right); \\ e_{C(5)} &= E_{5m} \sin\left(5\omega t + \psi_5 + 5\frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Зворотнє чергування фаз: $k=6n-1$, ($n=1,2,3\dots$).

Висновок: із проведеного аналізу видно, що всі гармоніки, які можуть бути в несинусоїдних кривих ЕРС трифазного генератора, можна поділити на системи прямого, зворотного і нульового чергування фаз. Так

як умови протікання струмів цих послідовностей залежать від схеми з'єднань генератора і споживачів, то необхідно дослідити варіанти схем окремо.

3.2.7.2. З'єднання генератора і споживача зіркою

Нехай маємо симетричний трифазний генератор з симетричними ЕРС в обмотках і схемою з'єднання зіркою і цей генератор живить симетричний споживач, з'єднаний зіркою (рис. 3.56).

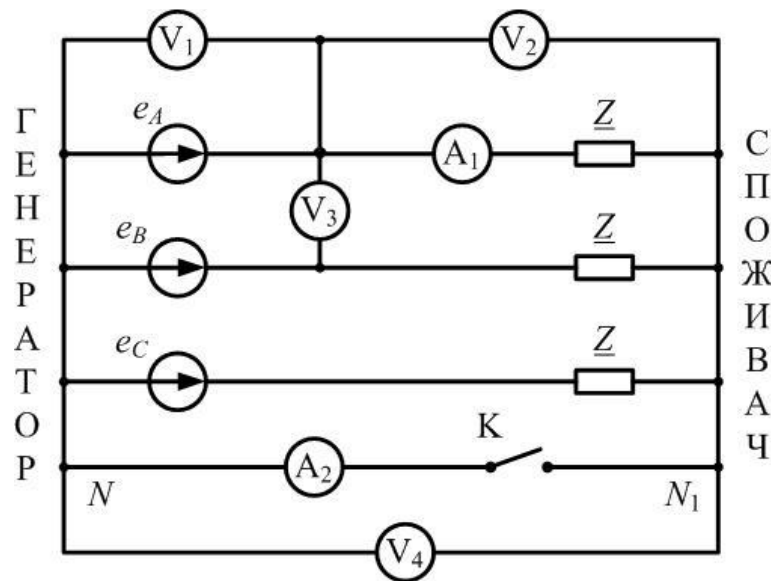


Рис. 3.56

В схемі може бути нульовий провід, або він може бути відсутній.

а) ключ К замкнений (є нейтральний провід). При замкненому ключі К є умови для протікання струмів всіх послідовностей (прямої, зворотної і нульової); при цьому струми прямої і зворотної послідовностей в нейтральному проводі в симетричному режимі відсутні, а струм нульової послідовності в нейтральному проводі буде дорівнювати потроєному значенню струмів лінійних проводів (бо ЕРС синфазні).

Нехай тригонометричний ряд несинусоїдної трифазної ЕРС містить всі можливі непарні гармоніки $k = 1, 3, 5, 7, 9, \dots$:

$$e_A = \sum_{k=1}^{\infty} E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k).$$

Приймаючи до уваги, що в фазах генератора при наявності нейтрального проводу можуть протікати струми всіх послідовностей, амперметр A_1 буде фіксувати струми всіх гармонічних складових.

$$I_{ам.1} = \sqrt{I_{(1)}^2 + I_{(3)}^2 + I_{(5)}^2 \dots}, \quad I_{ам.2} = \sqrt{I_{(3)}^2 + I_{(9)}^2 + \dots}.$$

При наявності нейтрального проводу з опором, що дорівнює $Z_n = 0$, покази вольтметрів V_1 і V_2 будуть однакові і відповідно дорівнюватимуть:

$$U_{V1} = U_{V2} = \sqrt{E_{(1)}^2 + E_{(3)}^2 + E_{(5)}^2 \dots}; \quad U_{V4} = 0 (Z_n = 0).$$

Оскільки лінійні напруги складових прямої і зворотної послідовностей в симетричній системі $U_{л} = \sqrt{3}U_{ф}$, а для нульової послідовності $U_{л} = 0$, то вольтметр V_3 буде фіксувати тільки гармоніки систем прямої і зворотної послідовностей.

$$U_{V3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{E_{(1)}^2 + E_{(5)}^2 + E_{(7)}^2 \dots}.$$

Висновок: при несинусоїдних кривих ЕРС трифазного генератора, співвідношення між лінійними і фазними напругами:

$$\frac{U_{л}}{U_{ф}} < \sqrt{3}.$$

б) Ключ розімкнений.

В цьому випадку при відсутності нейтрального проводу гармоніки струму нульової послідовності ($k=3,9\dots$) відсутні як в лінійних проводах, так і в нейтральному проводі; натомість з'являється напруга між нейтральними точками NN_1 , що зафіксує вольтметр V_4 .

$$I_{ам.2} = 0; \quad U_{V4} = \sqrt{E_{(1)}^2 + E_{(9)}^2 + \dots}.$$

Що стосується систем прямої і зворотної послідовностей, то напруга зміщення між нейтральними точками генератора і споживача дорівнює нулю.

Показ вольтметра V_1 не змінюється незалежно від наявності нейтрального проводу. Але показ вольтметра V_2 зміниться, бо в фазах споживача відсутні струми нульової послідовності, тобто гармонік кратних трьом. Таким чином для: $U_{V_2} = \sqrt{E_{(1)}^2 + E_{(5)}^2 + E_{(7)}^2 + \dots}$.

Що стосується вольтметра V_3 , то його показ буде:

$$U_{V_3} = U_{V_2} \sqrt{3}.$$

Амперметр A_1 фіксує тільки струми прямої і зворотної послідовностей.

3.2.7.3. З'єднання генератора трикутником

Нехай, як і раніше, фазна ЕРС обмотки генератора несинусоїдна і має всі можливі непарні гармоніки:

$$e_{AB} = \sum_{k=1}^{\infty} E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k), \quad k=1,3,5,7,\dots$$

Тоді, як було видно з попереднього аналізу, всі гармонічні складові ЕРС можна розділити на складові прямої, зворотної і нульової послідовностей.

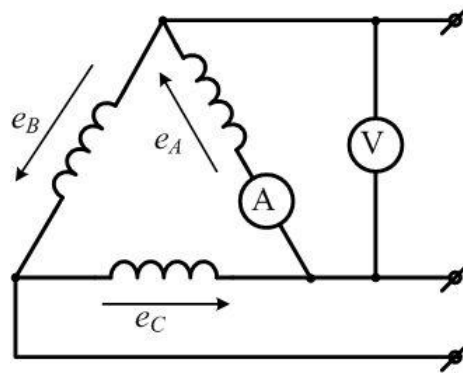


Рис. 3.57

Приймаючи до уваги, що сума миттєвих значень ЕРС трьох фаз прямої чи зворотної послідовностей в будь-який момент часу для симетричного режиму дорівнює нулю, при відсутності навантаження в обмотках генератора, з'єданого в трикутник, будуть відсутні струми цих послідовностей. Що стосується гармонік нульової послідовності, то, зважаючи, що ці ЕРС синфазні, під дією цих ЕРС в замкненому трикутнику, тобто в обмотках генератора будуть протікати струми гармонік $k=3,9,15\dots$ навіть при відсутності навантаження. Спади напруг від цих струмів будуть компенсувати ЕРС гармонік, кратних трьом, і в показі вольтметра V напруги цих гармонік фіксуватись не будуть. Тобто вольтметр V буде фіксувати тільки складові гармонік прямої і зворотної послідовностей. Якщо тепер під'єднати до генератора навантаження, то незалежно від того, як з'єднаний споживач, в лінійних струмах і в фазах споживача з'являться струми гармонік прямої і зворотної послідовностей. Струми нульової послідовності будуть відсутні. В обмотках генератора, крім струмів нульової послідовності, з'являться також струми прямої і зворотної послідовностей, обумовлені навантаженням.

Висновок: таким чином, з'єднання обмоток генератора в трикутник поліпшує форму кривої напруги на виході генератора і відповідно для споживача, бо частина гармонічних складових компенсується в самому

генераторі і це є позитивним фактором; тому часто використовується в техніці.

Розділ 4. РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

Тема 4.1. Класичний метод розрахунку перехідних процесів

4.1.1. Причини виникнення перехідних процесів

Режими, які ми вивчали раніше, були режимами, коли струми або не змінювались в часі, або були періодичними функціями часу. Це були усталені режими.

Кожному усталеному режиму електричного кола відповідали певні рівні енергії електричного і магнітного полів елементів кола. Процес переходу від одного усталеного режиму до іншого, який супроводжується зміною рівнів цих енергій, називається перехідним процесом.

Виникнення перехідного процесу може бути обумовлене вмиканням кола на джерело ЕРС чи відімкненням кола від джерела, під'єднанням до кола якоїсь нової вітки чи її відключенням, зміною схеми з'єднання елементів кола і т.д. Все це об'єднано в електротехніці одним терміном комутація.

Розрізняють два види комутації:

Комутація на замикання ключа



Комутація на розмикання ключа



Вважається, що сама операція розмикання чи замикання ключа відбувається миттєво, але перехід від одного усталеного режиму до

іншого, тобто від одних рівнів енергії до інших не може відбуватись миттєво, бо тоді похідна від енергії в часі $\frac{dW}{dt} = p$, тобто потужність, приймала б нескінченно великі значення, а це неможливо, бо в будь-якому колі завжди діють джерела енергії обмеженої потужності.

Таким чином перехід від одного усталеного режиму до іншого йде в часі. Якщо ж проміжок часу, за який нові значення струмів і напруг в електричному колі відрізняються від усталених значень несуттєво (наприклад, на 2–3%), то якщо його вважати тривалістю перехідного процесу, він може становити мілісекунди, секунди, дуже рідко хвилини.

Висновок: перехідні процеси швидкоплинні, але при цьому значення струмів і напруг перехідного процесу можуть суттєво перевищувати усталені значення цих величин. Тобто це може бути аварійний режим, небезпечний для роботи обладнання. В деяких випадках перехідний процес є звичайним режимом роботи обладнання (автоматика, імпульсна техніка)

4.1.2. Закони комутації

Існують два закони комутації.

Перший закон комутації: струм і потокозчеплення індуктивності в момент комутації зберігають ті значення, які були безпосередньо до комутації і далі змінюються поступово.

Неможливість стрибкоподібних змін струму і потокозчеплення індуктивності впливає з того, що ці величини визначають енергію

магнітного поля котушки $W_M = \frac{\psi i}{2}$.

А оскільки енергія не може змінюватися стрибкоподібно, то не можуть змінюватися стрибкоподібно і величини, які її визначають.

Другий закон комутації: напруга і заряд ємності в момент комутації зберігають ті значення, які були безпосередньо до комутації і далі змінюються поступово.

Неможливість стрибкоподібної зміни напруги і заряду ємності впливає з того, що ці величини визначають енергію електричного поля конденсатора $W_E = \frac{qu_C}{2}$.

Оскільки енергія електричного поля не може змінюватись стрибкоподібно, то, відповідно, не можуть змінюватись стрибкоподібно величини напруги і заряду конденсатора.

Введемо такі позначення:

u_- , i_- - величини напруги і струму докомутаційного режиму.

$u_-(0)$, $i_-(0)$ – значення цих величин в момент початку відліку ($t = 0$).

Надалі будемо вважати, що комутація звершується при $t = 0$, тобто момент початку відліку співпадає з моментом комутації.

$u(0)$, $i(0)$ – значення напруги і струму в скомутованому колі в момент початку відліку.

$$\left. \begin{array}{l} \psi_L(0) = \psi_{L-}(0); \\ i_L(0) = i_{L-}(0). \end{array} \right\} \quad \text{1-ий закон комутації.} \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} q_C(0) = q_{C-}(0); \\ u_C(0) = u_{C-}(0). \end{array} \right\} \quad \text{2-ий закон комутації.} \quad (4.2)$$

4.1.3. Початкові умови

Це значення струмів, напруг, похідних струмів та напруг в момент початку відліку, тобто в момент комутації.

Початкові умови поділяють на: *незалежні* початкові умови (НПУ); *залежні* початкові умови (ЗПУ).

До НПУ відносять величини, які визначаються законами комутації, тобто значення потокозчеплення і струму індуктивності та напруги і заряду ємності в момент комутації.

Ці величини у відповідності з (4.1), (4.2) визначають із розрахунку докомутаційного стану кола.

Значення решти струмів і напруг та їх похідні відносять до залежних початкових умов.

ЗПУ визначаються із рівнянь, складених для скомутованого кола на основі законів Кірхгофа чи іншим методом і в ці рівняння незалежні початкові умови повинні входити вже як задані відомі величини.

При необхідності визначення похідних струмів і напруг складаються додаткові рівняння шляхом диференціювання основних рівнянь кола (на основі рівнянь Кірхгофа).

Якщо $i_L(0)$, $u_C(0)$ мають нульові значення в момент комутації, то це схема з нульовими початковими умовами.

Якщо у вітці з індуктивністю $i_L(0) = 0$, то це рівнозначно розриву вітки при складанні рівнянь для розрахунку початкових умов. Якщо ж $u_C(0) = 0$, то це рівнозначно короткому замиканню ділянки з ємністю.

4.1.4. Перехідний, вимушений та вільний режими електричного кола

Для уточнення сутності цих понять дослідимо перехідний процес, який виникає в схемі після замикання ключа (рис. 4.1).

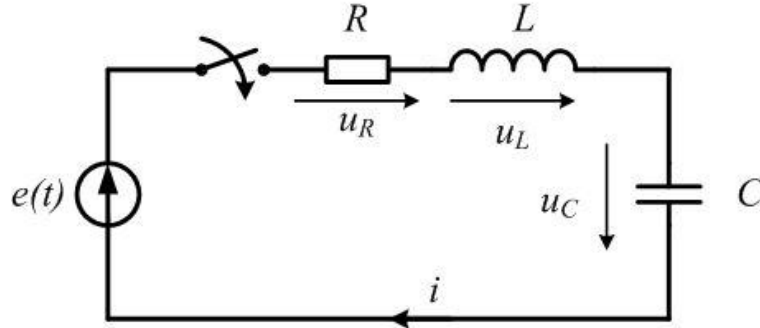


Рис. 4.1

Після замикання ключа рівняння кола має вигляд (4.3).

$$e(t) = u_R + u_L + u_C; \quad u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int idt; \quad u_R = iR.$$

$$e(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt \quad (4.3)$$

Рівняння (4.3) описує поведінку кола з моменту замикання ключа і до $t = \infty$, тобто протягом всього перехідного процесу. А струми і напруги на елементах будуть відповідно *перехідними* струмами і напругами.

При $t = \infty$ перехідний процес завершиться і в електричному колі встановиться так званий *вимушений* режим. Значення струмів і напруг в цьому режимі u_∞, i_∞ .

Якщо в схемі діє джерело постійної чи періодичної ЕРС, то вимушений режим називається *усталеним* режимом.

u_y, i_y – струм і напруга усталеного режиму.

Закони зміни струму і напруги на елементах в усталеному режимі залежать від закону зміни ЕРС кола. Тому і методи розрахунку цього режиму залежать від закону зміни ЕРС. Якщо це постійні ЕРС, то використовуємо методи розрахунку кола постійного струму. Якщо це

періодичні синусоїдні чи несинусоїдні ЕРС, то можна скористатись розрахунковими рівняннями кола в символічній формі для кожної з гармонічних складових.

$$e(t) = Ri_y + L \frac{di_y}{dt} + \frac{1}{C} \int i_y dt; \quad (4.4)$$

$$0 = R(i - i_y) + L \frac{d}{dt}(i - i_y) + \frac{1}{C} \int (i - i_y) dt . \quad (4.5)$$

$i - i_y = i_B$ – струм вільного режиму.

$$0 = Ri_B + L \frac{di_B}{dt} + \frac{1}{C} \int i_B dt . \quad (4.6)$$

Рівняння (4.6) показує, що напруги вільного режиму врівноважуються.

Індуктивність і ємність є накопичувачами енергії. Продиференціювавши рівняння (4.6), отримаємо:

$$0 = R \frac{di_B}{dt} + L \frac{d^2 i_B}{dt^2} + \frac{i_B}{C} . \quad (4.7)$$

Для (4.7) характеристичне рівняння має вигляд: $Rp + Lp^2 + \frac{1}{C} = 0$ або

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0. \quad (4.8)$$

Рівняння (4.8) – рівняння другого порядку.

Якщо це коло розгалужене, то поведінка такого кола описується системою рівнянь і для того, щоб записати характеристичне рівняння кола, треба із математичних рівнянь кола вивести диференційне для якогось одного струму чи напруги.

Приклад складання характеристичного рівняння кола за диференціальним

Розглянемо коло, зображене на рис.4.2,а. Вільний процес протікає в скомутованому колі без джерел енергії (рис. 4.2,б).

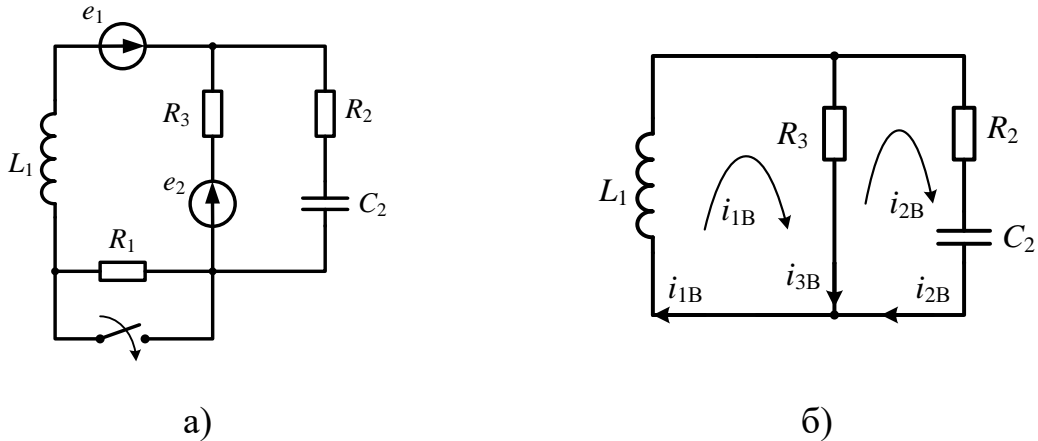


Рис. 4.2

Складемо рівняння методом контурних струмів.

$$\begin{cases} u_L + R_3(i_{1B} - i_{2B}) = 0, \\ i_{2B}(R_2 + R_3) + \frac{1}{C_2} \int i_{2B} dt - i_{1B} R_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_{1B}}{dt} + R_3(i_{1B} - i_{2B}) = 0, \\ i_{2B}(R_2 + R_3) + \frac{1}{C_2} \int i_{2B} dt - i_{1B} R_3 = 0. \end{cases}$$

Представимо вільну складову у вигляді $i_B = Ae^{pt}$. Похідна від вільної складової буде дорівнювати: $\frac{di_B}{dt} = Ape^{pt} = p \cdot i_B$, а інтеграл

$\int i_B dt = \int Ae^{pt} dt = \frac{1}{p} Ae^{pt} = \frac{i_B}{p}$. Алгебраїзуємо систему рівнянь, замінивши

похідну $\frac{d}{dt}$ на p , а інтеграл $\int dt$ на $\frac{1}{p}$:

$$\begin{cases} (pL_1 + R_3)i_{1B} - R_3i_{2B} = 0, \\ -i_{1B}R_3 + (R_2 + R_3 + \frac{1}{pC_2})i_{2B} = 0. \end{cases}$$

За методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} pL_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + \frac{1}{pC_2} \end{vmatrix}, \quad \Delta 1 = \begin{vmatrix} 0 & -R_3 \\ 0 & R_2 + R_3 + \frac{1}{pC_2} \end{vmatrix},$$

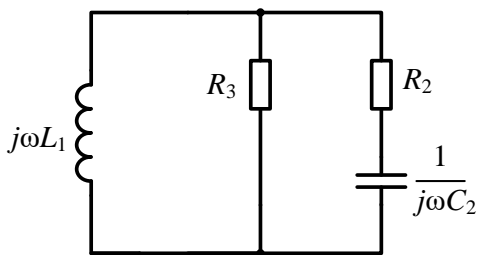
$$i_{B1} = \frac{\Delta 1}{\Delta}.$$

Для того, щоб $i_{B1} \neq 0$ треба $\Delta = 0$.

$$\begin{vmatrix} pL_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + \frac{1}{pC_2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(pL_1 + R_3)(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC_2}) - R_3^2 = 0 - \text{характеристичне рівняння.}$$

Якщо розглянути вільну схему для синусоїдного режиму, то можна скласти визначник $\Delta(j\omega)$.



$$\Delta(j\omega) = \begin{vmatrix} j\omega L_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta(p) = \Delta(j\omega = p) = \begin{vmatrix} pL_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + \frac{1}{pC_2} \end{vmatrix}.$$

Висновок: 1) для того, щоб скласти характеристичне рівняння кола, необхідно записати головний визначник за методом контурних струмів для

синусоїдного режиму $\Delta(j\omega)$ вільної схеми; 2) замінити у визначнику $j\omega$ на p і прирівняти його до нуля.

Є і інша можливість отримання характеристичного рівняння кола: через вхідний опір схеми у вільному режимі (схема без джерел).

Для складного кола струм $k - \text{ї}$ вітки дорівнює:

$$I_k = \frac{E_1}{\Delta/\Delta_1} + \frac{E_2}{\Delta/\Delta_2} + \dots + \frac{E_k}{\Delta/\Delta_k} = E_1 \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta} + E_2 \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta} + \dots + E_k \cdot \frac{\Delta_k}{\Delta},$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{k1} & R_{k2} & \dots & R_{kk} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} E_1 & R_{12} & \dots & R_{1k} \\ E_2 & R_{22} & \dots & R_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_k & R_{k2} & \dots & R_{kk} \end{vmatrix}.$$

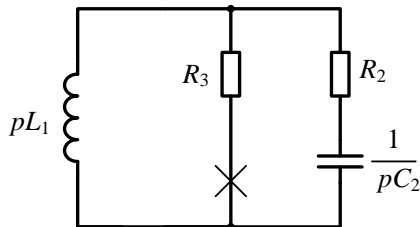
Нехай $E_1 = 0, E_2 = 0, \dots, E_k \neq 0$. Тоді струм в $k - \text{ї}$ вітці буде

$$I_k = E_k \cdot \frac{\Delta_k}{\Delta} = E_k \cdot Y_{\text{BX}} = \frac{E_k}{R_{\text{BX}}}.$$

$$\text{Для синусоїдного режиму } I_k(j\omega) = \frac{E_k(j\omega)}{\underline{Z}_{\text{BX}}(j\omega)}.$$

$$\Delta(j\omega) \rightarrow \Delta(p) = 0, \quad \underline{Z}_{\text{BX}}(p) = \Delta(p)/\Delta_k(p). \text{ Отже } \underline{Z}_{\text{BX}}(p) = 0.$$

Щоб скласти характеристичне рівняння треба розімкнути будь-яку вітку в будь-якому місці і записати вираз для вхідного опору відносно точок обриву і прирівняти його до нуля. Наприклад, для кола маємо:



$$Z_{\text{BX}}(p) = R_3 + \frac{\left(R_2 + \frac{1}{pC_2}\right) \cdot pL_1}{R_2 + pL_1 + \frac{1}{pC_2}} = 0.$$

Є і інша можливість отримання характеристичного рівняння кола: через вхідний опір схеми у вільному режимі (схема без джерел).

Комплексний опір для схеми рис. 4.1:

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}.$$

Замінивши $j\omega$ на p , отримаємо:

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}.$$

З останнього рівняння маємо:

$$R + pL + \frac{1}{pC} = 0. \quad (4.9)$$

Рівняння (4.9) відповідає рівнянню (4.8), тобто є також характеристичним.

Таким чином характеристичне рівняння будь-якої розгалуженої схеми можна отримати, записавши вхідний опір відносно будь-яких двох точок схеми без джерел енергії. Потім $j\omega$ замінити на p і прирівняти $Z(p) = 0$.

Вираз для $Z(p)$ можна скласти відносно будь-яких двох точок схеми вільного режиму. Але, якщо в схемі тільки один реактивний елемент, то зручніше для отримання коренів рівняння скласти цю формулу для $Z(p)$ відносно точок вітки, в якій знаходиться реактивний елемент.

Розв'язавши (4.9), отримаємо два корені характеристичного рівняння:

$$p_{1,2} = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (4.10)$$

В залежності від коренів рівняння (4.10) матимемо відповідне рішення для диференційного рівняння кола:

а) корені p_1, p_2 – різні, дійсні

$$i_B = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \quad (4.11)$$

б) корені однакові, дійсні $p_1 = p_2 = -\alpha$

$$i_B = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}; \quad (4.12)$$

в) корені комплексно спряжені $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_B$

$$i_B = (A_1 \cos \omega_B t + A_2 \sin \omega_B t) e^{-\delta t}. \quad (4.13)$$

В приведених рішеннях A_1, A_2 – постійні інтегрування, які визначаються із початкових умов. Знайшовши A_1, A_2 , отримаємо рівняння для струму вільного режиму. Взявши ще рішення для усталеного режиму, можемо записати рішення для перехідного процесу: $i = i_B + i_Y$. (4.14)

Формула (4.14) являє собою суму двох складових: усталеного і вільного режиму. Тому може використовуватись тільки для лінійних електричних кіл. В дійсності в електричному колі є тільки струм перехідного процесу. Подання цього струму у вигляді суми двох складових є зручним математичним прийомом, який спрощує знаходження рішення для струму перехідного процесу. Складову i_Y ми вводимо в це рішення з самого початку, хоча в дійсності ця складова з'являється при $t=\infty$, тобто після закінчення перехідного процесу. Тому вводимо ще i_B , яке згасає в часі і тим самим забезпечує поступовий перехід струму до нового усталеного значення.

Визначення незалежних і залежних початкових умов

Незалежні початкові умови (НПУ) $i_L(0), u_C(0)$ визначаються з усталеного режиму до комутації. Значення інших струмів і напруг кола та їх похідних в момент $t=0$ є залежними початковими умовами (ЗПУ), які визначаються з усталеного режиму після комутації.

$$i_B = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_k e^{p_k t}.$$

При $t=0$ вільна складова струму

$$i_B(0) = A_1 + A_2 + \dots + A_k.$$

Похідна від $i_B(t)$

$$\frac{di_B(t)}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t} + \dots + p_k A_k e^{p_k t}.$$

$$\left. \frac{di_B(t)}{dt} \right|_{t=0} = p_1 A_1 + p_2 A_2 + \dots + p_k A_k.$$

Для визначення сталих інтегрування слід визначити значення змінних величин в момент $t=0$. НПУ визначаємо з усталеного режиму до комутації (УРДК). ЗПУ та значення похідних від змінних величин в момент $t=0$ розраховуємо з усталеного режиму після комутації (УРПК).

Розглянемо на прикладі визначення НПУ і ЗПУ. Нехай перехідний процес проходить в колі на рис. 4.3.

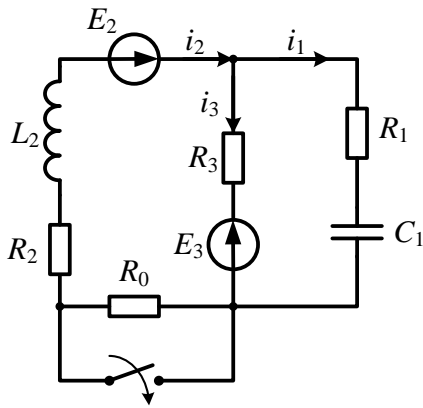


Рис. 4.3

Складаємо рівняння за законами Кірхгофа.

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 = 0, \\ u_C + i_1 R_1 + i_3 R_3 = E_3, \\ -i_3 R_3 + u_L + i_2 R_2 = E_2 - E_3. \end{cases}$$

Враховуючи, що $u_L = L_2 \frac{di_2}{dt}$, переписуємо систему для моменту $t=0$

$$\begin{cases} -i_1(0) + i_2(0) + i_3(0) = 0, \\ u_C(0) + i_1(0)R_1 + i_3(0)R_3 = E_3, \\ -i_3(0)R_3 + L_2 \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} + i_2(0)R_2 = E_2 - E_3. \end{cases}$$

Після підстановки в систему НПУ $u_C(0), i_2(0)$, визначаємо ЗПУ

$i_1(0), i_3(0), \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0}$. Для визначення похідних $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0}$, $\left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0}$ необхідно про

диференціювати перші два рівняння системи.

Знайшовши A_1, A_2 , отримаємо рівняння для струму вільного режиму. Взявши ще рішення для усталеного режиму, можемо записати рішення для перехідного процесу: $i = i_B + i_Y$. (4.14)

Формула (4.14) являє собою суму двох складових: усталеного і вільного режиму. Тому може використовуватись тільки для лінійних електричних кіл. В дійсності в електричному колі є тільки струм перехідного процесу. Подання цього струму у вигляді суми двох складових є зручним математичним прийомом, який спрощує знаходження рішення для струму перехідного процесу. Складову i_Y ми вводимо в це рішення з самого початку, хоча в дійсності ця складова з'являється при $t=\infty$, тобто після закінчення перехідного процесу. Тому вводимо ще i_B , яке згасає в часі і тим самим забезпечує поступовий перехід струму до нового усталеного значення.

4.1.5. Послідовність розрахунку перехідного процесу електричного кола класичним методом

В класичному методі рішення для перехідного струму чи напруги береться у вигляді двох складових (4.14):

$$i = i_B + i_Y, \quad u = u_B + u_Y,$$

i_Y, u_Y – складові усталеного режиму (після комутації);

i_B, u_B – складові вільного режиму.

Якщо виходити з рівнянь (4.14) для струму чи напруги перехідного процесу, можна рекомендувати таку послідовність розрахунку:

1. Розрахунок усталеного режиму кола до комутації (УРДК).

Мета цього етапу: визначення струмів індуктивностей і напруг на ємностях в докомутаційному режимі роботи коли.

Метод розрахунку залежить від закону зміни джерел енергії, що діють в електричному колі, та від схеми з'єднань елементів кола. Якщо маємо просте коло з джерелом постійної ЕРС, то на вказаному етапі можна використати закон Ома для визначення струмів. Якщо ж це просте коло з синусоїдною ЕРС, то можна використати закон Ома у комплексній формі.

Якщо ж маємо складне коло, то при розрахунку використовують відомі методи розрахунку складного кола (МКС, МВП і т.д.); це будуть методи для постійного або синусоїдного струму.

Виконавши розрахунок кола, знаходимо закони зміни i_L , u_C – струми і напруги докомутаційного стану кола.

Кінцевим етапом цього розрахунку є значення струмів індуктивностей і напруг ємностей в момент початку відліку $i_L(0)$, $u_C(0)$.

2. Розрахунок нового усталеного режиму кола після комутації (УРПК)

На цьому етапі розраховують всі величини, які визначені умовою задачі. Метод розрахунку залежить від того, складне коло це чи просте і від законів зміни джерел енергії, що діють в колі.

Якщо коло має два або більше реактивних елементи, то крім струмів і напруг знаходимо також похідні цих величин в усталеному режимі: i_Y , u_Y , $\frac{di_Y}{dt}$, $\frac{du_Y}{dt}$. Кінцевим етапом цього розрахунку є значення струмів, напруг

та їх похідних в момент початку відліку $i_Y(0)$, $u_Y(0)$, $\frac{di_Y(0)}{dt}$, $\frac{du_Y(0)}{dt}$.

Під кінець цього етапу виконується порівняння значень $i_{LY}(0) \rightarrow i_{L-}(0)$, $u_{CY}(0) \rightarrow u_{C-}(0)$.

Якщо є відмінності в цих значеннях, то повинен виникнути обов'язково перехідний процес в досліджуваній схемі і необхідно буде виконати наступні етапи по знаходженню перехідних струмів і напруг.

Якщо ж відмінностей в значеннях струму на індуктивності і напруги на ємності немає ($i_{LY}(0) = i_{L-}(0)$, $u_{CY}(0) = u_{C-}(0)$), то новий режим встановлюється без перехідного процесу, подальші розрахунки не потрібні.

3. Визначення початкових умов (РПУ).

3.1. Розрахунок незалежних початкових умов (НПУ).

Розрахунок НПУ проводиться з використанням законів комутації:

$i_L(0) = i_{L-}(0)$ – перший закон комутації;

$u_C(0) = u_{C-}(0)$ – другий закон комутації.

3.2. Розрахунок залежних початкових умов (ЗПУ).

Розрахунок всіх інших струмів і напруг та їх похідних.

Для визначення ЗПУ необхідно скласти рівняння для скомутованого кола, виходячи із законів Кірхгофа чи іншим методом для моменту початку відліку. В ці рівняння НПУ, які визначені в 3.1, вводяться вже як задані величини. Розв'язавши рівняння, знаходимо струми і напруги, що відносяться до ЗПУ.

Якщо маємо коло 2-го порядку з двома реактивними елементами, то крім струмів і напруг в момент комутації необхідно визначити ще значення похідних струмів і напруг в момент комутації. Для цього необхідно скласти додаткові рівняння, які отримують шляхом диференціювання попередніх рівнянь кола. Крім того ще використовуються додаткові співвідношення:

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L}; \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C}.$$

Розв'язавши ці рівняння, ми знайдемо всі початкові умови.

4. Розрахунок вільного режиму (РВР).

4.1. Складання характеристичного рівняння та знаходження його коренів.

Для цього можна використати відомі методи:

по диференційному рівнянню кола в перехідному процесі;
шляхом алгебраїзації системи диференційних рівнянь, яка описує поведінку розгалуженого кола;

через вхідний опір відносно будь-яких двох точок схеми для вільного режиму.

Склавши характеристичне рівняння та розв'язавши його, отримаємо рішення для коренів характеристичного рівняння.

4.2. а) Якщо досліджуване коло має один реактивний елемент, то диференційне рівняння кола буде 1-го порядку і матиме один корінь; тоді рішення для вільної складової:

$$i_B = Ae^{pt}.$$

б) якщо ж коло має 2 реактивних елементи, тоді диференційне рівняння кола для вільного режиму буде 2-го порядку і характеристичне рівняння буде мати 2 корені: різні дійсні, дійсні однакові, комплексно спряжені. Рішення для вільної складової матимуть вигляд (4.11 -4.13).

4.3. В залежності від рішень для вільних складових на останньому етапі необхідно визначити постійні інтегрування, що входять у рішення для вільних струмів і напруг. Для варіанту а) маємо:

$$A = i_B(0) = i(0) - i_Y(0).$$

Якщо в досліджуваній схемі є два реактивних елементи і відповідно в рішеннях для вільного струму і напруги є дві константи, то необхідно скласти систему рівнянь. В залежності від того, як записано рішення для

вільних складових, система рівнянь для визначення постійних інтегрування вільного режиму матиме вигляд:

Для 4.11:

$$\left. \begin{aligned} i_B(0) &= A_1 + A_2 = i(0) - i_Y(0); \\ \frac{di_B(0)}{dt} &= p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{di(0)}{dt} - \frac{di_Y(0)}{dt}. \end{aligned} \right\}$$

Для 4.12:

$$\left. \begin{aligned} i_B(0) &= A_1 = i(0) - i_Y(0); \\ \frac{di_B(0)}{dt} &= -\alpha A_1 + A_2 = \frac{di(0)}{dt} - \frac{di_Y(0)}{dt}. \end{aligned} \right\}$$

Для 4.13:

$$\left. \begin{aligned} i_B(0) &= A_1 = i(0) - i_Y(0); \\ \frac{di_B(0)}{dt} &= -\delta A_1 + \omega_B A_2 = \frac{di(0)}{dt} - \frac{di_Y(0)}{dt}. \end{aligned} \right\}$$

Визначивши із приведених рівнянь константи A_1 та A_2 , можемо записати рішення для вільних складових струмів і напруг.

5. Складання кінцевих рішень для струмів і напруг перехідного процесу.

Оскільки в класичному методі рішення для перехідного струму чи напруги визначається формулою (4.14), для отримання кінцевих рішень необхідно врахувати складові, знайдені на етапі 2 (УРПК) та складові вільного режиму, отримані на етапі 4 (РВР), і записати кінцеві рішення у вигляді суми цих складових: $i = i_Y + i_B$; $u = u_Y + u_B$.

Приклади визначення сталих інтегрування для кіл з одним та для кіл з двома реактивними елементами

*Визначення сталої інтегрування в колі з одним реактивним
елементом*

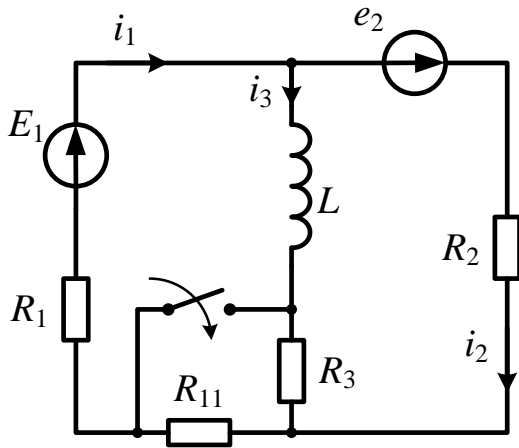


Рис.4.4,а

Розглянемо перехідний процес, що відбувається в колі, показаному на рис. 4.4,а

Вільна складова перехідного струму має вигляд $i_B = Ae^{pt}$. Для знаходження константи A слід визначити залежні початкові умови $i_1(0)$, $i_2(0)$. Для цього складають систему рівнянь за законами

Кірхгофа для після комутаційного кола (рис. 4.4,б).

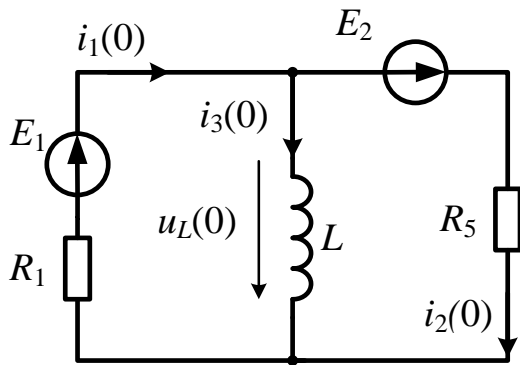


Рис.4.4,б

$$R_5 = R_2 + \frac{R_{11} \cdot R_3}{R_{11} + R_3}.$$

$$\begin{cases} i_1(0) - i_2(0) - i_3(0) = 0, \\ u_L(0) + i_1(0)R_1 = E_1, \\ i_2(0)R_5 - u_L(0) = E_2. \end{cases}$$

Розраховують значення вільної складової в момент $t = 0$

$$i_B(0) = i(0) - i_y(0).$$

Записуємо вираз вільної складової при $t=0$ $i_B(0) = Ae^{p \cdot 0} = A$ і порівнюємо його до отриманого раніше значення $i_B(0)$ і розраховуємо сталу інтегрування A

$$A = i(0) - i_y(0).$$

Визначення сталої інтегрування в колі з двома реактивними елементами

Розглянемо перехідний процес, що відбувається в колі, показаному на рис. 4.5.

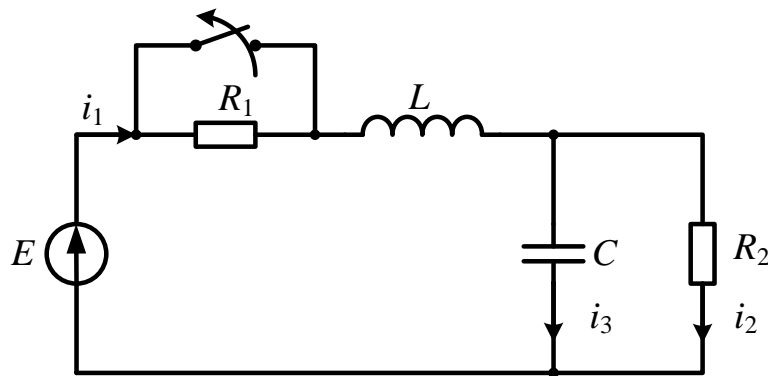


Рис. 4.5

Вільна складова перехідного струму має вигляд: 1) якщо корені різні, дійсні, від'ємні $i_B = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$; 2) якщо корені однакові, дійсні, від'ємні $i_B = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}$; 3) якщо корені комплексно-спряжені $i_B = (A_1 \cos \omega_B t + A_2 \sin \omega_B t) e^{-\delta t} = A \sin(\omega_B t + \psi) e^{-\delta t}$. Для кожного з цих випадків необхідно визначити дві сталі інтегрування. Для знаходження констант слід визначити залежні початкові умови $i_2(0)$, $i_3(0)$, $u_L(0)$. Для

цього складають систему рівнянь за законами Кірхгофа для після комутаційного кола (рис. 4.6).

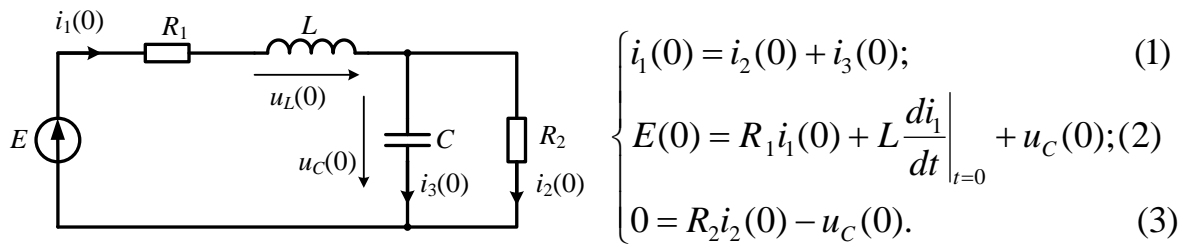


Рис. 4.6

З рівнянь (3) і (1) обчислюємо $i_2(0)$ та $i_3(0)$:

$$i_2(0) = \frac{u_C(0)}{R_2}; \quad i_3(0) = i_1(0) - i_2(0).$$

З рівняння (2) розраховуємо $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0}$:

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E(0) - u_C(0) - R_1 i_1(0)}{L}.$$

Диференціюємо рівняння (3) і знаходимо $\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0}$:

$$0 = R_2 i_2(0) - u_C(0) = R_2 i_2(0) - \frac{1}{C} \int i_3(0) dt;$$

$$0 = R_2 \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} - \frac{1}{C} i_3(0); \quad \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_3(0)}{R_2 C} = \frac{0}{R_2 C}.$$

Диференціюємо рівняння (1) і обчислюємо $\left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0}$:

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0},$$

звідки

$$\left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0}.$$

Обчислюємо значення вільних складових струмів та їх перших похідних у момент $t = 0$:

$$i_B(0) = i(0) - i_Y(0), \quad \left. \frac{di_B}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{di_Y}{dt} \right|_{t=0};$$

Складаємо систему рівнянь для визначення сталих інтегрування.

1) якщо корені різні, дійсні, від'ємні:

$$\begin{cases} i_B(0) = i(0) - i_Y(0) = A_1 + A_2; \\ \left. \frac{di_B}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{di_Y}{dt} \right|_{t=0} = A_1 p_1 + A_2 p_2. \end{cases}$$

2) якщо корені однакові, дійсні, від'ємні

$$\begin{cases} i_B(0) = i(0) - i_Y(0) = A_1; \\ \left. \frac{di_B}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{di_Y}{dt} \right|_{t=0} = -A_1 p + A_2. \end{cases}$$

3) якщо корені комплексно-спряжені записуємо вираз похідної для $i_B(t)$:

$$\frac{di_B}{dt} = \omega_0 A e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \psi_1) - \alpha A e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \psi_1).$$

В вираз для похідної підставляємо $t = 0$

$$\left. \frac{di_B}{dt} \right|_{t=0} = \omega_0 A \cos \psi_1 - \alpha A \sin \psi_1.$$

Система рівнянь для визначення сталих інтегрування буде мати вигляд

$$\begin{cases} i_B(0) = i(0) - i_Y(0) = A \sin \psi; \\ \left. \frac{di_B}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{di_Y}{dt} \right|_{t=0} = \omega_0 A \cos \psi - \alpha A \sin \psi. \end{cases}$$

4.1.6. Перехідні процеси в RL колі

4.1.6. 1. Характеристика вільного режиму кола

Нехай коло R, L вмикається на джерело ЕРС, рис. 4.7.

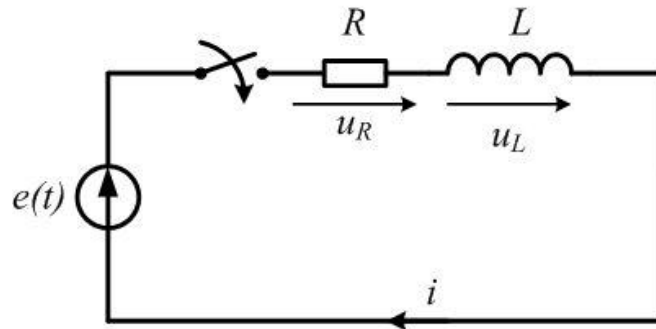


Рис. 4.7

Після замикання ключа рівняння кола має вигляд:

$$e(t) = Ri + L \frac{di}{dt}. \quad (4.15)$$

(4.15) – неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку.

Рішення для струму, визначене класичним методом, має вигляд:

$$i = i_y + i_B,$$

де i_y – усталена складова, що визначається частковим рішенням неоднорідного диференціального рівняння.

Це рішення залежить від закону зміни ЕРС, яка діє в колі.

i_B – вільна складова, є рішенням однорідного диференціального рівняння

$$0 = Ri_B + L \frac{di_B}{dt}. \quad (4.16)$$

$$i_B = Ae^{pt}, \quad (4.17)$$

p – корінь характеристичного рівняння

$$R + Lp = 0; \quad (4.18)$$

$$p = -\frac{R}{L}; \quad \frac{L}{R} = \tau - \text{постійна часу кола } R, L.$$

$$i_B = Ae^{\frac{-R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.19)$$

Постійна часу τ визначає швидкість зміни складових вільного режиму; при $t=0$ $i_B(0) = A$.

$$i_B = i_B(0)e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.20)$$

Складемо таблицю зміни значень вільної складової в часі.

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$\frac{i_B}{i_B(0)}$	1	$\frac{1}{e} = 0,369$	$\frac{1}{e^2} = 0,135$	$\frac{1}{e^3} = 0,05$	$\frac{1}{e^4} = 0,02$	$\frac{1}{e^5} = 0,007$

Із приведеної таблиці видно, що через час, що дорівнює $(4-5)\tau$, вільна складова значно згасає і не перевищує 2 % початкового значення.

Якщо ми маємо криву $i_B(t)$, то постійну часу можна визначити із цього графіка як час, за який вільна складова зменшилась в e раз.

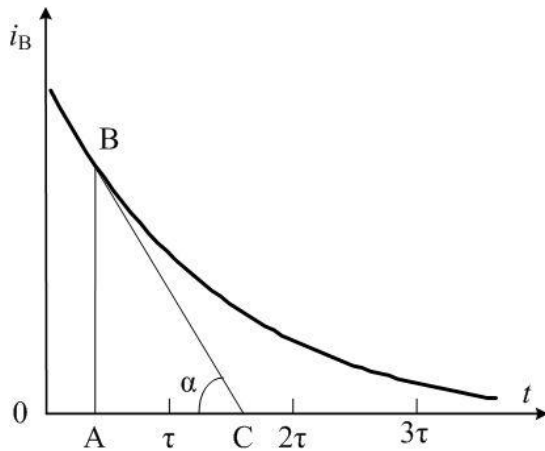


Рис. 4.8

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BA}{AC}; \quad AC = \frac{BA}{\operatorname{tg} \alpha};$$

$$AC = \frac{i_B}{\left| \frac{di_B}{dt} \right|} = \frac{Ae^{-\frac{t}{\tau}}}{\left| -\frac{1}{\tau} Ae^{-\frac{t}{\tau}} \right|} = \tau. \quad (4.21)$$

Постійна часу чисельно дорівнює піддотичній до кривої струму чи напруги вільного режиму в будь-якій точці.

4.1.6.2. Вмикання RL кола до джерела постійної ЕРС

$$e(t) = E_0 = \text{const}.$$

Якщо в колі діє джерело постійної ЕРС, то в усталеному режимі струм не буде залежати від часу; $i_Y = \text{const}$.

В такому випадку напруга на індуктивності в усталеному режимі дорівнює нулю:

$$u_{LY} = L \frac{di_Y}{dt} = 0.$$

З урахуванням цього з рівняння (4.15) маємо:

$$e(t) = Ri_Y = E_0, \quad i_Y = \frac{E_0}{R}.$$

Рішення для перехідного струму запишеться у вигляді рівняння (4.22):

$$i = i_Y + i_B = \frac{E_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}. \quad (4.22)$$

Постійна інтегрування A визначається із початкових умов. При $t = 0$ $i(0) = 0$ (бо ключ до комутації був розімкнений).

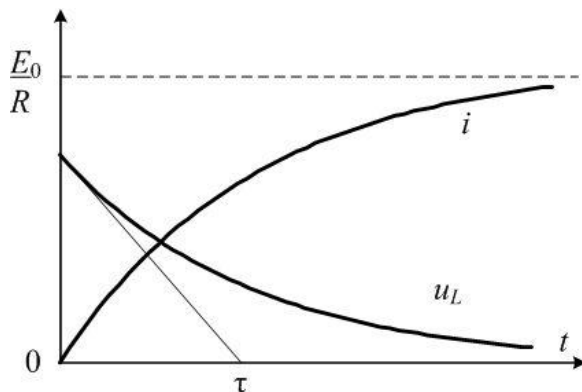


Рис. 4.9

$$0 = \frac{E_0}{R} + A; \quad A = -\frac{E_0}{R};$$

$$i = \frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}; \quad (4.23)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = E_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (4.24)$$

4.1.6.3. Вмикання RL кола на джерело синусоїдної ЕРС

$$e(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \psi).$$

Оскільки коло вмикається на синусоїдну ЕРС, то в усталеному режимі струм в колі також буде змінюватись за синусоїдним законом.

Рішення для усталеного струму має вигляд:

$$i_y = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi - \varphi); \quad (4.25)$$

$$I - \text{діюче значення струму } I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}};$$

$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$ – кут зсуву фаз між ЕРС і струмом.

Рішення для вільної складової: $i_B = A e^{\frac{-R}{L}t}$.

Повне рішення

$$i = i_B + i_y = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A e^{\frac{-R}{L}t}; \quad (4.26)$$

при $t = 0 \quad i(0) = 0$;

$$0 = \sqrt{2}I \sin(\psi - \varphi) + A, \quad A = -\sqrt{2}I \sin(\psi - \varphi);$$

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sqrt{2}I \sin(\psi - \varphi) e^{\frac{-R}{L}t}, \quad (4.27)$$

$$u_L = \sqrt{2}I \omega L \sin(\omega t + \psi - \varphi + \frac{\pi}{2}) + \sqrt{2}RI \sin(\psi - \varphi) e^{\frac{-R}{L}t}. \quad (4.28)$$

Із рівнянь (4.27), (4.28) видно, що початкові значення вільних складових струму та напруги на індуктивності, окрім параметрів, залежать від моменту комутації (від початкової фази ψ).

а) якщо $\psi - \varphi = 0$, $\sin(\psi - \varphi) = 0$, початкові значення вільних складових теж дорівнюють нулю; відповідно при вмиканні кола при такому співвідношенні перехідний процес в колі не виникає.

б) $\psi - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, $\sin(\psi - \varphi) = \pm 1$ початкові значення вільних складових найбільші при даних параметрах кола і перехідний процес буде яскраво виражений.

При комутації кола в інші моменти часу, відмінних від а) та б), перехідний процес матиме проміжне рішення.

Для варіанту б) рішення (4.27) при умові, що $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$, матиме вигляд (рис. 4.5):

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) - \sqrt{2}I e^{\frac{-R}{L}t}.$$

Як видно із рис. 4.10, в окремі моменти часу значення струму перехідного процесу може досягати подвійного значення амплітуди усталеного режиму.

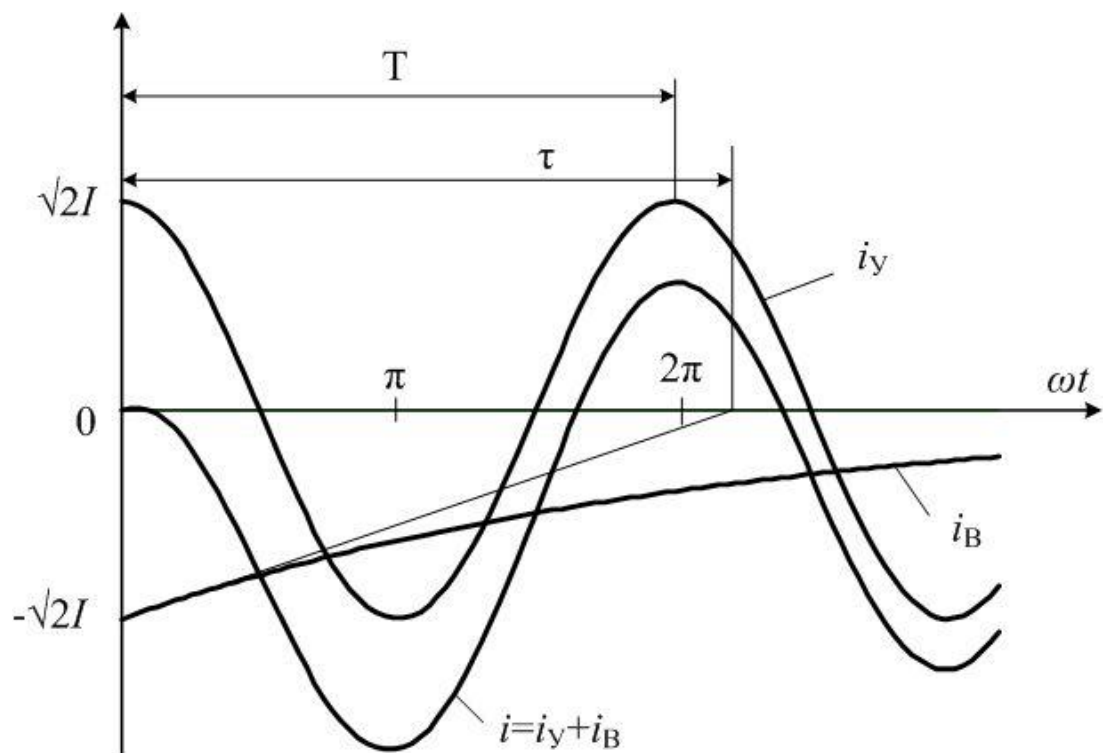


Рис. 4.10

4.1.6.4. Коротке замикання RL кола

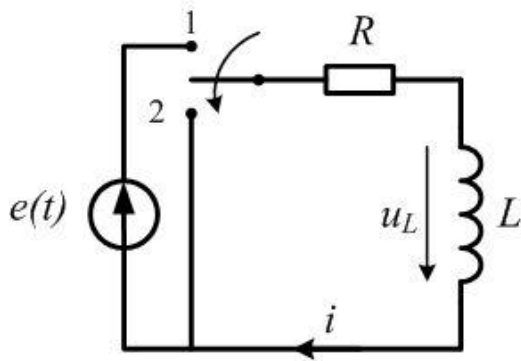


Рис. 4.11

Ключ переводиться з положення 1 у положення 2.

При переведенні ключа в положення 2 рівняння кола матиме вигляд:

$0 = Ri + L \frac{di}{dt}$ – однорідне диференціальне рівняння, його рішення

$$i = Ae^{\frac{-R}{L}t}. \quad (4.29)$$

При $t = 0$, $i = i(0)$. Тоді маємо:

$$i = i(0)e^{\frac{-R}{L}t}, \quad (4.30)$$

$$u_L = -u_R = -Ri(0)e^{\frac{-R}{L}t}. \quad (4.31)$$

Із (4.30) та (4.31) видно, що струм в колі і напруга на індуктивності поступово згасають.

Графіки струму і напруги приведені на рис. 4.12

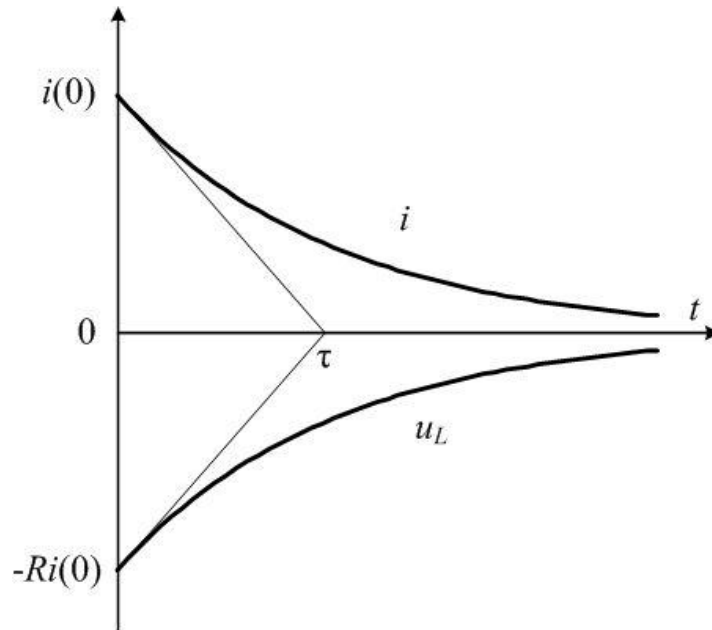


Рис. 4.12

Визначимо енергію, яка виділяється в опорі R за весь час перехідного процесу.

$$W_R = \int_0^{\infty} p_R dt,$$

$$p_R \text{ — миттєва потужність } p_R = Ri^2 = Ri(0)^2 e^{-\frac{2R}{L}t};$$

$$W_R = \int_0^{\infty} Ri^2(0) e^{-\frac{2R}{L}t} dt = Ri^2(0) \left(-\frac{L}{2R} \right) e^{-\frac{2R}{L}t} \Big|_0^{\infty} = \frac{Li^2(0)}{2}. \quad (4.32)$$

Як видно із (4.32) енергія, яка виділяється в резисторі R за весь час перехідного процесу, дорівнює енергії магнітного поля котушки в момент початку перехідного процесу. Тобто процес в цьому колі іде за рахунок енергії, яка була накопичена в індуктивності на момент початку комутації:

$$W_M(0) = \frac{Li^2(0)}{2}.$$

4.1.6.5. Особливості перехідного процесу в RL колі з реальною котушкою ($R_K \neq 0$)

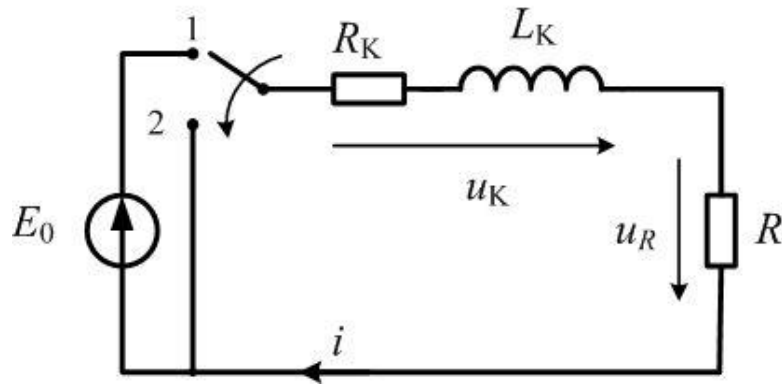


Рис. 4.13

1) Коло вмикається на джерело E_0 (перемикач в положенні 1).

Еквівалентний активний опір кола $R_E = R + R_K$;

$$\text{струм в колі } i = \frac{E_0}{R_E} - \frac{E_0}{R_E} e^{\frac{-R_E t}{L}},$$

$$\text{напруга на резисторі } u_R = Ri = \frac{E_0 R}{R_E} - \frac{E_0 R}{R_E} e^{\frac{-R_E t}{L}},$$

$$\text{напруга на котушці } u_K = R_K i + L \frac{di}{dt} = \frac{R_K}{R_E} E_0 + \frac{R}{R_E} \cdot E_0 e^{\frac{-R_E t}{L}};$$

$$u_{KY} = \frac{R_K}{R_E} E_0, \quad R_K = \frac{u_{KY}}{u_{RY}} R.$$

2) Коротке замикання (перемикач в положенні 2).

$$i = \frac{E_0}{R_E} e^{\frac{-R_E t}{L}}; \quad u_R = Ri = \frac{R E_0}{R_E} e^{\frac{-R_E t}{L}}; \quad u_K = -u_R.$$

Часові діаграми напруг перехідного процесу реальної котушки u_K і резистора u_R приведені на рис. 4.14: а) при вмиканні кола на джерело E_0 ; б) при короткому замиканні кола.

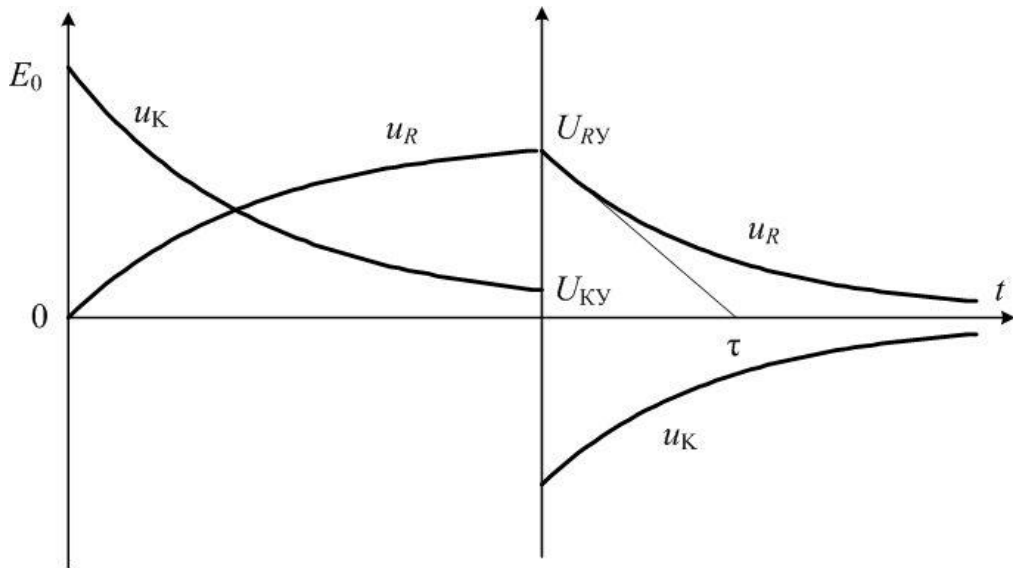


Рис. 4.14

4.1.7. Перехідні процеси в RC колі

4.1.7.1. Рішення для вільного режиму

Коло RC вмикається на джерело $e(t)$. Ключ K знаходиться в положенні 1. Після замикання ключа рівняння кола матиме вигляд

$$e(t) = Ri + u_C. \quad (4.33)$$

Приймаючи до уваги, що струм i напруга на ємності пов'язані рівнянням $i = C \frac{du_C}{dt}$, з (4.33) отримаємо:

$$e(t) = RC \frac{du_C}{dt} + u_C. \quad (4.34)$$

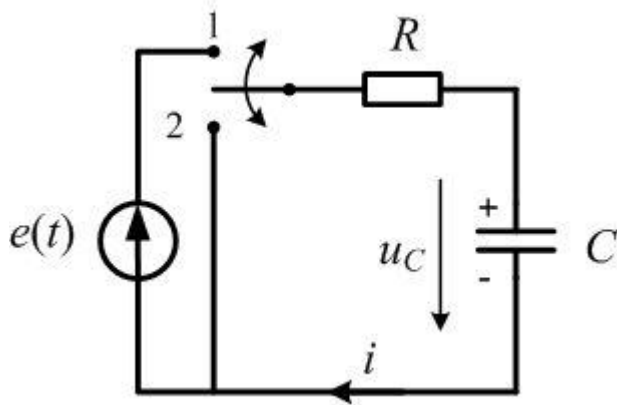


Рис. 4.15

Рівняння (4.33) є неоднорідним.

Його рішення має вигляд:

$$u_C = u_{CY} + u_{CB},$$

$$RC \frac{du_{CB}}{dt} + u_{CB} = 0. \quad (4.35)$$

Характеристичне рівняння для (4.35): $RCp + 1 = 0,$ (4.36)

де $p = -\frac{1}{RC}$; $RC = \tau$ – постійна часу кола RC . (4.37)

$$u_{CB} = Ae^{\frac{-t}{RC}} = Ae^{\frac{-t}{\tau}}. \quad (4.38)$$

Рішення для постійної інтегрування A та рішення для усталеної складової залежать від ЕРС, яка буде діяти в колі. Тому розглянемо кілька варіантів.

4.1.7.2. Вмикання RC кола на постійну ЕРС

$$e(t) = E_0 = \text{const}$$

Диференційне рівняння кола в цьому випадку має вигляд:

$$E_0 = RC \frac{du_C}{dt} + u_C. \quad (4.39)$$

Якщо в колі діє постійна ЕРС, то в усталеному режимі напруга на конденсаторі не буде залежати від часу:

$$u_{CY} = \text{const}, \quad i_Y = C \frac{du_{CY}}{dt} = 0, \quad E_0 = u_{CY}. \quad (4.40)$$

Із врахуванням (4.40) перехідна напруга на конденсаторі:

$$u_C = E_0 + A e^{\frac{-t}{RC}}. \quad (4.41)$$

Стала інтегрування A визначається із початкових умов.

Нехай при $t=0$ $u_C(0)=U_0$ (полярність початкового заряду на обкладинках конденсатора вказана на рис. 4.10).

$$U_0 = E_0 + A, \quad A = -(E_0 - U_0), \quad (4.42)$$

$$u_C = E_0 - (E_0 - U_0) e^{\frac{-t}{RC}}; \quad (4.43)$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E_0 - U_0}{R} e^{\frac{-t}{RC}}. \quad (4.44)$$

Із (4.43) і (4.44) випливають такі варіанти перехідного процесу досліджуваного кола:

1) Якщо $U_0 = 0$ тоді

$$u_C = E_0 - E_0 e^{\frac{-t}{RC}}, \quad (4.45)$$

$$i = \frac{E_0}{R} e^{\frac{-t}{RC}}. \quad (4.46)$$

Графіки $u_C(t)$, $i(t)$ показано на рис. 4.16.

2) $U_0 = E_0$ – перехідний процес в колі не виникає.

3) $U_0 \neq 0$, $U_0 < E_0$ – процес заряду конденсатора до величини $U_{CY} = E_0$, але цей процес буде йти з меншою інтенсивністю, ніж у варіанті 1.

4) $U_0 \neq 0$, $U_0 > E_0$ – частковий розряд конденсатора до величини $U_{CY} = E_0$.

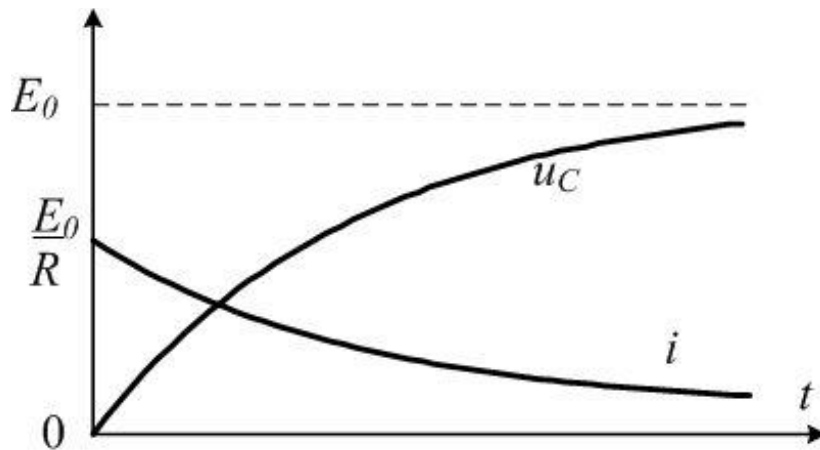


Рис. 4.16

Як видно з (4.44) струм в досліджуваному колі при розряді конденсатора буде протікати в напрямку, протилежному вказаному на схемі рис. 4.10.

Детально розглянуто варіант 1 (рис. 4.16), коли конденсатор попередньо не заряджений і тоді мають місце рівняння (4.45) та (4.46). Варіанти 3 та 4 слід більш детально розглянути самостійно.

4.1.7.3. Вмикання RC кола на джерело синусоїдної ЕРС

$$e(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \psi).$$

Тоді рівняння (4.34) матиме вигляд:

$$\sqrt{2}E \sin(\omega t + \psi) = RC \frac{du_C}{dt} + u_C. \quad (4.47)$$

При синусоїдному законі зміни ЕРС напруги на елементах кола і струм усталеного режиму будуть також гармонічними функціями; тоді рішення для струму:

$$i_y = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi - \varphi); \quad (4.48)$$

$$I = \frac{E}{Z}, \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

φ – кут зсуву фаз між ЕРС і струмом

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{R\omega C}\right).$$

$$u_{CV} = \frac{\sqrt{2}I}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.49)$$

Рішення для перехідної напруги на ємності та струму з врахуванням (4.48) та (4.49):

$$u_C = \frac{\sqrt{2}I}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + Ae^{\frac{-t}{RC}}, \quad (4.50)$$

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{A}{R}e^{\frac{-t}{RC}}. \quad (4.51)$$

Для визначення постійної інтегрування A треба скористатися початковими умовами:

При $t=0$ напруга на конденсаторі $u_C(0)=0$ – конденсатор не має початкового заряду. З (4.50) маємо:

$$0 = \frac{\sqrt{2}I}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A; \quad A = -\frac{\sqrt{2}I}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}I}{\omega C} \cos(\psi - \varphi);$$

$$u_C = -\frac{\sqrt{2}I}{\omega C} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{\sqrt{2}I}{\omega C} \cos(\psi - \varphi) e^{\frac{-t}{RC}}. \quad (4.52)$$

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{\sqrt{2}I}{R\omega C} \cos(\psi - \varphi) e^{\frac{-t}{RC}}. \quad (4.53)$$

Із (4.52) і (4.53) видно, що, крім параметрів схеми, початкові значення вільних складових залежать також і від моменту комутації.

Якщо $\psi - \varphi = 0$ або $\psi - \varphi = \pi$, $\cos(\psi - \varphi) = \pm 1$. Початкові значення вільних складових найбільші і перехідний процес буде найбільш яскраво виражений. Якщо ж $\psi - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, $\cos(\psi - \varphi) = 0$, то в цьому випадку

початкові значення дорівнюють нулю і перехідний процес в колі не виникає, виходимо на усталений режим.

При комутації кола в інші моменти часу перехідний процес в колі має проміжні значення між вказаними крайніми режимами.

Із рівняння (4.52) випливає, що при будь-якому режимі напруга на конденсаторі перехідного процесу не може бути більшою, ніж подвоєне значення амплітуди усталеного режиму.

Що стосується струму в перехідному режимі досліджуваного кола, то початкове значення вільної складової струму залежить від величини $\frac{1}{R\omega C}$.

Якщо $\frac{1}{R\omega C} \leq 1$ значення струму в перехідному процесі не може

перевищувати подвоєного значення амплітуди усталеного режиму; якщо ж

$\frac{1}{R\omega C} \gg 1$, то початкове значення вільної складової струму може суттєво

перевищувати амплітуду струму усталеного режиму. В цьому випадку з'являється так званий «надструм», але протікання цього струму короткочасне.

$$\frac{1}{R\omega C} = \frac{T}{RC2\pi}, \quad T - \text{період зміни струму } i_y,$$

$$\tau - \text{стала часу вільної складової: } \tau = RC. \quad \frac{T}{\tau 2\pi} \gg 1, \quad T > \tau.$$

Рішення (4.53) при умові $\psi - \varphi = 0$:

$$i = \sqrt{2}I \sin \omega t - \frac{\sqrt{2}I}{R\omega C} e^{\frac{-t}{RC}}. \quad (4.54)$$

Графік $i(t)$ показано на рис. 4.17.

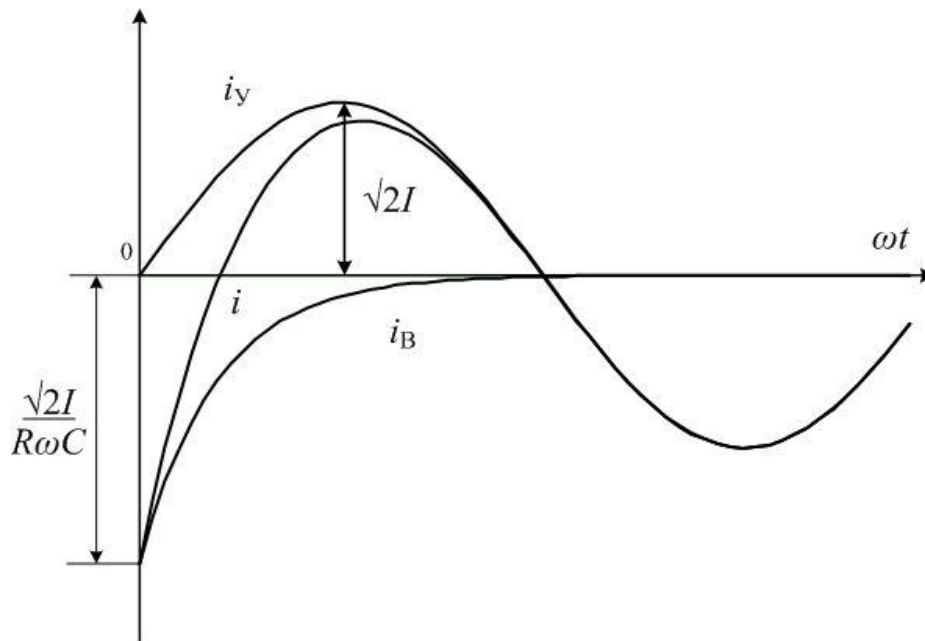


Рис. 4.17

4.1.7.3. Коротке замикання RC кола

З положення 1 ключ переводиться в положення 2 (рис. 4.15). ЕРС в колі відсутня і тому рівняння (4.34) для цього режиму матиме вигляд:

$$0 = R_C \frac{du_C}{dt} + u_C - \quad (4.55)$$

однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Його рішення:

$$u_C = u_{CB} = A e^{\frac{-t}{RC}}.$$

При $t = 0$ напруга на конденсаторі $u_C(0) = U_0$;

$$u_C = U_0 e^{\frac{-t}{RC}}, \quad (4.56)$$

$$i = -\frac{U_0}{R} e^{\frac{-t}{RC}}. \quad (4.57)$$

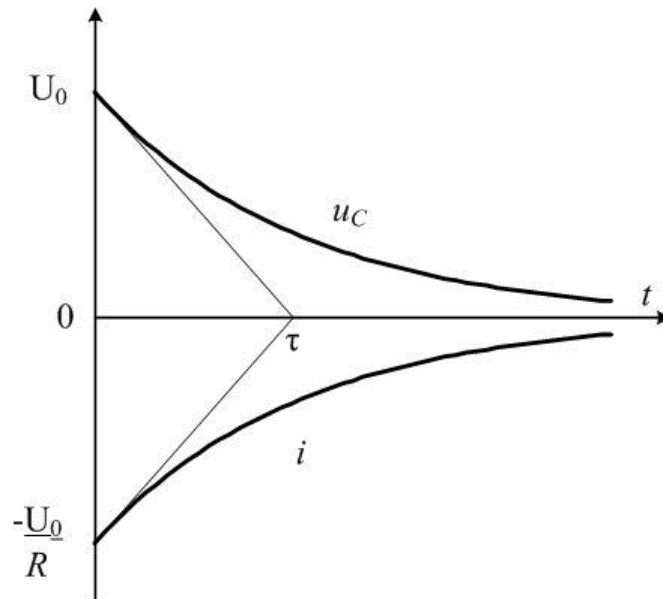


Рис. 4.18

Значення струму весь час від'ємні; це свідчить про те, що в схемі рис. 4.15 при розряді конденсатора струм буде протікати в напрямку, протилежному вказаному на схемі.

$$\tau = RC; \quad R_1 = 200 \text{ Ом}, \quad C_1 = 100 \text{ мкФ}, \quad \tau_1 = 2 \cdot 10^{-2} = 20 \text{ мс},$$

$R_2 = 10^6 \text{ Ом}, \quad C_2 = 1000 \text{ мкФ}, \quad \tau_2 = 1 \cdot 10^3 \approx 1/3 \text{ год}$ – дуже повільний розряд.

4.1.8. Перехідні процеси в електричному колі з послідовним з'єднанням *RLC*

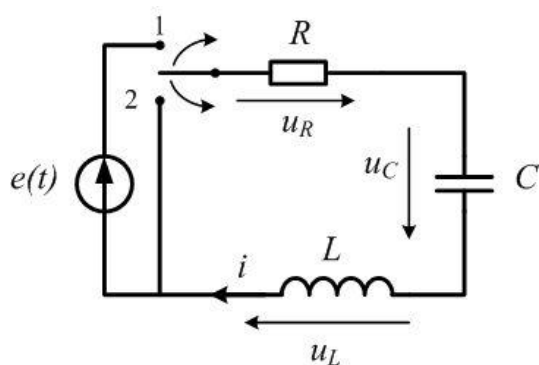


Рис. 4.14

Після вмикання кола до джерела, тобто переведення ключа в положення 1 (рис. 4.19) маємо:

$$e(t) = Ri + u_L + u_C. \quad (4.58)$$

де $u_C = u_{CУ} + u_{CВ}$.

Враховуючи, що $i = C \frac{du_C}{dt}$; $u_L = L \frac{di}{dt}$, диференціальне рівняння кола

прийме вигляд:

$$e(t) = RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C, \quad (4.59)$$

Рішення для u_{CY} залежить від закону зміни зовнішньої ЕРС $e(t)$.
Рішення для u_{CB} знаходимо при розв'язанні однорідного диференціального рівняння:

$$0 = RC \frac{du_{CB}}{dt} + LC \frac{d^2 u_{CB}}{dt^2} + u_{CB}, \quad (4.60)$$

$LCp^2 + RCp + 1 = 0$ – характеристичне рівняння для диференціального рівняння (4.60) або

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Корені характеристичного рівняння:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (4.61)$$

Якщо позначити $\frac{R}{2L} = \delta$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, то корені характеристичного рівняння можна записати так:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (4.62)$$

Корені можуть бути:

- а) $p_1 \neq p_2$ – від'ємні, дійсні, різні;
- б) $p_1 = p_2 = -\delta$ – від'ємні, дійсні, однакові;
- в) комплексно спряжені $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_B$, $\omega_B = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

В залежності від значень коренів характеристичного рівняння рішення для вільних складових записуються різними співвідношеннями. Як вже вказувалось, рішення для u_{CV} може бути складною функцією, аналіз якої може становити певні труднощі. Тому спочатку дослідимо тільки рішення для вільних складових. Ці рішення можна отримати в схемі рис. 4.14 при умові, що попередньо заряджений конденсатор розряджається на коло R, L ; ключ переводять з положення 1 в положення 2. В такому випадку в колі буде тільки вільний режим, дія зовнішньої ЕРС виключена.

4.1.8.1. Аперіодичний розряд конденсатора на RL коло (корені характеристичного рівняння від'ємні, дійсні, різні)

В цьому випадку рішення для u_C та i мають вигляд:

$$u_{CV} = u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C (p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}).$$

Нехай маємо такі початкові умови:

При $t = 0$ $i(0) = 0$, $u_C(0) = U_0$. Тоді для визначення сталих інтегрування можна скласти систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= U_0, \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

Розв'язавши рівняння (4.63), отримаємо:

$$A_1 = -\frac{p_2 U_0}{p_1 - p_2}; \quad A_2 = \frac{p_1 U_0}{p_1 - p_2}. \quad (4.64)$$

Враховуючи (4.64) та $p_1 p_2 = \frac{1}{LC}$, вирази для u_C , u_L та i матимуть вигляд

$$u_C = \frac{-U_0}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}), \quad (4.65)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{U_0}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}), \quad (4.66)$$

$$i = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (4.67)$$

По рішенням (4.65)–(4.67) побудовані графіки зміни струму в колі та напруг на елементах (рис. 4.20).

Як видно з приведених на рис. 4.20 кривих u_C та i , ці величини в перехідному процесі не змінюють свої знаки: напруга на ємності весь час додатна, а струм в колі весь час від'ємний. Тому такий процес отримав назву аперіодичного розряду конденсатора.

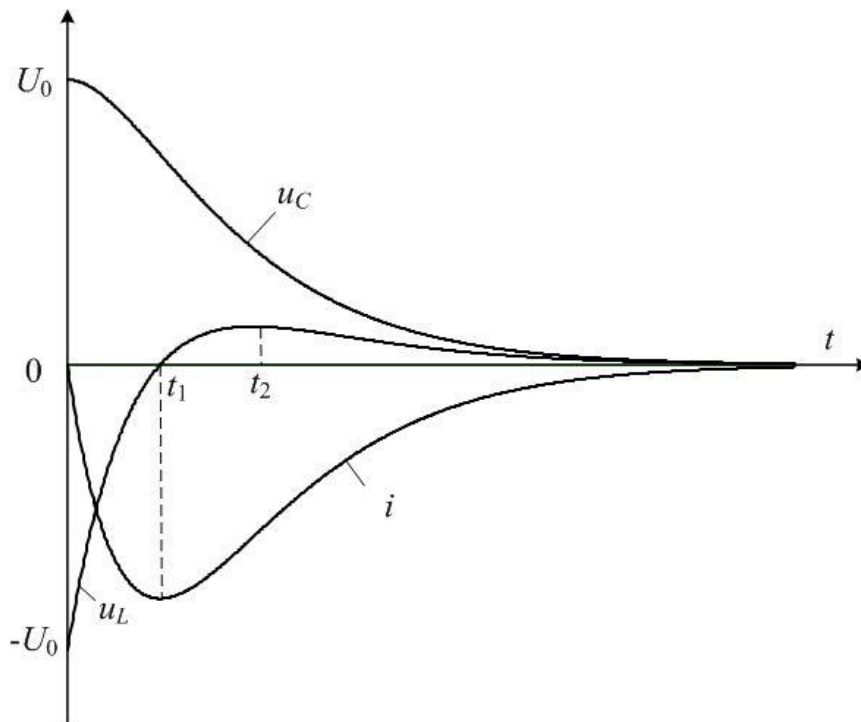


Рис. 4.20

При $t = t_1$ струм в колі приймає максимальне значення, а напруга індуктивності дорівнює нулю. В момент часу t_1 маємо:

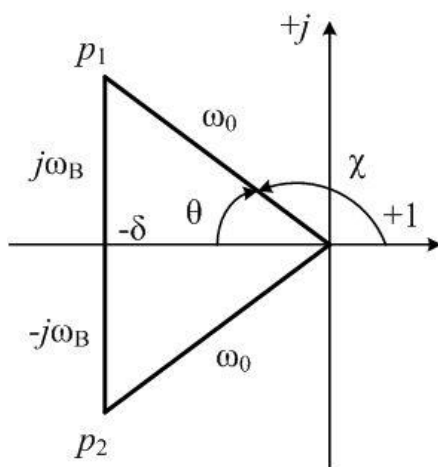
$$u_L(t_1) = 0, \quad p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t} = 0, \quad t_1 = \frac{\ln \frac{p_2}{p_1}}{p_1 - p_2}.$$

$$\text{При } t_1 = t_2; \quad \frac{du_L}{dt} = 0; \quad t_2 = 2t_1.$$

4.1.8.2. Коливальний розряд конденсатора

(корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені
($p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_B$)

Рішення (4.65)–(4.67) можуть бути використані і для аналізу цього режиму. Але так як корені комплексно-спряжені, це створює певні труднощі для аналізу, бо коефіцієнти в формулах (4.65)–(4.67) теж будуть комплексними числами. Тому, використовуючи формули Ейлера, перетворимо ці рішення в тригонометричні функції.



$$p_1 = \omega_0 e^{j\chi},$$

$$p_2 = \omega_0 e^{-j\chi},$$

$$\theta = \arctg \frac{\omega_B}{\delta}.$$

Рис. 4.21

Тоді рішення для струму можна записати так:

$$i = \frac{-U_0}{L\omega_B} e^{-\delta t} \sin \omega_B t. \quad (4.68)$$

Для u_L і u_C отримаємо:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U_0 \frac{\omega_0}{\omega_B} e^{-\delta t} \sin(\omega_B t - \theta), \quad (4.69)$$

$$u_c = -(Ri + u_L) = U_0 \frac{\omega_0}{\omega_B} \sin(\omega_B t + \theta) e^{-\delta t}. \quad (4.70)$$

По (4.68)–(4.70) будемо графіки зміни напруг та струму.

Як видно із приведених на рис. 4.22 кривих, на відрізку від 0 до π струм в колі має від'ємне значення. Це обумовлено тим, що в схемі відбувається розряд конденсатора і струм в схемі рис. 4.14 протікає в напрямку, протилежному вказаному на рисунку.

Розряд конденсатора супроводжуються зменшенням енергії електричного поля конденсатора, яка переходить в магнітне поле котушки. В момент часу t_2 напруга на конденсаторі дорівнює нулю, але, оскільки

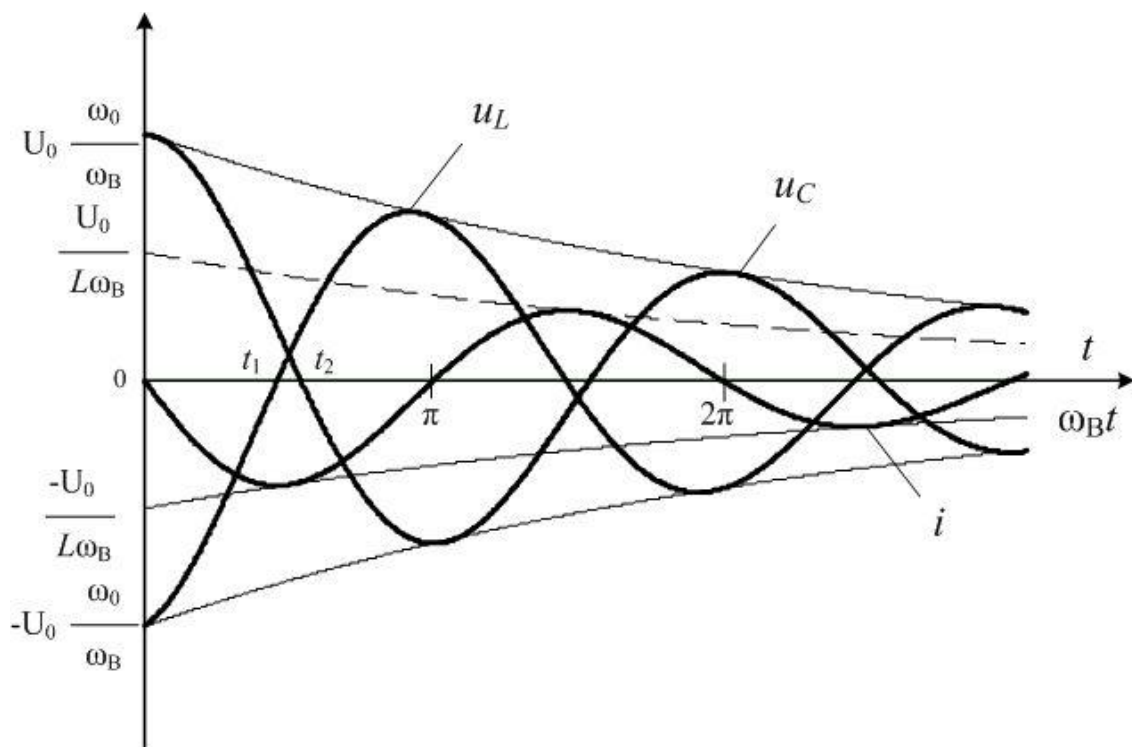


Рис. 4.22

струм в колі має той же попередній напрям, то це забезпечує перезарядку конденсатора від 0 до U_{Cmax} (при $\omega_B t = \pi$), при цьому струм в колі стає рівним нулю.

Для $\omega_B t > \pi$ починається новий процес розряду конденсатора, але із зміною полярності обкладок і тому струм в колі змінює напрям і стає додатнім (див. рис. 4.22). Приймаючи до уваги, що новий екстремум буде менший U_0 , максимальне значення струму в колі буде також меншим попереднього максимуму і цей процес буде весь час повторюватись, але екстремуми напруг на ємності і струму в колі будуть зменшуватись; процес буде згасаючим.

Як видно із рішень (4.68)–(4.70), а також із кривих, вказаних на рис. 4.22, процес розряду конденсатора в цьому випадку дає майже періодичні функції струму в колі і напруг на елементах. Тому одною із характеристик цього процесу є *період вільних коливань* T_B , який

визначається: $T_B = \frac{2\pi}{\omega_B}$.

Іншою характеристикою цього процесу є так званий *декремент коливань*: Δ – величина, яка визначається, як відношення миттєвих значень струмів, взятих через період T_B :

$$\Delta = \frac{i(t)}{i(t+T_B)}, \quad \Delta = \frac{-\frac{U_0}{L\omega_B} e^{-\delta t} \sin \omega_B t}{-\frac{U_0}{L\omega_B} e^{-\delta t} e^{-\delta T_B} \sin(\omega_B t + T_B)} = e^{\delta T_B} > 1. \quad (4.71)$$

Якщо прийняти до уваги, що $\delta = \frac{R}{2L} > 0$, то $\Delta > 1$.

Співвідношення (4.71) вказує на те, що із зростанням часу амплітуди струму і напруг на елементах будуть весь час зменшуватися, тобто процес

буде згасаючим. Розглянутий процес отримав назву *коливального розряду конденсатора*.

4.1.8.3. Граничний аперіодичний розряд конденсатора

(Корені характеристичного рівняння однакові: $p_1 = p_2 = -\delta$)

$$p_1 = p_2 = -\delta, \quad \delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_B = 0, \quad \delta = \omega_0, \quad R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Рішення струму і напруг на елементах в цьому режимі можна отримати із рішень (4.68)–(4.70), якщо в них $\omega_B \rightarrow 0$; тоді отримаємо:

$$i = \frac{-U_0}{L\omega_B} e^{-\delta t} \sin \omega_B t \Big|_{\omega_B \rightarrow 0} = -\frac{U_0}{L} e^{-\delta t} \cdot t \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t} = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \quad (4.72)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U_0 e^{-\delta t} (\delta t - 1), \quad (4.73)$$

$$u_C = -(Ri + u_L) = U_0 e^{-\delta t} (\delta t + 1). \quad (4.74)$$

Розраховані по рішенням (4.72)–(4.74) графіки для струму та напруг на елементах зображені на рис. 4.23.

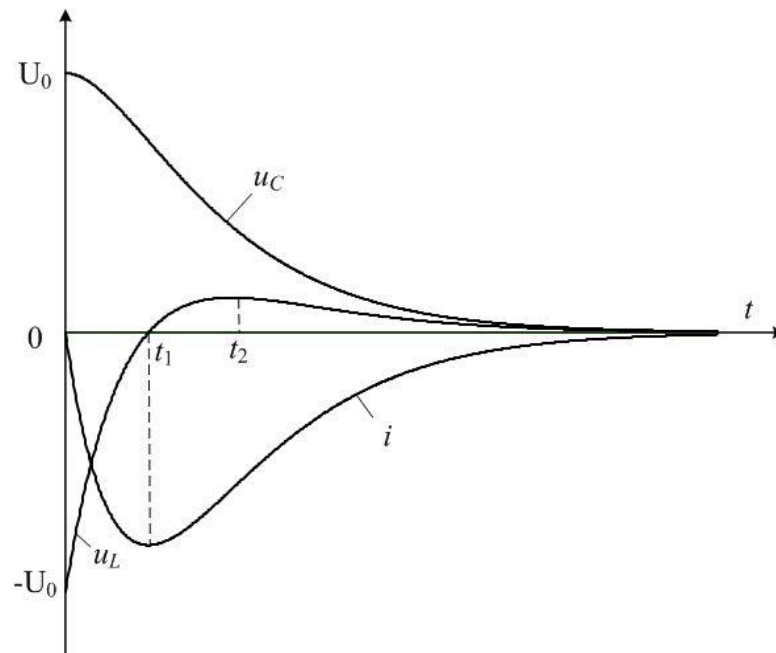


Рис. 4.23

Як видно із кривих рис. 4.23, ні струм у колі, ні напруга на ємності не змінюють свій знак і всі криві рис. 4.23 подібні кривим рис. 4.20. Тобто маємо справу із аперіодичним розрядом конденсатора, але це буде граничний випадок аперіодичного розряду, бо при подальшому зменшенні R кола матиме місце вже коливальний розряд конденсатора. Таким чином, для випадку, коли $R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ маємо аперіодичний розряд конденсатора, а при $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ – коливальний розряд конденсатора.

4.1.8.4. Вмикання RLC кола на джерело постійної ЕРС

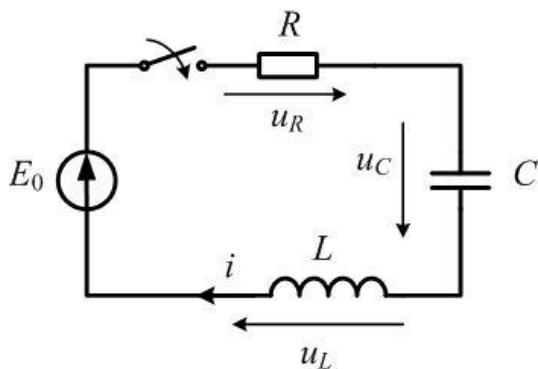


Рис. 4.24

Після замикання ключа рівняння кола має вигляд (див. рівняння 4.58, 4.59 і т.д.).

$$E_0 = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C,$$

$$u_C = u_{CУ} + u_{CВ},$$

$$u_{CУ} = \text{const} = E_0,$$

$$u_{CВ} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

В попередньому аналізі було вказано, що корені характеристичного рівняння можуть бути: а) від'ємні, дійсні, різні; б) від'ємні, дійсні, однакові; в) комплексно-спряжені.

Розглянемо варіант а). Константи A_1 та A_2 визначаємо із початкових умов: при $t = 0$ $u_C(0) = 0$, $i(0) = 0$. Маємо систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} 0 &= E_0 + A_1 + A_2; \\ 0 &= p_1 A_1 + p_2 A_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

$$A_1 = \frac{p_2 E_0}{p_1 - p_2}, \quad A_2 = \frac{-p_1 E_0}{p_1 - p_2}. \quad (4.76)$$

Якщо порівняти рішення (4.76) для досліджуваного випадку, (коло вмикається на джерело E_0) із рішеннями (4.64) попереднього параграфа (розряд конденсатора на коло R, L), то бачимо:

- 1) замість U_0 ЕРС E_0 (в рішеннях (4.76) для констант A_1, A_2);
- 2) константи в рішеннях (4.76) та (4.64) мають протилежні знаки.

З врахуванням цього можна стверджувати, що вільний режим у випадку вмикання кола RLC на джерело E_0 буде відрізнитись від попередньо досліджуваного розряду конденсатора протилежними знаками у рішеннях для вільних складових

$$u_{CB \text{ зар}} = -u_{CB \text{ розряд}}, \quad i_{\text{зар}} = -i_{\text{розряд}}, \quad u_{L \text{ зар}} = -u_{L \text{ розряд}}. \quad (4.77)$$

З врахуванням співвідношень (4.77) рішення для напруг на елементах і струму в колі у випадку вмикання кола RLC на джерело постійного ЕРС E_0 можуть бути записані наступними співвідношеннями:

$$u_C = u_{CY} + u_{CB} = E_0 + \frac{E_0}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}), \quad (4.78)$$

$$i = \frac{E_0}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}), \quad u_L = \frac{E_0}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}). \quad (4.79)$$

Для варіанту коливального процесу при вмиканні кола RLC на E_0 рішення для струму і напруг на елементах можуть бути також отримані з врахуванням співвідношень (4.77) та рішень, отриманих у попередньому параграфі.

Тоді матимемо:

$$i = \frac{E_0}{L\omega_B} e^{-\delta t} \sin \omega_B t, \quad (4.80)$$

$$u_L = -E_0 \frac{\omega_0}{\omega_B} \sin(\omega_B t - \theta) e^{-\delta t}, \quad (4.81)$$

$$u_C = E_0 - E_0 \frac{\omega_0}{\omega_B} \sin(\omega_B t + \theta) e^{-\delta t}. \quad (4.82)$$

4.1.9. Особливості розрахунку перехідного процесу при миттєвій частковій зміні індуктивності чи ємності кола

Процеси, які досліджувались раніше, базувались на дослідженні явищ, які відбуваються при вмиканні чи відключенні кола, або при зміні параметра кола, але при цьому не відбувалась миттєва зміна індуктивності чи ємності.

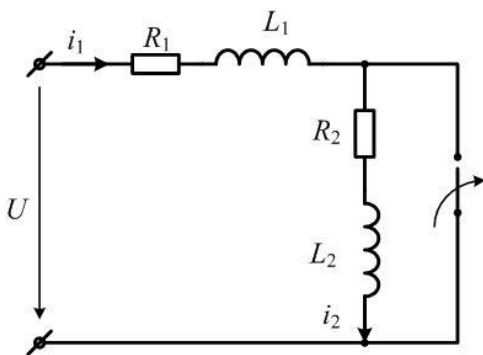


Рис. 4.25

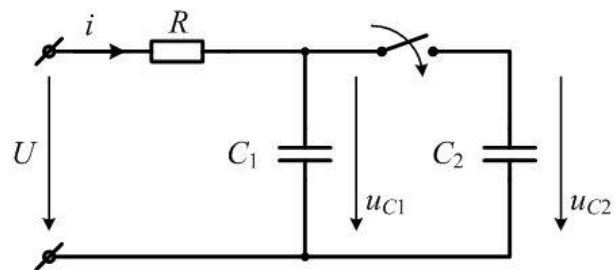


Рис. 4.26

При дослідженні вказаних процесів ми користувалися відомими законами комутації.

Але, якщо в досліджуваному колі миттєво частково змінюється індуктивність або ємність, то тоді правила комутації формулюють інакше. В таких випадках для кола, в якому частково змінюється індуктивність,

виходять із незмінності загального індуктивного потокозчеплення, а при частковій зміні ємності кола виходять із незмінності сумарного заряду ємностей.

В схемі рис. 4.25 до розмикання ключа струм $i_2=0$ (при $R_2 > 0$), $\psi_2=0$. Після розмикання ключа змінюється активний опір кола і результуюча індуктивність. Рішення для струму перехідного процесу матиме вигляд:

$$i_1 = i_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} + A e^{\frac{-(R_1+R_2)}{L_1+L_2}t} = i. \quad (4.83)$$

Стала інтегрування A в формулі (4.83) визначається із умови, що в схемі рис. 4.25 після розмикання ключа в індуктивностях L_1 і L_2 повинен протікати однаковий струм $i_1(0)=i_2(0)=i(0)$, а результуюче потокозчеплення всього кола не повинно миттєво змінитись:

$$L_1 i_{1-}(0) = (L_1 + L_2) i(0).$$

Тоді маємо:
$$i(0) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_{1-}(0) = \frac{U}{R_1} \cdot \frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

Відповідно, для визначення A маємо рівняння:

$$\frac{U}{R_1} \cdot \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{U}{R_1 + R_2} + A.$$

Кінцеве рішення для струму перехідного процесу матиме вигляд:

$$i_1 = i_2 = i = \frac{U}{R_1 + R_2} + \left(\frac{U}{R_1} \cdot \frac{L_1}{L_1 + L_2} - \frac{U}{R_1 + R_2} \right) e^{\frac{-(R_1+R_2)}{L_1+L_2}t}.$$

В схемі рис. 4.26 до замикання ключа маємо: $i_1=0$, $u_{C1}=U$, $u_{C2}=0$. Заряди на обкладинках конденсаторів відповідно дорівнюють: $q_{C1}=C_1U$, $q_{C2}=0$. Сумарний заряд обох конденсаторів: $q_{C\Sigma}=q_{C1}+q_{C2}=C_1U$.

Відразу після замикання ключа на обох конденсаторах напруга буде мати однакове значення $u_{C1}=u_{C2}=u_C$. Значення цієї напруги в момент комутації визначаємо, виходячи із незмінності сумарного заряду

конденсаторів до і після замикання ключа: $q_{C\Sigma}(0)=q_{C\Sigma}(0)$;
 $C_1U=(C_1+C_2)u_C(0)$,

$$u_C(0) = \frac{C_1}{C_1 + C_2}U.$$

Рішення для напруги на ємностях в перехідному процесі має вигляд:

$$u_C = U - \left(U - U \frac{C_1}{C_1 + C_2} \right) e^{\frac{-t}{R(C_1+C_2)}}. \quad (4.84)$$

Графік зміни $u_C(t)$ зображено на рис. 4.27.

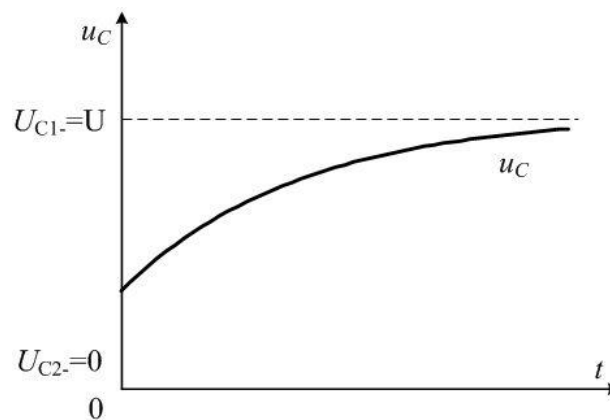


Рис. 4.27

Необхідно звернути увагу на те, що енергія магнітного поля в схемі рис. 4.25, та енергія електричного поля в схемі рис. 4.26 до і безпосередньо після комутації різні.

Тема 4.2. Операторний метод розрахунку перехідних процесів

4.2.1. Пряме перетворення Лапласа

Розглянутий раніше класичний метод розрахунку перехідних процесів давав рішення для перехідного струму чи напруги у вигляді двох складових – усталеної та вільної, що спрощувало розрахунок. Але якщо коло мало кілька реактивних елементів, то в рішенні для вільної складової

необхідно було знаходити кілька постійних інтегрування. Для знаходження цих констант необхідно було складати та розв'язувати системи рівнянь, що є недоліком класичного методу. Бажано було б мати такий метод розрахунку, в якому незалежні початкові умови входили б у вихідні рівняння, щоб відпала необхідність визначення констант інтегрування. Цей метод був запропонований в кінці 19 ст. Хевісайдом. Але математично його обґрунтував київський вчений Ващенко – Захарченко. Це дозволило використовувати операторний метод розрахунку не тільки в колах з зосередженими параметрами, а і в колах з розподіленими параметрами (перехідні процеси в довгих лініях). Основна ідея операторного методу полягає в тому, що дії над дійсними часовими функціями (оригіналами) заміняють діями над функціями комплексної змінної $p = \delta + j\eta$. Функції комплексної змінної називають зображеннями оригіналу. Перехід від оригіналу до зображення виконується так, що інтегрально-диференціальні співвідношення для оригіналів переходять в алгебраїчні рівняння для зображень. Маємо $f(t)$ – оригінал; $F(p)$ – зображення.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \ell[f(t)], \quad \ell \text{ - лапласіан;} \quad (4.85)$$

$$F(p) \stackrel{\cdot}{=} f(t), \quad \stackrel{\cdot}{=} - \text{ знак відповідності.}$$

Щоб функція $f(t)$ мала зображення, необхідно виконання таких умов:

1. Функція повинна задовольняти умовам Діріхле.
2. $f(t) \neq 0, t > 0; \quad f(t) = 0, t < 0.$
3. Функція $f(t)$ має обмежений ріст: $|f(t)| < A \cdot e^{\alpha t}, A, \alpha > 0.$

При виконанні вказаних умов функція $f(t)$ має зображення $F(p)$ для всіх $\delta > \alpha$. Необхідно підкреслити, що майже всі функції задовольняють цим умовам.

4.2.2. Деякі властивості перетворення Лапласа

Зображення найпоширеніших функцій

1. Зображення сталої величини.

$$f(t) = A \stackrel{\bullet}{=} F(p) - ?$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = \frac{-A}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}.$$

$$A \stackrel{\bullet}{=} \frac{A}{p}.$$

2. Зображення експоненти.

$$f(t) = e^{\pm \alpha t} \stackrel{\bullet}{=} F(p) - ?.$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{\pm \alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p \mp \alpha)t} dt = \frac{1}{-(p \mp \alpha)} e^{-(p \mp \alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{(p \mp \alpha)}.$$

$$e^{\pm \alpha t} \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{(p \mp \alpha)}.$$

3. Зображення синусоїди.

$$f(t) = \sin(\omega t + \psi) \stackrel{\bullet}{=} F(p) - ?.$$

Перейдемо від функції часу до $j\omega$: $\sin(\omega t + \psi) \rightarrow e^{j(\omega t + \psi)} = e^{j\omega t} e^{\psi}$.

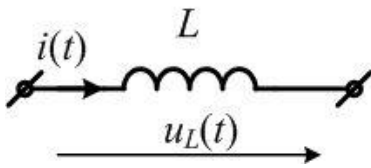
$$e^{j\omega t} e^{\psi} \stackrel{\bullet}{=} \frac{e^{\psi}}{p - j\omega}. \quad U_m \sin(\omega t + \psi) \stackrel{\bullet}{=} U_m \frac{e^{\psi}}{p - j\omega} = \frac{U_m}{p - j\omega}.$$

4. Зображення похідної.

$$f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p), \quad \frac{df}{dt} \stackrel{\cdot}{=} ?$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(0).$$

$$\frac{df}{dt} \stackrel{\cdot}{=} pF(p) - f(0).$$



$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt},$$

Нехай $i(t)$ має зображення: $i(t) \stackrel{\cdot}{=} I(p)$.

$$\text{Тоді: } U_L(p) = LpI(p) - Li(0), \quad (4.86)$$

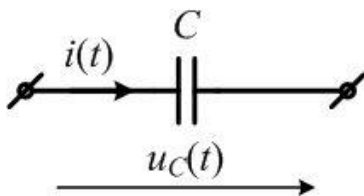
де $i(0)$ – значення струму при $t=0$.

5. Зображення інтегралу.

$$f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p), \quad \int_0^t f(t)dt \stackrel{\cdot}{=} ?$$

$$\int_0^t f(t)dt \stackrel{\cdot}{=} \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t)dt \right] e^{-pt} dt = \frac{F(p)}{p}.$$

$$\int_0^t f(t)dt \stackrel{\cdot}{=} \frac{F(p)}{p}$$



$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t)dt,$$

$$u_C(0) = 0.$$

$$\text{Якщо } i(t) \stackrel{\cdot}{=} I(p), \quad U_C(p) = \frac{1}{C} \cdot \frac{I(p)}{p} = \frac{I(p)}{Cp}. \quad (4.87)$$

Якщо $u_C(0) \neq 0$, $u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$.

$$U_C(p) = \frac{u_C(0)}{p} + \frac{I(p)}{Cp}. \quad (4.88)$$

4.2.3. Закон Ома в операторній формі. Операторні схеми

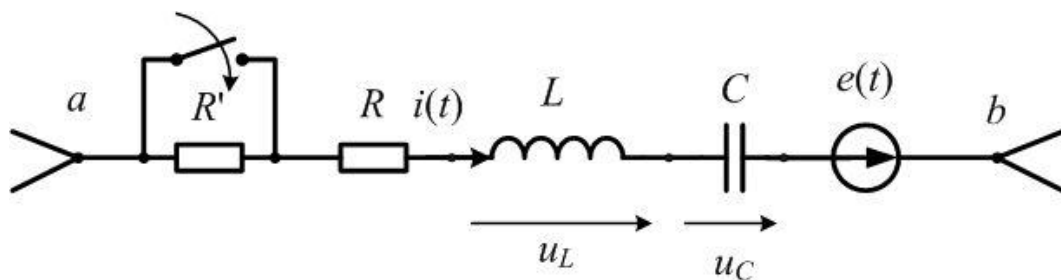


Рис. 4.28

Після замикання ключа різниця потенціалів точок a і b вітки визначається співвідношенням (4.89):

$$u_{ab}(t) = Ri + u_L + u_C - e(t). \quad (4.89)$$

Нехай струм $i(t)$ має зображення $I(p)$: $i(t) \stackrel{\cdot}{=} I(p)$; відповідно $e(t) \stackrel{\cdot}{=} E(p)$. Тоді зображення напруг на індуктивності і ємності будуть такими:

$$u_L(t) \stackrel{\cdot}{=} U_L(p) = Lp \cdot I(p) - Li(0),$$

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \stackrel{\cdot}{=} U_C(p) = \frac{u_C(0)}{p} + \frac{I(p)}{Cp}.$$

З врахуванням цих співвідношень зображення для U_{ab} матиме вигляд рівняння (4.90):

$$U_{ab}(p) = R \cdot I(p) + Lp \cdot I(p) - L \cdot i(0) + \frac{u_C(0)}{p} + \frac{I(p)}{Cp} - E(p). \quad (4.90)$$

Рівнянню (4.90) для зображень відповідає така операторна розрахункова схема рис. 4.29:

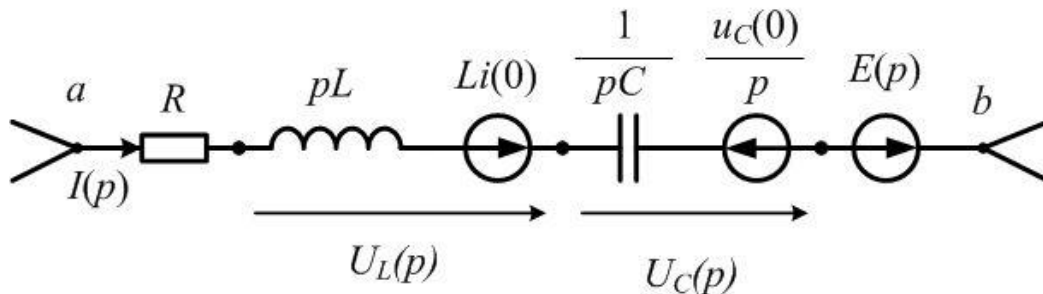


Рис. 4.29

В операторній схемі, яка приводиться для післякомутаційного стану, ключа не повинно бути.

В операторній розрахунковій схемі рис. 4.29 з'явилися додаткові елементи $Li(0)$ та $u_C(0)/p$ – це так звані внутрішні операторні ЕРС. Їхня поява обумовлена початковим струмом індуктивності та початковою напругою на ємності в момент комутації.

Додатній напрямок внутрішньої операторної ЕРС індуктивності $Li(0)$ співпадає з додатнім напрямком зображення струму. А додатній напрямок внутрішньої ЕРС ємності протилежний додатному напрямку зображення струму вітки $I(p)$.

Розв'язавши рівняння (4.90) відносно зображення струму $I(p)$, отримаємо:

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + Li(0) - u_C(0)/p + E(p)}{R + Lp + 1/Cp}. \quad (4.91)$$

$R + Lp + 1/Cp = Z(p)$ – операторний опір вітки,

$R + j\omega L + 1/j\omega C = Z(j\omega)$ – комплексний опір вітки.

Порівнюючи останні співвідношення, бачимо, що комплексний опір вітки $\underline{Z}(j\omega)$ є одним із варіантів операторного опору $Z(p)$.

Тобто: $Z(p) \rightarrow Z(j\omega)$, якщо $p \rightarrow j\omega$;

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + Li(0) - u_C(0) / p + E(p)}{Z(p)}. \quad (4.92)$$

Рівняння (4.91, 4.92) є математичним записом закону Ома в операторній формі при ненульових початкових умовах.

Якщо $e(t) = 0$ та маємо нульові початкові умови $i(0) = 0$, $u_C(0) = 0$, тоді отримаємо:

$$I(p) = U_{ab}(p) / Z(p).$$

Останній вираз подібний закону Ома для кола постійного струму, чи закону Ома для кола синусоїдного струму в символічній формі.

4.2.4. Закони Кірхгофа в операторній формі

Перший закон Кірхгофа для миттєвих значень стверджує: алгебраїчна сума миттєвих значень струмів віток, з'єднаних у вузол, дорівнює нулю.

$$\sum i_k = 0, \text{ де } i_k \text{ – миттєвий струм.}$$

Нехай $i_k(t) \overset{\bullet}{=} \underset{\bullet}{=} I_k(p)$.

Тоді маємо:

$$\sum I_k(p) = 0. \quad (4.93)$$

Алгебраїчна сума зображень струмів віток, з'єднаних у вузол, дорівнює нулю.

Другий закон Кірхгофа в будь-якому замкненому контурі алгебраїчна сума миттєвих напруг дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС віток цього контуру.

$$\sum u_k = \sum e_k, \quad (4.94)$$

$u_k = R_k \cdot i_k + u_{Lk} + u_{Ck}$ – напруга k -тої вітки.

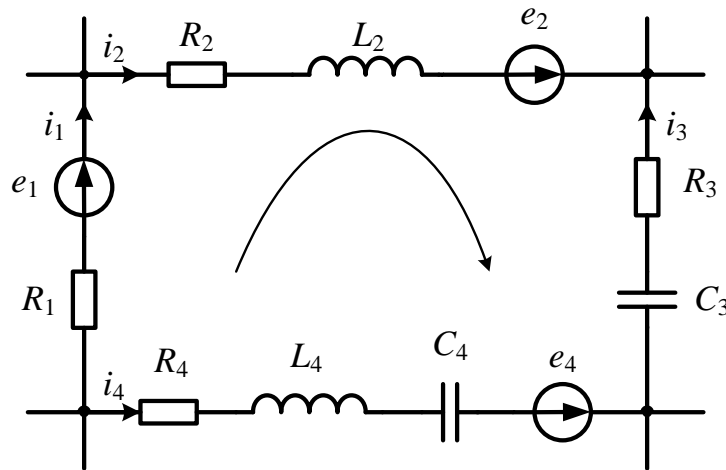


Рис.4.30

Для замкнутого контура (рис. 4.30) за II законом Кірхгофа запишемо рівняння для миттєвих значень

$$i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - i_3 R_3 - \frac{1}{C_3} \int i_3 dt - \frac{1}{C_4} \int i_4 dt - L_4 \frac{di_4}{dt} - i_4 R_4 + i_1 R_1 = e_1 + e_2 - e_4.$$

Застосуємо перетворення Лапласа

$$\begin{aligned} I_2(p)R_2 + pL_2 I_2(p) + L_2 i_2(0) - I_3(p)R_3 - \frac{I_3(p)}{pC_3} - \frac{u_{C3}(0)}{p} - \\ - \frac{I_4(p)}{pC_4} - \frac{u_{C4}(0)}{p} - pL_4 I_4(p) - L_4 i_4(0) - I_4(p)R_4 + I_1(p)R_1 = \\ = E_1(p) + E_2(p) - E_4(p). \end{aligned}$$

$$I_1(p)R_1 + I_2(p)(R_2 + pL_2) - I_3(p) \left(R_3 + \frac{1}{pC_3} \right) - I_4(p) \left(R_4 + pL_4 + \frac{1}{pC_4} \right) =$$

$$= E_1(p) + E_2(p) - E_4(p) + L_2 i_2(0) + \frac{u_{C3}(0)}{p} + L_4 i_4(0) - \frac{u_{C4}(0)}{p}. \quad (4.95)$$

$$\sum I_k(p) \cdot Z_k(p) = \sum E_k(p) + \sum L_k \cdot i_k(0) - \sum u_{Ck}(p) / p.$$

$$\sum I_k(p) \cdot Z_k(p) = \sum E_{k3OB}(p) + \sum E_{kBВH}(p).$$

$$\sum I_k(p) \cdot Z_k(p) = \sum E_{kEKВ}(p).$$

Другий закон Кірхгофа в операторній формі: алгебраїчна сума добутків зображень струмів на операторні опори віток для будь-якого замкненого контуру дорівнює алгебраїчній сумі зображень всіх ЕРС (зовнішніх і внутрішніх), що входять в даний контур.

За нульових початкових умов $\sum E_{kEKВ}(p) = \sum E_{k3OB}(p)$.

Рівнянню (4.90) для зображень відповідає така операторна розрахункова схема рис. 4.31.

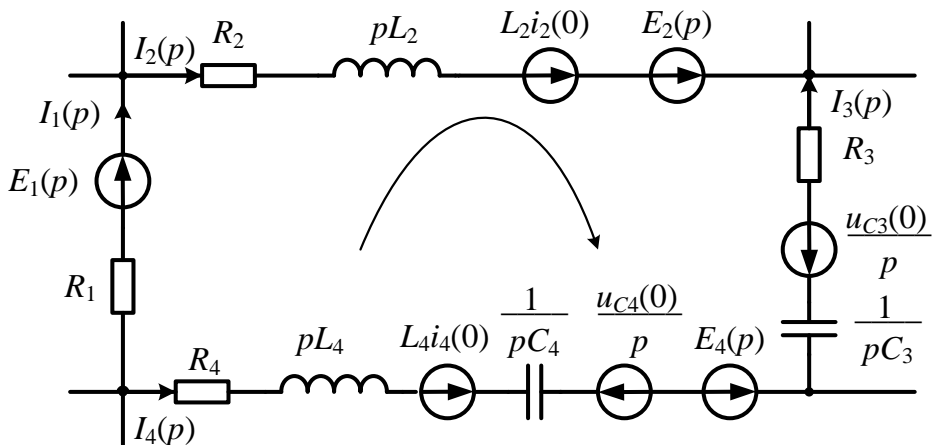


Рис. 4.31

4.2.5. Перехід від зображень струмів до оригіналів. Формула розкладання

Існує декілька способів знаходження функції часу за відомими операторними зображеннями.

1. Оригінал функції можна знайти, використовуючи таблиці. Найбільш повні таблиці, що містять сотні функцій часу і відповідних їм операторних зображень, наводяться в довідниках з операційного числення.

2. Для знаходження оригіналу можна використати обернене перетворення Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p)e^{pt} dp.$$

Інтеграл обчислюється у комплексній площині вздовж прямої, паралельної осі уявних величин. Безпосереднє використання оберненого перетворення Лапласа пов'язано з істотними математичними труднощами і на практиці для електротехнічних розрахунків використовується не часто.

3. Для знаходження оригіналу функції, зображення якої отримане у вигляді раціонального дроби, скористуємося теоремою розкладання. Нехай маємо зображення у вигляді

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad m < n.$$

Якщо виконуються такі умови:

- $m < n$ (відповідає реальним електричним колам);
- поліноми $F_1(p)$ та $F_2(p)$ не мають однакових коренів, тобто дріб є нескорочуваним;
- коефіцієнти a, b є дійсними числами;
- поліном $F_2(p)$ не має кратних коренів,

то вираз зображення можна розкласти на прості дроби:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p-p_k}.$$

p_k - корені рівняння $F_2(p) = 0$.

Помножимо ліву і праву частини на $(p - p_k)$ і прийнемо $p = p_k$

$$A_k = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \cdot (p - p_k) \Big|_{p=p_k} = F_1(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p - p_k}{F_2(p)} = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}.$$

Таким чином

$$I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p-p_k} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot (p - p_k).$$

Оскільки $\frac{A_k}{p-p_k} = \dot{A}_k e^{p_k t}$, то для шуканої величини $i(t)$ маємо

$$i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k t}.$$

$$i(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)} e^{p_3 t} + \dots \quad (4.96)$$

Ця рівність і називається **формулою теореми розкладання**.

Приклад визначення оригіналу за допомогою таблиць

Розглянемо вмикання RC кола до джерела постійної напруги (рис. 4.32).

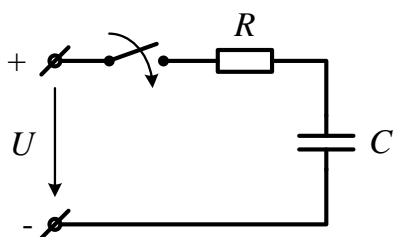
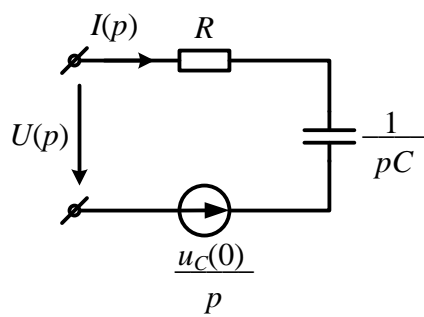


Рис. 4.32

До комутації $u_{C-} = U_0$. В момент комутації $t = 0$ $u_C(-0) = u_C(0) = U_0$. Складаємо операторну схему після комутації (рис. 4.33).



$$U(p) = \frac{U}{p} \quad \text{- зображення постійної величини, операторний опір кола}$$

$$Z(p) = R + \frac{1}{pC}.$$

Рис. 4.33

За законом Ома в операторній формі

$$I(p) = \frac{U(p) - \frac{u_c(0)}{p}}{Z} = \frac{\frac{U}{p} - \frac{U_0}{p}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{(U - U_0)C}{RCp + 1} = \frac{U - U_0}{R} \cdot \frac{1}{p + 1/RC}.$$

$$I(p) = \frac{U - U_0}{R} \cdot \frac{1}{p + 1/RC} \stackrel{\bullet}{=} \frac{U - U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

По таблицям маємо $e^{-\alpha t} \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p + \alpha}$. Тоді $i(t) = \frac{U - U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$.

Знайдемо напругу на конденсаторі. $u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int i dt$.

$$I(p) = \frac{(U - U_0)C}{RCp + 1}, \quad U_C(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}.$$

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} \cdot \frac{(U - U_0)C}{RCp + 1} + \frac{U_0}{p} = \frac{U - U_0}{RCp(p + 1/RC)} + \frac{U_0}{p}.$$

Враховуючи, що $\frac{1}{p(p + \alpha)} \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}$, отримаємо $u_C(t)$

$$U_C(p) \stackrel{\bullet}{=} \frac{(U - U_0)}{RC} \cdot \frac{1}{1/RC} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) + U_0 = (U - U_0) \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) + U_0 =$$

$$= U - Ue^{-\frac{t}{RC}} - U_0 + U_0e^{-\frac{t}{RC}} + U_0 = U - (U - U_0)e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Недоліком цього способу є необхідність знаходження зображення в таблицях.

Порядок визначення оригіналу за формулою розкладання

1. Представити зображення шуканої величини у вигляді дробу

$$I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

2. Прирівняти знаменник до нуля і визначити корені рівняння

$$F_2(p) = 0 \Rightarrow p_1, p_2, \dots, p_n.$$

3. Знайти значення чисельника для всіх коренів

$$F_1(p_1), F_1(p_2), \dots, F_1(p_n).$$

4. Записати вираз похідної від знаменника і знайти її значення для всіх коренів

$$F_2'(p), \quad F_2'(p_1), F_2'(p_2), \dots, F_2'(p_n).$$

5. Визначити оригінал за формулою розкладання (4.96)

$$i(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)} e^{p_3 t} + \dots$$

Приклад використання формули розкладання

Розглянемо включення кола до джерела постійної напруги (рис. 4.34,а).

Операторна схема кола після комутації показана на рис. 4.34,б.

За законами комутації $i(-0) = 0$, $u_C(-0) = U_0$.

Записуємо операторне зображення струму за законом Ома:

$$I(p) = \frac{\frac{U}{p} - \frac{U_0}{p}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{(U - U_0)/p}{(RCp + p^2LC + 1)/pC} = \frac{(U - U_0) \cdot C}{RCp + p^2LC + 1} =$$

$$= \frac{(U - U_0)C}{LC \left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} \right)} = \frac{U - U_0}{L \left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} \right)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

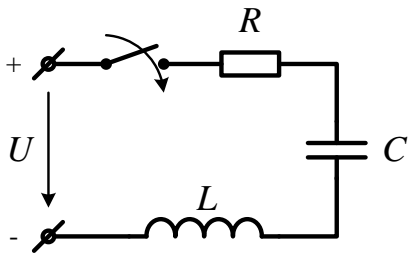


Рис. 4.34,а

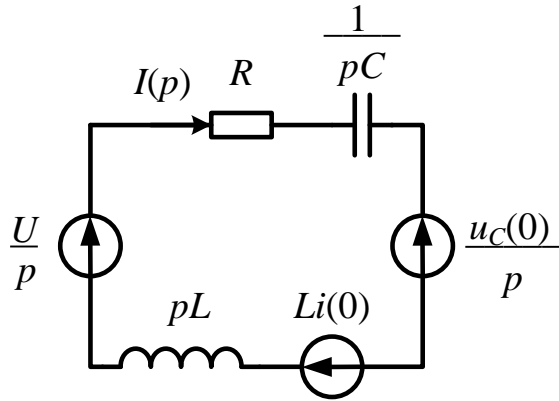


Рис. 4.34,б

Записуємо операторне зображення струму за законом Ома

$$I(p) = \frac{\frac{U}{p} - \frac{U_0}{p}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{(U - U_0)/p}{(RCp + p^2LC + 1)/pC} = \frac{(U - U_0) \cdot C}{RCp + p^2LC + 1} =$$

$$= \frac{(U - U_0)C}{LC \left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} \right)} = \frac{U - U_0}{L \left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} \right)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

$$F_1(p) = \frac{U - U_0}{L}, \quad F_2(p) = p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}.$$

Нехай $R = 50$ Ом, $L = 0,1$ Гн, $C = 200$ мкФ. Знаходимо корені рівняння

$$F_2(p) = p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0.$$

$$D = \sqrt{\left(\frac{R}{2L} \right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sqrt{250^2 - 50000} = 111,8.$$

$$\text{Корені рівняння } p_1 = -\frac{R}{2L} + D = -138,2, \quad p_2 = -\frac{R}{2L} - D = -361,8.$$

$$F_1(p_1) = F_1(p_2) = \frac{U - U_0}{L}.$$

$$F_2'(p) = 2p + \frac{R}{L}, \quad F_2'(p_1) = 2p_1 + \frac{R}{L} = 2 \cdot (-138,2) + 500 = 223,6,$$

$$F_2'(p_2) = 2p_2 + \frac{R}{L} = 2 \cdot (-361,8) + 500 = -223,6.$$

Остаточно за формулою розкладання отримаємо струм

$$i(t) = \frac{U - U_0}{L} \left[\frac{e^{-138,2t}}{223,6} - \frac{e^{-361,8t}}{223,6} \right].$$

Визначаючи оригінали функцій за формулою розкладання, слід брати до уваги такі зауваження.

1. Якщо у колі після комутації діє постійна ЕРС E , то операторні зображення струмів і напруг мають вигляд

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)},$$

а відповідні оригінали розраховуються за формулою

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (4.97)$$

Доданок $\frac{F_1(0)}{F_2(0)}$ визначає вимушене значення шуканої величини від дії постійної ЕРС E .

2. Якщо у колі після комутації діє синусоїдна ЕРС $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$, яка представлена у вигляді $\underline{E}(p) = \frac{\underline{E}_m}{p - j\omega}$, то операторне зображення

шуканих величин описується формулою

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{(p - j\omega)F_2(p)} = \frac{F_1(p)}{F_3(p)}.$$

Переходячи від зображення до оригіналу функції, слід пам'ятати, що задана ЕРС $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$ є уявною частиною комплексного оригіналу, тому від правої частини формули розкладання також треба брати уявну частину:

$$f(t) = \text{Im} \left[\sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_3'(p_k)} e^{p_k t} \right]. \quad (4.98)$$

Доданок, який відповідає кореню $p = j\omega$, дає вимушену складову шуканого струму (напруги).

3. Якщо поліном $F_2(p)$ має комплексно-спряжені корені $p_{1,2} = -a \pm jb$, то для таких коренів доданки $\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t}$, $\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t}$ також є комплексно-спряженими числами. У такому випадку не має потреби виконувати розрахунки для обох коренів. Достатньо зробити обчислення для одного з коренів, наприклад p_1 , і взяти подвоєну дійсну частину отриманого виразу:

$$f(t) = 2 \text{Re} \left[\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} \right]. \quad (4.99)$$

4. Якщо поліном $F_2(p)$ має корінь p_k кратністю $m=2$ (тобто $p_1=p_2$), то оригінал струму знаходиться за спрощеною формулою:

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{p_k^2} + e^{p_k t} \left[\frac{d}{dp} \left(\frac{F_1(p)}{p} \right) \Big|_{p=p_k} + \frac{F_1(p_k)}{p_k} \cdot t \right]. \quad (4.100)$$

4.2.6. Порядок розрахунку перехідного процесу операторним методом

1. Вибрати додатні напрямки струмів у вітках.
2. Визначити незалежні початкові умови, а потім і розрахункові ЕРС $Li(0)$ і $u_C(0)/p$.
3. Накреслити операторну схему.
4. По операторній схемі найбільш доцільним методом знайти зображення шуканих функцій. Спрощуючи зображення, звести їх до стандартного вигляду: $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$.
5. Прирівняти $F_2(p)$ до нуля і знайти корені: p_1, p_2, p_k, p_n .
6. Знайти похідну $F_2'(p)$.
7. Розрахувати $F_1(p_k)$ і $F_2'(p_k)$ для усіх значень коренів.
8. Записати вирази для оригіналів шуканих величин за формулою теореми розкладання (4.96)

$$f(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} + \dots + \frac{F_1(p_n)}{F_2'(p_n)} e^{p_n t}.$$

Якщо поліном $F_2(p)$ має комплексно-спряжені корені $p_1 = -\delta + j\omega_v$, $p_2 = -\delta - j\omega_v$, то для таких коренів доданки в формулі (4.106) також є комплексно-спряженими числами. У такому випадку, для знаходження оригіналу функції, слід зробити обчислення для одного з коренів, наприклад p_1 , і взяти подвоєну дійсну частину отриманого виразу (4.99):

$$f(t) = 2\operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} \right].$$

Приклад використання операторного методу.

Вмикання RLC кола на постійну напругу

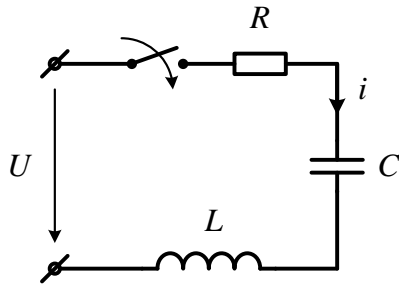


Рис. 4.35,а

1. Визначаємо незалежні початкові

$$\text{умови: } i_- = 0, \quad u_{C-} = 0.$$

Згідно із законами комутації у момент комутації $t = 0$:

$$i(-0) = i(0) = 0, \quad u_C(-0) = u_C(0).$$

2. Визначаємо усталені значення струму і напруги на конденсаторі:

$$i_V(0) = 0, \quad u_{CV}(0) = U.$$

3. Визначаємо вільні складові $u_{CB}(0) = u_C(0) - u_{CV}(0) = 0 - U = -U$,

$$i_B(0) = i(0) - i_V(0) = 0, .$$

4. Складаємо операторну схему (рис. 4.35,а) і записуємо операторний струм за законом Ома:

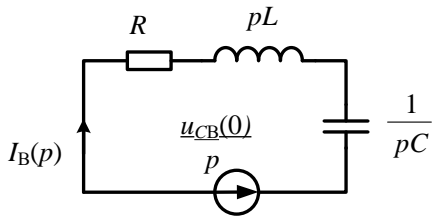


Рис. 4.35,б

$$\begin{aligned} I_B(p) &= \frac{U/p}{R + pL + 1/pC} = \frac{U \cdot pC}{p(RCp + p^2LC + 1)} = \\ &= \frac{U \cdot C}{LC \left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} \right)} = \frac{U}{L \left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} \right)} = \\ &= \frac{F_1(p)}{F_2(p)}. \end{aligned}$$

Для знаходження оригіналів застосовуємо формулу розкладання.

$$F_2(p) = 0, \quad p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}, \quad p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

$$F_2'(p) = 2p + \frac{R}{L}, \quad F_2'(p_1) = 2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}, \quad F_2'(p_2) = -2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

$$p_1 - p_2 = 2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}, \quad F'_2(p_1) = (p_1 - p_2), \quad F'_2(p_2) = -(p_1 - p_2).$$

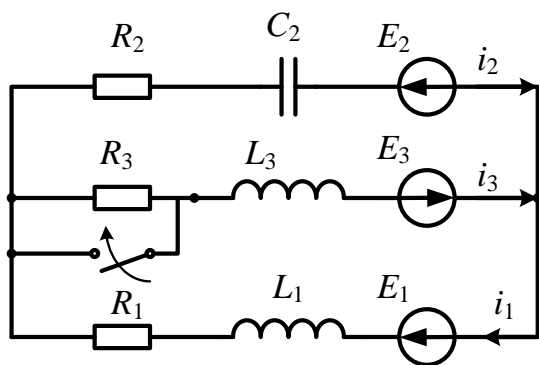
Остаточно отримаємо:

$$i_B(t) = \frac{U}{L(p_1 - p_2)} [e^{p_1 t} - e^{p_2 t}],$$

$$u_L(t) = \frac{U}{(p_1 - p_2)} [p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}].$$

$$u_C(t) = u_{CB}(t) + u_{CY}(t) = U + \frac{U}{(p_1 - p_2)} [p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}].$$

Приклад розрахунку перехідних процесів операторним методом
в складному електричному колі



$$E = const$$

1. Розраховуємо усталений режим кола до комутації і визначаємо струми i_1, i_3 і напругу u_C .

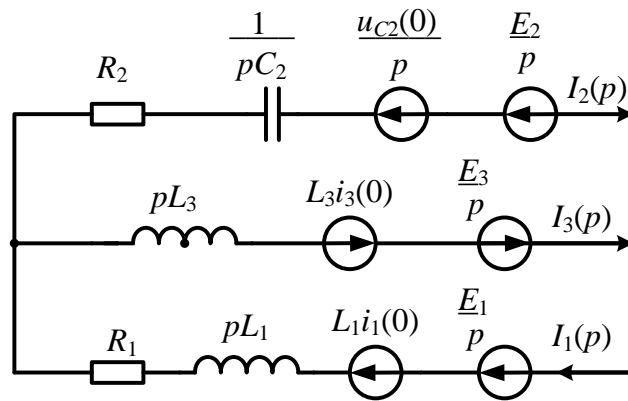
$$i_{1-} = i_{3-} = \frac{E_1 + E_3}{R_1 + R_3}.$$

У відповідності зі законами комутації:

$$i_1(0) = i_1(-0), \quad i_3(0) = i_3(-0),$$

$$u_C(0) = i_3(0)R_3 - E_3 - E_2.$$

2. Складаємо операторну схему кола після комутації.



3. Знаходимо операторні струми за методом контурних струмів або вузлових потенціалів.

$$\begin{cases} I_{K1}(p)[R_1 + pL_1 + pL_3] - I_{K2}(p) \cdot pL_3 = \frac{E_1}{p} + \frac{E_3}{p} + L_1 i_1(0) + L_3 i_3(0), \\ -I_{K1}(p) \cdot pL_3 + I_{K2}(p) \left[pL_3 + R_2 + \frac{1}{pC_2} \right] = -\frac{u_{C2}(0)}{p} - \frac{E_2}{p} - \frac{E_3}{p} - L_3 i_3(0). \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь знаходимо $I_{K1}(p)$, $I_{K2}(p)$ і представляємо у вигляді дробу

$$I_1(p) = I_{K1}(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \quad I_3(p) = I_{K2}(p) = \frac{F_3(p)}{F_4(p)},$$

$$I_2(p) = I_{K1}(p) - I_{K2}(p) = \frac{F_5(p)}{F_6(p)}.$$

4. За формулою розкладання визначаємо оригінали струмів

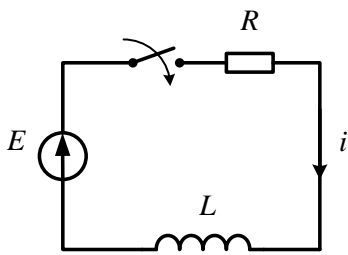
$$i_1(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k t}, \quad i_2(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_3(p_k)}{F_4'(p_k)} \cdot e^{p_k t}, \quad i_3(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_5(p_k)}{F_6'(p_k)} \cdot e^{p_k t}.$$

Перевірку робимо за початковими та кінцевими умовами для оригіналів.

Переваги метода: простота та відсутність необхідності визначати сталі інтегрування.

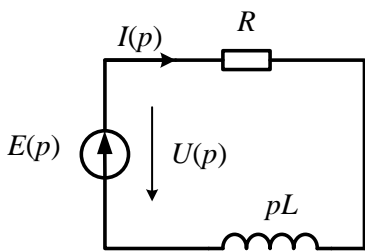
Недоліки: перевірка можлива тільки на кінцевому етапі. На проміжних етапах розрахунку перевірка неможлива.

Включення RL –кола на синусоїдну напругу



1. Розраховуємо усталений режим кола до комутації і визначаємо струм i :

$$i(-0) = 0, \quad i(0) = i(-0) = 0.$$



2. Розраховуємо усталений режим кола після комутації

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \underset{\bullet}{=} U_m \frac{\omega \cos \psi + p \sin \psi}{p^2 + \omega^2}.$$

Синусоїдна функція часу $U_m \sin(\omega t + \psi)$ має комплексне зображення $U_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}$.

Зображення по Лапласу $\underline{U}_m e^{j\omega t} \underset{\bullet}{=} \frac{\underline{U}_m}{p - j\omega}$.

$$U_m \sin(\omega t + \psi) = \text{Im} [U_m e^{j(\omega t + \psi)}] = \text{Im} [\underline{U}_m].$$

Зображення по Лапласу синусоїдної функції $U(p) = \frac{\underline{U}_m}{p - j\omega}$.

За законом Ома визначимо комплексне операторне зображення струму

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U(p)}{(p - j\omega)(R + pL)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

3. Визначення оригіналу за формулою розкладання

$$i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k t},$$

n - порядок диференційного рівняння, p_k - корінь характеристичного рівняння $F_2(p) = 0$.

$$(p - j\omega)(R + pL) = 0, \quad p_1 = j\omega, \quad p_2 = -\frac{R}{L}.$$

$$F_1(p_1) = F_1(p_2) = U_m e^{j\psi}.$$

$$F_2'(p) = R + pL + L(p - j\omega) = R + 2pL - j\omega L.$$

$$F_2'(p_1) = R + 2j\omega L - j\omega L = R + j\omega L = Ze^{j\varphi},$$

$$\text{де } Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}.$$

$$F_2'(p_2) = R + 2\left(\frac{-R}{L}\right)L - j\omega L = R - 2R - j\omega L = -R - j\omega L = -Ze^{j\varphi}.$$

Комплексний оригінал струму у відповідності з теоремою розкладання

$$\dot{I}(t) = \frac{U_m e^{j\psi}}{Ze^{j\varphi}} e^{j\omega t} + \frac{U_m e^{j\psi}}{-Ze^{j\varphi}} e^{-\frac{R}{L}t} = I_m e^{j(\omega t + \psi - \varphi)} - I_m e^{j(\psi - \varphi)} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Дійсний оригінал струму є уявною частиною комплексного оригіналу

$$i(t) = \operatorname{Im} \left[\dot{I}(t) \right] = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

$$1. \ t = 0 \quad i(0) = I_m \sin(\psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) = 0;$$

$$2. \ t = \infty \quad i(\infty) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) = i_y.$$

Висновок: якщо в колі діє синусоїдна ЕРС, то треба перейти до комплексного зображення цієї ЕРС. Провести розрахунки комплексних оригіналів, а далі перейти до дійсних оригіналів.

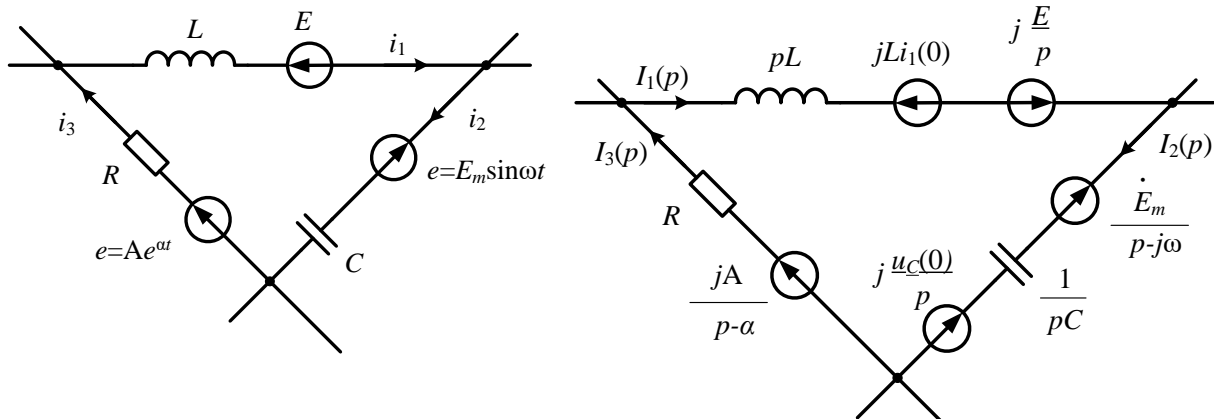
4.2.7. Особливості розрахунку перехідних процесів за наявності синусоїдних, постійних та експоненціальних ЕРС

В цьому випадку користуються комплексними зображеннями цих ЕРС, але зображення постійних, експоненціальних та внутрішніх ЕРС слід помножити на « j ».

$E = const$	$E(p) = j \frac{E}{p}$
$E = e^{\alpha t}$	$E(p) = \frac{j}{p - \alpha}$
pL	$E_{BH}(p) = jLi(0)$
$1/pC$	$E_{BH}(p) = j \frac{u_C(0)}{p}$

$$E = \lim_{\omega \rightarrow 0} E_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} E_m e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t} = jE_m = jE.$$

Операторна схема

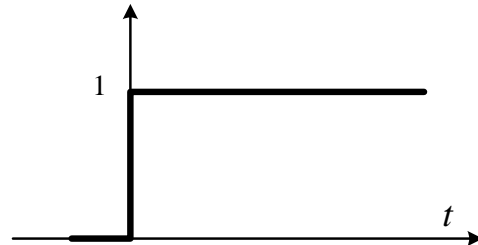


Тема 4.3. Розрахунок перехідного процесу при дії ЕРС довільної форми

4.3.1. Перехідні та імпульсні характеристики електричного кола

Перехідною характеристикою називається реакція кола на одиничну функцію. Одинична функція може бути представлена рівнянням:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$



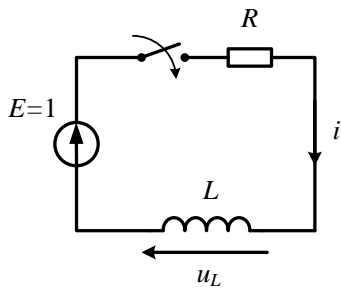
Якщо одинична функція це ЕРС, а реакція відшукується у вигляді напруги на елементі кола, то перехідна характеристика є безрозмірною і позначається $y(t)$. $y(t)$ - перехідна характеристика або перехідна функція напруги.

Якщо одинична функція це ЕРС, а реакція відшукується у вигляді струму вітки, то перехідна характеристика має розмірність провідності і позначається $g(t)$. $g(t)$ - перехідна провідність.

Похідні від перехідних характеристик називаються імпульсними характеристиками. $y'(t)$, $g'(t)$ - імпульсні характеристики.

Для визначення перехідних характеристик необхідно розрахувати перехідний процес в електричному колі з нульовими початковими умовами $(i_L(0), u_C(0))$ при вмиканні такого кола на одиничну ЕРС

Перехідні та імпульсні характеристики RL кола



Перехідні струм і напруга

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{R}{L}t}.$$

При $E = 1$ В $g(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$ - перехідна провідність,

$y(t) = e^{-\frac{R}{L}t}$ - перехідна функція напруги,

$g'(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$ імпульсна провідність.

Графіки перехідних провідності, функції напруги і імпульсної провідності наведені на рис. 4.36.

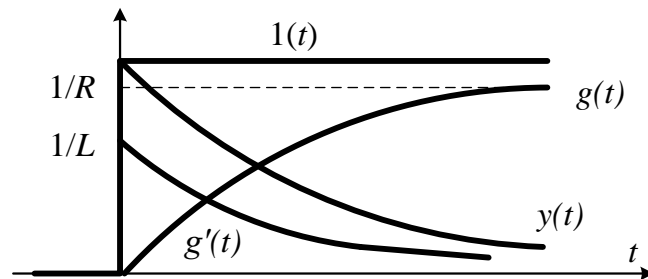
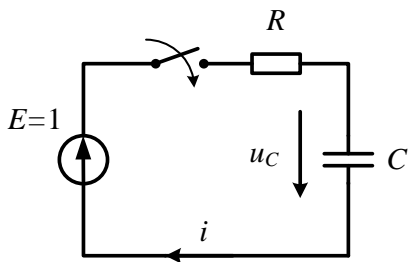


Рис. 4.36

Перехідні та імпульсні характеристики RC кола



Перехідні струм і напруга

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}},$$

$$u_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

При $E = 1 \text{ В}$ $g(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$ - перехідна провідність,

$y(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ - перехідна функція напруги,

$y'(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$ імпульсна характеристика напруги.

Графіки перехідних провідності, функції напруги і імпульсної провідності наведені на рис. 4.37.

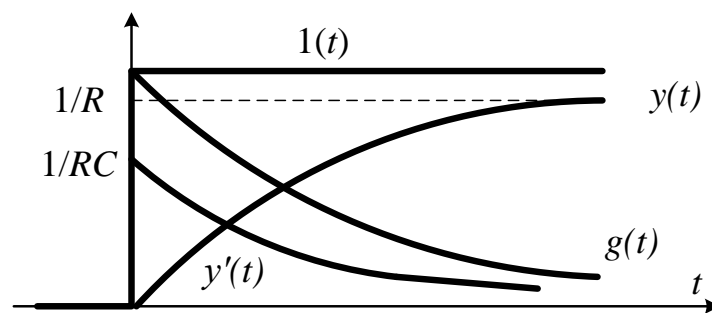


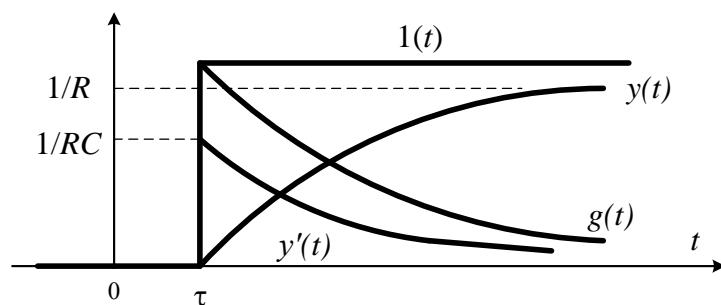
Рис. 4.37

Якщо коло вмикається не в момент $t = 0$, а із запізненням на τ , то і реакція запізнюється на цей проміжок часу. Наприклад, для RC кола перехідні та імпульсні характеристики мають наступний вигляд:

$$g(t - \tau) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t - \tau}{RC}},$$

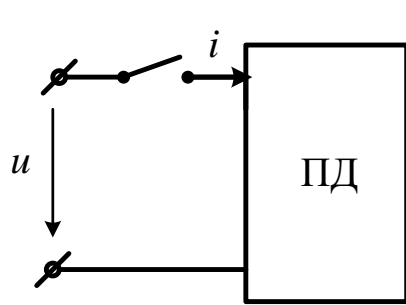
$$y(t - \tau) = \left(1 - e^{-\frac{t - \tau}{RC}}\right),$$

$$y'(t - \tau) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t - \tau}{RC}}.$$



4.3.2. Інтеграл Дюамеля

Розглянемо пасивний двополюсник, який вмикається до джерела з несинусоїдною неперіодичною ЕРС (рис. 4.38,а).



$$i_L(-0), \quad u_C(-0).$$

Рис. 4.38,а

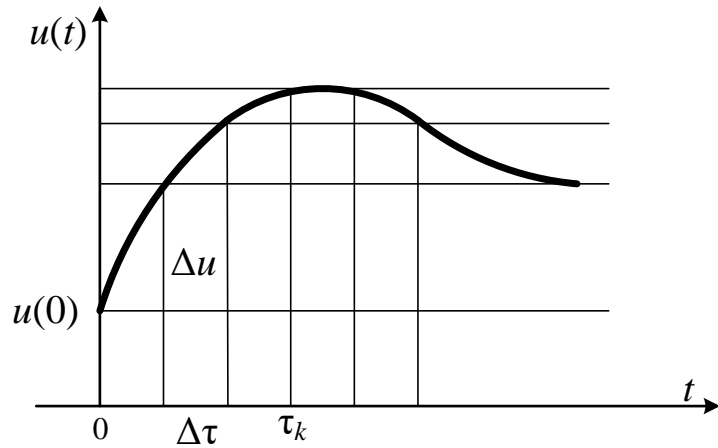


Рис. 4.38,б

Необхідно визначити закон зміни струму $i(t)$.

Розділимо проміжок часу від 0 до t на велику кількість однакових проміжків $\Delta\tau$, а дійсну функцію $u(t)$ замінимо східчастою (рис. 4.38,б):

$$u(t) = u(0) \cdot 1(t) + \sum_{k=1}^n \Delta u_k \cdot 1(t - \tau_k).$$

Визначимо струм у колі, обумовлений східчастою функцією.

$u(0) \cdot g(t)$ - складова струму, обумовлена початковим стрибком напруги;

$\Delta u_k \cdot g(t - \tau_k)$ складова струму, обумовлена сходинкою Δu_k .

$$\Delta u_k = u'(\tau_k) \cdot \Delta\tau_k.$$

Наближене значення струму, обумовлене східчастою напругою

$$i(t) \approx u(0) \cdot g(t) + \sum_{k=1}^n u'(\tau_k) \cdot \Delta\tau_k \cdot g(t - \tau_k).$$

Точне значення струму отримаємо, якщо інтервал від 0 до t розділимо на велику кількість однакових інтервалів $\Delta\tau$ і від суми перейдемо до інтегралу

$$i(t) = u(0) \cdot g(t) + \int_0^t u'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau. \quad (4.101)$$

Вираз (1) – це основна форма інтегралу Дюамеля.

Інтегральний доданок в першій формі інтегралу Дюамеля називають згортанням функцій $u'(\tau)$ та $g(\tau)$ на інтервалі $(0, t)$ і позначають $u'(\tau) * g(\tau)$. З математики відомо, що $u'(\tau) * g(\tau) = u(\tau) * g'(\tau)$, тому

$$i(t) = u(0) \cdot g(t) + \int_0^t u'(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau. \quad (4.102)$$

Останній вираз – друга форма інтегралу Дюамеля.

Існують також третя $i(t) = g(0)u(t) + \int_0^t g'(t - x)u(x)dx$ та четверта форми

$$i(t) = g(0)u(t) + \int_0^t g'(x)u(t - x)dx \text{ інтегралу Дюамеля.}$$

Ці формули можуть бути використані для визначення струмів інших віток розгалуженого кола. Для цього вхідну провідність слід замінити взаємною. Крім розрахунків струмів подібні формули можна записати і для визначення напруг, тоді замість провідностей слід ставити перехідні характеристики напруги.

Приклад. Визначити закон зміни струму для кола показаного на рис. 4.39,а у разі його підключення до джерела, закон зміни якого показан на рис. 4.39,б.

Вхідна напруга описується рівняннями: 1) $0 < t < t_0$ $u_1(t) = U_1 - kt$,

$$k = \frac{U_1 - U_2}{t_0}; 2) t_0 < t < \infty \quad u_2(t) = 0.$$

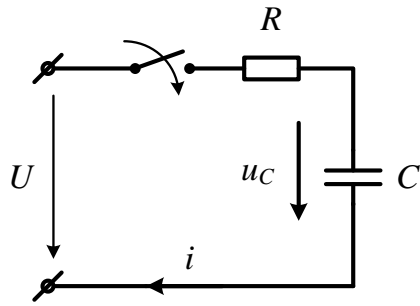


Рис. 4.39,а

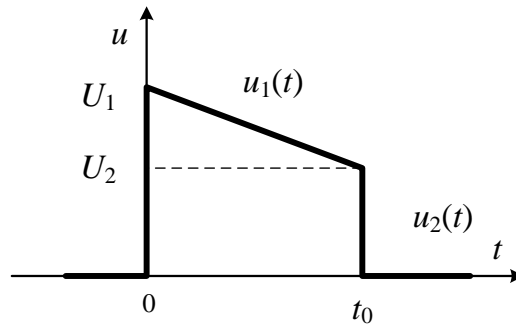
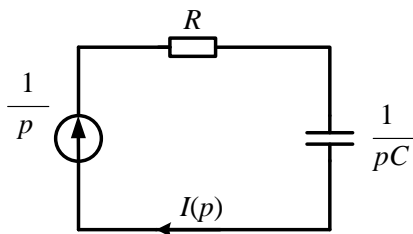


Рис. 4.39,б

1. Знаходимо перехідну провідність



$$I(p) = \frac{1/p}{R + 1/pC} = \frac{1 \cdot pC}{p(RCp + 1)} =$$

$$= \frac{C}{(RCp + 1)} = \frac{C}{RC(p + 1/RC)} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{(p + 1/RC)}$$

Оригінал операторного струму

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{(p + 1/RC)} \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Перехідна провідність $g(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$.

2. Замінюємо аргумент t на $t - x$ $g(t - x) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t-x}{RC}}$.

3. Знаходимо $u_1(0)$ $u_1(0) = U_1 - k \cdot 0 = U_1$.

4. Беремо похідну $\frac{du_1}{dt} = \frac{d(U_1 - kt)}{dt} = -k$, $u_1'(x) = -k$.

5. Розраховуємо струм на першому інтервалі $0 < t < t_0$.

$$i_1(t) = u_1(0) \cdot g(t) + \int_0^t u_1'(x) \cdot g(t - x) dx = U_1 \cdot \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} + \int_0^t (-k) \frac{1}{R} e^{-\frac{t-x}{RC}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{U_1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{k}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^t e^{\frac{x}{RC}} dx = \frac{U_1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{k}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \cdot (RC) e^{\frac{x}{RC}} \Big|_0^t = \\
&= \frac{U_1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} - kC e^{-\frac{t}{RC}} \left(e^{\frac{t}{RC}} - 1 \right) = \left(\frac{U_1}{R} + kC \right) e^{-\frac{t}{RC}} + kC.
\end{aligned}$$

6. Розраховуємо струм на другому інтервалі $t_0 < t < \infty$.

$$\begin{aligned}
i_2(t) &= u_1(0) \cdot g(t) + \int_0^{t_0} u_1'(x) \cdot g(t-x) dx + [u_2(t_0) - u_1(t_0)] g(t-t_0) + \int_{t_0}^t u_2'(x) \cdot g(t-x) dx = \\
&= \frac{U_1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} - kC e^{-\frac{t}{RC}} \left(e^{\frac{t_0}{RC}} - 1 \right) - \frac{U_2}{R} e^{-\frac{t-t_0}{RC}} = \\
&= \left[\frac{U_1}{R} - kC \left(e^{\frac{t_0}{RC}} - 1 \right) - \frac{U_2}{R} e^{\frac{t_0}{RC}} \right] e^{-\frac{t}{RC}} = A e^{-\frac{t}{RC}}.
\end{aligned}$$

Графік струму показано на рис.4.40.

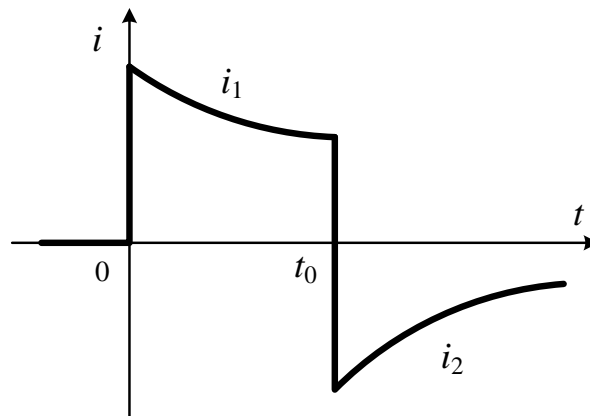


Рис. 4.40

Порядок розрахунку перехідного процесу за допомогою інтеграла Дюамеля

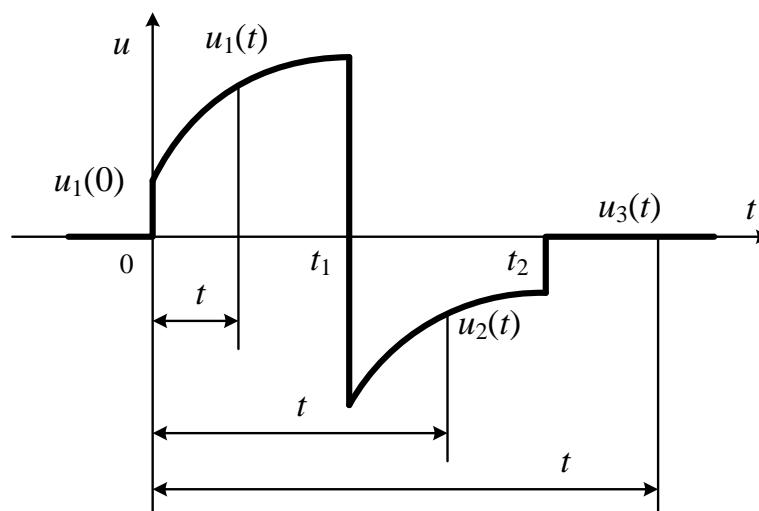
1. Розрахувати перехідний процес класичним або операторним методом при включенні пасивного двополюсника на постійну напругу 1 В і визначити перехідну провідність $g(t)$ або взаємну $g_k(t) = i_k(t)$.

2. В знайдених виразах замінити аргумент t на $(t - x)$ $g(t) \rightarrow g(t - x)$.
3. Визначити значення вхідної напруги при $t = 0$ $u(0)$.
4. Взяти похідну заданої напруги $u(t)$ по часу $u'(t)$ і в отриманому виразі похідної замінити t на x $u'(t) \rightarrow u'(x)$.
5. Підставити знайдені функції в формулу Дюамеля і виконати розрахунки

$$i(t) = u_1(0) \cdot g(t) + \int_0^t u_1'(x) \cdot g(t - x) dx.$$

- 5.1. Якщо вхідна напруга змінюється в часі за складним законом, тобто у різні кінцеві інтервали часу описується різними аналітичними виразами, то перехідний струм розраховується для кожного інтервалу часу окремо.
- 5.2. Струм в будь-який момент часу t визначається сумарною дією усіх напруг, що вступили в дію до моменту t . У зв'язку з цим кожен інтервал часу має свої відповідні границі інтегрування.
- 5.3. Якщо вхідна напруга у певний момент часу t_1 змінюється стрибком від значення $u_1(t_1)$ до $u_2(t_1)$, то цей стрибок враховується в інтегралі Дюамеля доданком $[u_2(t_1) - u_1(t_1)]g(t - t_1)$.

Загальний випадок використання інтеграла Дюамеля при зміні напруги у вигляді кусково-неперервної функції



На різних часових інтервалах вхідна напруга описується виразами:

$$1) 0 < t < t_1 \quad u(t) = u_1(t);$$

$$2) t_1 < t < t_2 \quad u(t) = u_2(t);$$

$$3) t_2 < t < \infty \quad u(t) = u_3(t).$$

Для знаходження струму в колі для відповідних часових інтервалів складають рівняння, користуючись інтегралом Дюамеля:

1) на інтервалі $0 < t < t_1$

$$i_1(t) = u_1(0) \cdot g(t) + \int_0^t u_1'(x) \cdot g(t-x) dx;$$

2) на інтервалі $t_1 < t < t_2$ з урахуванням стрибка напруги в момент $t = t_1$

$$i_2(t) = u_1(0) \cdot g(t) + \int_0^{t_1} u_1'(x) \cdot g(t-x) dx + [u_2(t_1) - u_1(t_1)] g(t-t_1) + \int_{t_1}^t u_2'(x) \cdot g(t-x) dx;$$

3) на інтервалі $t_2 < t < \infty$ з урахуванням стрибка напруги в момент $t = t_2$

$$i_3(t) = u_1(0) \cdot g(t) + \int_0^{t_1} u_1'(x) \cdot g(t-x) dx + [u_2(t_1) - u_1(t_1)] g(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u_2'(x) \cdot g(t-x) dx + \\ + [u_3(t_2) - u_2(t_2)] g(t-t_2) + \int_{t_2}^t u_3'(x) \cdot g(t-x) dx.$$

Тема 4.4. Спектральний метод розрахунку перехідних процесів

4.4.1. Спектральний метод розрахунку перехідних процесів

Суть методу – від функції дійсної змінної $f(t)$ за допомогою прямого перетворення Фур'є переходимо до комплексної функції $\Phi(j\omega)$. Відомими методами розрахунку електричних кіл синусоїдного струму (в

комплексній формі) розраховуємо комплексні зображення струмів і напруг. За допомогою таблиць або оберненого перетворення Фур'є знаходимо оригінал дійсної змінної t .

$$f(t) \rightarrow \Phi(j\omega) \rightarrow f(t).$$

Пряме перетворення Фур'є:

$$\Phi(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt,$$

$$\Phi(j\omega) = \Phi(\omega)e^{j\alpha(\omega)} = \Phi(\omega)\cos\alpha(\omega) + j\Phi(\omega)\sin\alpha(\omega).$$

$\Phi(\omega)$ - амплітудно-частотний спектр функції $f(t)$,

$\alpha(\omega)$ - фазо-частотний спектр функції $f(t)$.

Обернене перетворення Фур'є:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Спектральний метод як частковий випадок операторного

Перетворення Лапласа

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad p = \alpha + j\omega.$$

Пряме перетворення Фур'є:

$$\Phi(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Якщо $\alpha = 0$, то $F(p) = \Phi(j\omega)$.

Останнє співвідношення свідчить про те, що спектральний метод збігається з операторним, тому можна застосувати такий саме алгоритм розрахунку перехідного процесу:

1. Розраховуємо усталений режим кола до комутації і визначаємо незалежні початкові умови $i_L(0)$, $u_C(0)$.

2. Представляємо коло після комутації в комплексній формі.

Елементи вихідного кола						
L	C	R	$e(t)$	$i(t)$	$Li(0)$	$u_C(0) / p$
Елементи кола в комплексній формі						
$j\omega L$	$1 / j\omega C$	R	$\dot{E}(j\omega)$	$\dot{I}(j\omega)$	$Li(0)$	$U_C(0) / j\omega$

3. Методами розрахунку кіл синусоїдного струму визначаємо спектри шуканих струмів і напруг $I(j\omega), U(j\omega)$ і представляємо їх у вигляді дроби

$$I(j\omega) = \frac{F_1(j\omega)}{F_2(j\omega)}, \quad U(j\omega) = \frac{F_3(j\omega)}{F_4(j\omega)}.$$

4. За оберненим перетворення Фур'є або за формулою теореми розкладання визначаємо оригінали струмів і напруг:

$$i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(j\omega_k)}{F_2'(j\omega_k)} e^{j\omega_k t}, \quad u(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_3(j\omega_k)}{F_4'(j\omega_k)} e^{j\omega_k t},$$

де ω_k - корені рівняння $F_2(j\omega) = 0$ або $F_4(j\omega) = 0$.

Для розрахунку спектральних характеристик струмів достатньо знати спектральні характеристики ЕРС $E(j\omega)$, а також частотні характеристики елементів кола $Z(\omega), \alpha(\omega)$, які можуть бути отримані експериментально.

4.4.2. Приклади розрахунку спектрів сигналів

Для прикладу знайдемо спектральні характеристики експоненціального сигналу $e(t) = Ee^{-\alpha t}$. Операторним зображенням

експоненти є функція $e^{-\alpha t} \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p + \alpha}$. Замінімо p на $j\omega$. Тоді

комплексним зображенням експоненти буде $e^{-\alpha t} \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{j\omega + \alpha}$.

$$E(j\omega) = \frac{E}{j\omega + \alpha} = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \cdot e^{-j \arctg \frac{\omega}{\alpha}} = E(\omega) e^{j\alpha(\omega)},$$

де $\frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$ - амплітудно-частотний спектр,

$\alpha(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{\alpha}$ - фазо-частотний спектр.

Графіки АЧС та ФЧС показані на рис. 4.41, а і б відповідно.

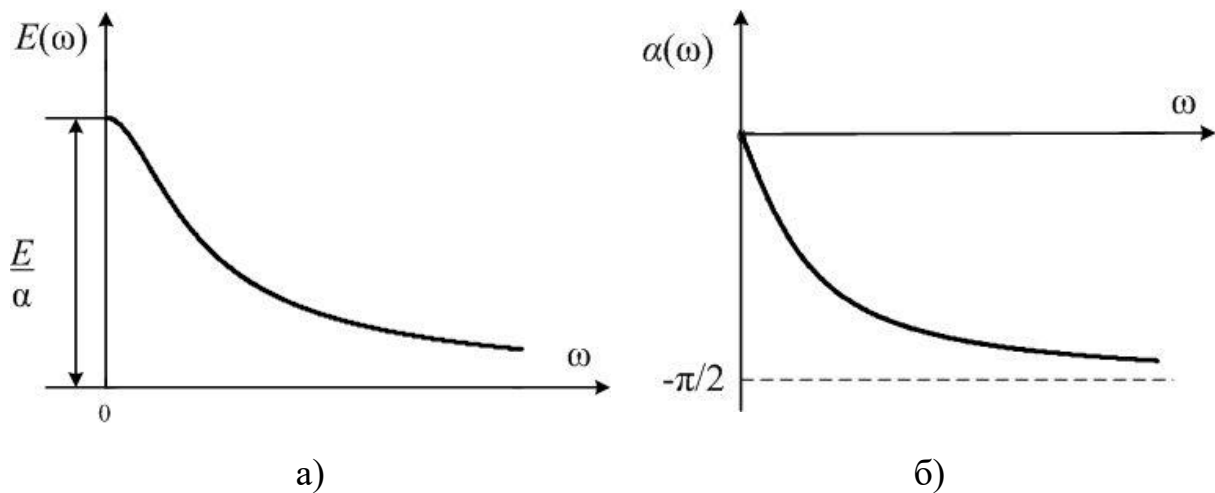


Рис. 4.41

Визначення спектрів прямокутного імпульсу (рис. 4.42).

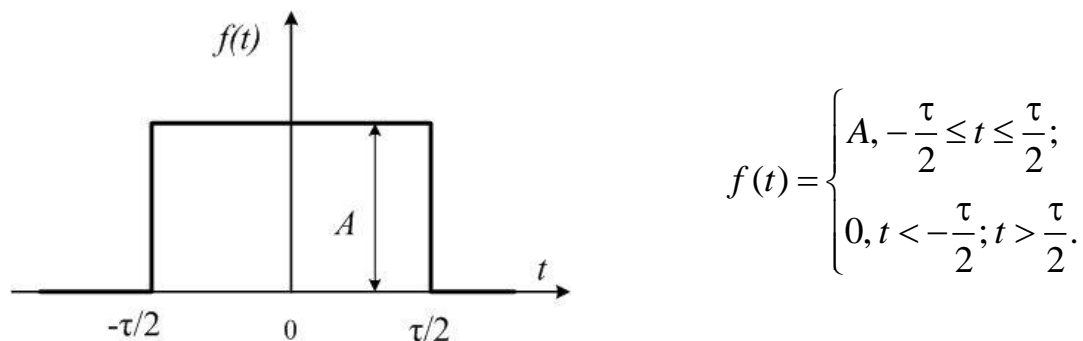


Рис. 4.42

Спектральна характеристика

$$\Phi(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j\omega t} dt = -\frac{A}{j\omega} \left(e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2} \right) = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right).$$

Графіки амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристики приведені на рис. 4.43, а і б відповідно.

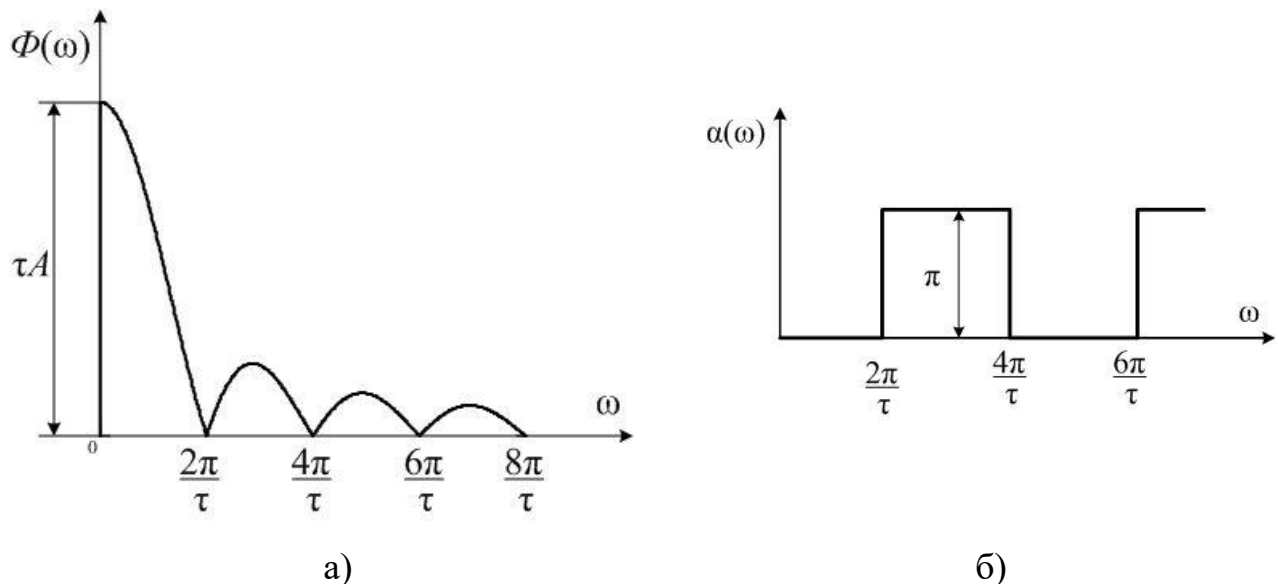


Рис. 4.43

При $\omega = 0$ початкове значення $\Phi(0)$ дорівнює: $\Phi(0) = \frac{2A}{\omega} \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2} = A\tau$, тобто площі імпульсу.

Якщо $\sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) > 0$, то $\alpha(\omega) = 0$. При $\sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) < 0$ $\alpha(\omega) = \pi$.

Застосування спектрального методу для диференціювання та інтегрування сигналів

Використання спектральних характеристик ефективно під час аналізу деяких властивостей електричних кіл. Розглянемо кола, які застосовують для диференціювання та інтегрування сигналів.

Знайдемо передавальну функцію K_u кола (рис. 4.44) при синусоїдній напрузі на вході.

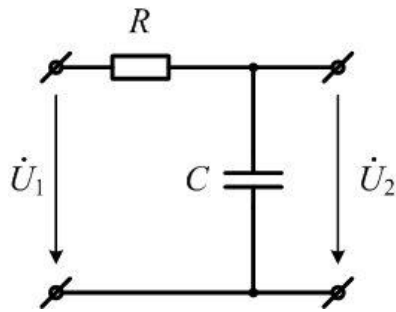


Рис.4.44

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{I} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{\dot{U}_1}{R + 1/j\omega C} = \frac{\dot{U}_1}{1 + jR\omega C}$$

$$K_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{1 + jR\omega C}$$

З теорії комплексних чисел відомо, що інтегруванню синусоїдної величини відповідає ділення комплексного зображення на $j\omega$. Отже, передавальна функція має бути оберненою до $j\omega$, що досягається за умови $\omega RC \gg 1$. Враховуючи спектри інтегрованих сигналів, з цієї нерівності знаходять сталу часу кола, що забезпечує достатню точність інтегрування сигналу.

Далі визначимо передавальну функцію кола (рис. 4.45) при синусоїдній напрузі на вході.

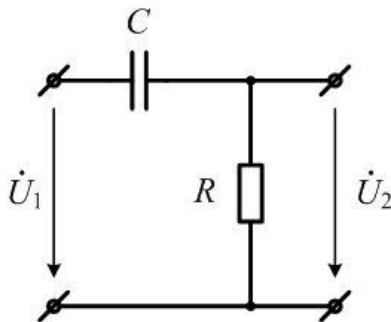


Рис. 4.45

$$\dot{U}_2 = R \cdot \dot{I} = R \cdot \frac{\dot{U}_1}{R + 1/j\omega C} = \dot{U}_1 \cdot \frac{jR\omega C}{1 + jR\omega C}$$

$$K_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{jR\omega C}{1 + jR\omega C}$$

Диференціюванню синусоїдної величини відповідає множення його комплексного зображення на $j\omega$. Отже, передавальна функція повинна

бути пропорційною до $j\omega$, що можливо за умови $\omega RC \ll 1$. Виходячи з спектру сигналів, що підлягають диференціюванню, визначають діапазон частот, для яких має виконуватись вказана нерівність, і звідти знаходити сталу часу кола, що забезпечує достатню точність *диференціювання вхідного сигналу*.

Порівняння методів розрахунку перехідних процесів

1. Класичний метод. Цей метод є фізично прозорим, але вимагає визначення сталих інтегрування, що призводить до необхідності розрахунку незалежних та залежних початкових умов.

2. Операторний метод. Не вимагає визначення сталих інтегрування, легко піддається автоматизації розрахунку. Недоліком методу є те, що перевірку отриманого результату можна провести тільки в кінці.

3. Частотний метод. Аналогічний до операторного. Рекомендується коли відомі частотні характеристики параметрів схеми.

4. Інтеграл Дюамеля. Використовується для розрахунку перехідного процесу, що виникає при вмиканні кола на джерело ЕРС довільної форми, особливо в тих випадках, коли ця ЕРС має розриви неперервності і ін.

Література:

1. “ Теоретичні основи електротехніки”, т.1. Під редакцією І.М. Чиженка, В.С. Бойка.– К.: „Політехніка”, 2004.
2. “ Теоретичні основи електротехніки”, т.2. Під редакцією І.М. Чиженка, В.С. Бойка.– К.: „Політехніка”, 2004.
3. Маляр В.С. Теоретичні основи електротехніки: Підручник: – Львів: Видавництво «Львівська політехніка», 2018. – 416 с.
4. Матвієнко М. П. Основи електротехніки та електроніки. Підручник. – К.: Видавництво «Ліра-К», 2017. – 504 с.
5. Хілов В.С. Теоретичні основи електротехніки: Дніпро: Національний технічний університет “Дніпровська політехніка”, 2021.- 433 с.
6. Карпов Ю.О., Кацев С.Ш., Кухарчук В.В., Ведміцький Ю.Г. Теоретичні основи електротехніки. усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами.Підручник. – Херсон: «Олді-Плюс+», 2019. – 326 с.
7. Паначевний Б.І., Свергун Ю.Ф. Загальна електротехніка.Підручник. – К.: «Каравела», 2018. – 296 с.
8. «Теоретичні основи електротехніки. Збірник задач: навчальний посібник» / укл. О.В.Корощенко, В.Ф.Денник, О.А.Журавель та ін.; за заг.ред. О.В.Корощенко.- Донецьк, ДВНЗ «ДонНТУ», 2012.- 673 с.
9. Гуржій А.М., Мещанінов С.К., Нельга А.Т., Співак В.М. Електротехніка та основи електроніки : Підручник. - Київ: «Літера ЛТД», 2020. - 288 с
10. Дистанційний курс «Теоретична електротехніка» [https://do.ipk.kpi.ua/course/view.php?id=42,](https://do.ipk.kpi.ua/course/view.php?id=42)

<https://do.ipk.kpi.ua/course/view.php?id=43>,

<https://do.ipk.kpi.ua/course/view.php?id=44>.

11. Навчально-методичний посібник “Розрахунок трифазних кіл” / укл. Щерба А. А., Грудська В. П., Чибеліс В.І., Спінул Л.Ю - К.: ІВЦ «Політехніка».- 2005.-94 с.

12. Навчально-методичний посібник “Електричні кола несинусоїдного струму” / укл. Щерба А. А., Грудська В. П., Чибеліс В.І., Спінул Л.Ю - К.: ІВЦ «Політехніка».- 2006.-68 с.

13. Симетричні складові та вищі гармоніки у трифазних колах”. Методичні вказівки до виконання розрахункових робіт з курсу “ТОЕ”. / Уклад.: А.А. Щерба, І.А. Курило, І.Н. Намацалюк, В.І. Чибеліс, Г.І. Сторожилова, Ю.В. Перетятко. – К.: НТУУ “КПІ”, 2008. – 79 с.

14. Навчально-методичний посібник “ Методи аналізу перехідних процесів у лінійних та нелінійних електричних колах” / укл. Чибеліс В.І., Грудська В. П., Спінул Л.Ю. - К.: НТУУ «КПІ».- 2017.-300 с.