ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»

протокол від __ квітня 2023 р.
№__

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
для проведення лабораторних занять з навчальної дисципліни «Математичні методи дослідження операцій»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»
спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення»
освітньо-професійна програма «Інженерія програмного забезпечення»
факультет інформаційно-комп'ютерних технологій
кафедра інженерії програмного забезпечення

Рекомендовано на засіданні кафедри ІПЗ
___ квітня 2023 р.,
протокол № ___

Розробники: старший викладач кафедри ІПЗ ЛОКТІКОВА Тамара,
старший викладач кафедри ІПЗ КУШНІР Надія

Житомир
2023

ВСТУП 3

Лабораторна робота 1 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ 4

Лабораторна робота 2 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ МЕТОДОМ СИМПЛЕКС-ТАБЛИЦЬ 10

Лабораторна робота 3 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ МЕТОДОМ ШТУЧНОГО БАЗИСУ 17

Лабораторна робота 4 ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ 25

Лабораторна робота 5 РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ (Т-ЗАДАЧІ) 33

Лабораторна робота 6 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ 45

Лабораторна робота 7 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ МЕТОДОМ МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА 55

Лабораторна робота 8 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ 58

ВСТУП

Методичні рекомендації орієнтовані на студентів закладів вищої освіти, які навчаються за спеціальністю 121 «Інженерія програмного забезпечення» і призначені для надання допомоги студентам при підготовці та виконанні лабораторних робіт з дисципліни «Математичні методи дослідження операцій».

Лабораторний практикум складається з восьми лабораторних робіт, спрямованих на вивчення методів й алгоритмів розв’язання задач математичного програмування (МП).

При цьому охоплюються такі класи задач МП: задачі лінійного програмування (ЛП), в тому числі транспортні задачі (Т-задачі), задачі цілочисельного програмування (ЦП), задачі нелінійного програмування (НП), задачі опуклого та вгнутого програмування, задачі квадратичного програмування (КП). Відповідно розглядаються методи розв’язання таких задач: графічний, метод симплекс-таблиць, метод штучного базису і двоїстий симплекс-метод розв’язання задач ЛП, метод потенціалів розв’язання Т-задач, метод правильних відсічень (Гоморі) розв’язання задач ЦП, метод множників Лагранжа розв’язання задач НП, а також метод розв’язання задач КП.

Методичні рекомендації до кожної лабораторної роботи містять деталізовані приклади розв’язання конкретних задач МП, із використанням відповідних методів і алгоритмів.

Лабораторна робота 1

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ

Мета: засвоїти графічний метод розв'язання задач ЛП.

1.1 Порядок виконання роботи

Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування (ЛП):

заснований на геометричній інтерпретації задачі ЛП;

використовується для розв'язання задач ЛП, які залежать від двох або трьох змінних (на площині або у просторі відповідно);

є простим і наочним.

Розглянемо метод на прикладі такої задачі:

$$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 30 \\ 2x_2 \le 16 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Спочатку побудуємо на площині, у декартовій прямокутній системі координат, область допустимих розв'язків (ОДР) задачі, що визначається системою умов-обмежень.

Кожна із нерівностей задає на площині відповідну напівплощину. Для того, щоб її визначити, потрібно побудувати відповідну пряму, яка розділяє площину на дві напівплощини та визначити, в якій з них виконуватиметься нерівність. Визначена напівплощина позначається відповідним штрихуванням.

У нашій задачі матимемо:

1-ша пряма

$3x_1 + x_2 = 21$

x_1	x_2
0	21
7	0

2-га пряма

$$2x_1 + 3x_2 = 30$$

x_1	x_2
0	10
15	0

3-тя пряма

$$2x_2 = 16$$

- паралельна осі $0x_1$ і проходить через точку з координатами (0;8).

Побудуємо прямі, знайдемо області, в яких виконуватимуться нерівності. ОДР являтиме собою область перетину п’яти знайдених областей – опуклу багатогранну область 0ABCD (рис. 1.1).

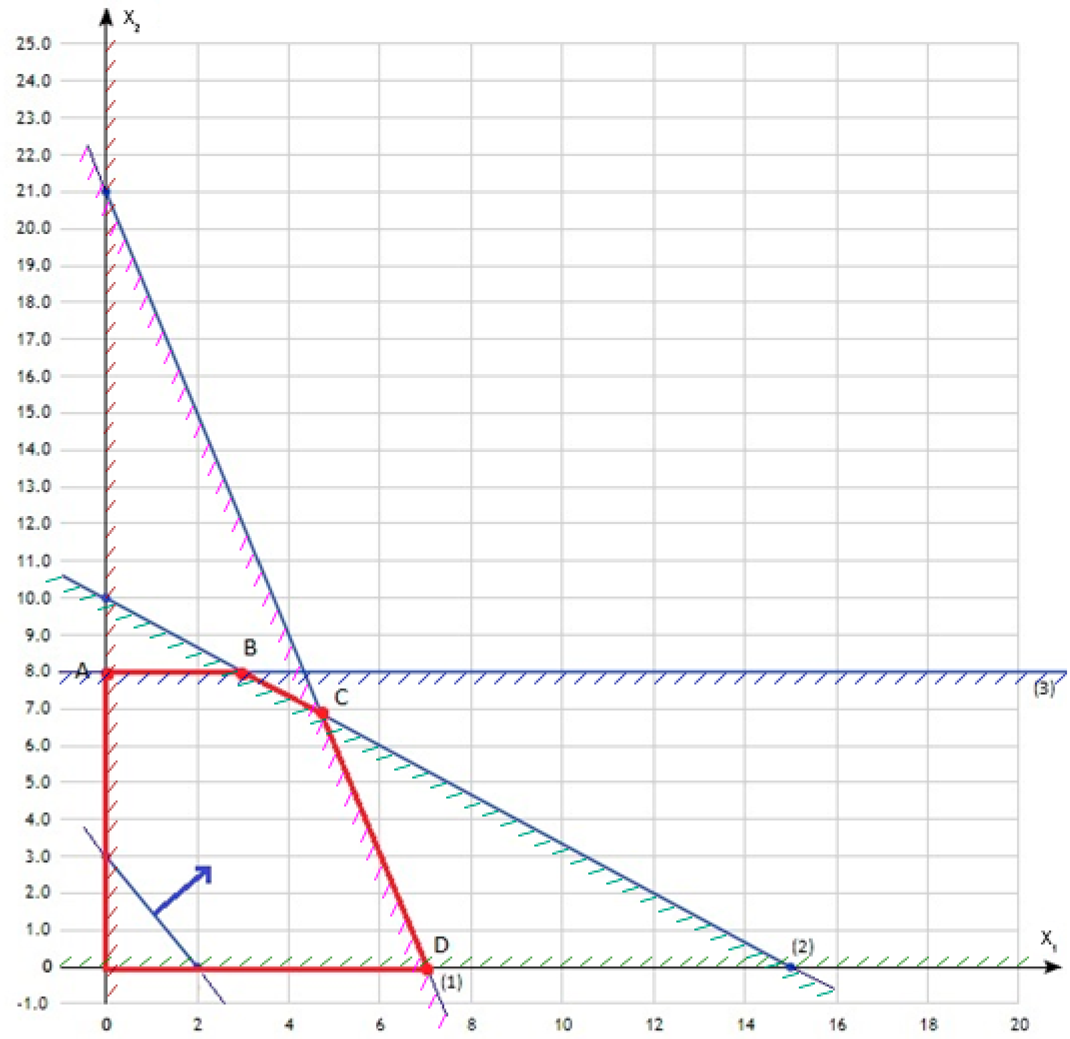

Рисунок 1.1

Далі, цільовій функції $F(x_1, x_2)$ на площині відповідає сукупність паралельних прямих відповідного нахилу.

Побудуємо для цільової функції нашої задачі $F(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$ одну із прямих $3x_1 + 2x_2 = 6$ і визначимо напрямок, при просуванні в якому значення цільової функції зростатиме. Рухатимемося у визначеному напрямку доти, доки не вийдемо на останню спільну точку з областю допустимих розв'язків задачі – це буде вершина C багатогранника 0ABCD і в ній досягатиметься максимальне значення цільової функції.

Координати точки C будуть оптимальним розв'язком нашої задачі. Їх легко знайти, оскільки точка C є точкою перетину прямих (1) та (2). Тому розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 21 \\ 2x_1 + 3x_2 = 30 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 21 & 1 \\ 30 & 3 \end{vmatrix} = 63 - 30 = 33,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 \\ 2 & 30 \end{vmatrix} = 90 - 42 = 48,$$

$$x_1 = \frac{33}{7} = 4\frac{5}{7}, x_2 = \frac{48}{7} = 6\frac{6}{7}.$$

$$F_{max} = 3 \times \frac{33}{7} + 2 \times \frac{48}{7} = \frac{195}{7} = 27\frac{6}{7}.$$

Завдання

Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом.

Таблиця 1.1

№ варіанту	Умови задачі
1	**2**
1	$F(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
2	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2 \to max$ $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
3	$F(x_1, x_2) = -3x_1 + 6x_2 \to min$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Продовження табл. 1.1

1	**2**
4	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -5x_1 + x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 5x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
5	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
6	$F(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 \rightarrow min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
7	$F(x_1, x_2) = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
8	$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \end{cases}$
9	$F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Продовження табл. 1.1

1	**2**
10	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2 \to min$ $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
11	$F(x_1, x_2) = 7x_1 + 5x_2 \to max$ $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \geq 7 \\ 7x_1 - 5x_2 \geq 35 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
12	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 \to max$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
13	$F(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 \to min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
14	$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 5x_2 \geq 4 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \end{cases}$
15	$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + 7x_2 \geq 21 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 1 \end{cases}$

Лабораторна робота 2

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ МЕТОДОМ СИМПЛЕКС-ТАБЛИЦЬ

Мета: засвоїти метод симплекс-таблиць розв'язання задач ЛП.

2.1 Порядок виконання роботи

Розглянемо метод на прикладі такої задачі:

$$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_2 \leq 16 \qquad \to x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Математична модель задачі приводиться до канонічного вигляду.

Нерівності обертаються в рівності шляхом введення вільних змінних – x_3, x_4, x_5 відповідно:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_5) = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 21 \\ 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 30 \\ x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 8 \\ x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Отримується початковий допустимий базисний розв'язок задачі, який задовольняє всім умовам-обмеженням:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 21, x_4 = 30, x_5 = 8.$$

Складається вихідна симплекс-таблиця

Таблиця 2.1

	C	–	3	2	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
← 0	x_3	21	**3**	1	1	0	0
0	x_4	30	2	3	0	1	0
0	x_5	8	0	1	0	0	1
	Δ	0	-3	-2	0	0	0

Оцінки індексного рядка розраховуються таким чином:

$\Delta_0 = 0 \cdot 21 + 0 \cdot 30 + 0 \cdot 8 = 0,$

$\Delta_1 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 - 3 = -3,$

$\Delta_2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 - 2 = -2,$

$\Delta_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$

$\Delta_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$

$\Delta_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$

Аналізуються оцінки індексного рядка.

Розв’язуємо задачу ЛП на max, маємо в індексному рядку найвід’ємнішу оцінку $\Delta_1 = -3$, а у відповідному стовпці додатні елементи, тому можливий перехід до іншого, більш кращого розв’язку задачі.

Визначається напрямний стовпець – A_1 (за найвід’ємнішою оцінкою), який вказує на змінну, що вводитиметься в базис для покращення розв’язку задачі – x_1.

Визначається напрямний рядок – x_3 (за найменшим з відношень елементів стовпця A_0 до елементів напрямного стовпця A_1 – $\min\{\frac{21}{3}; \frac{30}{2}\} = 7$). Змінна x_3 виводитиметься з базису.

На перетині напрямного стовпця та напрямного рядка знаходиться напрямний елемент – $x_{31} = 3$.

Розраховуються елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 2.2´

C	–	3	2	0	0	0
B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
x_1	$21 : 3$	$3 : 3$	$1 : 3$	$1 : 3$	$0 : 3$	$0 : 3$
x_4	$30 - \frac{21 \cdot 2}{3}$	$2 - \frac{3 \cdot 2}{3}$	$3 - \frac{1 \cdot 2}{3}$	$0 - \frac{1 \cdot 2}{3}$	$1 - \frac{0 \cdot 2}{3}$	$0 - \frac{0 \cdot 2}{3}$
x_5	$8 - \frac{21 \cdot 0}{3}$	$0 - \frac{3 \cdot 0}{3}$	$1 - \frac{1 \cdot 0}{3}$	$0 - \frac{1 \cdot 0}{3}$	$0 - \frac{0 \cdot 0}{3}$	$1 - \frac{0 \cdot 0}{3}$
Δ						

Таблиця 2.2

	C	–	3	2	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
3	x_1	7	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
← 0	x_4	16	0	$\boldsymbol{\frac{7}{3}}$	$-\frac{2}{3}$	1	0
0	x_5	8	0	1	0	0	1
	Δ	21	0	-1	1	0	0

Оскільки серед оцінок індексного рядка ще є від'ємна ($\Delta_2 = -1$), а у відповідному стовпці A_2 є додатні елементи, то процес розв'язання продовжується, тому що можливий перехід до більш кращого розв'язку задачі, пов'язаного з більшим значенням цільової функції.

Напрямний стовпець – A_2, напрямний рядок – x_4, напрямний елемент – $x_{42} = \frac{7}{3}$.

Будується наступна симплекс-таблиця.

Таблиця 2.3´

C	–	3	2	0	0	0
B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
x_1	$7-(16\cdot\frac{1}{3}):\frac{7}{3}$	$1-(0\cdot\frac{1}{3}):\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}-(\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3}):\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}-(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}):\frac{7}{3}$	$0-(1\cdot\frac{1}{3}):\frac{7}{3}$	$0-(0\cdot\frac{1}{3}):\frac{7}{3}$
x_2	$16:\frac{7}{3}$	$0:\frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}:\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}:\frac{7}{3}$	$1:\frac{7}{3}$	$0:\frac{7}{3}$
x_5	$8-(16\cdot 1):\frac{7}{3}$	$0-(0\cdot 1):\frac{7}{3}$	$1-\left(\frac{7}{3}\cdot 1\right):\frac{7}{3}$	$0-\left(-\frac{2}{3}\cdot 1\right):\frac{7}{3}$	$0-(1\cdot 1):\frac{7}{3}$	$1-(0\cdot 1):\frac{7}{3}$
Δ						

Таблиця 2.3

	C	–	3	2	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
3	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{\frac{33}{7}}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0
2	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{\frac{48}{7}}$	0	1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	0
0	x_5	$\frac{8}{7}$	0	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	1
	Δ	$\frac{195}{7}$	0	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$	0

В індексному рядку всі оцінки $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_5 \geq 0$, тому отриманий оптимальний розв'язок задачі:

$$\boldsymbol{x_1=\frac{33}{7}, x_2=\frac{48}{7}, F_{max}=\frac{195}{7}}.$$

Завдання

Розв'язати задачу лінійного програмування методом симплекс-таблиць.

Таблиця 2.4

№ варіанту	**Умови задачі**
1	**2**
1	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 7 \\ -x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
2	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -3 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 42 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
3	$F(x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2 \to min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 9 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 27 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
4	$F(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + x_2 + 2x_3 \to max$ $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$
5	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
6	$F(x_1, x_2) = 8x_1 + 2x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4 \\ -4x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Продовження табл. 2.4

1	**2**
7	$F(x_1,x_2) = 5x_1 + 4x_2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \\ -x_1 + x_2 \le 5 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
8	$F(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1 + 2x_2 \le 16 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
9	$F(x_1,x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to max$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 30 \\ 2x_1 \le 16 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
10	$F(x_1,x_2) = x_1 + 4x_2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \ge -2 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
11	$F(x_1,x_2) = x_1 + 4x_2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 17 \\ 10x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
12	$F(x_1,x_2,x_3) = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \le 4 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 2 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$

Продовження табл. 2.4

1	**2**
13	$F(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 4x_1 - 5x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
14	$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 4 \\ 5x_1 - x_3 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge -4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$
15	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \to max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 42 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Лабораторна робота 3

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ МЕТОДОМ ШТУЧНОГО БАЗИСУ

Мета: засвоїти метод штучного базису розв'язання задач ЛП.

3.1 Порядок виконання роботи

Метод штучного базису розв'язання задач ЛП призначений для розв'язання задач ЛП із умовами-обмеженнями будь-якого виду.

Розглянемо метод на прикладі такої задачі:

$$F(x_1, x_2) = 5x_1 + 30x_2 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 50 \\ x_2 \geq 5 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приведемо математичну модель задачі ЛП до канонічного вигляду.

Перейдемо від задачі на відшуковування min значення цільової функції до задачі на відшуковування max значення цільової функції:

$$F'(x_1, x_2) = -F(x_1, x_2) = -5x_1 - 30x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 50 \\ x_2 \geq 5 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Обернемо нерівності в рівності шляхом введення вільних змінних x_3, x_4, x_5 відповідно:

$$F'(x_1, x_2, \dots, x_5) = -5x_1 - 30x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 50 \\ x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 0x_5 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 = 150 \\ x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Отримаємо початковий допустимий базисний розв'язок задачі, який задовольнятиме всім умовам-обмеженням. Але зробити це так легко, як у попередньому прикладі, не вдасться.

Введемо в задачу три штучні змінні x_6, x_7, x_8:

$$F'(x_1, x_2, \dots, x_8) = -5x_1 - 30x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 + 0x_8 = 50 \\ x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 + 0x_8 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 1x_8 = 150 \\ x_1, x_2, \dots, x_8 \geq 0. \end{cases}$$

Тоді отримаємо початковий допустимий базисний розв'язок задачі:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 50, x_7 = 5, x_8 = 150.$$

Заповнимо вихідну симплекс-таблицю:

Таблиця 3.1

	C	–	-5	-30	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
$-M$	x_6	50	1	2	-1	0	0	1	0	0
$-M$	x_7	5	0	1	0	-1	0	0	1	0
$\leftarrow -M$	x_8	150	**5**	2	0	0	-1	0	0	1
	Δ	$-205M$	$-6M + 5$	$-5M + 30$	M	M	M	0	0	0

Оцінки індексного рядка розраховуються таким чином:

$\Delta_0 = -M \cdot 50 + (-M) \cdot 5 + (-M) \cdot 150 = -205M,$

$\Delta_1 = -M \cdot 1 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot 5 - (-5) = -6M + 5,$

$\Delta_2 = -M \cdot 2 + (-M) \cdot 1 + (-M) \cdot 2 - (-30) = -5M + 30,$

$\Delta_3 = -M \cdot (-1) + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot 0 - 0 = M,$

$\Delta_4 = -M \cdot 0 + (-M) \cdot (-1) + (-M) \cdot 0 - 0 = M,$

$\Delta_5 = -M \cdot 0 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot (-1) - 0 = M,$

$\Delta_6 = -M \cdot 1 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot 0 - (-M) = 0,$

$\Delta_7 = -M \cdot 0 + (-M) \cdot 1 + (-M) \cdot 0 - (-M) = 0,$

$\Delta_8 = -M \cdot 0 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot 1 - (-M) = 0.$

Визначимо:

напрямний стовпець – A_1,

напрямний рядок – x_8,

напрямний елемент – $x_{81} = 5$.

Розрахуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 3.2´

C	–	-5	-30	0	0	0	$-M$	$-M$
B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
x_6	$50-\frac{150\cdot1}{5}$	$1-\frac{5\cdot1}{5}$	$2-\frac{2\cdot1}{5}$	$-1-\frac{0\cdot1}{5}$	$0-\frac{0\cdot1}{5}$	$0-\frac{-1\cdot1}{5}$	$1-\frac{0\cdot1}{5}$	$0-\frac{0\cdot1}{5}$
x_7	$5-\frac{150\cdot0}{5}$	$0-\frac{5\cdot0}{5}$	$1-\frac{2\cdot0}{5}$	$0-\frac{0\cdot0}{5}$	$-1-\frac{0\cdot0}{5}$	$0-\frac{-1\cdot0}{5}$	$0-\frac{0\cdot0}{5}$	$1-\frac{0\cdot0}{5}$
x_1	$150:5$	$5:5$	$2:5$	$0:5$	$0:5$	$-1:5$	$0:5$	$0:5$
Δ								

Таблиця 3.2

	C	–	-5	-30	0	0	0	$-M$	$-M$
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
$-M$	x_6	20	0	$\frac{8}{5}$	-1	0	$\frac{1}{5}$	1	0
$-M$	x_7	5	0	**1**	0	-1	0	0	1
-5	x_1	30	1	$\frac{2}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	0
	Δ	$-25M-150$	0	$-\frac{13}{5}M+28$	M	M	$-\frac{1}{5}M+1$	0	0

Визначимо:

напрямний стовпець – A_2,

напрямний рядок – x_7,

напрямний елемент – $x_{72} = 1$.

Розрахуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 3.3

	C	–	-5	-30	0	0	0	$-M$
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
$-M$	x_6	12	0	0	-1	$\mathbf{\frac{8}{5}}$	$\frac{1}{5}$	1
-30	x_2	5	0	1	0	-1	0	0
-5	x_1	28	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
	Δ	$-12M-290$	0	0	M	$-\frac{8}{5}M+28$	$-\frac{1}{5}M+1$	0

Визначимо:

напрямний стовпець – A_4,

напрямний рядок – x_6,

напрямний елемент – $x_{64}=\frac{8}{5}$.

Розрахуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 3.4

	C	–	-5	-30	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_4	$\frac{60}{8}$	0	0	$-\frac{5}{8}$	1	$\mathbf{\frac{1}{8}}$
-30	x_2	$\frac{25}{2}$	0	1	$-\frac{5}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
-5	x_1	25	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$
	Δ	-500	0	0	$\frac{35}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$

Визначимо:

напрямний стовпець – A_5,

напрямний рядок – x_4,

напрямний елемент – $x_{45} = \frac{1}{8}$.

Розрахуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 3.5

	C	–	-5	-30	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_5	60	0	0	-5	8	1
-30	$\boldsymbol{x_2}$	**5**	0	1	0	-1	0
-5	$\boldsymbol{x_1}$	**40**	1	0	-1	2	0
	Δ	-350	0	0	5	20	0

Отримали оптимальний розв'язок задачі:

$$\boldsymbol{x_1 = 40, x_2 = 5, F_{min} = 350.}$$

Таким чином, якщо в задачі ЛП мають місце умови-обмеження різного виду ($\leq, \geq, =$), то після приведення математичної моделі до канонічного вигляду штучні змінні вводяться тільки в ті обмеження, де у вихідній системі були знаки $\geq, =$ (за всіх додатніх вільних членах).

Завдання

Розв’язати задачу лінійного програмування методом штучного базису.

Таблиця 3.6

№ варіанту	Умови задачі
1	**2**
1	$F(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
2	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2 \to max$ $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
3	$F(x_1, x_2) = -3x_1 + 6x_2 \to min$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
4	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -5x_1 + x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 5x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
5	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Продовження табл. 3.6

1	**2**
6	$F(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 \rightarrow min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
7	$F(x_1, x_2) = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
8	$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \end{cases}$
9	$F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
10	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2 \rightarrow min$ $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
11	$F(x_1, x_2) = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \geq 7 \\ 7x_1 - 5x_2 \geq 35 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Продовження табл. 3.6

1	**2**
12	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 \to max$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
13	$F(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 \to min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
14	$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 5x_2 \geq 4 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \end{cases}$
15	$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + 7x_2 \geq 21 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 1 \end{cases}$

Лабораторна робота 4

ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

Мета: навчитися складати двоїсту задачу ЛП; дослідити взаємний зв'язок поміж оцінками індексного рядка оптимальної симплекс-таблиці однієї та оптимальним розв'язком другої з пари задач ЛП.

4.1 Порядок виконання роботи

Розглянемо питання двоїстості в ЛП на такому прикладі.

Нехай маємо таку пряму задачу:

$$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ 3x_1 - x_2 \geq -5 \\ -x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Знайдемо оптимальний розв'язок прямої задачі, методом штучного базису.

Приведемо математичну модель задачі до канонічного вигляду. Перейдемо від задачі на відшуковування min значення цільової функції до задачі на відшуковування max значення цільової функції; обернемо нерівності в рівності шляхом введення вільних змінних – x_3, x_4, x_5, x_6:

$$F'(x_1, x_2, \dots, x_6) = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 10 \\ -3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1x_6 = 3 \\ x_1, x_2, \dots, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Для отримання початкового допустимого базисного розв'язку задачі введемо в останню умову-обмеження штучну змінну x_7:

$$F'(x_1, x_2, \dots, x_7) = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 10 \\ -3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1x_6 + 1x_7 = 3 \\ x_1, x_2, \dots, x_7 \geq 0. \end{cases}$$

Тоді початковий допустимий базисний розв'язок прямої задачі буде:

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 10, x_5 = 5, x_6 = 0, x_7 = 3.$

Складемо вихідну симплекс-таблицю:

Таблиця 4.1

	C	–	-3	-2	0	0	0	0	$-M$
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
0	x_3	3	1	-2	1	0	0	0	0
0	x_4	10	2	-1	0	1	0	0	0
0	x_5	5	-3	1	0	0	1	0	0
$\leftarrow -M$	x_7	3	-1	**1**	0	0	0	-1	1
	Δ	$-3M$	$M+3$	$-M+2$ ↑	0	0	0	M	0

Напрямний стовпець – A_2, напрямний рядок – x_7, напрямний елемент – x_{72}.

Розрахуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 4.2

	C	–	-3	-2	0	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	x_3	9	-1	0	1	0	0	-2
0	x_4	13	1	0	0	1	0	-1
0	x_5	2	-2	0	0	0	1	1
-2	$\boldsymbol{x_2}$	**3**	-1	1	0	0	0	-1
	Δ	-6	5	0	0	0	0	2

Всі оцінки $\Delta_j,\ j=\overline{1,6},\ \geq 0 -$ отриманий оптимальний розв'язок прямої задачі:

$$\boldsymbol{x_1 = 0, x_2 = 3, F_{min} = 6.}$$

Складемо тепер двоїсту до даної задачі.

Оскільки система умов-обмежень прямої задачі задана у вигляді нерівностей, на змінні накладена вимога невід'ємності їхніх значень, то в даному випадку можна розглядати симетричну пару задач ЛП.

Приведемо математичну модель прямої задачі до канонічного вигляду:

$$F'(x_1, x_2) = -3x_1 - 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ -3x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq -3 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Оскільки в розглядуваному прикладі пряма задача є задачею на відшуковування max значення цільової функції, то двоїста задача буде задачею на відшуковування min значення цільової функції.

Кількість змінних двоїстої задачі дорівнюватиме кількості умов-обмежень прямої задачі. Тобто, оскільки у даній прямій задачі кількість умов-обмежень дорівнює 4, то двоїста задача залежатиме від чотирьох змінних – y_1, y_2, y_3, y_4.

Ваговими коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі стають вільні члени умов-обмежень прямої задачі – $3, 10, 5, -3$.

Таким чином, цільова функція двоїстої задачі буде виглядати так:

$$\tilde{F}(y_1, y_2, y_3, y_4) = 3y_1 + 10y_2 + 5y_3 - 3y_4 \to min.$$

Матрицю умов-обмежень двоїстої задачі отримуємо транспонуванням матриці умов-обмежень прямої задачі:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Вільними членами умов-обмежень двоїстої задачі стають вагові коефіцієнти цільової функції прямої задачі – $-3, -2$.

Оскільки в розглядуваному прикладі умови-обмеження прямої задачі являють собою нерівності зі знаком $\leq$, і на значення, які можуть приймати змінні, накладена вимога невід'ємності, то умови-обмеження двоїстої задачі будуть нерівностями зі знаком $\geq$.

На значення змінних двоїстої задачі також накладаємо вимогу невід'ємності.

Виходячи з вище викладеного, отримуємо такі умови обмеження двоїстої задачі:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 3y_3 + y_4 \geq -3 \\ -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -2 \\ y_1, y_2, \dots, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

Тоді двоїста задача виглядатиме так:

$$\tilde{F}(y_1, y_2, y_3, y_4) = 3y_1 + 10y_2 + 5y_3 - 3y_4 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 3y_3 + y_4 \geq -3 \\ -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -2 \\ y_1, y_2, \dots, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману двоїсту задачу.

Перепишемо умови двоїстої задачі у більш зручному вигляді:

$$\tilde{F}(y_1, y_2, y_3, y_4) = 3y_1 + 10y_2 + 5y_3 - 3y_4 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 + 3y_3 - y_4 \leq 3 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \leq 2 \\ y_1, y_2, \dots, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

Обернемо нерівності в рівності шляхом введення вільних змінних – y_5 та y_6.

$$\tilde{F}(y_1, y_2, \dots, y_6) = 3y_1 + 10y_2 + 5y_3 - 3y_4 + 0y_5 + 0y_6 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 + 3y_3 - y_4 + 1y_5 + 0y_6 = 3 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + 0y_5 + 1y_6 = 2 \\ y_1, y_2, \dots, y_6 \geq 0. \end{cases}$$

Знайдемо початковий допустимий базисний розв’язок двоїстої задачі:

$y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 3, y_6 = 2.$

Складемо вихідну симплекс-таблицю:

Таблиця 4.3

	C	–	3	10	5	-3	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	y_5	3	-1	-2	3	-1	1	0
← 0	y_6	2	2	1	-1	**1**	0	1
	Δ	0	-3	-10	-5	3	0	0

Напрямний стовпець – A_4, напрямний рядок – y_6, напрямний елемент – y_{64}.

Розрахуємо елементи наступної симплекс таблиці:

Таблиця 4.4

	C	–	3	10	5	-3	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	y_5	5	1	-1	2	0	1	1
-3	$\boldsymbol{y_4}$	**2**	2	1	-1	1	0	1
	Δ	-6	-9	-13	-2	0	0	-3

Всі оцінки Δ_i, $i = \overline{1, 6}$, ≤ 0, тому отриманий оптимальний розв’язок двоїстої задачі:

$$\boldsymbol{y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 2, \widetilde{F}_{min} = -6.}$$

Встановимо взаємний зв’язок поміж значеннями оцінок індексного рядка оптимальної таблиці однієї з пари задач і значеннями змінних оптимального розв’язку другої задачі:

$y_i^{\text{опт}} = \Delta_{o(n+i)}^{\text{пр}}, n -$ кількість змінних прямої задачі, $n = 2$,

$y_1^{\text{опт}} = \Delta_{03}^{\text{пр}} = 0, \quad y_2^{\text{опт}} = \Delta_{04}^{\text{пр}} = 0, \quad y_3^{\text{опт}} = \Delta_{05}^{\text{пр}} = 0,$

$y_4^{\text{опт}} = \Delta_{06}^{\text{пр}} = 2, \quad y_5^{\text{опт}} = \Delta_{07(1)}^{\text{пр}} = 5, \quad y_6^{\text{опт}} = \Delta_{08(2)}^{\text{пр}} = 0$

– враховуємо циклічний перенос;

$x_j^{\text{опт}} = -\Delta_{o(m+j)}^{\text{дв}}, m -$ кількість змінних двоїстої задачі, $m = 4$,

$x_1^{\text{опт}} = -\Delta_{05}^{\text{дв}} = 0, \quad x_2^{\text{опт}} = -\Delta_{06}^{\text{дв}} = 3, \quad x_3^{\text{опт}} = -\Delta_{07(1)}^{\text{дв}} = 9,$

$x_4^{\text{опт}} = -\Delta_{08(2)}^{\text{дв}} = 13, \quad x_5^{\text{опт}} = -\Delta_{09(3)}^{\text{дв}} = 2.$

Завдання

Скласти двоїсту задачу, розв'язати її та встановити взаємний зв'язок із розв'язком прямої задачі.

Таблиця 4.5

№ варіанту	Умови задачі
1	**2**
1	$F(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
2	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2 \to max$ $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
3	$F(x_1, x_2) = -3x_1 + 6x_2 \to min$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Продовження табл. 4.5

1	**2**
4	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -5x_1 + x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 5x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
5	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
6	$F(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 \rightarrow min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
7	$F(x_1, x_2) = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
8	$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \end{cases}$
9	$F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Продовження табл. 4.5

1	**2**
10	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2 \to min$ $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 16 \\ x_1 + 3x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
11	$F(x_1, x_2) = 7x_1 + 5x_2 \to max$ $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \ge 7 \\ 7x_1 - 5x_2 \ge 35 \\ x_1 - x_2 \le 0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
12	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 \to max$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
13	$F(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 \to min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
14	$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ 3x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 + 5x_2 \ge 4 \\ 0 \le x_1 \le 3 \\ 0 \le x_2 \le 3 \end{cases}$
15	$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 7x_2 \ge 21 \\ x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ 0 \le x_1 \le 1 \\ 0 \le x_2 \le 1 \end{cases}$

Лабораторна робота 5

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ (Т-ЗАДАЧІ)

Мета: засвоїти методи «північно-західного кута» та «мінімального елемента» побудови початкового опорного плану Т-задачі та метод потенціалів розв'язання Т-задачі.

5.1 Порядок виконання роботи

Для розв'язання транспортної задачі будемо використовувати метод потенціалів. Процес розв'язання Т-задачі за допомогою методу потенціалів складається з таких етапів:

1) будується початковий опорний план задачі;
2) виконується оцінювання отриманого опорного плану;
3) здійснюється перехід до наступного, більш кращого плану.

Розглянемо метод на прикладі такої Т-задачі, заданої матрицею транспортних витрат $C, a_i, i = \overline{1,4}$ – обсяги виробництва, $b_j, j = \overline{1,4}$ – обсяги споживання:

$$\begin{array}{cc} & a_i \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 60 \\ 55 \\ 40 \\ 35 \end{array} \\ b_j \quad \begin{array}{cccc} 70 & 5 & 45 & 70 \end{array} & \end{array}.$$

Початковий опорний план Т-задачі може бути отриманий або методом «північно-західного кута», або методом «мінімального елемента».

Побудуємо початковий опорний план X_0 даної Т-задачі за допомогою методу «північно-західного кута».

Перевіряємо умову балансу $\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 60 + 55 + 40 + 35 = 190,$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 70 + 5 + 45 + 70 = 190,$$

$$190 = 190.$$

Таким чином, умова балансу виконується, отже модель даної Т-задачі є закритою. Визначаємо елементи матриці X_0, починаючи з верхнього лівого кута.

$$X_0 = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

Знаходимо значення $x_{11} = min\{a_1, b_1\} = min\{60, 70\} = 60$. Оскільки $a_1(60) < b_1(70)$, то перший рядок «закритий» для розрахунку решти елементів, тобто $x_{12} = 0, x_{13} = 0, x_{14} = 0$.

Далі обчислюємо $x_{21} = min\{a_2, b_1 - x_{11}\} = min\{55, 70 - 60\} = 10$. Вочевидь, що $x_{31} = 0, x_{41} = 0$.

Виходячи з тих самих міркувань, розраховуємо решту елементів: $x_{22} = min\{a_2 - x_{21}, b_2\} = min\{55 - 10, 5\} = 5$,

$x_{32} = 0, x_{42} = 0$,

$x_{23} = min\{a_2 - x_{21} - x_{22}, b_3\} = min\{55 - 10 - 5, 45\} = 40$,

$x_{24} = 0$,

$x_{33} = min\{a_3, b_3 - x_{23}\} = min\{40, 45 - 40\} = 5$,

$x_{43} = 0$,

$x_{34} = min\{a_3 - x_{33}, b_4\} = min\{40 - 5, 70\} = 35$,

$x_{44} = min\{a_4, b_4 - x_{34}\} = min\{35, 70 - 35\} = 35.$

Побудований план є невиродженим, оскільки ранг матриці $m + n - 1 = $ $= 4 + 4 - 1 = 7$ і кількість ненульових елементів матриці X_0 дорівнює 7.

Знайдемо тепер початковий опорний план Т-задачі методом «мінімального елемента»:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 45 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}.$$

Для цього записуємо елементи заданої матриці транспортних витрат C, починаючи від елемента з мінімальним значенням, в порядку зростання їхніх значень:

$c_{11}, c_{23}, c_{44}, c_{12}, c_{41}, c_{21}, c_{34}, c_{42}, c_{43}, c_{22}, c_{32}, c_{24}, c_{31}, c_{14}, c_{33}, c_{13}.$

А далі в такому самому порядку визначаємо значення елементів матриці X_0:

$x_{11} = min\{a_1, b_1\} = min\{60, 70\} = 60,$

$x_{23} = min\{a_2, b_3\} = min\{55, 45\} = 45,$

$x_{44} = min\{a_4, b_4\} = min\{35, 70\} = 35,$

$x_{12} = min\{a_1 - x_{11}, b_2\} = min\{60 - 60, 5\} = 0,$

$x_{41} = min\{a_4 - x_{44}, b_1 - x_{11}\} = min\{35 - 35, 70 - 60\} = 0,$

$x_{21} = min\{a_2 - x_{23}, b_1 - x_{11} - x_{41}\} = min\{55 - 45, 70 - 60 - 0\} = 10,$

$x_{34} = min\{a_3, b_4 - x_{44}\} = min\{40, 70 - 35\} = 35,$

$x_{42} = min\{a_4 - x_{44} - x_{41}, b_2 - x_{12}\} = min\{35 - 35 - 0, 5 - 0\} = 0,$

$x_{43} = min\{a_4 - x_{44} - x_{41} - x_{42}, b_3 - x_{23}\} =$

$= min\{35 - 35 - 0 - 0, 45 - 45\} = 0,$

$x_{22} = min\{a_2 - x_{23} - x_{21}, b_2 - x_{12} - x_{42}\} =$

$= min\{55 - 45 - 10, 5 - 0 - 0\} = 0,$

$x_{32} = min\{a_3 - x_{34}, b_2 - x_{12} - x_{42} - x_{22}\} =$

$= min\{40 - 35, 5 - 0 - 0 - 0\} = 5.$

Елементи матриці X_0, які відповідають елементам $c_{24}, c_{31}, c_{14}, c_{33}, c_{13}$, не розглядаються, оскільки вже вичерпані всі ресурси та задоволені всі потреби.

Отриманий план є виродженим, оскільки $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$, а кількість ненульових елементів матриці X_0 дорівнює 6.

Для отриманого початкового опорного плану даної Т-задачі, за методом «північно-західного кута»,

$$X_0 = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix},$$

представимо графічно відповідний план перевезень, для зручності обчислення потенціалів (рис. 5.1).

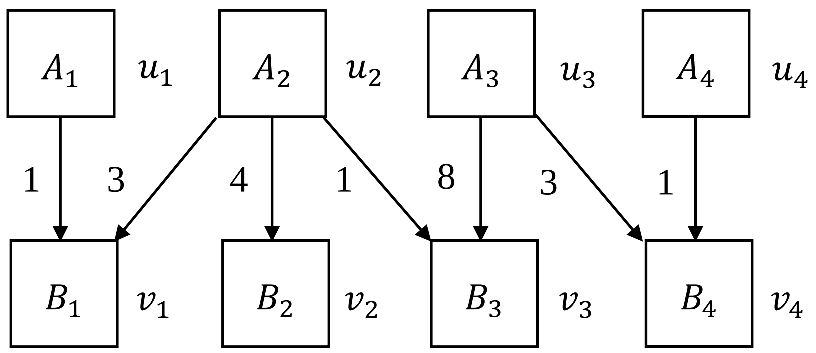

Рисунок 5.1

На рис. 5.1 прийняті такі позначення:

$A_i, i = \overline{1,4}$ – пункти виробництва (відправлення);

$B_j, j = \overline{1,4}$ – пункти споживання (отримання);

$u_i, i = \overline{1,4}$ – потенціали пунктів виробництва (відправлення);

$v_j, j = \overline{1,4}$ – потенціали пунктів споживання (отримання).

За відповідними маршрутами вказуємо вартості перевезення c_{ij} одиниці продукту з i-го пункту в j-й (дані беремо з заданої матриці транспортних витрат С).

Приймаємо $u_1 = 0$.

Визначаємо потенціали, використовуючи співвідношення

$$v_j - u_i = \mathrm{c}_{ij}:$$

$v_1 = c_{11} + u_1 = 1 + 0 = 1,$

$u_2 = v_1 - c_{21} = 1 - 3 = -2,$

$v_2 = c_{22} + u_2 = 4 + (-2) = 2,$

$v_3 = c_{23} + u_2 = 1 + (-2) = -1,$

$u_3 = v_3 - c_{33} = -1 - 8 = -9,$

$v_4 = c_{34} + u_3 = 3 + (-9) = -6,$

$u_4 = v_4 - c_{44} = -6 - 1 = -7.$

Далі розрахуємо елементи оціночної матриці C_1 за співвідношенням

$$c'_{ij} = \mathrm{c}_{ij} - (v_j - u_i):$$

$c'_{11} = c_{11} - (v_1 - u_1) = 1 - (1 - 0) = 0,$

$c'_{12} = c_{12} - (v_2 - u_1) = 2 - (2 - 0) = 0,$

$c'_{13} = c_{13} - (v_3 - u_1) = 9 - (-1 - 0) = 10,$

$c'_{14} = c_{14} - (v_4 - u_1) = 7 - (-6 - 0) = 13,$

$c'_{21} = c_{21} - (v_1 - u_2) = 3 - \big(1 - (-2)\big) = 0,$

$c'_{22} = c_{22} - (v_2 - u_2) = 4 - \big(2 - (-2)\big) = 0,$

$c'_{23} = c_{23} - (v_3 - u_2) = 1 - \big(-1 - (-2)\big) = 0,$

$c'_{24} = c_{24} - (v_4 - u_2) = 5 - \big(-6 - (-2)\big) = 9,$

$c'_{31} = c_{31} - (v_1 - u_3) = 6 - \big(1 - (-9)\big) = -4,$

$c'_{32} = c_{32} - (v_2 - u_3) = 4 - \big(2 - (-9)\big) = -7,$

$c'_{33} = c_{33} - (v_3 - u_3) = 8 - \big(-1 - (-9)\big) = 0,$

$c'_{34} = c_{34} - (v_4 - u_3) = 3 - \big(-6 - (-9)\big) = 0,$

$c'_{41} = c_{41} - (v_1 - u_4) = 2 - \big(1 - (-7)\big) = -6,$

$c'_{42} = c_{42} - (v_2 - u_4) = 3 - \big(2 - (-7)\big) = -6,$

$c'_{43} = c_{42} - (v_3 - u_4) = 3 - \big(-1 - (-7)\big) = -3,$

$c'_{44} = c_{44} - (v_4 - u_4) = 1 - \big(-6 - (-7)\big) = 0.$

Тоді оціночна матриця C_1 виглядатиме так:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ -4 & -7 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки в оціночній матриці C_1 є від'ємні елементи, то план X_0 – неоптимальний.

Найвід'ємнішим елементом є $c'_{32} = -7$.

Тому, в матриці X_0, починаючи з елемента x_{32} (який відповідає в оціночній матриці C_1 найвід'ємнішому елементу $c'_{32} = -7$) будуємо замкнений ланцюжок, до якого входитимуть ненульові елементи:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5[-] & 40[+] & 0 \\ 0 & \mathbf{0[+]} & 5[-] & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}.$$

Знайдемо новий план X_1, змінюючи елементи, які входять до ланцюжка, на величину $\theta = min\{5; 5\}$ ($\theta -$ мінімальний елемент серед непарних елементів, що входять до ланцюжка. При цьому за 1-й вважається наступний за x_{32} елемент),

$\theta = 5$. Додаємо θ до всіх парних елементів ланцюжка й віднімаємо θ від непарних елементів ланцюжка. Елементи матриці X_0, які не входять до ланцюжка, переносимо до матриці X_1 без змінення:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 \to \varepsilon & 45 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}.$$

Отриманий новий план X_1 є виродженим, тому замінюємо один із 0 з ланцюжка на $\varepsilon \neq 0$.

Оцінимо новий план Т-задачі.

Виконаємо еквівалентні перетворення в матриці C_1. Підкреслюємо всі елементи, що відповідають ненульовим елементам матриці X_1 – $c'_{11}, c'_{21}, c'_{22}, c'_{23}, c'_{32}, c'_{34}, c'_{44}$. Закреслюємо 3-й рядок, який містить найвід'ємніший елемент $c'_{32} = -7$. Оскільки в цьому рядку є підкреслений елемент (c'_{34}) то закреслюємо відповідний 4-й стовпець. Оскільки в цьому стовпці також є підкреслений елемент (c'_{44}), то закреслюємо відповідний 4-й рядок.

$$C_1 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \bar{0} & 0 & 10 & 13 \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 9 \\ -4 & -\bar{7} & 0 & \bar{0} \\ -6 & -6 & -3 & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +7 \\ +7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad & \quad & \quad & -7 \end{matrix} \end{array}$$

Додаємо до всіх елементів закреслених рядків $|c'_{32}| = |-7| = 7$, й віднімаємо від усіх елементів закресленого стовпця $|c'_{32}| = |-7| = 7$.

Тоді отримаємо наступну оціночну матрицю C_2:

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

В оціночній матриці C_2 немає від'ємних елементів, тому план X_1 є оптимальним.

Вартість перевезень дорівнюватиме:

$$\mathcal{L} = 60 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 45 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 35 \cdot 3 + 35 \cdot 1 = 295(у.о.).$$

Завдання

Розв'язати транспортну задачу методом потенціалів. Знайти початковий опорний план Т-задачі двома методами: методом «північно-західного кута» та методом «мінімального елемента».

Таблиця 5.1

№ варіанту	**Умови задачі**
1	**2**
1	$C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 3 \end{bmatrix}$, a_i: 100, 120, 150, 130; b_j: 140, 130, 90, 140
2	$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 2 \\ 7 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, a_i: 50, 20, 30, 20; b_j: 40, 30, 35, 15

Продовження табл. 5.1

1	**2**
3	$$C=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{array}{c} a_i \\ 60 \\ 70 \\ 20 \end{array}$$ $$\begin{array}{ccccc} b_j & 40 & 30 & 30 & 50 \end{array}$$
4	$$C=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{array}{c} a_i \\ 60 \\ 65 \\ 70 \end{array}$$ $$\begin{array}{ccccc} b_j & 40 & 60 & 70 & 25 \end{array}$$
5	$$C=\begin{bmatrix} 10 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 9 & 10 \\ 6 & 14 & 8 & 7 \end{bmatrix}\begin{array}{c} a_i \\ 40 \\ 25 \\ 35 \end{array}$$ $$\begin{array}{ccccc} b_j & 15 & 40 & 30 & 15 \end{array}$$
6	$$C=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{array}{c} a_i \\ 50 \\ 40 \\ 20 \end{array}$$ $$\begin{array}{ccccc} b_j & 30 & 25 & 35 & 20 \end{array}$$

Продовження табл. 5.1

1	2
7	$$C=\begin{bmatrix} 8 & 12 & 4 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 15 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 12 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} a_i \\ 60 \\ 40 \\ 100 \\ 50 \end{array}$$ b_j 30 80 65 35 40
8	$$C=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 8 & 2 & 10 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 4 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} a_i \\ 130 \\ 90 \\ 100 \\ 140 \end{array}$$ b_j 110 50 30 80 100 90
9	$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 7 \\ 3 & 40 & 15 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \\ 24 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} a_i \\ 60 \\ 55 \\ 40 \\ 35 \end{array}$$ b_j 70 5 45 70
10	$$C=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} a_i \\ 20 \\ 16 \\ 14 \\ 11 \end{array}$$ b_j 16 18 12 15

Продовження табл. 5.1

1	**2**
11	$$\begin{array}{c c c} & & a_i \\ C= & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 10 \\ 20 \\ 35 \\ 45 \end{array} \\ b_j & \begin{array}{cccc} 25 & 30 & 40 & 15 \end{array} & \end{array}$$
12	$$\begin{array}{c c c} & & a_i \\ C= & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 8 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 30 \\ 50 \\ 20 \end{array} \\ b_j & \begin{array}{cccc} 15 & 15 & 40 & 30 \end{array} & \end{array}$$
13	$$\begin{array}{c c c} & & a_i \\ C= & \left[\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 60 \\ 70 \\ 20 \end{array} \\ b_j & \begin{array}{cccc} 40 & 30 & 30 & 50 \end{array} & \end{array}$$
14	$$\begin{array}{c c c} & & a_i \\ C= & \left[\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 30 \\ 20 \\ 40 \\ 50 \end{array} \\ b_j & \begin{array}{cccc} 35 & 20 & 55 & 30 \end{array} & \end{array}$$

Продовження табл. 5.1

1	**2**
15	$$C=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 8 & 10 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 7 & 3 & 7 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_i \\ 100 \\ 15 \\ 90 \\ 55 \end{matrix}$$ $$b_j \quad 30 \quad 40 \quad 55 \quad 80 \quad 45 \quad 10$$

Лабораторна робота 6

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета: засвоїти метод правильних відсічень (метод Гоморі) розв'язання задач ЦП.

6.1 Порядок виконання роботи

Розглянемо метод на прикладі такої задачі:

$$F(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 7 \\ 10x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі.} \end{cases}$$

У відповідності до методу правильних відсічень спочатку відкидаємо умову цілочисельності й розв'язуємо отриману задачу лінійного програмування:

$$F(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 7 \\ 10x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Використовуємо метод симплекс-таблиць:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_4) = x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 7 \\ 10x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 15 \\ x_1, \dots, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 7, x_4 = 15.$

Заповнимо вихідну симплекс-таблицю:

Таблиця 6.1

	C	–	1	4	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
← 0	x_3	7	2	**4**	1	0
0	x_4	15	10	3	0	1
	Δ	0	-1	-4	0	0

Визначимо:

напрямний стовпець – A_2;

напрямний рядок – x_3;

напрямний елемент – $x_{32} = 4$.

Розрахуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 6.2

	C	–	1	4	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
4	x_2	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0
0	x_4	$\frac{39}{4}$	$\frac{34}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	1
	Δ	7	1	0	1	0

Отримано оптимальний розв’язок відповідної задачі ЛП:

$$\boldsymbol{x_1 = 0, x_2 = 1\frac{3}{4}, F_{max} = 7} - \text{не є цілочисельним.}$$

Сформуємо правильне відсічення, для змінної x_2, значення якої не є цілим числом.

Визначимо дробові частини елементів рядка x_2. При цьому дробові частини повинні знаходитися в межах $]0; 1[$:

$$\gamma_{20} = x_{20} - [x_{20}] = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4},$$

$$\gamma_{21} = x_{21} - [x_{21}] = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},$$

$$\gamma_{23} = x_{23} - [x_{23}] = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

Запишемо правильне відсічення:

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_3 \geq \frac{3}{4}.$$

Виконаємо необхідні перетворення:

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_3 - x_5 = \frac{3}{4},$$

$$-\frac{3}{4} = x_5 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_3.$$

Додамо сформоване додаткове обмеження в останню симплекс-таблицю у вигляді рядка; також у неї додається додатковий стовпець (через введення вільної змінної x_5):

Таблиця 6.3

	C	–	1	4	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
4	x_2	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
0	x_4	$\frac{39}{4}$	$\frac{34}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	0
← 0	x_5	$-\frac{3}{4}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1
	Δ	7	1	0	1	0	0
	θ		2 ↑	–	4	–	–

Далі розв’язуємо задачу за допомогою двоїстого симплекс-методу.

Визначимо напрямний рядок – x_5 (за від’ємним елементом у стовпці

A_0).

Визначимо напрямний стовпець – A_1 (за найменшим за абсолютним значенням з відношень оцінок індексного рядка Δ до від'ємних елементів напрямного рядка x_5 – $min\left\{\left|1 : \left(-\frac{1}{2}\right)\right|; \left|1 : \left(-\frac{1}{4}\right)\right|\right\} = min\{2; 4\} = 2$).

Визначимо напрямний елемент – $x_{51} = -\frac{1}{2}$.

Розрахуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 6.4

	C	–	1	4	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
4	x_2	1	0	1	0	0	1
← 0	x_4	-3	0	0	**-5**	1	17
1	x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	-2
	Δ	$\frac{11}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2
	θ		–	–	$\frac{1}{10}$ ↑	–	–

Оскільки в стовпці A_0 ще є від'ємний елемент, продовжуємо розв'язувати задачу двоїстим симплекс-методом.

Визначимо:

напрямний рядок – x_4;

напрямний стовпець – A_3;

напрямний елемент – $x_{43} = -5$.

Таблиця 6.5

	С	–	1	4	0	0	0
	В	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
4	x_2	1	0	1	0	0	1
0	x_3	$\frac{3}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{17}{5}$
1	x_1	$\frac{12}{10}$	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$
	Δ	$\frac{52}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{37}{10}$

Оскільки в стовпці A_0 немає від'ємних елементів, то отримано оптимальний розв'язок: $\boldsymbol{x_1 = \frac{12}{10}, x_2 = 1, F_{max} = \frac{52}{10}}$, але він ще не є цілочисельним. Тому формуємо наступну додаткову умову-обмеження:

$$\gamma_{10} = x_{10} - [x_{10}] = \frac{12}{10} - 1 = \frac{2}{10},$$

$$\gamma_{14} = x_{14} - [x_{14}] = \frac{1}{10} - 0 = \frac{1}{10},$$

$$\gamma_{15} = x_{15} - [x_{15}] = -\frac{3}{10} - (-1) = \frac{7}{10},$$

$$\frac{1}{10}x_4 + \frac{7}{10}x_5 \geq \frac{2}{10},$$

$$\frac{1}{10}x_4 + \frac{7}{10}x_5 - x_6 = \frac{2}{10},$$

$$-\frac{2}{10} = x_6 - \frac{1}{10}x_4 - \frac{7}{10}x_5,$$

та додаємо її до останньої симплекс-таблиці:

Таблиця 6.6

	C	–	1	4	0	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
4	x_2	1	0	1	0	0	1	0
0	x_3	$\frac{3}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{17}{5}$	0
1	x_1	$\frac{12}{10}$	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	0
← 0	x_6	$-\frac{2}{10}$	0	0	0	$\boldsymbol{-\frac{1}{10}}$	$-\frac{7}{10}$	1
	Δ	$\frac{52}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{37}{10}$	0
	θ		–	–	–	1 ↑	$\frac{37}{7}$	–

Визначимо:

напрямний рядок – x_6;

напрямний стовпець – A_4;

напрямний елемент – $x_{64} = -\frac{1}{10}$.

Розв'язуємо задачу далі, двоїстим симплекс-методом.

Розрахуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 6.7

	C	–	1	4	0	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
4	x_2	1	0	1	0	0	1	0
0	x_3	1	0	0	1	0	-2	-2
1	x_1	1	1	0	0	0	-1	1
0	x_4	2	0	0	0	1	7	-10
	Δ	5	0	0	0	0	3	1

У стовпці A_0 немає від'ємних елементів – отримано оптимальний цілочисельний розв'язок задачі:

$$\boldsymbol{x_1 = 1, x_2 = 1, F_{max} = 5}.$$

Завдання

Розв'язати задачу цілочисельного програмування методом правильних відсічень (методом Гоморі).

Таблиця 6.8

№ варіанту	**Умови задачі**
1	**2**
1	$F(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2) = \mathrm{x}_1 + 4\mathrm{x}_2 \to max$ $\begin{cases} 2\mathrm{x}_1 + 4\mathrm{x}_2 \le 17 \\ 10\mathrm{x}_1 + 3\mathrm{x}_2 \le 15 \\ \mathrm{x}_1 \ge 0, \mathrm{x}_2 \ge 0 \\ \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \text{— цілі} \end{cases}$
2	$F(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2) = \mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 \to max$ $\begin{cases} 5\mathrm{x}_1 + 7\mathrm{x}_2 \le 21 \\ -\mathrm{x}_1 + 3\mathrm{x}_2 \le 8 \\ \mathrm{x}_1 \ge 0, \mathrm{x}_2 \ge 0 \\ \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \text{— цілі} \end{cases}$

Продовження табл. 6.8

1	**2**
3	$F(x_1, x_2) = 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 \to min$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \text{— цілі} \end{cases}$
4	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{— цілі} \end{cases}$
5	$F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \leq 36 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{— цілі} \end{cases}$
6	$F(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ 4x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{— цілі} \end{cases}$
7	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{— цілі} \end{cases}$
8	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{— цілі} \end{cases}$

Продовження табл. 6.8

1	**2**
9	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \leq 38 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{— цілі} \end{cases}$
10	$F(x_1, x_2) = 4x_1 + 4x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{— цілі} \end{cases}$
11	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{— цілі} \end{cases}$
12	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{— цілі} \end{cases}$
13	$F(x_1, x_2) = 7x_1 - 2x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \geq -3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{— цілі} \end{cases}$

Продовження табл. 6.8

1	**2**
14	$F(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \text{— цілі} \end{cases}$
15	$F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{— цілі} \end{cases}$

Лабораторна робота 7

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ МЕТОДОМ МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА

Мета: ознайомитись із задачами нелінійного програмування з обмеженнями-рівностями та засвоїти метод їх розв'язання – метод множників Лагранжа.

7.1 Порядок виконання роботи

Метод множників Лагранжа призначений для розв'язання задач нелінійного програмування, в яких усі умови-обмеження є рівностями.

Розглянемо метод на прикладі такої задачі:

$F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to extr$

$x_1 + x_2 = 1.$

Оскільки в нашому завданні одна умова-обмеження, то вводимо тільки один множник Лагранжа – λ.

Складаємо функцію Лагранжа, яка являє собою суму вихідної цільової функції та добуток множника Лагранжа на умову-обмеження:

$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1).$

Складаємо систему рівнянь, взявши похідні від функції Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda)$ по змінним x_1, x_2 та множнику λ та прирівнявши їх до 0:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases} .$$

Розв'язуємо систему рівнянь (наприклад, шляхом віднімання 1-го та 2-го рівнянь та виділенням x_1 із 3-го рівняння):

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 = 1 - x_2 \end{cases}$$

$2(1 - x_2) - 2x_2 = 0$

$2-2x_2-2x_2=0$

$-4x_2=-2$

$x_2=\frac{1}{2}$

$x_1=1-\frac{1}{2}$

$x_1=\frac{1}{2}$.

При цьому $\lambda=-1$.

Досліджуємо функцію на екстремум в околі знайденої точки $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Складаємо визначник із других похідних для визначення наявності екстремуму:

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot2-0\cdot0=4>0$ – екстремум існує.

Оскільки у визначнику $2>0$, то цей екстремум – min.

Таким чином, наша функція $F(x_1,x_2)$ опукла і в точці $(x_1=\frac{1}{2},x_2=\frac{1}{2})$ є мінімум. $F_{min}=\frac{1}{2}$.

Завдання

Розв’язати задачу нелінійного програмування методом множників Лагранжа. Визначити умовні екстремуми функцій.

Таблиця 7.1

№ варіанту	Умови задачі
1	**2**
1	$F(x_1,x_2)=2x_1^2-3x_1x_2+2x_2^2+5x_1+6x_2$ при $x_1-x_2=6$ та $2x_1+x_2=15$
2	$F(x_1,x_2)=3x_1^2+2x_2^2-3x_1+1$ при $x_1^2+x_2^2=4$
3	$F(x_1,x_2)=2(x_1-1)^2+3(x_2-3)^2$ при $x_1+x_2=6$
4	$F(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$ при $x_1^2-x_2^2=4$
5	$F(x_1,x_2)=(x_1-3)^2+(x_2-5)^2$ при $x_2-2x_1=5$

Продовження табл. 7.1

1	**2**
6	$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2$ при $x_1 + x_2 + x_3 = 8$
7	$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2$ при $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$
8	$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - 3x_2 - x_1^2 - 3x_2^2$ при $3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$ та $-x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 4$
9	$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2^2 + 2x_1x_2$ при $x_1 + x_2 = 8$ та $x_2 + x_3 = 4$
10	$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_1^2 + 2x_2 - x_3^2$ при $x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$
11	$F(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ при $x_1 - x_2 = 4$
12	$F(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2$ при $x_2 - 2x_1 = 5$
13	$F(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_1 + 6x_2$ при $x_1 - x_2 = 6$ та $2x_1 + x_2 = 15$
14	$F(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x + 1$ при $x_1^2 + x_2^2 = 4$
15	$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2$ при $x_1 + x_2 + x_3 = 8$

Лабораторна робота 8

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета: ознайомитись із задачами квадратичного програмування (КП), засвоїти метод розв'язання задач КП.

8.1 Порядок виконання роботи

У задачах квадратичного програмування цільова функція є квадратичною, а функції-обмеження – лінійними.

Розглянемо таку задачу квадратичного програмування:

$$F(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 + x_2^2 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 16 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вводимо 2 (два) множники Лагранжа – λ_1 і λ_2, за кількістю умов-обмежень у задачі.

Складаємо функцію Лагранжа, яка являє собою суму вихідної цільової функції та суми добутків множників Лагранжа та відповідних умов-обмежень:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = -x_1 - 2x_2 + x_2^2 + \lambda_1(3x_1 + 2x_2 - 16) + \lambda_2(x_1 + 2x_2 - 4).$$

Складаємо систему нерівностей і рівнянь – умов оптимальності розв'язку задачі з похідними по змінним x_j $(j = 1,2)$ і множникам λ_i $(i = 1,2)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 + 3\lambda_1 - \lambda_2 \ge 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2 + 2x_2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \ge 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 3x_1 + 2x_2 - 16 \le 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 + 2x_2 - 4 \le 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} \cdot x_1 = 0; \frac{\partial L}{\partial x_2} \cdot x_2 = 0; \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \cdot \lambda_1 = 0; \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \cdot \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Обертаємо нерівності в рівності шляхом введення вільних змінних – v_1, v_2, w_1, w_2:

$$\begin{cases} -1+3\lambda_1-\lambda_2-\upsilon_1=0 \\ -2+2x_2+2\lambda_1+2\lambda_2-\upsilon_2=0 \\ 3x_1+2x_2-16+w_1=0 \\ x_1+2x_2-4+w_2=0 \\ \upsilon_1\cdot x_1=0;\ \upsilon_2\cdot x_2=0;\ w_1\cdot\lambda_1=0;\ w_2\cdot\lambda_2=0. \end{cases}$$

Для знаходження початкового допустимого базисного розв’язку задачі вводимо штучні змінні – y_1 та y_2:

$$\begin{cases} 3\lambda_1+\lambda_2-\upsilon_1+y_1=1 \\ 2x_2+2\lambda_1+2\lambda_2-\upsilon_2+y_2=2 \\ 3x_1+2x_2+w_1=16 \\ x_1+2x_2+w_2=4 \\ \upsilon_1\cdot x_1=0;\ \upsilon_2\cdot x_2=0;\ w_1\cdot\lambda_1=0;\ w_2\cdot\lambda_2=0. \end{cases}$$

Тоді маємо такий початковий допустимий базисний розв’язок задачі:

$x_1=0, x_2=0, \lambda_1 =0, \lambda_2=0, \upsilon_1=0, \upsilon_2=0, y_1=1, y_2=2, w_1=16, w_2=4.$

Формуємо псевдо-цільову функцію: $-My_1-My_2\rightarrow max.$

Заповнюємо вихідну симплекс-таблицю (табл. 8.1).

Таблиця 8.1

	C	-	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$
	B	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_2}	A_{υ_1}	A_{υ_2}	A_{w_1}	A_{w_2}	A_{y_1}	A_{y_2}
$\leftarrow$ $-M$	y_1	1	0	0	**3**	1	-1	0	0	0	1	0
$-M$	y_2	2	0	2	2	2	0	-1	0	0	0	1
0	w_1	16	3	2	0	0	0	0	1	0	0	0
0	w_2	4	1	2	0	0	0	0	0	1	0	0
	Δ	$-3M$	0	$-2M$	$-5M$	$-3M$	M	M	0	0	0	0

Визначивши напрямний стовпець (A_{λ_1}), напрямний рядок (y_1) та напрямний елемент (3), розраховуємо елементи та заповнюємо другу симплекс-таблицю (табл. 8.2΄– 8.2).

Таблиця 8.2΄

Розрахунок елементів другої симплекс-таблиці

	C	-	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$
	B	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_2}	A_{v_1}	A_{v_2}	A_{w_1}	A_{w_2}	A_{y_2}
0	λ_1	$1:3$	$0:3$	$0:3$	$3:3$	$1:3$	$-1:3$	$0:3$	$0:3$	$0:3$	$0:3$
$-M$	y_2	$2-(1\cdot 2):3$	0	2	0	$2-(1\cdot 2):3$	$0-(-1\cdot 2):3$	-1	0	0	1
0	w_1	1	3	2	0	0	0	0	1	0	0
0	w_2	4	1	2	0	0	0	0	0	1	0
	Δ										

Таблиця 8.2

Друга симплекс-таблиця

	C	-	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$
	B	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_2}	A_{v_1}	A_{v_2}	A_{w_1}	A_{w_2}	A_{y_2}
0	λ_1	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$\leftarrow -M$	y_2	$\frac{4}{3}$	0	**2**	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	-1	0	0	1
0	w_1	1	3	2	0	0	0	0	1	0	0
0	w_2	4	1	2	0	0	0	0	0	1	0
	Δ	$-\frac{4}{3}M$	0	$-2M$	0	$-\frac{4}{3}M$	$-\frac{2}{3}M$	M	0	0	0

Визначивши напрямний стовпець (A_{x_2}), напрямний рядок (y_2) та напрямний елемент (2), розраховуємо елементи та заповнюємо третю симплекс-таблицю (табл. 8.3΄– 8.3)

Таблиця 8.3´

Розрахунок елементів третьої симплекс-таблиці

	C	-	0	0	0	0	0	0	0	0
	B	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_2}	A_{v_1}	A_{v_2}	A_{w_1}	A_{w_2}
0	λ_1	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0
0	x_2	$\frac{4}{3}:2$	$0:2$	$2:2$	$0:2$	$\frac{4}{3}:2$	$\frac{2}{3}:2$	$-1:2$	$0:2$	$0:2$
0	w_1	$16-\frac{\frac{4}{3}\cdot 2}{2}$	3	0	0	$0-\frac{\frac{4}{3}\cdot 2}{2}$	$0-\frac{\frac{2}{3}\cdot 2}{2}$	$0-\frac{-1\cdot 2}{2}$	1	0
0	w_2	$4-\frac{\frac{4}{3}\cdot 2}{2}$	1	0	0	$0-\frac{\frac{4}{3}\cdot 2}{2}$	$0-\frac{\frac{4}{3}\cdot 2}{2}$	$0-\frac{-1\cdot 2}{2}$	0	1
	Δ									

Таблиця 8.3

Третя симплекс-таблиця

	C	-	0	0	0	0	0	0	0	0
	B	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_2}	A_{v_1}	A_{v_2}	A_{w_1}	A_{w_2}
← 0	λ_1	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0
0	x_2	$\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
0	w_1	$\frac{44}{3}$	3	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	1	0
0	w_2	$\frac{8}{3}$	1	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	1
	Δ	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Перевіряємо виконання умов доповняльної нежорсткості.

Оскільки не виконується одна з умов доповняльної нежорсткості, а саме $w_1 \cdot \lambda_1 \neq 0$, то здійснимо ще одну ітерацію симплекс-методу – штучну. В якості напрямного рядка оберемо λ_1, напрямного стовпця A_{λ_2}, напрямний елемент при цьому дорівнює $\frac{1}{3}$.

Розрахуємо елементи та заповнимо четверту симплекс-таблицю (табл. 8.4).

Таблиця 8.4

Четверта симплекс-таблиця

	C	-	0	0	0	0	0	0	0	0
	B	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_2}	A_{v_1}	A_{v_2}	A_{w_1}	A_{w_2}
0	λ_2	1	0	0	3	1	-1	0	0	0
0	x_2	0	0	1	-2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0
0	w_1	16	3	0	4	0	-2	1	1	0
0	w_2	4	**1**	0	4	0	-2	1	0	1
	Δ	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Тепер не виконується інша умова доповняльної нежорсткості – $w_2 \cdot \lambda_2 \neq \neq 0$. Тому здійснимо ще одну штучну ітерацію симплекс-методу, обравши як напрямний рядок w_2, напрямний стовпець A_{x_1}, напрямний елемент при цьому дорівнює 1.

Розрахуємо елементи та заповнимо п’яту симплекс-таблицю (табл. 8.5).

Таблиця 8.5

П’ята симплекс-таблиця

	C	-	0	0	0	0	0	0	0	0
	B	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_2}	A_{v_1}	A_{v_2}	A_{w_1}	A_{w_2}
0	λ_2	1	0	0	3	1	-1	0	0	0
0	x_2	0	0	1	-2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0
0	w_1	4	0	0	-8	0	4	-2	1	-3
0	w_2	4	1	0	4	0	-2	1	0	1
	Δ	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Тепер усі умови доповняльної нежорсткості виконуються: $v_1 \cdot x_1 = 0$ (оскільки v_1 = 0), $v_2 \cdot x_2 = 0$ (v_2 = 0, x_2 = 0), $w_1 \cdot \lambda_1$ = 0 (λ_1 = 0), $w_2 \cdot \lambda_2$ = 0 (w_2 = 0). Таким чином, отриманий розв'язок системи нерівностей і рівнянь. Далі в околі знайденої точки (x_1 = 4, x_2 = 0) дослідимо вихідну функцію $F(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 + x_2^2$ на екстремум.

Візьмемо другі похідні:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 2, \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

і складемо визначник:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Маємо в точці (x_1 = 4, x_2 = 0) min функції $F(x_1, x_2)$, який дорівнює:

$F(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 + x_2^2 = -4 - 2 \cdot 0 + 0^2 = -4.$

Завдання

Розв'язати задачу квадратичного програмування.

Таблиця 8.6

№ варіанту	**Умови задачі**
1	**2**
1	$F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
2	$F(x_1, x_2) = 32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 2x_1 - x_2 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Продовження табл. 8.6

1	2
3	$F(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2 - x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
4	$F(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 \to min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
5	$F(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 \to max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
6	$F(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 + x_2^2 \to min$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
7	$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
8	$F(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_1^2 - 2x_3^2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 16 \\ 3x_2 + 4x_3 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$
9	$F(x_1, x_2) = 8x_1 + x_2 - x_1^2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 + 5x_2 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Продовження табл. 8.6

1	**2**
10	$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + x_2 \to min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$
11	$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 \to min$ $\begin{cases} x_1 \leq 2, x_2 \leq 4, x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$
12	$F(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 5x_1 - 6x_2 \to min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
13	$F(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 5x_1 - 6x_2 \to min$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
14	$F(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_1 - 6x_2 \to min$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
15	$F(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 5x_1 \to min$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$