МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ МЕХАНІЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ,
ТРАНСПОРТУ ТА ПРИРОДНИЧИХ НАУК

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ЩОДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ
З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ У ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМАХ»

ДЛЯ СТУДЕНТІВ ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ ФОРМ НАВЧАННЯ
ЗІ СПЕЦІАЛЬНОСТІ
275– «ТРАНСПОРТНІ ТЕХНОЛОГІЇ (ЗА ВИДАМИ)»
ОСВІТНЬО-ПРОФЕСІЙНОЇ ПРОГРАМИ
«ТРАНСПОРТНІ ТЕХНОЛОГІЇ (НА АВТОМОБІЛЬНОМУ ТРАНСПОРТІ)»
ОСВІТНЬОГО СТУПЕНЯ «БАКАЛАВР»

КРЕМЕНЧУК 2022

Методичні вказівки щодо виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах» для студентів денної та заочної форм навчання зі спеціальності 275 – «Транспортні технології (за видами)» освітньо-професійної програми «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)» освітнього ступеня «Бакалавр»

Укладачі д. т. н., проф . М. М. Мороз,
д. т. н., доц. В. Г. Загорянський

Рецензент к. т. н., доц. Т. В. Гайкова

Кафедра транспортних технологій

Затверджено Методичною радою КрНУ

Протокол № 4 від «26» травня 2022 р.

Голова Методичної ради _______________ проф. В. В. Костін

ЗМІСТ

ВСТУП

Підготовка майбутнього спеціаліста до розв'язання проблем транспортних систем з урахуванням механізмів функціонування ринкової економіки, широкого впровадження дослідження операцій в усі сфери діяльності транспортних технологій здійснюється за допомогою навчальної дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах».

Навчальна дисципліна «Дослідження операцій в транспортних системах» охоплює методику аналізу і розрахунку транспортних процесів, що відбуваються в різних видах діяльності фахівців транспортних технологій, оцінювання стану та динаміки їхнього розвитку.

Метою викладання навчальної дисципліни є формування у студентів теоретичних знань і практичних навичок формалізації задач керування в транспортних системах з використанням математичних моделей і оптимізаційних методів.

У студентів в процесі вивчення навчальної дисципліни буде сформована система знань щодо методів постановки завдань оптимізації в транспортних системах, складання алгоритмів пошуку розв'язання, вивчення методів розв'язання екстремальних задач; вироблення у студентів уміння застосовувати сучасні математичні методи оптимізації завдань керування в транспортних системах.

Студенти будуть ознайомлені з методикою побудови основних математичних моделей, які використовують для опису транспортного процесу (лінійні оптимізаційні моделі, мережні моделі), з методами розрахунків за основними математичними моделями, що використовують для опису транспортного процесу, із принципами теорії графів у застосуванні до моделювання транспортного процесу.

Студенти опанують практичні методики формулювання та складання завдань оптимізації, навчаться використовувати методи побудови і дослідження математичних моделей, сучасні інформаційні технології для розв’язання завдань теорії дослідження операцій, навчаться, використовуючи сучасні методи аналізу, розв’язувати завдання оптимізації з використанням аналітичних та чисельних методів та аналізувати, використовувати методи математичного програмування та теорії мережного керування для розв’язання виробничих і планово-економічних завдань.

Вивчення навчальної дисципліни надає можливість здобути **компетентності**, потрібні для подальшої професійної діяльності.

Інтегральна компетентність

Здатність особи розв’язувати складні завдання та проблеми транспортної галузі у сфері професійної (наукової) діяльності за певним видом транспортних систем і технологій та у процесі навчання, що передбачає проведення досліджень і здійснення інновацій та характеризується невизначеністю умов і вимог.

Загальні компетентності

ЗК-1. Знання та розуміння предметної області і професійної діяльності. Вміння виявляти, ставити та вирішувати проблеми, приймати обґрунтовані рішення через пошук, обробку та аналіз інформації з різних джерел.

ЗК-4. Навички використання інформаційних і комунікаційних технологій.

ЗК-5. Здатність проведення досліджень на відповідному рівні.

ЗК-7. Здатність генерувати нові ідеї (креативність).

ЗК-8. Здатність розробляти та управляти проектами.

Спеціальні (фахові, предметні) компетентності

СК-1 Здатність аналізувати та прогнозувати параметри і показники функціонування транспортних процесів і систем з урахуванням впливу зовнішнього середовища.

СК-3 Навички щодо організації вантажних перевезень на автомобільному транспорті та управління ними.

СК-4 Навички щодо організації пасажирських перевезень на автомобільному транспорті та управління ними.

СК-7 Знання та розуміння основ логістичного управління матеріальними та іншими потоками.

СК-14 Здатність використовувати сучасні інформаційні технології, автоматизовані системи керування та геоінформаційні системи при організації перевізного процесу на автомобільному транспорті.

Результати навчання:

РН-2. Критично оцінювати наукові цінності і досягнення суспільства у розвитку транспортної галузі та технологій.

РН-3. Давати відповіді, пояснювати, розуміти пояснення, дискутувати, звітувати державною мовою на достатньому, для професійної діяльності, рівні.

РН-5. Застосовувати, використовувати сучасні інформаційні і комунікаційні технології для розв’язання практичних завдань з організації перевезень та проектування транспортних технологій.

РН-6. Досліджувати транспортні процеси, експериментувати, аналізувати та оцінювати параметри транспортних систем та технологій.

РН-7. Формулювати, модифікувати, розробляти нові ідеї з удосконалення транспортних технологій.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент *повинен*

знати:

– різноманітні моделі лінійного програмування;

– основні принципи теорії графів;

уміти:

– аналізувати, вивчати та відбирати необхідні стратегії, моделі, програмні засоби забезпечення аналізу і розрахунку транспортних систем;

– формулювати задачі лінійного програмування з обмеженнями у вигляді рівнянь та у вигляді нерівностей стосовно транспортних систем; здійснювати перехід від однієї форми задачі лінійного програмування до другої та навпаки;

– здійснювати розв’язання завдань лінійного програмування згідно з алгоритмами розрахунку, розв’язати задачу оптимізації вантажопотоків;

– складати оптимальні плани перевезень для різноманітних варіантів транспортних завдань;

– використовуючи упорядковані структурні таблиці комплексів робіт, будувати сіткові графіки виконання комплексів робіт з визначенням критичних шляхів і можливих резервів часу для некритичних робіт, удосконалювати виконання комплексу робіт шляхом переміщення на графіку окремих робіт.

Метою цього видання є забезпечення студентів, які навчаються за спеціальністю «Транспортні технології (за видами)», усіма основними навчально-методичними матеріалами, необхідними для практичної роботи над навчальним курсом «Дослідження операцій в транспортних системах». У методичних вказівках наведено контрольні питання, завдання та вправи, розв’язання яких допоможе студентам досконально вивчити основні теми навчальної дисципліни.

Методичні рекомендації мають на меті надання допомоги студентам у виконанні практичних робіт і містять основні вимоги до організації їх виконання, порядку захисту та критеріїв оцінювання.

1 ПЕРЕЛІК ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Практична робота № 1

Тема. Побудова лінійних оптимізаційних моделей

Мета роботи: отримання практичних навичок побудови лінійних оптимізаційних моделей на прикладах завдань оптимального розподілу ресурсів.

Короткі теоретичні відомості

Складання оптимізаційної моделі завдання за її описом передбачає такі етапи:

1) вибір змінних задачі;

2) вибір цільової функції;

3) складання системи обмежень.

Змінними задачі називаються величини x_1, x_2, x_3,..., x_n, які повністю характеризують економічний процес. Їх зазвичай записують у вигляді вектора X (x_1, x_2, x_3,…, x_n). *Цільовою функцією* називають функцію змінних задачі, яка характеризує якість виконання завдання і екстремум якої потрібно знайти.

Якщо цільова функція і система обмежень є лінійними, то таку модель називають *лінійною оптимізаційною моделлю*. *Система обмежень* включає систему рівнянь і нерівностей, яким задовольняють змінні задачі і які виходять з обмеженості ресурсів або інших економічних чи фізичних умов, наприклад, позитивності змінних тощо.

Загалом лінійна оптимізаційна модель може бути записана в такому вигляді: знайти максимальне (мінімальне) значення цільової функції:

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max(\min)$$

за обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ .... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., m; \, j = 1, 2, ..., n \,.$$

Це дозволяє знайти екстремум цільової функції та змінні X (x_1, x_2, x_3, …, x_n), які відповідають йому за умови, що ці змінні задовольняють системі обмежень і умовам позитивності.

У більш компактній формі цільову функцію і систему обмежень можна записати, використовуючи знак підсумовування:

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \; (i = 1, ..., m; \, j = 1, ..., n);$$

$$x_j \ge 0 \; (j = 1, ..., n)$$

Допустимим рішенням (планом) лінійної оптимізаційної моделі називається будь-який n-мірний вектор X (x_1, x_2, x_3, …, x_n), що задовольняє системі обмежень і умовам позитивності. Множина допустимих рішень (планів) задачі утворює *область допустимих рішень*. *Оптимальним рішенням* (*планом*) лінійної оптимізаційної моделі називають таке допустиме рішення (план) задачі, за якого цільова функція досягає екстремуму.

Модель задачі використання ресурсів.

Для виготовлення кількох (n) видів продукції P_1, P_2, ..., P_n використовують m видів ресурсів S_1, S_2, ..., S_m. Це можуть бути різні матеріали, електроенергія, напівфабрикати тощо.

Обсяг кожного виду ресурсів обмежений і відомий (b_1, b_2,..., b_m).

Відома також a_{ij} (i = 1,2,..., m; j=1,2,..., n) – кількість кожного i-го виду ресурсу, що витрачається на виробництво одиниці j-го виду продукції.

Окрім того, відомий прибуток, одержуваний від реалізації одиниці кожного виду продукції (c_1, c_2,…, c_n).

Умови задачі можна подати у вигляді таблиці:

Види ресурсів	Обсяги ресурсів	Кількість ресурсів, що витрачаються на виробництво одиниці продукції			
		P_1	P_2	………..	P_n
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}	……….	a_{1n}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}	………	a_{2n}
…….	……	………	………..	………	……….
S_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	………	a_{mn}
Прибуток		c_1	c_2	………	c_n

Нехай x_j ($j = 1,2,..., n$) – кількість кожного виду продукції, яку необхідно виробити.

Для першого ресурсу справедливе нерівність-обмеження:

$a_{11}x_1+ a_{12}x_2+... + a_{1n}x_n \leq b_1$

Аналогічні нерівності будуть і для інших видів ресурсів. Слід враховувати також, що всі значення $x_j \geq 0$, $j = 1,2,..., n$.

Загальний прибуток, отримуваний від реалізації всієї продукції, може бути подано функцією:

$L(X) =c_1x_1+c_2x_2+…c_nx_n$.

Необхідно цю функцію максимізувати. Отже, математична модель задачі використання ресурсів запишеться у вигляді:

цільова функція:

$$L(X)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \rightarrow \max$$

за обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad i=1,2,...,m; j=1,2,...,n$$

Приклад виконання завдання

З одного міста в інший за рік потрібно перевезти меблеві гарнітури трьох типів: типу I – не менше 85 штук, типу II – не менше 80 штук, типу III – не менше 150 штук. Для перевезення підприємство має два види автотранспорту – А і Б.

Кількість гарнітурів кожного типу, яка поміщається в кожен вид автотранспорту, і витрати на перевезення одиницею кожного виду транспорту:

Тип гарнітура	Кількість гарнітурів, яка поміщається в одиниці транспорту виду	
	А	Б
I	3	2
II	4	1
III	3	6
Витрати	8	12

Спланувати перевезення так, щоб транспортні витрати були мінімальними. Записати математичну модель задачі (у символьному вигляді і з урахуванням значень завдання): вираз для цільової функції та систему обмежень.

Розв'язання. Запишемо математичну модель даної задачі. Змінні даної задачі: x_1 – кількість їздок автотранспорту виду А, потрібна для перевезення; x_2 – кількість їздок автотранспорту виду Б, потрібна для перевезення.

Математична модель задачі:

цільова функція (загальні витрати):

$L(X) = 8x_1 + 12x_2 \rightarrow \min$,

за обмежень:

$3x_1 + 2x_2 \geq 85$;

$4x_1 + x_2 \geq 80$;

$3x_1 + 6x_2 \geq 150$;

$x_1, x_2 \geq 0$;

x_1, x_2 – цілі.

Відповідь: (18, 16). $L_{min} = 336$.

Завдання до теми

Записати математичну модель задачі (у символьному вигляді і з урахуванням значень завдання): вираз для цільової функції та систему обмежень.

1. Для перевезення вантажу на трьох лініях можуть бути використані судна трьох типів. Продуктивність суден при використанні їх на різних лініях характеризується даними, наведеними в таблиці, де вказані загальний час, протягом якого судно кожного типу знаходяться в експлуатації, і мінімально необхідні обсяги перевезень на кожній з ліній.

Тип судна	Продуктивність суден (млн. тонно-миль за добу) на лінії			Загальний час експлуатації суден, діб
	1	2	3	
I	8	14	11	300
II	6	15	13	300
III	12	12	4	300
Заданий обсяг перевезень (млн тонно-миль)	3000	5400	3300	

Визначити, які судна, на якій лінії і протягом якого часу слід використовувати, щоб забезпечити максимальне завантаження суден з урахуванням можливого часу їх експлуатації.

2. Для виробництва двох виробів А і В підприємство використовує три види сировини. Норми витрати сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції цього виду наведені в таблиці, де вказані прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальна кількість сировини кожного виду, яке може бути використане підприємством.

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на один виріб		Загальна кількість сировини (кг)
	A	B	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації одного виробу (грн)	30	40	

Знайти план випуску виробів А і В, що забезпечує максимальний прибуток від їх реалізації.

3. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів цукерок А, В і С використовує три види основної сировини: шоколад, горіховий крем і какао терте. Норми витрат кожного виду сировини на виробництво 1 т цукерок кожного виду, загальна кількість сировини кожного виду і прибуток від реалізації 1 т цукерок кожного виду наведені в таблиці:

Вид сировини	Норма витрат сировини (т) на 1 т цукерок			Загальна кількість сировини, т
	А	Б	В	
Шоколад	0,8	0,5	0,6	800
Горіховий крем	0,4	0,4	0,3	600
Какао терте	-	0,1	0,1	120
Прибуток від реалізації 1 т продукції, грн.	108	112	126	

Знайти план випуску цукерок виду А, Б і В, що забезпечує максимальний прибуток від їх реалізації.

4. Фірма володіє транспортом, що дозволяє одноразово перевезти не більше 800 т вантажу загальним обсягом, що не перевищує 600 м^3. Цей транспорт передбачається використовувати для перевезення 11 найменувань вантажу, маса, обсяг і ціна одиниці кожного з яких наведено в таблиці:

Параметри одиниці вантажу	Номер вантажу										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Маса, т	80	62	92	82	90	60	81	83	86	65	83
Об'єм, м^3	100	90	96	110	120	80	114	60	106	114	86
Ціна, тис. грн	4,4	2,7	3,2	2,8	2,7	2,8	3,3	3,5	4,7	3,9	4,0

Визначити, скільки одиниць кожного вантажу слід завантажити, щоб загальна вартість розміщеного вантажу була максимальною.

Контрольні питання

1. Наведіть основні етапи побудови математичної моделі.

2. Виберіть правильну відповідь: у моделі оптимального використання ресурсів можна використати як цільову функцію:

– функцію, яка максимізує витрати;

– функцію, яка мінімізує витрати;

– усе зазначене правильно.

Література: [1, 3, 4, 5, 9].

Практична робота № 2

Тема. Розв'язання задач лінійного програмування у транспортній галузі графоаналітичним методом

Мета роботи: набуття практичних навичок розв'язання задач лінійного програмування у транспортній галузі графоаналітичним методом.

Короткі теоретичні відомості

Доцільно використовувати для вирішення завдань з двома змінними. Тоді систему нерівностей і цільову функцію можна представити на площині (зазвичай x_1Ox_2).

Алгоритм рішення задачі лінійного програмування графічним методом:

1. Будуємо прямі, рівняння яких виходять з нерівностей.

Для прямої загального положення $Ax_1 + Bx_2 = C$ будуємо її по двох точках її перетину з осями координат.

Беремо $x_2 = 0$, тоді $x_1 = C/A$, тобто $(C/A; 0)$ – точка перетину прямої з віссю Ox_1.

Беремо $x_1 = 0$, тоді $x_2 = C/B$, тобто $(0; C/B)$ – точка перетину прямої з віссю Ox_2.

2. Знаходимо напівплощини, що визначаються кожною з нерівностей. Для цього потрібно записати нерівність відносно змінної x_2. Якщо в нерівності

стоїть знак «≥», нерівність визначає верхню напівплощину від даної прямої, якщо знак «≤» – нижню напівплощину. Заштриховуємо напівплощини.

3. Знаходимо область допустимих рішень (ОДР). ОДР визначається як загальна частина всіх напівплощин, які відповідають усім цим нерівностям. Областю допустимих рішень на площині може бути або опуклий багатокутник, або опукла багатокутна необмежена область, або порожня область, або єдина точка.

4. Будуємо вектор $\vec{C} = (c_1; c_2)$, який указує напрямок зростання цільової функції. Протилежний вектор $(-\vec{C})$ показує напрямок убування цільової функції.

5. Проводимо через вершини багатокутника рішень прямі, перпендикулярні вектору $\vec{C}$. Знаходимо точки, у яких цільова функція набуває максимального значення (найбільш далека в напрямку зростання вектора $\vec{C}$ вершина) і мінімального значення (найбільш далека в протилежному напрямку вершина).

6. Визначаємо координати точки максимуму і точки мінімуму цільової функції та обчислюємо значення цільової функції в цих точках. Щоб знайти координати точки на перетині двох прямих, записуємо систему рівнянь з рівнянь двох цих прямих, і з неї знаходимо значення змінних.

Приклад виконання завдання

Розв'язати задачу лінійного програмування графоаналітичним методом (визначити, у яких точках цільова функція набуває екстремуму та відповідного значення цільової функції):

знайти максимальне (мінімальне) значення цільової функції $L(x) = 2x_1 - 5x_2$ за обмежень:

$4x_1 + 3x_2 \geq 12,$

$3x_1 + 4x_2 \leq 24,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

Розв'язання.

1. Запишемо нерівності у вигляді рівнянь і знайдемо точки перетину прямих загального положення з осями координат:

$4x_1 + 3x_2 = 12$ (пряма 1), якщо $x_1 = 0$, то $x_2 = 4$;

якщо $x_2 = 0$, то $x_1 = 3$;

точки прямої 1: (0; 4) і (3; 0);

$3x_1 + 4x_2 = 24$ (пряма 2), якщо $x_1 = 0$, то $x_2 = 6$;

якщо $x_2 = 0$, то $x_1 = 8$;

точки прямої 2: (0; 6) і (8; 0).

Будуємо систему координат x_1Ox_2. Прямі $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$ збігаються з осями координат. За координатами двох точок будуємо прямі 1 і 2 (рис. 2.1).

2. Заштриховуємо напівплощини, що відповідають нерівностям, у тому числі $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$.

3. Знаходимо ОДР – це опуклий багатокутник ABCD.

4. Будуємо вектор $\vec{C} = (2;-5)$, що виходить з початку координат у точку (2; -5).

5. Проводимо через вершини багатокутника рішень ABCD прямі, перпендикулярні вектору $\vec{C}$. Знаходимо точку, у яких цільова функція набуває максимального значення – це найбільш далека в напрямку зростання вектора $\vec{C}$ вершина A (8; 0), і мінімального значення – найбільш далека в протилежному напрямку вершина D (0; 6).

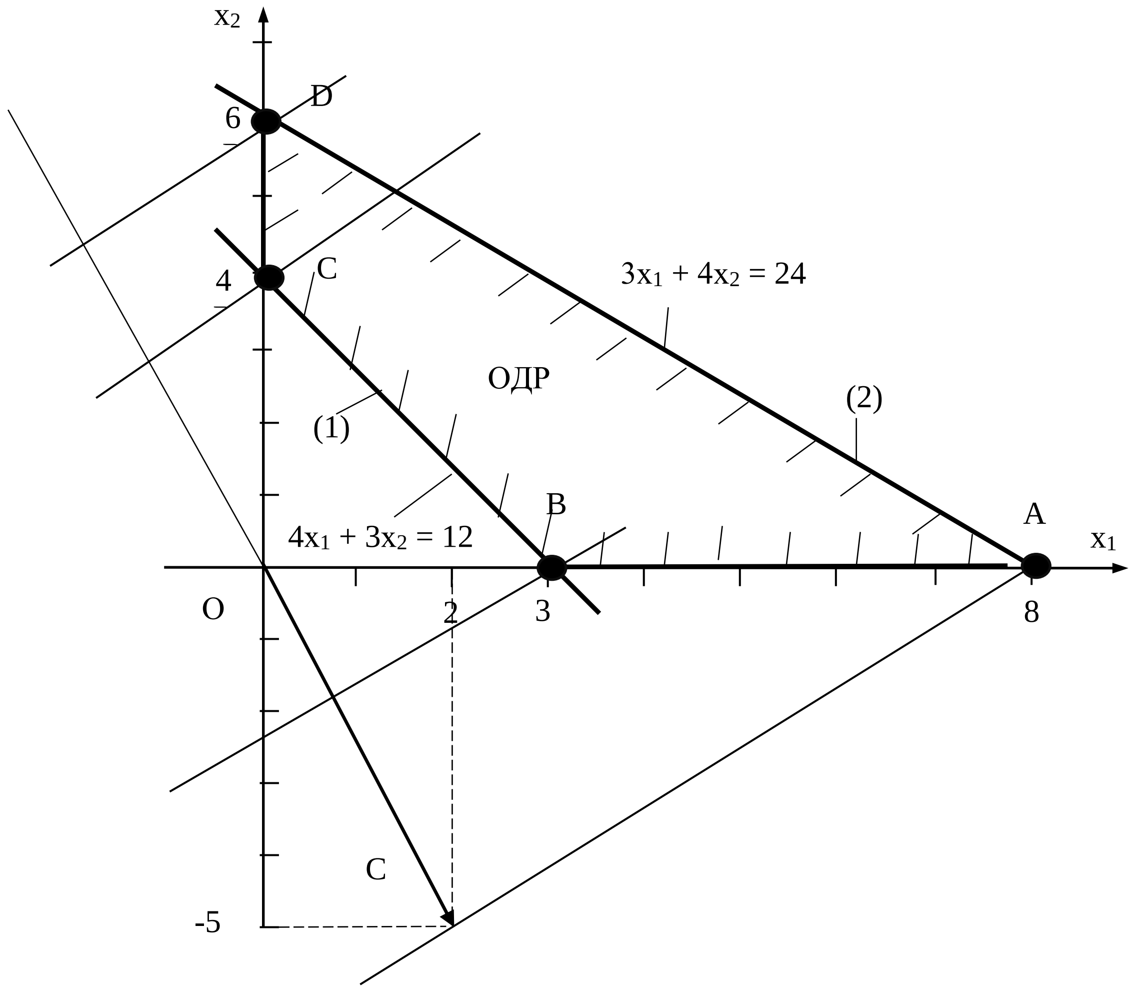

Рисунок 2.1 – Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

6. Координати точки максимуму A – (8; 0), точки мінімуму D – (0; 6).

Обчислимо значення цільової функції в цих точках:

A: $2 \cdot 8 - 5 \cdot 0 = 16$;

D: $2 \cdot 0 - 5 \cdot 6 = -30$.

Функція набуває максимального значення (16) у точці A (8; 0); функція набуває мінімального значення (-30) у точці D (0; 6).

Завдання до теми

Знайти графічним методом оптимальний план задачі лінійного програмування.

1. $L(X) = -2x_1 + x_2 \to \min$

за обмежень:

$3x_1 - 2x_2 \leq 12$;

$-x_1 + 2x_2 \le 4;$

$2x_1 + 3x_2 \ge 6;$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

Відповідь: (8; 6).

2. $L(X) = x_1 + 2x_2 \to \min$

за обмежень:

$7x_1 + 2x_2 \ge 14;$

$-x_1 + 2x_2 \ge 2;$

$6x_1 + 4x_2 \le 24;$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

Відповідь: (1,5; 1,75)

3. Ті ж обмеження при $L(X) = x_1 + 2x_2 \to \max$

Відповідь: (0,5; 5,25).

4. $L(X) = 2x_1 - 5x_2 \to \max$

за обмежень:

$4x_1 + 3x_2 \le 24;$

$3x_1 + 4x_2 \ge 12;$

$2x_1 + 2x_2 \ge 4;$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

Відповідь: (6; 0).

5. $L(X) = x_1 + x_2 \to \max$

за обмежень:

$x_1 + 2x_2 \le 8;$

$-5x_1 + 3x_2 \le 15;$

$4x_1 + 6x_2 \ge 24;$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

Відповідь: (8; 0).

6. $L(X) = x_1 + 2x_2 \to \max$

за обмежень:

$4x_1 - 2x_2 \le 12;$

$-x_1 + 3x_2 \le 6;$

$2x_1 + 4x_2 \ge 16;$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

Відповідь: (4,8; 3,6).

Література: [2, 3, 4, 6].

Практична робота № 3

Тема. Розв'язання задач лінійного програмування симплекс-методом

Мета роботи: набуття практичних навичок розв'язання задач лінійного програмування симплекс-методом.

Короткі теоретичні відомості

Щоб позбутися нерівностей в обмеженнях, у кожне обмеження вводиться невід'ємна *балансова змінна* s_i (за кількістю обмежень i). У системі обмежень далі потрібно знайти *базисні змінні*. *Базисні змінні* – це змінні, які входять тільки в одне рівняння системи обмежень, причому з одиничним коефіцієнтом.

Тепер можна сформувати *початкову симплекс-таблицю*. *Симплекс-таблиця* являє собою розширену матрицю системи обмежень з деякими додатковими стовпцями і рядками. У верхньому рядку записують означення стовпців. Імена базисних змінних записують у стовпець «БазЗм». Стовпці $x_1...s_i$ містять коефіцієнти за відповідних змінних у рівняннях системи обмежень (кожному рівнянню відповідає окремий рядок). У стовпець «Рішення» спочатку записують вільні члени відповідних рівнянь. Вони ж показують значення базисних змінних для поточного рішення, яке відображається симплекс-таблицею, на певному етапі (*ітерації*) розв'язання задачі. Коефіцієнти цільової функції відображаються в симплекс-таблиці в рядку «L».

Приклад виконання завдання

Розв’язати задачу лінійного програмування симплекс-методом:

$L(X) = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max$

за обмежень:

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3$ (1)

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 1$ (2)

$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 3$ (3)

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Розв’язання.

Крок 1. Позбудемося нерівностей в обмеженнях, ввівши в обмеження невід'ємні *балансові змінні* $\mathbf{s_1, s_2, s_3}$**:**

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + s_1 = 3;$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + s_2 = 1;$

$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + s_3 = 3;$

$x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Крок 2. Шукаємо в системі обмежень базисні змінні.

Базисні змінні – це змінні, які входять тільки в одне рівняння системи обмежень, причому з одиничним коефіцієнтом.

З останньої системи обмежень можна виділити базисні змінні $\mathbf{s_1, s_2, s_3}$.

Тепер можна сформувати початкову *симплекс-таблицю*.

Симплекс-таблиця являє собою розширену матрицю системи обмежень з деякими додатковими стовпцями і рядками.

Запишемо симплекс-таблицю для нашої задачі.

У верхньому рядку записуємо позначення стовпців.

1) Імена базисних змінних записуємо у стовпець "БазЗм".

2) Стовпці $x_1...s_3$ містять коефіцієнти при відповідних змінних у рівняннях системи обмежень (кожному рівнянню відповідає окремий рядок).

3) У стовпець «Рішення» спочатку записуємо вільні члени відповідних рівнянь. Вони ж показують значення базисних змінних для поточного рішення,

яке відображається симплекс-таблицею, на певному етапі (ітерації) розв'язання задачі.

4) Додаємо стовпець «Відношення».

Коефіцієнти цільової функції відображаються в симплекс-таблиці в рядку «L».

Крок 3. Початкова симплекс-таблиця:

БазЗм	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**Рішення**	**Відношення**
s_1	1	2	3	4	1	0	0	3	
s_2	2	3	4	5	0	1	0	1	
s_3	3	4	5	6	0	0	1	3	
L	4	3	2	1	0	0	0	0	--

За рядком «L» обираємо напрямн**и**й (рос. «*разрешающий*») *стовпець*.

Напрямний стовпець вибирається:

– у разі розв'язання задачі на максимум – за максимальним додатним (рос. «положительным») коефіцієнтом в рядку "L",

– у разі розв'язання задачі на мінімум – за мінімальним від'ємним (рос. «отрицательным») коефіцієнтом в рядку "L".

Якщо після чергової ітерації в рядку "L" *не опиниться додатних* (у разі максимізації), або *від'ємних* (у разі мінімізації) коефіцієнтів, то *оптимальне рішення* досягнуто.

Напрямний стовпець відповідає *змінній*, яка буде *введена* в базис (в список базисних змінних) на наступному певному етапі (ітерації) рішення задачі.

Заміна базису виконується для поліпшення значення цільової функції.

У нашому прикладі *напрямний стовпець* вибраний за коефіцієнтом **4** (максимальний додатний, оскільки задача на максимум), він відповідає змінній **x_1**, яка буде введена в базис на наступній ітерації.

Для визначення *напрямного рядка* розраховується і заповнюється стовпець «Відношення». Його елементами є відношення елементів стовпця

«Рішення» до відповідних елементів напрямного стовпця (крім рядка «L»). За мінімального значення з усіх відношень виконується вибір *напрямного рядка*. Напрямний рядок відповідає *змінній*, яка буде *виведена* з базису (списку базисних змінних) на наступній ітерації.

Ці відношення розраховуються тільки для додатних елементів напрямного стовпця. Якщо на деякій ітерації в напрямному стовпці додатних коефіцієнтів не виявиться, то цільова функція вихідної задачі необмежена, задача не має рішення.

У нашому прикладі напрямний рядок обраний за мінімальним відношенням **1/2**, він відповідає базисній змінній $\mathbf{s_2}$, яка буде виведена з базису на наступній ітерації (її місце займе $\mathbf{x_1}$).

На перетині напрямного стовпця і напрямного рядка знаходиться *напрямний елемент* – в даному випадку **2**.

БазЗм	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	**Рішення**	**Відношення**
s_1	1	2	3	4	1	0	0	3	3 / 1 = 3
s_2	2	3	4	5	0	1	0	1	1/2
s_3	3	4	5	6	0	0	1	3	3 / 3 = 1
L	4	3	2	1	0	0	0	0	--

Ітерація 1

Замінюємо базисну змінну ($\mathbf{s_2}$ на $\mathbf{x_1}$).

Розділимо кожний з елементів, що стоять в напрямному рядку, на напрямний елемент (в нашому прикладі – на **2**). Всі елементи напрямного стовпця обнулимо, крім елемента, що стоїть в напрямному рядку.

Інші елементи таблиці (окрім стовпця «Відношення») перераховуються за *правилом прямокутника* – від елемента, який потрібно перерахувати, ведемо вертикальну та горизонтальну лінії до перетину з напрямним рядком і напрямним стовпцем.

Нове значення елемента дорівнює поточному значенню елемента мінус добуток елементів у напрямному стовпці і в напрямному рядку, поділене на напрямний елемент.

Записуємо нове значення кожного елемента на попереднє місце.

БазЗм	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**Ріш.**	**Від-ня**
s_1	0	2-(1×3)/2	3-(1×4)/2	4-(1×5)/2	1-(1×0)/2	0-(1×1)/2	0-(1×0)/2	3-(1×1)/2	
x_1	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
s_3	0	4-(3×3)/2	5-(3×4)/2	6-(3×5)/2	0-(3×0)/2	0-(3×1)/2	1-(3×0)/2	3-(3×1)/2	
L	0	3-(4×3)/2	2-(4×4)/2	1-(4×5)/2	0-(4×0)/2	0-(4×1)/2	0-(4×0)/2	0-(4×1)/2	

Симплекс-таблиця після першої ітерації:

БазЗм	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**Рішення**	**Від-ня**
s_1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	
x_1	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
s_3	0	$\frac{-1}{2}$	-1	$\frac{-3}{2}$	0	$\frac{-3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	
L	0	-3	-6	-9	0	-2	0	-2	

Оскільки в рядку цільової функції немає додатних коефіцієнтів, то досягнуто оптимальне рішення.

За значень змінних (стовпець «Рішення»): $x_1 = 1/2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$, досягається оптимальне значення цільової функції $L(X) = 4\times1/2 + 3\times0 + 2\times0 + 1\times0 = 2$.

Завдання до теми

1. Знайти значення змінних x_1 ... x_4, при яких функція:

$L = -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4$

приймає мінімальне значення, за умови обмежень:

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3$ (1)

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2$ (2)

$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 2$ (3)

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

2. Знайти значення змінних x_1 ... x_4, при яких функція:

$L = -3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4$

приймає мінімальне значення, за умови обмежень:

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3$ (1)

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2$ (2)

$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 1$ (3)

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

3. Знайти значення змінних $x_1 \ldots x_4$, при яких функція:

$L = -3x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 4x_4$

приймає мінімальне значення, за умови обмежень:

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3$ (1)

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 3$ (2)

$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 3$ (3)

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

4. Знайти значення змінних $x_1 \ldots x_4$, при яких функція:

$L = 6x_1 - 5x_2 - x_3 - 4x_4$

приймає мінімальне значення, за умови обмежень:

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3$ (1)

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2$ (2)

$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 3$ (3)

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

5. Знайти значення змінних $x_1 \ldots x_4$, при яких функція:

$L = 6 x_1 - x_2 - 5 x_3 - x_4$

приймає мінімальне значення, за умови обмежень:

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 2$ (1)

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 4$ (2)

$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5$ (3)

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

Література: [1, 3, 4, 6, 8].

Практична робота № 4

Тема. Транспортна задача. Методи визначення вихідних опорних планів

Мета роботи: набуття практичних навичок визначення вихідних опорних планів транспортної задачі методами «північно-західного кута» і мінімального елемента.

Короткі теоретичні відомості

Класична транспортна задача є задачею про знаходження оптимального плану перевезення вантажів від постачальників (виробників) до споживачів. Перевезення вантажів вимагає великих витрат, особливо зараз, тому раціональна організація перевезень дає можливість заощадити значні кошти.

Нехай маємо m пунктів відправлення (*постачальники*) – A_1, A_2, ..., A_m, у яких перебуває однорідний вантаж. Кількість вантажу позначимо відповідно a_1, a_2, ..., a_m.

Цей вантаж потрібно перевезти в n пунктів призначення (*споживачі*) B_1, B_2, ..., B_m, потреба яких у такому вантажу становить відповідно b_1, b_2, ..., b_n одиниць.

Відомі також c_{ij} ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$) – вартість перевезення однієї одиниці вантажу з *i*-го пункту відправлення до *j*-го пункту призначення.

Потрібно знайти змінні задачі x_{ij} – кількість вантажу, який потрібно перевезти з пункту відправлення *i* в пункт призначення *j*.

У загальному вигляді вихідні дані задачі можна подати у вигляді таблиці:

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	…	B_n	Запаси
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	…	b_n	

Нехай загальний обсяг вантажу, що поставляється, дорівнює загальному обсягу вантажу, що споживається, тобто:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\,. \tag{4.1}$$

У такій постановці задача називається *закритою* і в цьому випадку її можна розв'язати за *методом потенціалів*.

Матрицю $(c_{ij})_{mxn}$ називають *матрицею тарифів* (витрат), а числа c_{ij} – тарифами.

План транспортної задачі – матриця $X = (x_{ij})_{mxn}$, де кожне число x_{ij} – кількість вантажу, який потрібно перевезти з пункту відправлення *i* до пункту призначення *j*. Матрицю X називають ще *матрицею перевезень.*

Сумарні транспортні витрати, пов'язані з реалізацією плану перевезень, повинні бути мінімальними. Їх можна подати за допомогою цільової функції:

$$\begin{aligned} L(X) &= c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots \\ &+ c_{2n}x_{2n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min\,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

де x_{ij} – кількість вантажу, який перевозиться з *i*-го пункту відправлення в *j* –й пункт призначення.

Змінні повинні відповідати обмеженням за запасами, за потребами і за умовами невід'ємності. У математичній формі ці обмеження можна подати так:

1. Вантажі з усіх пунктів відправлення мають бути вивезені:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,\ldots,m\,. \tag{3.3}$$

2. Потреби всіх пунктів призначення повинні бути задоволені:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,\ldots,n\,. \tag{3.4}$$

3. Кількість вантажу має бути невід'ємною:

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1,\ \ldots,\ m,\ j = 1,\ \ldots,\ n. \tag{3.5}$$

Вихідний опорний план транспортної задачі визначається за методом «північно-західного кута» або за методом «мінімального елемента».

За правилом «північно-західного кута» для складання вихідного плану перевезень таблицю заповнюють, починаючи з верхнього лівого («північно-західного кута»). У клітину рядка 1, стовпця 1 – клітину (1, 1) заносять менше з чисел a_1 и b_1, тобто:

$$x_{11} = \min(a_1; b_1).$$

Якщо $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ і потреби першого споживача задоволені повністю (перший стовпець закритий для заповнення інших його клітин). Рухаючись далі по першому рядку, записуємо в клітину (1, 2) менше з чисел $a_1 – b_1$ и b_2, тобто:

$$x_{12} = \min(a_1 - b_1; b_2).$$

Якщо $b_1 > a_1$, то $x_{11} = a_1$ і запаси першого постачальника витрачені повністю (перший рядок закритий для заповнення інших його клітин).

Переходимо до заповнення сусідньої клітини (2, 1), куди заносимо $x_{21} = \min (a_2; b_1 – a_1)$.

Заповнивши другу клітину (1, 2) або (2, 1), переходимо до заповнення наступної, третьої клітини або у другому рядку, або у другому стовпці. Будемо продовжувати цей процес до повного вичерпання вантажу у постачальників і повного задоволення споживачів.

План, отриманий за правилом «північно-західного кута», буде *опорним планом* задачі.

За методом «*мінімального елемента»* заповнення починається з клітини, якій відповідає найменший тариф з усієї матриці тарифів. Потім залишок у стовпці або рядку поміщаємо в клітину того самого стовпця або рядка, який відповідає наступному за величиною значенню тарифу.

Приклад виконання завдання

Завод має три цехи А, Б, В і чотири склади № 1, № 2, № 3, № 4.

Цех А виробляє за добу 300 шт. виробів, цех Б – 400 шт., цех В – 200 шт. Пропускна спроможність складів за такий самий час характеризується такими показниками: склад № 1 – 200 шт., № 2 – 300 шт., склад № 3 – 300 шт., склад № 4 – 100 шт.

Вартість перевезення одного виробу з цеху А в склади № 1, № 2, № 3, № 4 відповідно дорівнює 2, 4, 3, 6 грн, із цеха Б – 3, 6, 8, 7 грн, із цеха В – 5, 10, 9, 5 грн.

Для транспортної задачі записати її математичну модель (вираз для цільової функції та систему обмежень) – у символьному вигляді та з урахуванням значень задачі.

Для цієї транспортної задачі визначити за методом «північно-західного кута» вихідне опорне рішення та відповідне йому значення цільової функції.

Для цієї транспортної задачі визначити за методом «мінімального елемента» вихідне опорне рішення та відповідне йому значення цільової функції.

Розв’язання.

Задача матиме вигляд:

Цех \ Склад	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	Запаси
А	2	4	3	6	300
Б	3	6	8	7	400
В	5	10	9	5	200
Потреби	200	300	300	100	

Цільова функція згідно зі значеннями задачі:

$$L(X)=2x_{11}+4x_{12}+3x_{13}+6x_{14}+3x_{21}+6x_{22}+8x_{23}+7x_{24}+5x_{31}+10x_{32}+9x_{33}+5x_{34}\to\min .$$

Система обмежень згідно зі значеннями задачі:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=300 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=400 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=200 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=200 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=300 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=300 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=100 \end{cases}$$

$$x_{11}-x_{34}\geq 0,$$
$$x_{11}-x_{34}-\text{\textit{цілі.}}$$

Для знаходження опорних планів транспортної задачі наведемо задачу у більш зручному вигляді.

Опорний план транспортної задачі за методом «північно-західного кута» виглядатиме так (у дужках наведена послідовність заповнення).

Запаси \ Потреби	200	300	300	100
300	200(1) [2]	100(2) [4]	[3]	[6]
400	[3]	200(3) [6]	200(4) [8]	[7]
200	[5]	[10]	100(5) [9]	100(6) [5]

Усі запаси вивезені, потреби задоволені.

Значення цільової функції: L(X) = 2 · 200 + 4 · 100 + 6 · 200 + 8 · 200 + + 9 · 100 + 5 · 100 = 5000 грн.

Опорний план транспортної задачі за методом «мінімального елемента» матиме такий вигляд (у дужках наведена послідовність заповнення):

Запаси \ Потреби	200	300	300	100
300	200(1) [2]	[4]	100(2) [3]	[6]
400	[3]	300(4) [6]	100(5) [8]	[7]
200	[5]	[10]	100(6) [9]	100(3) [5]

Усі запаси вивезені, потреби задоволені.

Значення цільової функції: $L(X) = 2 \cdot 200 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 300 + 8 \cdot 100 + 9 \cdot 100 = 4700$ грн.

Завдання до теми

Для цих транспортних задач визначити за методами «північно-західного кута» та «мінімального елемента» вихідні опорні рішення і відповідні їм значення цільової функції.

1. На трьох складах – А, Б, В знаходиться 140, 460, 180 т пального відповідно. У пункти 1, 2, 3, 4, 5 потрібно доставити відповідно 140, 120, 260, 180, 80 т пального. Перевезення однієї т пального зі складу А в пункти 1, 2, 3, 4, 5 відповідно коштує 4, 2, 8, 2, 4 грн, зі складу Б в ті ж пункти – 9, 3, 1, 5, 6 грн, зі складу В – 5, 2, 3, 2, 8 грн.

2. На чотирьох складах – А, Б, В і Г знаходиться відповідно 210, 90, 220, 80 т вантажу. У пункт 1 треба доставити 220 т вантажу, в пункт 2 – 80 т вантажу, в пункт 3 – 160 т вантажу, в пункт 4 – 140 т вантажу. Перевезення однієї т вантажу із складу А в пункти 1, 2, 3, 4 відповідно стоїть 2, 4, 6, 8 грн, зі складу Б в ті ж пункти – відповідно 4, 3, 1, 5 грн, зі складу В у ті ж пункти – відповідно 5, 8, 3, 8 грн, зі складу Г в ті ж пункти – відповідно 3, 5, 8, 1 грн.

3. У резерві п'яти залізничних станцій А, Б, В, Г, Д знаходиться відповідно 200, 100, 200, 100, 300 вагонів. Пункту 1 вантаження необхідно 400 вагонів, пункту 2 – 300 вагонів, пункту 3 – 200 вагонів. Вартості перегонів

одного вагону зі станції А у вказані пункти відповідно рівні 2, 1, 6 грн, зі станції Б – 4, 3, 1 грн, зі станції В – 5, 8, 3 грн, зі станції Г – 3, 5, 8 грн, зі станції Д – 8, 6, 5 грн.

4. Завод має три цехи – А, В, С і п'ять складів – № 1, № 2, № 3, № 4, № 5. Цех А виробляє 250 шт. виробів, цех В - 350 шт., цех С - 450 шт. Пропускна спроможність складів за той же час характеризується наступними показниками: склад № 1 – 150 шт., № 2 – 450 шт., склад № 3 – 150 шт., склад № 4 – 250 шт., склад № 5 – 150 шт. Вартість перевезення 1 тис. шт. виробів з цеху А в склади № 1, № 2, № 3, № 4, № 5 відповідно рівна 4, 1, 8, 3, 4 грн, з цеху В – 9, 3, 6, 5, 6 грн, з цеху С – 5, 4, 3, 2, 8 грн.

5. У чотирьох сховищах пального щодня зберігається 100, 200, 300 і 400 т бензину. Цей бензин щодня отримують чотири заправні станції в кількостях відповідно 400, 300, 200 і 100 т. Вартості перевезень 1 т бензину зі сховищ до заправних станцій задаються матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Література: [3, 4, 5, 8, 10].

Практична робота № 5

Тема. Транспортна задача. Визначення оптимального плану методом потенціалів

Мета роботи: набуття практичних навичок визначення оптимального плану транспортної задачі методом потенціалів.

Короткі теоретичні відомості

Знаходження оптимального плану транспортної задачі за *методом потенціалів*.

Після того, як знайдений вихідний опорний план перевезень, кожному постачальнику (кожному рядку) ставиться у відповідність деяке число u_i, а кожному споживачу – деяке число v_j. Числа u_i и v_j називають *потенціалами*, відповідно постачальника і споживача. Потенціали вибираються так, щоб у будь-якій завантаженій клітині їх сума дорівнювала тарифу цієї клітини, тобто $u_i + v_j = c_{ij}$.

Алгоритм розв'язання транспортної задачі за методом потенціалів:

1) побудувати опорний план перевезень за одним із наведених вище методів;

2) обчислити потенціали u_i и v_j, відповідно постачальників і споживачів;

3) обчислити суми потенціалів (*непрямі тарифи*) для вільних клітин $u_i + v_j = c'_{ij}$;

4) перевірити різниці (*оцінки*) $s_{ij} = c_{ij} – c'_{ij}$; якщо для вільних клітин усі $s_{ij} \geq 0$, то отриманий план оптимальний. Якщо хоч одна оцінка $s_{ij} < 0$, до зайнятих додають клітину, для якої оцінка мінімальна, і отримують новий план перевезень. Процес продовжують, доки не буде отримано план, для якого всі оцінки $s_{ij} \geq 0$.

Приклад виконання завдання

Визначити за методом потенціалів оптимальний план наведеного вище прикладу транспортної задачі та відповідне йому значення цільової функції.

Для розв'язання транспортної задачі *методом потенціалів* опорний план беремо за правилом «мінімального елемента».

Визначаємо потенціали зайнятих клітин:

(1; 1) $u_1 + v_1 = 2$;

(1; 3) $u_1 + v_3 = 3$;

(2; 2) $u_2 + v_2 = 6$;

(2; 3) $u_2 + v_3 = 8$;

(3; 3) $u_3 + v_3 = 9$;

(3; 4) $u_3 + v_4 = 5$.

Усіх потенціалів (m рядків + n стовпців) = 3 + 4 = 7, а зайнятих клітин (рівнянь $u_i+v_j = c_{ij}$) – 6. Для визначення u_i и v_j потрібно розв'язати систему з

6 рівнянь з 7 невідомими. Для цього присвоюємо одній із змінних (u_1) нульове значення. Тоді $v_1 = 2$; $v_3 = 3$; $u_2 = 5$; $v_2 = 1$; $u_3 = 6$; $v_4 = -1$.

Визначаємо непрямі тарифи для вільних клітин:

$c'_{12} = u_1 + v_2 = 0 + 1 = 1$;

$c'_{14} = u_1 + v_4 = 0 + –1 = -1$;

$c'_{21} = u_2 + v_1 = 5 + 1 = 6$;

$c'_{24} = u_2 + v_4 = 5 + –1 = 4$;

$c'_{31} = u_3 + v_1 = 6 + 2 = 8$;

$c'_{32} = u_3 + v_2 = 6 + 1 = 7$.

Визначаємо різниці для вільних клітин:

$s_{12} = c_{12} – c'_{12} = 4 - 1 = 3$;

$s_{14} = c_{14} – c'_{14} = 6 – (–1) = 7$;

$s_{21} = c_{21} – c'_{21} = 3 - 6 = -3$;

$s_{24} = c_{24} – c'_{24} = 7 – 4 = 3$;

$s_{31} = c_{31} – c'_{31} = 5 - 8 = -3$;

$s_{32} = c_{32} – c'_{32} = 10 - 7 = 3$.

Серед різниць є дві негативні, план неоптимальний. Різниці (оцінки) мінімальні для клітин (2; 1) і (3; 1).

Переводимо в число зайнятих спочатку клітину (2; 1). Будуємо для неї замкнутий прямокутний *контур*, вершинами якого є завантажені клітини. Вихідній клітині задається знак "+", далі знаки чергуються.

Запаси \ Потреби	200	300	300	100
300	2 200 -	4	3 100 +	6
400	3 +	6 300	8 100 -	7
200	5	10	9 100	5 100

Завантажуємо позитивні клітини (2; 1) і (1; 3) найменшою кількістю вантажу, узятим з негативних клітин (1; 1) и (2; 3) – min {200; 100} = 100.

Отримуємо новий план:

Запаси \ Потреби	200	300	300	100
300	100 (2)	(4)	200 (3)	(6)
400	100 (3)	300 (6)	(8)	(7)
200	(5)	(10)	100 (9)	100 (5)

Те саме робимо і для клітини (3, 1).

Запаси \ Потреби	<u>200</u>	<u>300</u>	300	<u>100</u>
300	100 (2) -	(4)	200 (3) +	(6)
400	100 (3)	300 (6)	(8)	(7)
200	(5) +	(10)	100 (9) -	100 (5)

Завантажуємо позитивні клітини (3: 1) і (1; 3) найменшою кількістю вантажу, узятим з негативних клітин (1; 1) і (3; 3) – min {100; 100} = 100 одиниць.

Отримаємо новий план:

Запаси \ Потреби	200	300	300	100
300	(2)	(4)	300 (3)	(6)
400	100 (3)	300 (6)	(8)	(7)
200	100 (5)	(10)	(9)	100 (5)

Знову визначаємо потенціали рядків і стовпців і оцінки для всіх вільних клітин.

Визначаємо потенціали зайнятих клітин:

(1; 3) $u_1 + v_3 = 3$; $u_1 = 0$, тоді $v_3 = 3$

(2; 1) $u_2 + v_1 = 3$;

(2; 2) $u_2 + v_2 = 6$;

(3; 1) $u_3 + v_1 = 5$;

(3; 4) $u_3 + v_4 = 5$.

Потенціалів 7, а зайнятих кліток 5.

Навіть після присвоєння змінної u_1 нульового значення система все одно не розв'язується. Тоді у вільній клітині вводимо *нульове перевезення*. У нашому випадку в клітину (1, 2) уводимо 0 одиниць вантажу і розраховуємо для неї потенціали:

$u_1 + v_2 = 4$, тоді $v_2 = 4$; $u_2 = 2$; $v_1 = 1$; $u_3 = 4$; $v_4 = 1$.

Визначаємо непрямі тарифи вільних клітин:

$c'_{11} = u_1 + v_1 = 0 + 1 = 1$;

$c'_{14} = u_1 + v_4 = 0 + 1 = 1$;

$c'_{23} = u_2 + v_3 = 2 + 3 =5$;

$c'_{24} = u_2 + v_4 = 2 + 1 = 3$;

$c'_{32} = u_3 + v_2 = 4 + 4 = 8$;

$c'_{33} = u_3 + v_3 = 4 + 3 = 7$.

Визначаємо різниці для вільних клітин:

$s_{11} = c_{12} – c'_{12} = 2 - 1 = 1$;

$s_{14} = c_{14} – c'_{14} = 6 – 1 = 5$;

$s_{23} = c_{21} – c'_{21} = 8 - 5 = 3$;

$s_{24} = c_{24} – c'_{24} = 7 – 4 = 3$;

$s_{32} = c_{31} – c'_{31} = 10 - 8 = 2$;

$s_{33} = c_{32} – c'_{32} = 9 - 7 = 2$.

Серед різниць немає негативних, план оптимальний.

Значення цільової функції: $L(X) = 3 \cdot 300 + 3 \cdot 100 + 6 \cdot 300 + 5 \cdot 100 + 5 \cdot 100 = 4000$ грн.

Завдання до теми

Для задач, наведених в завданні до Практичної роботи № 4, визначити за методом потенціалів оптимальний план даної транспортної задачі і відповідне йому значення цільової функції.

Література: [3, 4, 6, 8].

Практична робота № 6

Тема. Мережні графіки. Розрахунки часових параметрів мережних графіків

Мета роботи: набуття практичних навичок розрахунку часових параметрів мережних графіків аналітичним методом.

Короткі теоретичні відомості

Мережне планування дозволяє графічно відобразити і пов'язати між собою усі події, що забезпечують оптимальне досягнення поставленої мети. Основою мережного планування є *мережний графік.*

Мережний графік є графічною моделлю комплексу робіт або виробничого процесу.

Мережний графік будують за допомогою двох елементів: кола, що позначає *подію*, і стрілки, що поєднує дві події та позначає *роботу*.

Подія – результат виконання однієї або декількох робіт.

Робота – будь-який процес, дія, за допомогою якого досягають визначених результатів.

У мережних графіках напрямок стрілок відображає хід часу. Довжина стрілок не пов'язана з тривалістю робіт. Традиційно послідовність стрілок орієнтується зліва направо.

Подія не має тривалості у часі. Подія зображується на мережному графіку за допомогою кола, у якому записують номер події.

У мережному графіку особливими подіями є *вихідна*, у яку не входить жодна робота, і *завершальна*, з якої не виходить жодна робота.

Важливим елементом мережного графіка є *шлях* – безперервна послідовність робіт. *Довжина шляху* визначається як сума тривалостей робіт, що його складають.

Повний шлях – шлях від вихідної події до завершальної.

Повний шлях, що має найбільшу тривалість, називають *критичним шляхом*, а його тривалість $t_{кр}$ – *критичним строком*. *Критичними* називають також події та роботи, що лежать на критичному шляху.

До основних часових параметрів мережного графіка відносять тривалість критичного шляху, ранні й пізні терміни звершення подій, резерви часу події, ранні й пізні терміни початку і закінчення робіт, повні й вільні резерви часу робіт.

Уведемо наступні позначення: t(i–j) – тривалість роботи при переході від події *i* до події *j*; t(i), t(j) – терміни звершення попередньої події з номером *i* та наступної події з номером *j*.

Ранній термін звершення події $t_р(i)$ – сумарна тривалість робіт найбільшого за тривалістю шляху, що веде з початкової події графіка в цю подію *i*. Ранній термін звершення вихідної події дорівнює нулю.

Пізній термін звершення події $t_п(i)$ – різниця між тривалістю критичного шляху і сумарною тривалістю робіт, які лежать на максимальному зі шляхів, що ведуть від цієї події і до завершальної події графіка. Пізній термін звершення завершальної події дорівнює тривалості критичного шляху.

Усі роботи, що не лежать на критичному шляху, мають *резерви часу*, іншими словами, допустимі терміни затримки виконання робіт, не змінюючи терміну настання завершальної події мережі.

Резерв часу R(i) події i дорівнює різниці між пізнім і раннім терміном звершення події:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i) \tag{6.1}$$

Також визначаються:

– ранній термін початку роботи:

$$t_{р.н.}(i-j)=t_p(i);\qquad(6.2)$$

– ранній термін закінчення роботи (i–j):

$$t_{р.о.}(i-j)=t_p(i)+t(i-j);\qquad(6.3)$$

– пізній термін початку роботи (i–j):

$$t_{п.н.}(i-j)=t_n(j)-t(i-j);\qquad(6.4)$$

– пізній термін закінчення роботи (i–j):

$$t_{п.о.}(i-j)=t_n(j);\qquad(6.5)$$

– повний резерв часу $R_п(i–j)$ роботи (i–j):

$$R_n(i-j)=t_n(j)-t_p(i)-t(i-j)=t_n(j)-t_{p.o}(i-j);\qquad(6.6)$$

– вільний резерв часу $R_с(i–j)$ роботи (i–j):

$$R_c(i-j)=t_p(j)-t_p(i)-t(i-j)=t_p(j)-t_{p.o}(i-j)\qquad(6.7)$$

Приклад виконання завдання

За вихідними даними побудувати мережний графік і визначити його параметри (критичний шлях і його тривалість, ранні та пізні терміни звершення подій, резерви часу подій, ранні та пізні терміни початку та закінчення робіт, повні та вільні резерви часу робіт):

t(1–2) = 3 дні	t(2–3) = 17 днів	t(3–6) = 12 днів	t(6–9) = 14 днів
t(1–3) = 12 днів	t(2–4) = 8 днів	t(4–7) = 6 днів	t(7–9) = 3 дні
t(1–5) = 4 дні	t(2–5) = 18 днів	t(5–8) = 7 днів	t(8–9) = 9 днів

Розв’язання:

1. Кожну подію на графіку зображуватимемо колом, у якому запишемо його номер (рис. 6.1). Вихідну подію прийнято зображувати крайньою зліва. Праворуч від вихідної події зображуємо події, які пов’язані з вихідною подією роботами. Події, відповідно до початкових даних, з’єднуються стрілками, над якими вказується тривалість роботи. Завершальну подію прийнято зображувати

крайньою справа. Кожен зі шляхів на графіку повинен йти зліва направо в порядку зростання номерів подій.

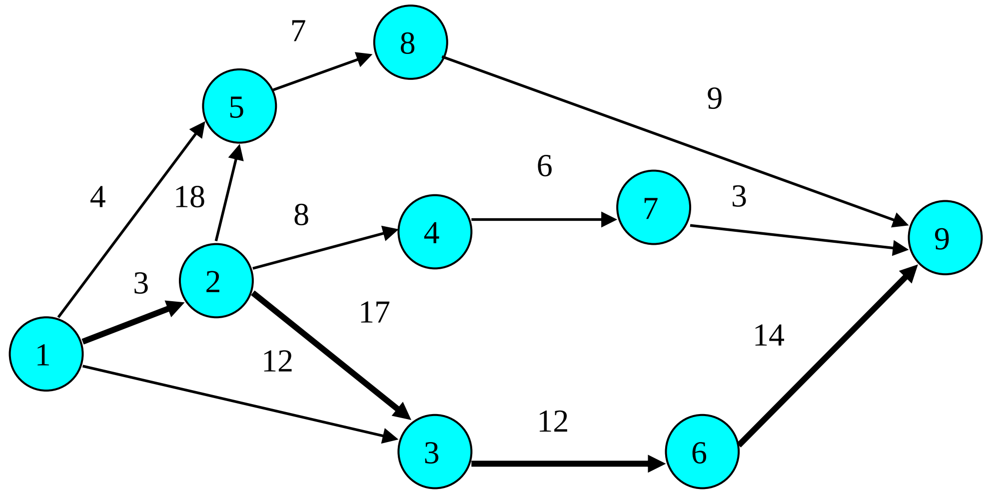

Рисунок 6.1 – Мережний графік

2. За отриманим мережним графіком визначають повні шляхи і розраховують їх тривалість.

Повні шляхи:

1–2–3–6–9: t(1–2) + t(2–3) + t(3–6) + t(6–9) = 3+17+12+14 = 46 днів;

1–2–4–7–9: t(1–2) + t(2–4) + t(4–7) + t(7–9) = 3+8+6+3 = 20 днів;

1–2–5–8–9: t(1–2) + t(2–5) + t(5–8) + t(8–9) = 3+18+7+9 = 37 днів;

1–3–6–9: t(1–3) + t(3–6) + t(6–9) = 3+12+14 = 29 днів;

1–5–8–9: t(1–5) + t(5–8) + t(8–9) = 4+7+9 = 20 днів.

3. Визначають критичний шлях як повний шлях з максимальною тривалістю. Виділяють критичний шлях на мережному графіку. Тривалість критичного шляху: $t_{кр}$ = t(1–2)+ t(2–3)+ t(3–6)+ t(6–9) = 3+17+12+14 = 46 днів.

4. Визначають ранні терміни звершення подій.

Ранній термін звершення вихідної події дорівнює нулю. Ранній термін звершення події 2 дорівнює 3 дні, оскільки до нього веде тільки один шлях (1–2) з тривалістю 3 дні. До події 3 ведуть два шляхи – 1–3 (тривалістю 12 днів) і 1–2–3 (тривалістю 3+17 = 20 днів). Отже, ранній термін звершення події 3 дорівнює 20 дням. До події 5 також ведуть два шляхи – 1–5 (тривалістю 4 дні) і 1–2–5 (тривалістю 3+18 = 21 день). Отже, ранній термін звершення події 3 дорівнює 21 день. Аналогічно обчислюються ранні терміни звершення інших подій. Дані заносимо до таблиці 6.1.

5. Визначають пізні терміни звершення подій.

Пізній термін звершення завершальної події дорівнює тривалості критичного шляху, тобто пізній термін звершення події 9 дорівнює 46 дням. Пізній термін звершення події 8 дорівнює різниці тривалості критичного шляху і шляху 8–9. Пізній термін звершення події 5 дорівнює різниці тривалості критичного шляху і шляху 5 – 8 – 9 = 30 днів. Від події 2 до завершальної події йде декілька шляхів: 2 – 3 – 6 – 9 (43 дні), 2 – 4 – 7 – 9 (17 днів), 2 – 5 – 8 – 9 (34 дні). Пізнім терміном звершення події 2 буде різниця між тривалістю критичного шляху і максимальною тривалістю цих шляхів (46 – 43 = 3 дні). Дані заносимо до таблиці 6.1

6. Визначають резерв часу R(i) події *i*.

Результати розрахунків заносимо до таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 – Результати розрахунків часових параметрів подій

Номер події	Ранній термін звершення події, днів	Пізній термін звершення події, днів	Резерв часу події, днів
1	0	0	0
2	3	3	0
3	20	20	0
4	11	37	26
5	21	30	9
6	32	32	0
7	17	43	26
8	28	37	9
9	46	46	0

7. Визначають ранні та пізні терміни початку і закінчення робіт, повні й вільні резерви часу робіт.

Результати розрахунку цих параметрів заносимо до таблиці 6.2.

Таблиця 6.2 – Результати розрахунків часових параметрів робіт

Робота	t(i–j), днів	$t_{р.н.}$, днів	$t_{р.о.}$, днів	$t_{п.н.}$, днів	$t_{п.о.}$, днів	$R_п$, днів	$R_с$, днів
1–2	3	0	3	0	3	0	0
1–3	12	0	12	8	20	8	8
1–5	4	0	4	26	30	26	17
2–3	17	3	20	3	20	0	0
2–4	8	3	11	29	37	26	0
2–5	18	3	21	12	30	9	0
3–6	12	20	32	20	32	0	0
4–7	6	11	17	37	43	26	0
5–8	7	21	28	30	37	9	0
6–9	14	32	46	32	46	0	0
7–9	3	17	20	43	46	26	26
8–9	9	28	37	37	46	9	9

Критичні роботи (роботи, що лежать на критичному шляху), так само, як і критичні події, резервів часу не мають.

Завдання до теми

За вихідними даними побудувати мережний графік і визначити його параметри (ранні і пізні терміни звершення подій, резерви часу подій, ранні і пізні терміни початку і закінчення робіт, повні і вільні резерви часу робіт).

Варіант № 1		**Варіант № 2**		**Варіант № 3**		**Варіант № 4**		**Варіант № 5**	
Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів
1-2	6	1-2	3	1-2	3	1-2	5	1-2	10
1-3	3	1-3	8	1-3	7	1-3	8	1-3	8
1-4	8	2-4	11	2-3	2	1-4	13	2-4	9
2-5	8	3-4	4	3-4	11	2-5	6	3-4	7
3-5	5	3-5	5	3-5	13	3-5	4	3-5	10
3-6	7	4-5	7	4-6	6	3-6	8	4-6	9
4-6	10	4-6	5	5-7	6	4-6	12	5-6	4
5-6	2	5-7	9	6-8	5	5-6	5	5-7	9
5-8	5	6-8	6	7-9	7	6-7	8	6-7	3
6-7	4	7-9	3	8-9	10	6-8	3	6-8	7
6-8	6	8-9	7	9-10	4	7-9	11	7-8	8
7-8	3	9-10	5			8-9	8	8-9	5

Література: [3, 4, 6, 12].

2 КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ

1. Лекції. Загалом 25 балів.

Кількість лекцій – 13 (26 годин).

Студент за одну лекцію може отримати максимальну оцінку 2 бали. Отримуючи більше 20 балів, студент додатково отримує 5 балів. Вимоги отримання балів: відвідування (0,8 бала), ведення конспекту (0,6 бала), робота на лекції (0,6 бала).

2. Практичні робота. Загалом 25 балів.

Кількість практичних занять – 13 (26 годин).

Виконуючи вимоги, на кожному практичному занятті студент може отримати максимальну оцінку 2 бали. Отримуючи більше 20 балів, студент додатково отримує 5 балів. Вимоги для отримання балів: відвідування (2,4 бала), підготовка до робота (0,6 бала), ведення конспекту (0,3 бала), активність студента (0,3 бала).

3. Поточний контроль. Загалом 30 балів. Бали розподіляються рівномірно між двома контрольними за змістовими модулями (по 15 балів), які виконують письмово або унаслідок тестування в Системі on-line-навчання та оцінювання знань студентів КрНУ. Розподіл балів за відповідь на модулі здійснюють так: «незадовільно» – 4 бали, «задовільно» – 6 балів, «добре» – 8 балів, «відмінно» – 15 балів.

4. Підсумковий контроль (іспит). Загалом 20 балів. Виконують письмово. Бали нараховують залежно від відповіді студента: «незадовільно» – 8 і менше балів, «задовільно» – 12 балів, «добре» – 16 балів, «відмінно» – 20 балів.

Загальна максимальна сума балів – 100 балів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Системологія на транспорті: Кн. 3: Дослідження операцій у транспортних системах: підручник: у 5 кн. / Е. В. Гаврилов та ін. Київ: Знання України, 2009. 375 с.

2. Четверухін Б. М. Дослідження операцій в транспортних системах : навчальний посібник. Ч. 1, 2. Київ: НТУ, 2001. 141 с.

3. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: підручник. Київ: Видавничий дім «Слово», 2006. 816 с.

4. Зайченко О. Ю., Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: збірник задач. Київ: Видавничий дім «Слово», 2007. 472 с.

5. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посіб. Київ: КНЕУ, 2003. 452 с.

6. Экономико-математические методы и прикладные модели / В. В. Федосеев и др.; Под ред. В.В. Федосеева. Москва: ЮНИТИ, 1999. 391 с.

7. Катренко А. В. Дослідження операцій: підручник. Львів: Магнолія Плюс, 2004. 549 с.

8. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов. Москва: ЮНИТИ, 2003. 407 с.

9. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учеб. пособие. Санкт-Петербург: Лань, 2011. 352 с.

10. Кузнецов А. В., Холод Н. И., Костевич Л. С. Руководство к решению задач по математическому программированию. Минск: Вышэйш. школа, 1978. 256 с.

11. Кожин А. П., Мезенцев В. Н. Математические методы в планировании и управлении грузовыми автомобильными перевозками: учеб. для вузов. Москва: Транспорт, 1994. 304 с.

12. Жлуктенко В. І., Тарасова Л. Г., Савіна С. С. Дослідження операцій: навч. посіб. Київ: КНЕУ, 2009. 479 с.

Додаткова

13. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій: навч. посібник. Київ: Вид-во ТОВ «Видавничий дім «Професіонал», 2004. 350 с.

14. Таха Хемди А. Введение в исследование операций. Москва [и др.]: Вильямс, 2007. 901 с.

15. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: учеб. пособие. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 288 с.

Ресурси мережі Інтернет

1. Навчальні матеріали онлайн. URL: http://pidruchniki.com.

2. Симплекс-метод онлайн: шаг за шагом. URL: http://reshmat.ru/simplex.html.

3. Транспортная задача. URL: https://math.semestr.ru/transp/index.php.

Методичні вказівки щодо виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах» для студентів денної та заочної форм навчання зі спеціальності 275 – «Транспортні технології (за видами)» освітньо-професійної програми «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)» освітнього ступеня «Бакалавр»

Укладачі: д. т. н., проф. М. М. Мороз,
д. т. н., доц. В. Г. Загорянський

Відповідальний за випуск зав. кафедри транспортних технологій
М. М. Мороз

Підп. до др. _______. Формат 60х84 1/16. Папір тип. Друк ризографія.

Ум. друк. арк. ____. Наклад ____ прим. Зам. № _____. Безкоштовно.

Редакційно-видавничий відділ
Кременчуцького національного університету
імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600