Київський національний університет імені Тараса Шевченка

О.О.Безущак, О.Г.Ганюшкін

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ (***ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ***)

для студентів університетів

Київ
Видавничо–поліграфічний центр
"Київський університет"
2010

О.О.Безущак, О.Г.Ганюшкін. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри (векторні простори): для студентів університетів. – К.: Видавничо–поліграфічний центр "Київський університет", 2010. – 257 с.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. Ю.В.Боднарчук
д-р фіз.-мат. наук, проф. М.Ф.Городній
д-р фіз.-мат. наук, проф. Ю.А.Дрозд

Наведено завдання для практичних занять з лінійної алгебри у другому семестрі в обсязі, передбаченому навчальними планами механіко – математичного факультету. Посібник містить завдання для аудиторної роботи і задачі для домашніх завдань. Наявність великої кількості задач різної складності дозволяє використовувати посібник як збірник задач.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко – математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 2 від 12 жовтня 2009 року)

Зміст

Передмова **4**

Позначення **5**

Заняття 1. Простори та їх підпростори **7**

Заняття 2. Координати та розмірності **15**

Заняття 3. Дії з підпросторами **26**

Заняття 4. Лінійні відображення та їх матриці **38**

Заняття 5. Дії над відображеннями **51**

Заняття 6. Власні числа та вектори **60**

Заняття 7. ЖНФ: нільпотентний випадок **74**

Заняття 8. ЖНФ: загальний випадок **95**

Заняття 9. Мінімальний многочлен та функції від матриць **118**

Заняття 10. Інваріантні та кореневі підпростори **126**

Заняття 11. Лінійні функції. Спряжений простір **139**

Заняття 12. Білінійні функції **148**

Заняття 13. Квадратичні функції **161**

Заняття 14. Геометрія евклідових та унітарних просторів **173**

Заняття 15. Ортогоналізація й проектування **184**

Заняття 16. Оператори в евклідових та унітарних просторах **199**

Заняття 17. Нормальні оператори **214**

Відповіді та вказівки **231**

Передмова

Навчальні завдання повністю охоплюють теми практичних занять, що проводяться у другому семестрі при вивченні на механіко–математичному факультеті нормативного курсу лінійної алгебри.

Кожне завдання складається з чотирьох частин. Спочатку наводяться приклади розв'язання типових задач. Друга й третя частини містять задачі, що розглядаються на практичних заняттях (задачі другої частини є обов'язковими, третьої — розраховані на сильніших студентів), а четверта — задачі для домашнього завдання. Важчі задачі позначено зірочками, причому кількість зірочок є мірою складності задачі. До задач наведено відповіді, а для багатьох з них — і вказівки до розв'язання.

При посиланні на задачу використовується подвійна нумерація: перша цифра — номер заняття, а друга — номер задачі.

Після кожного заняття наведено посилання на найбільш доступні підручники, у яких можна знайти необхідний теоретичний матеріал.

Позначення

НСД(a, b) — найбільший спільний дільник чисел a та b;
НСК(a, b) — найменше спільне кратне чисел a та b;
$A^\top$ — матриця, транспонована до матриці A;
$|A|$ — потужність множини A;
$(\boldsymbol{a})$ — база векторного простору, що складається з векторів $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$;
$A \subseteq B$ — A є підмножиною B;
$A \subset B$ — A є власною підмножиною B (тобто $A \subseteq B$ і $A \neq B$);
$\mathcal{B}(M)$ — множина всіх підмножин n–елементної множини M;
$\mathbb{C}$ — множина, або адитивна група, або поле комплексних чисел;
$\mathbb{C}^*$ — мультиплікативна група поля комплексних чисел;
$\mathbb{C}_n$ — група за множенням усіх комплексних коренів степеня n з 1;
$\operatorname{def}(\varphi)$ — дефект лінійного відображення φ;
$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ — діагональна матриця з $a_1, \ldots, a_n$ на діагоналі;
$\dim V$ — розмірність векторного простору V;
E_{ij} — матрична одиниця (матриця, в якої в i–му рядку на j–му місці стоїть 1, а решта елементів — нулі);
$E_{ij}(k)$ — матриця, яка відрізняється від одиничної матриці E тим, що додатково на місці (i, j) стоїть k;
$E_i(k)$ — матриця, яка відрізняється від одиничної матриці E тим, що на місці (i, i) стоїть k;
$GL_n(P)$ — повна лінійна група — група за множенням усіх невироджених матриць порядку n з коефіцієнтами з поля P;
$\operatorname{Hom}(V, W)$ — множина всіх лінійних відображень з простору V у простір W;
$\operatorname{Im} \varphi = \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{існує такий } \boldsymbol{v} \in V, \text{ що } \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\}$ — образ лінійного відображення $\varphi : V \to W$;
$\operatorname{Ker} \varphi = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \varphi(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\}$ — ядро лінійного відображення $\varphi : V \to W$;
$\mathcal{L}(S)$ або $\langle S \rangle$ — лінійна оболонка системи векторів S;
$M_{n \times m}(P)$ — множина усіх матриць розміру $n \times m$ з коефіцієнтами з поля P;
$M_n(P)$ — множина усіх квадратних матриць порядку n з коефіцієнтами з поля P;
$\mathbb{N}_0$ — множина $\mathbb{N} \cup \{0\}$;
$\mathbf{0}$ — нульовий вектор;

P_{ij} — матриця, яка відрізняється від одиничної матриці E тим, що на (i,i)–му та (j,j)–му місцях стоять нулі, а на (i,j)–му та (j,i)–му місцях стоять одиниці;

P^n — арифметичний векторний простір розмірності n над полем P;

$P[x]$ — векторний простір усіх многочленів від x з коефіцієнтами з поля P;

$P_n[x]$ — векторний простір усіх многочленів від x степеня не більшого ніж n з коефіцієнтами з поля P;

$P_n[x_1,\ldots,x_k]$ — простір усіх многочленів степеня не більшого ніж n від змінних $x_1,\ldots,x_k$ з коефіцієнтами з поля P;

$P_{(n)}[x_1,\ldots,x_k]$ — простір усіх однорідних многочленів степеня n від змінних $x_1,\ldots,x_k$ з коефіцієнтами з поля P;

$\mathbb{Q}^+$ — мультиплікативна група всіх додатних раціональних чисел;

$\mathbb{Q}^*$ — мультиплікативна група поля раціональних чисел;

$\mathbb{R}^+$ — мультиплікативна група всіх додатних дійсних чисел;

$\mathbb{R}^*$ — мультиплікативна група поля дійсних чисел;

$r(\varphi)$ або $\mathrm{rank}(\varphi)$ — ранг лінійного відображення φ;

$T_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{b})}$ — матриця переходу від бази $(\boldsymbol{a})$ до бази $(\boldsymbol{b})$;

$\mathrm{tr}\,A$ — слід матриці A;

$V_\varphi(\lambda)$ — кореневий підпростір перетворення φ, що відповідає власному числу λ;

$V_\varphi^{(\lambda)}$ — власний підпростір перетворення φ, що відповідає числу λ;

$[\boldsymbol{v}]_{(\boldsymbol{e})}$ — координати вектора $\boldsymbol{v}$ в базі $(\boldsymbol{e})$;

$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, ... — вектори лінійного простору V;

$\mathbb{Z}_n$— множина класів лишків за модулем натурального числа n;

$\mathcal{O}$ — нульове перетворення або нульова матриця;

ε — тотожне перетворення;

$[\varphi]$ — матриця лінійного відображення φ;

$\varphi\circ\psi$ або $\varphi\psi$ — композиція відображень φ і ψ (тобто $(\varphi\circ\psi)(x) = \psi(\varphi(x))$).

Векторні простори та їх підпростори позначатимуться великими буквами латинського алфавіту V, W, U, ... , вектори — малими жирними буквами $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}$, ... Для елементів поля скалярів P використовуватимемо малі букви грецького алфавіту α, β, μ, ... n–вимірний арифметичний векторний простір над полем P позначатимемо символом P^n.

Якщо поле скалярів (коефіцієнтів) в умові задачі явно не вказане, вважається, що ним є поле дійсних або поле комплексних чисел.

Заняття 1. Простори та їх підпростори

Необхідні поняття. Непорожня множина V елементів довільної природи називається *векторним (лінійним) простором* над полем скалярів P, якщо на множині V введено дії додавання та множення на скаляри, які задовольняють *аксіоми векторного простору*:

(1) дія додавання кожній впорядкованій парі $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ елементів з V ставить у відповідність однозначно визначений елемент $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ з V так, що:

  (a) для будь-яких елементів $\boldsymbol{u}$ та $\boldsymbol{v}$ маємо: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (*комутативність додавання* векторів);

  (b) для будь-яких елементів $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ та $\boldsymbol{w}$ маємо: $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (*асоціативність додавання* векторів);

  (c) знайдеться такий елемент $\mathbf{0}$, що для довільного $\boldsymbol{u} \in V$ виконується рівність: $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ (існування *нульового* вектора);

  (d) для кожного елемента $\boldsymbol{u} \in V$ знайдеться такий елемент $\boldsymbol{x} \in V$, що $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ (існування *протилежного* вектора);

(2) дія множення на скаляри з поля P кожному елементу $\boldsymbol{u} \in V$ і скаляру $\alpha \in P$ ставить у відповідність однозначно визначений елемент $\boldsymbol{v} = \alpha \cdot \boldsymbol{v}$ з V так, що:

  (a) для будь-яких скалярів $\alpha, \beta \in P$ та елемента $\boldsymbol{u} \in V$ маємо: $(\alpha\beta) \cdot \boldsymbol{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{u})$ (*асоціативність множення* на скаляри);

  (b) для кожного елемента $\boldsymbol{u} \in V$ та одиниці 1 поля P маємо: $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ (*унітарність* множення на скаляри);

(3) і, нарешті, два *дистрибутивні* закони:

   (a) для будь-яких скалярів $\alpha, \beta \in P$ та елемента $\boldsymbol{u} \in V$ маємо: $(\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{u} = \alpha \cdot \boldsymbol{u} + \beta \cdot \boldsymbol{u}$;

   (b) для будь-яких скаляра $\alpha \in P$ та елементів $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ маємо: $\alpha \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha \cdot \boldsymbol{u} + \alpha \cdot \boldsymbol{v}$.

Нехай S — деяка система векторів. Множину всіх векторів, які можна подати у вигляді лінійної комбінації якоїсь скінченної підсистеми з S, називають *лінійною оболонкою* системи S і позначають $\mathcal{L}(S)$.

Система векторів S називається *системою твірних* векторного простору V, якщо лінійна оболонка системи S збігається з простором V, тобто якщо $\mathcal{L}(S) = V$.

Векторний простір називається *скінченновимірним*, якщо в ньому існує скінчена система твірних. У противному разі простір називається *нескінченновимірним.*

Лінійно незалежна система твірних векторного простору називається його *базою.*

Кількість векторів у базі простору V називається *розмірністю* простору V і позначається $\dim V$. Простір розмірності n також називають *n–вимірним.*

(*Лінійним*) *підпростором* векторного простору V називається непорожня множина векторів з V, що сама утворює векторний простір відносно тих дій, які задані на V. Кожен простір містить два *тривіальні підпростори* — нульовий підпростір $\{\mathbf{0}\}$ та сам простір.

Необхідні твердження. **1.** Непорожня множина W векторів з V утворює лінійний підпростір тоді й лише тоді, коли виконуються такі дві умови:

a) для довільних векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ з W їх сума $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ знову належить W;

b) для довільних скаляра $\alpha \in P$ та вектора $\boldsymbol{a} \in W$ добуток $\alpha \cdot \boldsymbol{a}$ знову належить W.

2. Кожна максимальна лінійно незалежна система векторів простору V є його базою. Навпаки, кожна база простору V є максимальною лінійно незалежною системою векторів.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *На множині* $\mathbb{R}^+$ *додатних дійсних чисел наступним чином визначимо додавання і множення на скаляри з поля* $\mathbb{R}$:

$$a \boxplus b = ab, \quad \mu \odot a = a^{\mu}\,.$$

Доведіть, що відносно цих дій множина $\mathbb{R}^+$ *є векторним простором над полем* $\mathbb{R}$.

Розв'язання. Сума додатних чисел і довільний степінь додатного числа знову є додатними. Тому дії на множині $\mathbb{R}^+$ визначені коректно. Аксіоми векторного простору перевіряються безпосередньо:

1) $(a \boxplus b) \boxplus c = ab \cdot c = a \cdot bc = a \boxplus (b \boxplus c)$.

2) Нульовий вектор x повинен для кожного $a \in \mathbb{R}^+$ задовольняти рівність $a = a \boxplus x = ax$. Отже, ним може бути лише число 1. І справді, $a \boxplus 1 = a \cdot 1 = a = 1 \cdot a = 1 \boxplus a$.

3) Протилежний до a вектор b має задовольняти рівність $1 = a \boxplus b = ab$. Тому b має збігатися з a^{-1}. І справді, $a \boxplus a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a = a^{-1} \boxplus a$.

4) Дія $\boxplus$ є комутативною, бо $a \boxplus b = ab = ba = b \boxplus a$.

5) Крім того, $1 \odot a = a^1 = a$.

6) Також легко бачити, що

$$\mu \odot (\beta \odot a) = \mu \odot a^{\beta} = (a^{\beta})^{\mu} = a^{\mu \cdot \beta} = (\mu \cdot \beta) \odot a\,.$$

Перевіримо виконання дистрибутивних законів:

7) для довільних скалярів $\mu, \beta \in \mathbb{R}$ та вектора $a \in \mathbb{R}^+$

$$(\mu + \beta) \odot a = a^{\mu+\beta} = a^{\mu} \cdot a^{\beta} = a^{\mu} \boxplus a^{\beta} = (\mu \odot a) \boxplus (\beta \odot a)\,;$$

8) для довільних скаляра $\mu \in \mathbb{R}$ та векторів $a, b \in \mathbb{R}^+$

$$\mu \odot (a \boxplus b) = \mu \odot (ab) = (ab)^{\mu} = a^{\mu} \cdot b^{\mu} = a^{\mu} \boxplus b^{\mu} = (\mu \odot a) \boxplus (\mu \odot b)\,. \square$$

Задача 2. *Доведіть, що для довільних попарно різних дійсних чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *система функцій* $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_n x}$ *є лінійно незалежною.*

Розв'язання. *I спосіб.* Це очевидно для $n = 1$. Далі застосуємо індукцію за n. Припустимо, що

$$\mu_1 e^{a_1 x} + \cdots + \mu_{n-1} e^{a_{n-1} x} + \mu_n e^{a_n x} = 0\,. \qquad (1)$$

Диференціюючи рівність (1), отримаємо:

$$a_1\mu_1 e^{a_1 x} + \cdots + a_{n-1}\mu_{n-1}e^{a_{n-1}x} + a_n\mu_n e^{a_n x} = 0\,. \tag{2}$$

Якщо тепер від (2) відняти рівність (1), помножену на a_n, то одержимо рівність

$$(a_1 - a_n)\mu_1 e^{a_1 x} + \cdots + (a_{n-1} - a_n)\mu_{n-1}e^{a_{n-1}x} = 0\,. \tag{3}$$

За припущенням індукції функції $e^{a_1 x}, \ldots, e^{a_{n-1}x}$ є лінійно незалежними. Тому

$$(a_1 - a_n)\mu_1 = \cdots = (a_{n-1} - a_n)\mu_{n-1} = 0\,. \tag{4}$$

Оскільки числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ попарно різні, то жоден з множників $a_1 - a_n, \ldots, a_{n-1} - a_n$ не дорівнює 0. Тому $\mu_1 = \cdots = \mu_{n-1} = 0$. Але тоді з (1) одразу випливає, що й $\mu_n = 0$. Отже, рівність (1) виконується лише тоді, коли всі коефіцієнти $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ дорівнюють 0. Тому функції $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_n x}$ — лінійно незалежні.

II спосіб. Для доведення лінійної незалежності функцій $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_n x}$ потрібно показати, що рівність (1) виконується для довільних дійсних x лише тоді, коли всі коефіцієнти $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ дорівнюють 0. Зокрема, (1) має виконуватися і при $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $\ldots$, $x = n-1$, тобто:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mu_1(e^{a_1})^0 & +\cdots+ & \mu_{n-1}(e^{a_{n-1}})^0 & + & \mu_n(e^{a_n})^0 & = 0, \\
\mu_1(e^{a_1})^1 & +\cdots+ & \mu_{n-1}(e^{a_{n-1}})^1 & + & \mu_n(e^{a_n})^1 & = 0, \\
\mu_1(e^{a_1})^2 & +\cdots+ & \mu_{n-1}(e^{a_{n-1}})^2 & + & \mu_n(e^{a_n})^2 & = 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\mu_1(e^{a_1})^{n-1} & +\cdots+ & \mu_{n-1}(e^{a_{n-1}})^{n-1} & + & \mu_n(e^{a_n})^{n-1} & = 0.
\end{array} \tag{5}$$

Система (5) є системою n лінійних однорідних рівнянь відносно невідомих $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n$. Така система має ненульовий розв'язок лише тоді, коли її визначник дорівнює нулю. Визначник

$$\begin{vmatrix}
1 & \cdots & 1 & 1 \\
(e^{a_1})^1 & \cdots & (e^{a_{n-1}})^1 & (e^{a_n})^1 \\
(e^{a_1})^2 & \cdots & (e^{a_{n-1}})^2 & (e^{a_n})^2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(e^{a_1})^{n-1} & \cdots & (e^{a_{n-1}})^{n-1} & (e^{a_n})^{n-1}
\end{vmatrix} \tag{6}$$

системи (5) є визначником Вандермонда, який дорівнює нулю лише тоді, коли знайдуться такі різні індекси i та j, що $e^{a_i} = e^{a_j}$. Але тоді $a_i = a_j$, що неможливо за умовою задачі. Тому система (5) має лише нульовий розв'язок $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\ldots$, $\mu_n = 0$ і функції $e^{a_1 x}$, $e^{a_2 x}$, $\ldots$, $e^{a_n x}$ — лінійно незалежні. □

Задача 3. *З'ясуйте, чи буде підпростором простору* $\mathbb{R}[x]$ *усіх многочленів множина*: a) *усіх многочленів степеня* n; b) *усіх многочленів, що містять лише члени парних степенів*; c) *усіх многочленів, для яких дане число* $a \in \mathbb{R}$ *буде коренем*; d) *усіх многочленів, для яких дане число* $a \in \mathbb{R}$ *буде простим коренем*; e) *усіх многочленів* $f(x)$, *які задовольняють рівність* $f(1) + f(2) + f(3) = 0$.

Розв'язання. Непорожня підмножина векторного простору буде підпростором тоді й лише тоді, коли вона замкнена відносно додавання векторів і множення векторів на скаляри.

a) Якщо у двох многочленів степеня n коефіцієнти при старших членах протилежні, то їх сума є многочленом меншого степеня. Отже, множина всіх многочленів степеня n підпростору не утворює.

b) Якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ містять лише члени парних степенів, то довільне кратне $\alpha f(x)$ і сума $f(x) + f(x)$ також містять лише члени парних степенів. Тому такі многочлени утворюють підпростір.

c) Якщо $f(a) = 0$ і $g(a) = 0$, то $(\alpha f)(a) = \alpha f(a) = 0$ і $(f + g)(a) = f(a) + g(a) = 0$. Тому такі многочлени утворюють підпростір.

d) При додаванні многочленів кратність кореня може збільшуватися. Наприклад, для многочленів $(x-a)^2 + (x-a)$ і $(x-a)^2 - (x-a)$ число a є простим коренем, а для їх суми $2(x-a)^2$ — коренем кратності 2. Тому множина вказаних многочленів підпростору не утворює.

e) Нехай $f(1) + f(2) + f(3) = 0$ і $g(1) + g(2) + g(3) = 0$. Тоді

$$(\alpha f)(1) + (\alpha f)(2) + (\alpha f)(3) = \alpha f(1) + \alpha f(2) + \alpha f(3) =$$

$$= \alpha\bigl(f(1) + f(2) + f(3)\bigr) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Також

$$(f+g)(1) + (f+g)(2) + (f+g)(3) = f(1) + g(1) + f(2) + g(2) + f(3) + g(3) =$$

$$= \bigl(f(1) + f(2) + f(3)\bigr) + \bigl(g(1) + g(2) + g(3)\bigr) = 0 + 0 = 0.$$

Отже, множина таких многочленів замкнена відносно додавання і множення на скаляри, а тому утворює підпростір. □

Задача 4. *Знайдіть однорідну систему лінійних рівнянь, підпростір розв'язків якої породжується векторами* $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2, 3, 2, 3)$.

Розв'язання. Запишемо з невизначеними коефіцієнтами рівняння відповідної однорідної системи лінійних рівнянь: $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4 = 0$. Умова, що кожен з векторів $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ є розв'язком, дає три рівняння для коефіцієнтів:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 \cdot 1 & + & a_2 \cdot 1 & + & a_3 \cdot 1 & + & a_4 \cdot 1 & = & 0, \\ a_1 \cdot 1 & & + & & a_3 \cdot 1 & & & = & 0, \\ a_1 \cdot 2 & + & a_2 \cdot 3 & + & a_3 \cdot 2 & + & a_4 \cdot 3 & = & 0. \end{array} \tag{7}$$

Таким чином, отримали систему лінійних рівнянь для коефіцієнтів a_1, a_2, a_3, a_4. Розв'язуючи її, отримуємо:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Вибираючи за вільні невідомі a_3 і a_4, одержуємо для (7) фундаментальну систему розв'язків: $(-1, 0, 1, 0)$ і $(0, -1, 0, 1)$. За цими розв'язками виписуємо лінійно незалежні рівняння, які й дають шукану однорідну систему лінійних рівнянь

$$\begin{array}{ccccc} -x_1 & + & x_3 & = & 0, \\ -x_2 & + & x_4 & = & 0. \end{array} \tag{9}$$

Справді, ранг системи (9) дорівнює 2, тому підпростір її розв'язків має розмірність $4 - 2 = 2$. З іншого боку, кожен з векторів $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ є розв'язком системи (9). З розв'язання (8) системи (7) випливає, що ранг системи векторів $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ дорівнює 2. Тому ці вектори також породжують підпростір розмірності 2. Отже, вони породжують увесь підпростір розв'язків. □

Основні задачі

5. Наведіть приклад множини з додаванням і множенням на скаляри з поля $\mathbb{R}$, в якій виконуються всі аксіоми векторного простору, крім:

a) аксіоми унітарності (2 b); b) аксіоми (3 a).

6. На множині $\mathcal{B}(M)$ усіх підмножин n–елементної множини M наступним чином визначимо додавання і множення на скаляри з поля $\mathbb{Z}_2$:

$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B), \quad 1 \cdot A = A, \quad 0 \cdot A = \varnothing \,.$$

a) Доведіть, що відносно цих дій множина $\mathcal{B}(M)$ є векторним простором над полем $\mathbb{Z}_2$.

b) Знайдіть яку–небудь базу і розмірність цього простору.

c) З'ясуйте, чи буде підпростором цього простору множина всіх підмножин, що містять: (i) парну кількість елементів; (ii) непарну кількість елементів.

7. Доведіть лінійно незалежність над $\mathbb{R}$ систем функцій:
a) $\sin x$, $\cos x$; b) 1, $\sin x$, $\cos x$; c) $\sin x$, $\sin 2x$, $\ldots$, $\sin nx$;
d) 1, $\cos x$, $\cos 2x$, $\ldots$, $\cos nx$; e) 1, $\sin x$, $\sin^2 x$, $\ldots$, $\sin^n x$.

8. З'ясуйте, чи буде лінійно незалежною над $\mathbb{R}$ система функцій:
a) 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, $\ldots$, $\cos^n x$, $\sin^n x$ $(n > 1)$;
b) $\cos x$, $\sin x$, $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, $\ldots$, $\cos^n x$, $\sin^n x$ $(n > 3)$.

9. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $M_n(\mathbb{R})$ усіх дійсних матриць порядку n множина: a) усіх симетричних матриць; b) усіх кососиметричних матриць; c) усіх вироджених матриць; d) усіх невироджених матриць; e) усіх діагональних матриць; f) усіх матриць зі слідом нуль; g) усіх верхніх трикутних матриць; h) усіх матриць, які перестановочні з усіма матрицями.

10. З'ясуйте, чи буде підпростором простору V усіх скрізь визначених дійсних функцій множина: a) усіх неперервних функцій; b) усіх обмежених функцій; c) усіх функцій, що обертаються в нуль хоча б в одній точці даної множини $A \subset \mathbb{R}$; d) усіх функцій, що обертаються в нуль в усіх точках даної множини $A \subset \mathbb{R}$; e) усіх функцій, що мають лише скінченну кількість точок розриву; f) усіх неперервних функцій, що мають лише скінченну кількість локальних екстремумів; g) усіх монотонних функцій; h) усіх функцій, для яких вісь Ox є асимптотою.

11. З'ясуйте, чи буде підпростором простору $\mathbb{R}^n$ множина всіх тих векторів $(x_1, \ldots, x_n)$, які задовольняють у умову:
a) $x_1 = x_n = 0$; b) $x_1 + x_n = 0$; c) $x_1 \cdot x_n = 0$.

12. Опишіть лінійну оболонку даної системи многочленів:
a) $1, x, x^2$; b) $1 + x^2, x + x^2, 1 + x + x^2$;
c) $1 - x^2, x - x^2, 2 - x - x^2$; d) $1 - x^2, x - x^2$.

13. Знайдіть однорідну систему лінійних рівнянь, простір розв'язків якої породжується векторами:

a) $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1, 1)$; b) $\boldsymbol{a} = (0, 0, 0, 0)$;

c) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 4, 9)$;

d) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -1, 1, -1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 0, 0, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 1, 1, -1, 7)$.

14. Доведіть, що простір $\mathbb{R}(a, b)$ неперервних на інтервалі (a, b) функцій є нескінченновимірним.

15. Нехай U і W — підпростори простору V і $\dim U = \dim W$.

a) Чи випливає з цих умов рівність $U = W$?

b) А якщо додатково вимагати, щоб один з підпросторів U та W містився в іншому?

c) А якщо накласти ще й умову, щоб простір V був скінченновимірним?

Додаткові задачі

16. Нехай P — скінченне поле з q елементів, а V — n–вимірний векторний простір над полем P. Знайдіть: a) суму всіх векторів з V; b) кількість баз простору V; c) кількість невироджених матриць порядку n з коефіцієнтами з поля P; d) кількість k–вимірних підпросторів простору V.

17. Нехай $V_n^k(q)$ — кількість k–вимірних підпросторів в n–вимірному арифметичному просторі над полем з q елементів. Дайте комбінаторне доведення наступних рівностей:

a) $V_n^k(q) = V_n^{n-k}(q)$; b)* $V_{n+1}^k(q) = V_n^{k-1}(q) + q^k V_n^k(q)$.

18. Доведіть, що множина функцій $\{a\cos(x + \varphi) \,|\, a, \varphi \in \mathbb{R}\}$ утворює підпростір простору скрізь визначених дійсних функцій, і знайдіть його розмірність і яку–небудь базу.

19. З'ясуйте, чи буде множина $M = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0\}$ підпростором простору P^n, і якщо буде, то знайдіть його розмірність для: a) $P = \mathbb{R}$; b) $P = \mathbb{C}$; c) $P = \mathbb{Z}_2$.

20. Нехай $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — база векторного простору V і нехай $\boldsymbol{e}_{n+1} = -\boldsymbol{e}_1 - \cdots - \boldsymbol{e}_n$. Доведіть, що кожний вектор $\boldsymbol{v} \in V$ можна подати, причому єдиним способом, у вигляді лінійної комбінації $\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n + \alpha_{n+1} \boldsymbol{e}_{n+1}$, сума $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + \alpha_{n+1}$ коефіцієнтів якої дорівнює 0.

21. Нехай $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_{n+1}$ — вектори із зад. 1.20. Доведіть, що для кожного ненульового вектора $\boldsymbol{v} \in V$ існує такий вектор системи $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_{n+1}$, що після викидання його з цієї системи вектор $\boldsymbol{v}$ записується у вигляді лінійної комбінації решти векторів з невід'ємними коефіцієнтами.

Домашнє завдання

22. Нехай V — векторний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Залишимо додавання векторів без змін, а нове множення векторів на комплексні числа визначимо таким правилом: $z \odot \boldsymbol{v} = \bar{z}\boldsymbol{v}$. Доведіть, що знову одержимо векторний простір над полем $\mathbb{C}$.

23. Для яких значень λ з лінійної незалежності системи векторів $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ випливає лінійна незалежність системи векторів $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3,\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_{n-1} + \boldsymbol{u}_n,\ \boldsymbol{u}_n + \lambda\boldsymbol{u}_1$?

24. Доведіть, що такі системи функцій є лінійно незалежними:
a) $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx$;
b) $1, \cos x, \cos^2 x, \ldots, \cos^n x$;
c) $x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_n}$, де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — попарно різні дійсні числа.

25. Доведіть, що в просторі всіх n разів диференційовних дійсних функцій множина W тих функцій, які задовольняють рівність

$$f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_1 f' + a_0 = 0,$$

утворює підпростір.

26. Знайдіть однорідну систему лінійних рівнянь, підпростір розв'язків якої породжується векторами $\boldsymbol{a}_1 = (1, -1, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2, 0, 1, 1)$.

Література. [1], с. 3–8; [2], с. 31–35; [3], с. 7–9; [4], с. 62–65; [5], с. 246–249; [7], с. 87–93; [8], с. 11–17; [9], с. 184–188; [12], с. 301–304; [13], с. 42–51.

Заняття 2. Координати та розмірності

Необхідні поняття. Якщо $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — база простору V, то коефіцієнти розкладу $\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$ вектора $\boldsymbol{u}$ за векторами цієї бази визначені однозначно і називаються *координатами* вектора $\boldsymbol{u}$ у цій базі. Позначають $[\boldsymbol{u}]_{(\boldsymbol{e})} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ (індекс $(\boldsymbol{e})$, який вказує базу, і значок транспонування $^\top$ часто опускають).

Нехай $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ і $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ — дві бази простору V (які умовно називають *старою* і *новою*). Коефіцієнти розкладів

$$\begin{array}{lcl}
\boldsymbol{e}'_1 & = & t_{11}\boldsymbol{e}_1 + t_{21}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + t_{n1}\boldsymbol{e}_n\,, \\
\boldsymbol{e}'_2 & = & t_{12}\boldsymbol{e}_1 + t_{22}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + t_{n2}\boldsymbol{e}_n\,, \\
\multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\
\boldsymbol{e}'_n & = & t_{1n}\boldsymbol{e}_1 + t_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + t_{nn}\boldsymbol{e}_n
\end{array}$$

утворюють матрицю

$$T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{e}')} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

яка називається *матрицею переходу* від бази $(\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ до бази $(\boldsymbol{e}') = (\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$. Зауважимо, що i–й стовпчик матриці переходу утворюють коефіцієнти розкладу i–го вектора нової бази за векторами старої бази.

Векторні простори V і W над одним і тим же полем P називаються *ізоморфними*, якщо між елементами цих просторів можна встановити взаємно однозначну відповідність $\boldsymbol{v} \leftrightarrow \boldsymbol{v}'$, яка зберігає додавання векторів і множення векторів на скаляри, тобто для довільних $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V$ та $c \in P$ виконуються умови: $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \;\leftrightarrow\; \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}'$ і $c\boldsymbol{v} \;\leftrightarrow\; c\boldsymbol{v}'$.

Необхідні твердження. **1.** Всі бази скінченновимірного векторного простору складаються з однакової кількості векторів. Кожну лінійно незалежну систему векторів можна доповнити до бази простору і з кожної системи твірних можна вибрати базу. Зокрема, в n–вимірному просторі будь–які n лінійно незалежних векторів утворюють базу.

2. *Правило зміни координат вектора при переході до нової бази*: для координат $(x_1, \ldots, x_n)$ і $(x'_1, \ldots, x'_n)$ вектора $\boldsymbol{v}$ відповідно у старій і новій базах маємо:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \left(\text{або } \; [\boldsymbol{v}]_{(\boldsymbol{e})} = T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{e}')}[\boldsymbol{v}]_{(\boldsymbol{e}')}\right).$$

3. Якщо $(\boldsymbol{e})$, $(\boldsymbol{e}')$ і $(\boldsymbol{e}'')$ — бази простору V, то

$$T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{e}'')} = T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{e}')} \cdot T_{(\boldsymbol{e}')\to(\boldsymbol{e}'')}\,, \quad T_{(\boldsymbol{e}')\to(\boldsymbol{e})} = T^{-1}_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{e}')}\,.$$

4. Два простори V і U (над одним і тим же полем P) будуть ізоморфними тоді й лише тоді, коли $\dim V = \dim U$.

5. Якщо $\dim V = \dim U$ і $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ та $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ — бази просторів V і W відповідно, то існує єдиний такий ізоморфізм $\varphi : V \to W$, що $\varphi(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{f}_k$ для всіх k.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Доведіть, що коли система многочленів з простору $P_n[x]$ містить рівно по одному многочлену кожного степеня k, $0 \le k \le n$, то ця система є базою простору $P_n[x]$.*

Розв'язання. Нехай $f_0(x)$, $f_1(x)$, …, $f_n(x)$ — многочлени, причому степінь многочлена $f_k(x)$ дорівнює k ($k = 0, 1, \ldots, n$). Позаяк кількість многочленів дорівнює розмірності простору $P_n[x]$, то досить довести, що вони лінійно незалежні. Для $n = 0$ це очевидно. Далі скористаємося індукцією. Припустимо, що

$$\mu_0 f_0(x) + \mu_1 f_1(x) + \cdots + \mu_n f_n(x) = 0\,. \tag{10}$$

За умовою $f_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, де $a_n \ne 0$. Старший коефіцієнт многочлена в правій частині рівності (10) дорівнює $\mu_n a_n$, а многочлена в лівій частині — 0. Тому $\mu_n a_n = 0$, звідки $\mu_n = 0$. Але тоді рівність (10) набуває вигляду

$$\mu_0 f_0(x) + \mu_1 f_1(x) + \cdots + \mu_{n-1} f_{n-1}(x) = 0\,.$$

За припущенням індукції звідси випливає, що $\mu_0 = \mu_1 = \cdots = \mu_{n-1} = 0$. Таким чином, рівність (10) виконується лише тоді, коли всі коефіцієнти $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ дорівнюють 0. Тому система многочленів $f_0(x)$, $f_1(x)$, …, $f_n(x)$ лінійно незалежна і є базою простору $P_n[x]$. □

Задача 2. *Доведіть, що вектори* $\boldsymbol{a}_1 = (2, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 0)$ *утворюють базу простору* $\mathbb{R}^3$, *і знайдіть координати вектора* $\boldsymbol{v} = (5, -1, 2)$ *в цій базі.*

Розв'язання. Координати вектора $\boldsymbol{v}$ в базі $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ — це коефіцієнти лінійної комбінації $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3$. Перейшовши в цій рівності до координат, отримуємо систему

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & + & x_3 & = & 5\,, \\ & & x_2 & + & x_3 & = & -1\,, \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 2\,. \end{array}$$

Розв'язуючи її методом Ґауса, маємо:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Ранг основної матриці системи дорівнює 3, тому її стовпчики (а це вектори $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$) лінійно незалежні. Позаяк простір $\mathbb{R}^3$ тривимірний, то вектори $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ утворюють базу. Вектор $\boldsymbol{v}$ має в цій базі координати $(4, 2, -3)$. □

Задача 3. *Вкажіть яку–небудь базу і знайдіть розмірність*: а) *простору $M_n(\mathbb{R})$ усіх дійсних матриць порядку n*; b) *підпростору всіх симетричних матриць*; c) *підпростору всіх кососиметричних матриць.*

Розв'язання. а) Матричні одиниці $E_{ij},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n$, утворюють систему твірних простору $M_n(\mathbb{R})$, бо кожна матриця $A = (a_{ij})$ з $M_n(\mathbb{R})$ записується у вигляді $A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot E_{ij}$. З рівності $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot E_{ij} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ також випливає, що лінійна комбінація $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot E_{ij}$ буде дорівнювати нулю лише тоді, коли всі коефіцієнти a_{ij} — нульові. Отже, ця система твірних є лінійно незалежною, а тому є базою. Звідси $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$.

b) Оскільки симетричні матриці на симетричних відносно головної діагоналі місцях містять однакові елементи (тобто $a_{ij} = a_{ji}$), то $(a_{ij})_{i,j=1}^n = \sum_{i=1}^n a_{ii} \cdot E_{ii} + \sum_{i<j} a_{ij} \cdot (E_{ij} + E_{ji})$. Тому матриці E_{ii} $(1 \le i \le n)$ і $E_{ij} + E_{ji}$ $(1 \le i < j \le n)$ утворюють систему твірних підпростору симетричних матриць. Їх лінійна незалежність очевидна. Тому це база, а їх кількість $n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$ дає розмірність підпростору.

c) Нагадаємо, що кососиметрична матриця на симетричних відносно головної діагоналі місцях містить протилежні за знаком елементи (тобто $a_{ij} = -a_{ji}$). Зокрема, на головній діагоналі мають бути нулі. Тому система матриць $E_{ij} - E_{ji}$ $(1 \le i < j \le n)$ утворює базу нашого підпростору, а його розмірність дорівнює $\frac{n^2-n}{2}$. $\square$

Задача 4. *Вкажіть яку–небудь базу і знайдіть розмірність підпростору V всіх тих многочленів з $\mathbb{R}_n[x]$, для яких:* a) *дане число $a \in \mathbb{R}$ буде коренем;* b) *дане число $a \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ буде коренем.*

Розв'язання. a) Зауважимо, що не для кожного многочлена з $\mathbb{R}_n[x]$ число a буде коренем, а тому V є власним підпростором простору $\mathbb{R}_n[x]$. Але тоді $\dim V < \dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.

За теоремою Безу число a буде коренем многочлена $f(x)$ тоді й лише тоді, коли $f(x)$ ділиться на $x-a$. Кожен з многочленів $x-a$, $x(x-a)$, $\ldots$, $x^{n-1}(x-a)$ з простору $\mathbb{R}_n[x]$ на $x-a$ ділиться, тому всі вони належать підпростору V. Крім того, ці n многочленів лінійно незалежні, бо мають різні степені. Тому $\dim V \ge n$. Разом з попереднім це дає $\dim V = n$. Але в n–вимірному просторі будь–які n лінійно незалежних векторів утворюють базу. Отже, многочлени $x-a$, $x(x-a)$, $\ldots$, $x^{n-1}(x-a)$ утворюють базу підпростору V.

b) Якщо комплексне число a є коренем дійсного многочлена $f(x)$, то коренем буде і спряжене число $\overline{a}$. За теоремою Безу це означає, що многочлен $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ належить підпростору V тоді й лише тоді, коли $f(x)$ має вигляд $f(x) = (x-a)(x-\overline{a})g(x)$, де $g(x)$ — многочлен степеня, не більшого ніж $n-2$. Многочлени $(x-a)(x-\overline{a})$, $x(x-a)(x-\overline{a})$, $\ldots$, $x^{n-2}(x-a)(x-\overline{a})$ є такими, і вони лінійно незалежні, бо мають різні степені. Ці многочлени є також системою твірних підпростору V, бо кожний многочлен вигляду $f(x) = (x-a)(x-\overline{a})g(x)$ з V можна подати у вигляді їх лінійної комбінації. Тому ці многочлени є базою підпростору V. Оскільки їх $n-1$, то $\dim V = n-1$. $\square$

Задача 5. *Доведіть, що геометричні прогресії* $1, q, q^2, q^3, \ldots$ *із знаменниками* $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *та* $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *відповідно утворюють базу простору V всіх дійсних послідовностей, що задовольняють рекурентне співвідношення* $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. *Знайдіть у цій базі координати послідовності Фібоначчі* $0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$.

Розв'язання. Легко перевіряється, що множина V дійсних послідовностей, які задовольняють рекурентне співвідношення $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, замкнена відносно додавання і множення на скаляри, а тому справді утворює векторний простір. Позначимо $\boldsymbol{q}_1 = (q_1^n)_{n\geq 0}$, $\boldsymbol{q}_2 = (q_2^n)_{n\geq 0}$. Зауважимо, що q_1 і q_2 є коренями квадратного рівняння $x^2 - x - 1 = 0$, тому $q_i^2 = q_i + 1$, $i = 1, 2$. Звідси випливає, що

$$q_i^{n+2} = q_i^n \cdot q_i^2 = q_i^n \cdot (q_i + 1) = q_i^{n+1} + q_i^n.$$

Отже, кожна з прогресій $\boldsymbol{q}_1$ і $\boldsymbol{q}_2$ належить простору V.

Покажемо тепер, що кожну послідовність $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ можна подати у вигляді $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{q}_1 + x_2\boldsymbol{q}_2$ для деяких x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$. Співвідношення $a_0 = x_1 + x_2$, $a_1 = x_1q_1 + x_2q_2$ визначають x_1 та x_2 єдиним чином, бо визначник цієї системи $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = q_2 - q_1 \neq 0$. Далі застосовуємо індукцію за n :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n = (x_1q_1^{n+1} + x_2q_2^{n+1}) + (x_1q_1^n + x_2q_2^n) =$$

$$= x_1q_1^n(q_1 + 1) + x_2q_2^n(q_2 + 1) = x_1q_1^{n+2} + x_2q_2^{n+2}.$$

Тому $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ утворюють систему твірних нашого простору. Оскільки $\boldsymbol{q}_1$ і $\boldsymbol{q}_2$ не пропорційні, то вони лінійно незалежні. Це завершує доведення того, що $\boldsymbol{q}_1$ і $\boldsymbol{q}_2$ утворюють базу.

Щоб знайти в цій базі координати (x_1, x_2) послідовності Фібоначчі, потрібно розв'язати систему $x_1 + x_2 = 0$, $x_1q_1 + x_2q_2 = 1$. Розв'язуючи її, знаходимо: $x_1 = \frac{1}{q_1 - q_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Таким чином, отримуємо формулу для загального члена послідовності Фібоначчі: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n\Big)$. Її називають *формулою Біне.* □

Задача 6. *Доведіть, що кожна з двох систем векторів* $\boldsymbol{a}_1 = (4, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (5, 3, 2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 2, 1)$ *та* $\boldsymbol{b}_1 = (1, 4, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 3, 1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 2, 3)$ *утворює базу простору* $\mathbb{R}^3$, *і знайдіть матрицю переходу від першої бази до другої і навпаки.*

Розв'язання. Насправді в задачі присутні три системи векторів: окрім явно вказаних систем $(\boldsymbol{a})$ і $(\boldsymbol{b})$ є ще початкова база $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, в якій дано координати всіх векторів. Матриці переходу $T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{a})}$ і $T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{b})}$ виписуються легко: їх стовпчиками є вектори систем $(\boldsymbol{a})$ і $(\boldsymbol{b})$ відповідно. Тоді

$$T_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{b})} = T_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{e})} \cdot T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{b})} = T^{-1}_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{a})} \cdot T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{b})}\,.$$

Аналогічно $T_{(\boldsymbol{b})\to(\boldsymbol{a})} = T^{-1}_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{b})} \cdot T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{a})}\,.$

Отже, задача зводиться до знаходження обернених матриць $T^{-1}_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{a})}$ і $T^{-1}_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{b})}$ (знайшовши їх, ми виконаємо й першу частину завдання. Справді, обернені існують лише для невироджених матриць, тобто матриць, стовпчики яких лінійно незалежні. А незалежність векторів кожної з систем $(\boldsymbol{a})$ і $(\boldsymbol{b})$ якраз і означає, що ці системи є базами простору $\mathbb{R}^3$). Знаходимо $T^{-1}_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{a})}$ і $T^{-1}_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{b})}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Таким чином,

$$T_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{b})} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ -4 & -1 & 4 \\ 11 & 6 & -1 \end{pmatrix},$$

$$T_{(\boldsymbol{b})\to(\boldsymbol{a})} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 12 & -3 & -2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -27 & -16 \\ 40 & 47 & 28 \\ -13 & -15 & -9 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. 1) Матрицю $T_{(\boldsymbol{b})\to(\boldsymbol{a})}$ можна було шукати як обернену до $T_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{b})}$. Крім того, рівність $T_{(\boldsymbol{b})\to(\boldsymbol{a})} \cdot T_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{b})} = E$ можна використати для перевірки правильності обчислень.

2) Елементарні перетворення рядків матриці A рівносильні множенню зліва на відповідні елементарні матриці. Зокрема, зведення невиродженої матриці A до одиничної елементарними перетвореннями рядків

рівносильне множенню A зліва на A^{-1}. Це дає трохи інший спосіб обчислення матриці $T_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{b})}$: виписуємо матрицю $\left(T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{a})}\middle| T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{b})}\right)$ і елементарними перетвореннями рядків зводимо її ліву частину до одиничної матриці. В результаті отримаємо:

$$\left(T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{a})}\middle|T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{b})}\right) \rightsquigarrow \left(T^{-1}_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{a})}\cdot T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{a})}\middle|T^{-1}_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{a})}\cdot T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{b})}\right) =$$

$$= \left(E\middle|\, T_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{b})}\right).$$

У нашому випадку це виглядає так:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 6 & -1 \end{array}\right).$$

$\square$

Задача 7. *У просторі $\mathbb{R}_n[x]$ многочленів знайдіть матрицю переходу від бази $1, x, x^2, \ldots, x^n$ до бази $1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n$ і навпаки.*

Розв'язання. Стовпчики матриці переходу від першої бази до другої складаються з координат відповідних векторів другої бази в першій базі. Оскільки $(x-a)^k = x^k - \binom{k}{1}ax^{k-1} + \binom{k}{2}a^2x^{k-2} - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}a^{k-1}x + (-1)^k a^k$, то матриця переходу від першої бази до другої має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 & \ldots & (-1)^n a^n \\ 0 & 1 & -\binom{2}{1}a & \binom{3}{2}a^2 & \ldots & (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\binom{3}{1}a & \ldots & (-1)^{n-2}\binom{n}{n-2}a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & (-1)^{n-3}\binom{n}{n-3}a^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Щоб знайти матрицю зворотного переходу, зробимо заміну $x - a = y$. Тоді $x^k = (y+a)^k = y^k + \binom{k}{1}ay^{k-1} + \binom{k}{2}a^2y^{k-2} + \cdots + \binom{k}{k-1}a^{k-1}y + a^k$. Тому матриця переходу від другої бази до першої має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \ldots & a^n \\ 0 & 1 & \binom{2}{1}a & \binom{3}{2}a^2 & \ldots & \binom{n}{n-1}a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \binom{3}{1}a & \ldots & \binom{n}{n-2}a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & \binom{n}{n-3}a^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Основні задачі

8. Знайдіть розмірність підпростору тих векторів $(x_1, \dots, x_n)$ з P^n, в яких перша й остання координати однакові.

9. З'ясуйте, яка з наступних систем векторів є базою простору $\mathbb{R}^4$:
a) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, -1, -2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 3, 0, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 2, 1, 3)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1, 3, -1, 0)$;
b) $\boldsymbol{b}_1 = (1, 2, -1, -2)$, $\boldsymbol{b}_2 = (2, 3, 0, -1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 2, 1, 4)$, $\boldsymbol{b}_4 = (1, 3, -1, 0)$.

10. Знайдіть у просторі $\mathbb{R}^4$ дві різні бази, що містять вектори $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 0, 0)$ та $\boldsymbol{a}_2 = (0, 0, 1, 1)$.

11. a) Знайдіть базу простору $\mathbb{R}_5[x]$, яка б містила лише многочлени пятого степеня. b) Чи існує база простору $\mathbb{R}_5[x]$, яка не містить жодного многочлена пятого степеня?

12. Знайдіть розмірність і вкажіть яку–небудь базу підпростору, породженого многочленами

$$f_1 = x^6 + x^4,\ f_2 = x^6 + 3x^4 - x,\ f_3 = x^6 - 2x^4 + x,\ f_4 = x^6 - 4x^4 + 2x.$$

13. Доведіть, що вектори $\boldsymbol{a}_1 = (2, 1, -3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, 2, -5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, -1, 1)$ утворюють базу простору $\mathbb{R}^3$, і знайдіть координати вектора $\boldsymbol{v} = (6, 2, -7)$ в цій базі.

14. Знайдіть координати многочлена $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - x + 1$ в базі:
a) $1,\ x + 1,\ x^2 + 1,\ x^3 + 1,\ x^4 + 1,\ x^5 + 1$;
b) $1 + x^3,\ x + x^3,\ x^2 + x^3,\ x^3,\ x^4 + x^3,\ x^5 + x^3$
простору $\mathbb{R}_5[x]$.

15. Нехай $a_0, a_1, \dots, a_n$ — попарно різні дійсні числа. Знайдіть базу простору $\mathbb{R}_n[x]$, в якому координатами многочлена $f(x)$ будуть числа $f(a_0),\ f(a_1),\ \dots,\ f(a_n)$.

16. Доведіть, що кожна з систем векторів
$\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, -1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1, 2, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_4 = (-1, -1, 0, 1)$
та $\boldsymbol{b}_1 = (2, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 1, 2, 2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (-2, 1, 1, 2)$, $\boldsymbol{b}_4 = (1, 3, 1, 2)$
утворює базу простору $\mathbb{R}^4$, і знайдіть матрицю переходу від першої бази до другої і навпаки.

17. Доведіть, що кожна з систем матриць:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$
утворює базу простору кососиметричних матриць порядку 3, і знайдіть матрицю переходу від першої бази до другої.

18. Як зміниться матриця переходу від першої бази до другої, якщо:
a) переставити місцями два вектори першої бази;
b) переставити місцями два вектори другої бази;
c) записати вектори обох баз у зворотному порядку?

19. Нехай V — n–вимірний простір над полем P. Доведіть, що кожну невироджену матрицю з $M_n(P)$ можна розглядати як матрицю переходу від якоїсь бази $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ простору V до іншої бази $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, причому першу базу можна вибирати довільно.

20. Вкажіть явно який–небудь ізоморфізм підпростору V тих многочленів з простору $\mathbb{R}_n[x]$, для яких фіксоване число a є коренем, на простір $\mathbb{R}^n$.

Додаткові задачі

21. Доведіть, що коли $m < n$, то для кожного m–вимірного підпростору U n–вимірного простору V можна знайти таку базу простору V, яка:
a) не містить жодного вектора з U;
b) містить рівно k векторів з U $(k \leq m)$.

22. Знайдіть розмірність:
a) простору $\mathbb{R}_{(n)}[x_1, \ldots, x_k]$ всіх дійсних однорідних многочленів степеня n від змінних $x_1, \ldots, x_k$;
b) простору $\mathbb{R}_n[x_1, \ldots, x_k]$ всіх дійсних многочленів степеня не більшого, ніж n, від змінних $x_1, \ldots, x_k$.

23. Доведіть, що в просторі $P[x_1, \ldots, x_n]$ усіх многочленів від змінних $x_1, \ldots, x_n$ з коефіцієнтами з поля P множина
a) всіх полілінійних многочленів,
b) всіх полілінійних однорідних многочленів степеня k
утворює підпростір, і знайдіть його розмірність.

24. Нехай A і B — невироджені матриці порядків m і n відповідно, а E_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, — матричні одиниці з простору $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Доведіть, що матриці $F_{ij} = AE_{ij}B$ утворюють базу простору $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, і знайдіть матрицю переходу від бази E_{11}, E_{12}, …, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, …, E_{mn} до бази F_{11}, F_{12}, …, F_{1n}, F_{21}, F_{22}, …, F_{mn}.

25. Скількома способами можна встановити ізоморфізм між двома n–вимірними векторними просторами над полем $\mathbb{Z}_p$?

26. Доведіть, що векторні простори із задачі 22 ізоморфні.

Домашнє завдання

27. З'ясуйте, чи утворює дана множина векторів з $\mathbb{R}^n$ підпростір, і якщо утворює, то знайдіть його розмірність:

a) вектори, в яких усі координати рівні між собою;

b) вектори, в яких усі координати з парними номерами рівні між собою;

c) вектори, в яких сума координат дорівнює 0;

d) вектори, в яких сума координат дорівнює 1;

e) вектори, в яких сума координат з парними номерами дорівнює сумі координат з непарними номерами.

28. Доповніть систему многочленів $x^5 + x^4$, $x^5 - 3x^3$, $x^5 + 2x^2$, $x^5 - x$ до бази простору $\mathbb{R}_5[x]$.

29. Знайдіть розмірність і вкажіть яку–небудь базу підпростору, породженого векторами $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,1,-1,-1,-1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2,2,0,0,-1)$, $\boldsymbol{v}_4 = (1,1,5,5,2)$, $\boldsymbol{v}_5 = (1,-1,-1,0,0)$.

30. Доведіть, що вектори $\boldsymbol{a}_1$, …, $\boldsymbol{a}_n$ утворюють базу простору $\mathbb{R}^n$, і знайдіть координати вектора $\boldsymbol{v}$:

a) $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,1,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,2,3)$, $\boldsymbol{v} = (6,9,14)$;

b) $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,0,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,1,3,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,0,0)$, $\boldsymbol{a}_4 = (0,1,-1,-1)$, $\boldsymbol{v} = (0,0,0,1)$.

31. Доведіть, що кожна з систем многочленів

$f_1 = x - x^2$, $f_2 = x^3$, $f_3 = 1 + 5x + x^3$, $f_4 = (1+x)^3$ та

$g_1 = (1+x)^3$, $g_2 = (1-x)^3$, $g_3 = x - x^2 + x^3$, $g_4 = 1 + x + x^2 + x^3$ утворює базу простору многочленів $\mathbb{R}_3[x]$, і знайдіть матрицю переходу від першої бази до другої і навпаки.

32. Доведіть, що кожна з систем векторів $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,2,1,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,2,1)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1,3,2,3)$ та $\boldsymbol{b}_1 = (1,0,3,3)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-2,-3,-5,-4)$, $\boldsymbol{b}_3 = (2,2,5,4)$, $\boldsymbol{b}_4 = (-2,-3,-4,-4)$ утворює базу простору $\mathbb{R}^4$, і знайдіть матрицю переходу від першої бази до другої і навпаки.

Література. [1], с. 8–15; [2], с. 52–62; [3], с. 10–20, 28–30; [4], с. 65–75; [5], с. 249–266; [7], с. 93–95; [8], с. 18–25; [9], с. 188–194; [12], с. 304–307; [13], с. 51–55, 140–146.

Заняття 3. Дії з підпросторами

Необхідні поняття. Сумою $U+W$ підпросторів U та W простору V називається множина всіх векторів вигляду $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$, де $\boldsymbol{u}\in U$, $\boldsymbol{w}\in W$, тобто $U+W=\{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\mid \boldsymbol{u}\in U, \boldsymbol{w}\in W\}$. Аналогічно визначається сума $V_1+\cdots+V_k$ довільної кількості підпросторів.

Сума $V_1+\cdots+V_k$ називається *прямою* (і позначається $V_1\oplus\cdots\oplus V_k$), якщо кожний вектор $\boldsymbol{v}$ з $V_1+\cdots+V_k$ може бути поданий у вигляді $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_k$, де $\boldsymbol{v}_i\in V_i$, єдиним чином.

Для довільних фіксованих вектора $\boldsymbol{v}\in V$ і підпростору $U\subseteq V$ множина $\boldsymbol{v}+U:=\{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\mid \boldsymbol{u}\in U\}$ називається *лінійним многовидом* з *напрямним* підпростором U.

Множина всіх лінійних многовидів з напрямним підпростором U позначається V/U і називається *факторпростором* простору V за підпростором U. Ця множина стає векторним простором, якщо додавання і множення на скаляри визначити правилами:

$$(\boldsymbol{u}+U)+(\boldsymbol{v}+U):=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+U\,,\quad a\cdot(\boldsymbol{u}+U):=(a\cdot\boldsymbol{v})+U\,.$$

Необхідні твердження. **1.** *Теорема Ґрасмана*: якщо V_1 і V_2 — підпростори скінченновимірного простору V, то

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2).$$

2. Такі умови рівносильні:

a) сума V_1+V_2 є прямою;

b) якщо $\mathbf{0}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$, де $\boldsymbol{v}_1\in V_1$, $\boldsymbol{v}_2\in V_2$, то $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2=\mathbf{0}$ (тобто нульовий вектор лише єдиним чином записується у вигляді $\mathbf{0}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$);

c) $V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}$;

d) $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$;

e) якщо $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_k$ і $\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_m$ — бази підпросторів V_1 та V_2 відповідно, то $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_m$ є базою V_1+V_2.

3. Простір V розкладається в пряму суму підпросторів V_1 та V_2 тоді й тільки тоді, коли $\langle V_1,V_2\rangle=V$ та $V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}$.

4. *Критерій рівності двох многовидів*: лінійні многовиди $\boldsymbol{u}+U$ та $\boldsymbol{w}+W$ збігаються тоді й лише тоді, коли $U=W$ і $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\in U$.

5. Якщо U — підпростір простору V, то $\dim U + \dim(V/U) = \dim V$.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Нехай U, V, W — підпростори векторного простору. Доведіть, що коли $U \subseteq V$, то $U + (V \cap W) = (U + V) \cap (U + W)$. Чи залишиться рівність правильною у випадку $U \nsubseteq V$?*

Розв'язання. Нехай $\boldsymbol{x} \in U + (V \cap W)$. Тоді $\boldsymbol{x}$ можна подати у вигляді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{y}$, де $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{y} \in V \cap W$. Отже, $\boldsymbol{x} \in U + V$ і $\boldsymbol{x} \in U + W$. Тому $\boldsymbol{x} \in (U + V) \cap (U + W)$. Зауважимо, що в цій частині розв'язання умова $U \subseteq V$ не використовувалася.

Нехай тепер $\boldsymbol{x} \in (U + V) \cap (U + W)$. Тоді існують розклади $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{w}$, де $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$, $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{w} \in W$. Позаяк $U \subseteq V$, то $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v} \in V$. Отже, $\boldsymbol{w} \in V \cap W$. Тому $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{w} \in U + (V \cap W)$.

Розглянемо тепер три різні одновимірні підпростори U, V, W у двовимірному просторі $\mathbb{R}^2$. Тоді $U \nsubseteq V$, $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$, $U + V = U + W = \mathbb{R}^2$, звідки випливає, що $U + (V \cap W) = U + \{\mathbf{0}\} = U$ і $(U + V) \cap (U + W) = \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$. Позаяк $U \neq \mathbb{R}^2$, то рівність не виконується. Отже, умова $U \subseteq V$ є необхідною. □

Задача 2. *Знайдіть розмірності* $\dim(U + W)$ *та* $\dim(U \cap W)$, *якщо*:

$U = \langle (2, -5, 3, 4),\ (1, 2, 0, -7),\ (3, -6, 2, 5) \rangle$,

$W = \langle (2, 0, -4, 6),\ (1, 1, 1, 1),\ (3, 3, 1, 5) \rangle$.

Розв'язання. Розмірність підпростору дорівнює рангу його системи твірних. Тому для знаходження розмірностей підпросторів U та W обчислюємо ранги матриць, утворених з їх систем твірних (оскільки рядковий і стовпчиковий ранги матриці збігаються, то для знаходження рангу системи векторів можна розглядати як матрицю, для якої дані вектори є її рядками, так і матрицю, для якої ці вектори є її стовпчиками).

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -7 \\ 3 & -6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 2 & -5 & 3 & 4 \\ 3 & -6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 18 \\ 0 & -12 & 2 & 25 \end{pmatrix}.$$

Два останні рядки непропорційні, тому ранг матриці дорівнює 3 і $\dim U = 3$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг цієї матриці також дорівнює 3, тому $\dim W = 3$.

Системою твірних для $U + W$ є об'єднання систем твірних підпросторів U і W. Тому для знаходження розмірності знову шукаємо ранг відповідної матриці (на першому кроці можна використати вже зроблені обчислення, бо робилися лише перетворення з рядками):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -7 \\ 3 & -6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 18 \\ 0 & -12 & 2 & 25 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -9 & 3 & 18 \\ 0 & -12 & 2 & 25 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 38 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 38 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки ранг матриці дорівнює 4, то $\dim(U + W) = 4$.

Для знаходження розмірності перетину $U \cap W$ скористаємося теоремою Ґрасмана:

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 3 + 3 - 4 = 2\,. \qquad \square$$

Задача 3. *Знайдіть базу перетину $U \cap W$ та бази підпросторів U, W і суми $U + W$, які б включали базу перетину, якщо*:

$U = \langle (1,1,0,0),\, (0,1,1,0),\, (0,0,1,1) \rangle$,

$W = \langle (1,0,1,0),\, (0,2,1,1),\, (1,2,1,2) \rangle$.

Розв'язання. Зручно з самого початку перейти від систем твірних підпросторів до їх баз (це спрощує обчислення і зменшує їх об'єм). Для цього треба в кожній з матриць, стовпчиками якої є вектори з системи твірних, виділити максимальну лінійно незалежну систему стовпчиків. У нашому випадку ранг кожної з матриць

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

дорівнює 3, тобто дані системи твірних є базами. Для зручності позначимо $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0,1,1,0)$, $\boldsymbol{u}_3 = (0,0,1,1)$, $\boldsymbol{w}_1 = (1,0,1,0)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,2,1,1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (1,2,1,2)$.

Розглянемо два методи знаходження бази перетину $U \cap W$ двох підпросторів U і W, заданих своїми базами $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ і $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ відповідно.

I спосіб. Вектор $\boldsymbol{v} \in U \cap W$ записуємо у вигляді

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k = \beta_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{w}_m \,. \tag{11}$$

Розписуючи праву рівність співвідношення (11) покоординатно, отримуємо однорідну систему лінійних рівнянь відносно невідомих $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Нехай $(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_k^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_m^{(i)})$, $i = 1, \ldots, r$, — фундаментальна система розв'язків отриманої системи. Покажемо, що вектори

$$\boldsymbol{v}_1 = \alpha_1^{(1)} \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k^{(1)} \boldsymbol{u}_k, \ \ldots, \ \boldsymbol{v}_r = \alpha_1^{(r)} \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k^{(r)} \boldsymbol{u}_k$$

утворюють базу перетину $U \cap W$, тобто лінійно незалежну систему твірних. Справді, з (11) випливає, що всі ці вектори належать перетину $U \cap W$. Позаяк фундаментальна система розв'язків породжує всю множину розв'язків системи рівнянь, то вектори $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ є системою твірних перетину $U \cap W$. Нарешті, якщо $\gamma_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \gamma_r \boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$, то з (11) випливає, що

$$\sum_{i=1}^{r} \gamma_i (\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_k^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_m^{(i)}) = (0, \ldots, 0)\,.$$

Розв'язки з фундаментальної системи лінійно незалежні, тому $\gamma_1 = \cdots = \gamma_r = 0$. Отже, вектори $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ — лінійно незалежні.

З (11) випливає, що вектори $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ можна визначати і рівностями

$$\boldsymbol{v}_1 = \beta_1^{(1)} \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_m^{(1)} \boldsymbol{w}_m, \ \ldots, \ \boldsymbol{v}_r = \beta_1^{(r)} \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_m^{(r)} \boldsymbol{w}_m \,,$$

які можна використати для контролю правильності обчислень.

У нашому випадку права рівність з (11) має вигляд

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Розв'язуючи відповідну однорідну систему лінійних рівнянь, отримуємо:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, фундаментальна система містить 2 розв'язки: $(2,0,2,1,0,1)$ та $(1,1,1,1,1,0)$. Це дає нам базу перетину з 2 векторів:

$$\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_3 = (2,2,2,2)\,,$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = (1,2,2,1)\,.$$

II спосіб. Спочатку шукаємо однорідні системи лінійних рівнянь S_1 і S_2, множинами розв'язків яких є відповідно підпростори U і W (див. зад. 1.4). Тоді перетин $U \cap W$ є множиною розв'язків однорідної системи $\begin{cases} S_1 \\ S_2 \end{cases}$. Фундаментальна система розв'язків цієї системи і буде базою перетину $U \cap W$.

У нашому випадку це виглядає так. Для знаходження системи S_1 розв'язуємо однорідну систему лінійних рівнянь, рядками основної матриці якої є вектори системи твірних підпростору U:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Фундаментальна система розв'язків містить лише один розв'язок $(-1,1,-1,1)$. Тому система S_1 складається лише з одного рівняння

$$-x_1+x_2-x_3+x_4=0\,. \tag{12}$$

Аналогічно для знаходження системи S_2 використовуємо систему твірних підпростору W:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

І в цьому випадку фундаментальна система містить лише один розв'язок $(-1,-1,1,1)$, а система S_2 складається лише з рівняння

$$-x_1-x_2+x_3+x_4=0\,. \tag{13}$$

Далі розв'язуємо систему з рівнянь (12) і (13):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Нарешті, виписуємо фундаментальну систему розв'язків: $\boldsymbol{v}_1'=(1,0,0,1)$, $\boldsymbol{v}_2'=(0,1,1,0)$, яка й буде базою перетину $U\cap W$.

Зауваження. Ця база відрізняється від тієї, яку ми знайшли раніше. Однак легко бачити, що вони еквівалентні.

Щоб знайти базу підпростору U, яка включає базу перетину $U\cap W$, дописуємо до бази перетину базу підпростору, і з отриманої системи векторів виділяємо максимальну лінійно незалежну підсистему, яка містить базу перетину. Зробимо це для бази $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перші три стовпчики лінійно незалежні, тому в якості бази підпростору U можна взяти вектори $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$, $\boldsymbol{u}_1$.

Аналогічно шукаємо потрібну базу підпростору W:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В якості бази підпростору W можна взяти вектори $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$, $\boldsymbol{w}_1$.

Потрібною базою суми $U+W$ буде об'єднання останніх двох баз: $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{w}_1$. $\square$

Задача 4. *Доведіть, що простір дійсних неперервних функцій є прямою сумою підпростору $\mathbb{R}_n[x]$ многочленів степеня $\le n$ і підпростору неперервних дійсних функцій, які в заданих попарно різних точках $a_0, a_1, \ldots, a_n$ дорівнюють 0.*

Розв'язання. Потрібно показати, що кожна неперервна функція $f(x)$ однозначно зображується у вигляді суми $f(x) = g(x) + h(x)$ многочлена $g(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ і неперервної функції $h(x)$, яка в заданих точках $a_0, a_1, \ldots, a_n$ дорівнює 0. Якщо таке зображення існує, то многочлен $g(x)$ має задовольняти умову:

$$g(a_0) = f(a_0), \quad g(a_1) = f(a_1), \ \ldots, \ g(a_n) = f(a_n).$$

За теоремою про існування інтерполяційного многочлена такий многочлен $g(x)$ існує, причому тільки один. Тому й доданок $h(x)$ також визначається однозначно: $h(x) = f(x) - g(x)$. Крім того, $h(x)$, як різниця неперервних функцій, також буде неперервною. $\square$

Задача 5. *Нехай* $U = \langle (2,3,11,5),\ (1,1,5,2),\ (0,1,1,1) \rangle$, $W = \langle (2,1,3,2),\ (1,1,3,4),\ (5,2,6,2) \rangle$. *Доведіть, що* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$, *та знайдіть проекцію вектора* $(2,0,0,3)$ *на кожен з цих підпросторів паралельно іншому підпростору.*

Розв'язання. Подібно як в зад. 3.2, знайдемо розмірності $\dim(U+W)$ та $\dim(U \cap W)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & -18 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки ранги відповідних матриць дорівнюють 2, 2 і 4, то $\dim U = \dim W = 2$, $\dim(U + W) = 4$. Тому $\dim(U \cap W) = \dim(U + W) - \dim U - \dim W = 0$. Таким чином, $U + W = \mathbb{R}^4$ і $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Отже, сума $U + W$ є прямою.

Позаяк $\dim U = \dim W = 2$, то в якості баз підпросторів U і W можна брати будь–які два непропорційні вектори з відповідної системи твірних. Візьмемо $\boldsymbol{u}_1 = (0, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1, 1, 5, 2)$ і $\boldsymbol{w}_1 = (2, 1, 3, 2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (1, 1, 3, 4)$. Подібно як в зад. 2.2, знайдемо координати (x_1, x_2, x_3, x_4) вектора $(2, 0, 0, 3)$ в базі $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Отже,$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, -1, 1, 1)$. Тому проекції вектора $(2, 0, 0, 3)$ на підпростори U і W дорівнюють відповідно $x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 = (-1, -2, -6, -3)$ та $x_3\boldsymbol{w}_1 + x_4\boldsymbol{w}_2 = (3, 2, 6, 6)$. $\square$

Задача 6. *Доведіть, що підмножина H векторного простору V над полем $P \neq \mathbb{Z}_2$ буде лінійним многовидом тоді й лише тоді, коли для довільних $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in H$ і довільних $a_1, a_2 \in P$ з $a_1 + a_2 = 1$ випливає $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 \in H$. Яка геометрична характеристика лінійного многовиду міститься у цій властивості?*

Розв'язання. Необхідність. Нехай H є лінійним многовидом: $H = \boldsymbol{v} + U$. Візьмемо довільні дві точки $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_1$ і $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_2$ з H, і нехай $a_1 + a_2 = 1$. Тоді

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 = a_1(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_1) + a_2(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_2) =$$

$$= (a_1 + a_2)\boldsymbol{v} + (a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{v} + (a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2).$$

Оскільки $a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2$ належить підпростору U, то $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 \in H$.

Достатність. Зафіксуємо точку $\boldsymbol{v} \in H$ і розглянемо множину $U = \{\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v}' \in H\}$. Тоді для довільних скаляра $\alpha \in P$ і елемента $\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v} \in U$

$$\alpha(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}) = \big(\alpha\boldsymbol{v}' + (1 - \alpha)\boldsymbol{v}\big) - \boldsymbol{v}.$$

Позаяк $\alpha + (1 - \alpha) = 1$, то $\alpha\boldsymbol{v}' + (1 - \alpha)\boldsymbol{v} \in H$ і $\alpha(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}) \in U$. Крім того, для довільних $\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}'' \in H$

$$(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}'' - \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'') - \boldsymbol{v}.$$

Але $\frac{1}{2}\boldsymbol{v}' + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}'' \in H$, бо $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Аналогічно

$$\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'' = 2\Big(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}' + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}''\Big) - \boldsymbol{v} \in H,$$

бо $\frac{1}{2}\boldsymbol{v}' + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}'' \in H$, $\boldsymbol{v} \in H$ і $2 + (-1) = 1$. Тому $(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}'' - \boldsymbol{v}) \in U$. Отже, множина U замкнена відносно додавання і множення на скаляри, а тому є підпростором. Але тоді для довільної точки $\boldsymbol{v}' \in H$ з $\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ випливає, що $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$, де $\boldsymbol{u} \in U$. Оскільки $\boldsymbol{u}$ може бути довільним вектором з U, то $H = \boldsymbol{v} + U$, тобто H є лінійним многовидом.

Якщо $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{v}_2$, то множина $\{a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 \mid a_1 + a_2 = 1\}$ — це пряма, яка проходить через точки $\boldsymbol{v}_1$ і $\boldsymbol{v}_2$. Тому геометричний зміст умови задачі такий: множина буде лінійним многовидом тоді й лише тоді, коли разом з кожними двома точками вона містить й пряму, що проходить через ці точки. $\square$

Основні задачі

7. Нехай $V = M_n(\mathbb{R})$, V_1 — підпростір симетричних матриць, V_2 — підпростір кососиметричних матриць, V_3 — підпростір верхніх трикутних матриць, V_4 — підпростір нижніх трикутних матриць. Для кожної пари V_i, V_j $(i \neq j)$ цих підпросторів опишіть їх перетин $V_i \cap V_j$ і суму $V_i + V_j$.

8. Нехай U, V, W — підпростори векторного простору, причому $U \subseteq V + W$. a) Чи можна стверджувати, що $U = (U \cap V) + (U \cap W)$?
b) А чи можна це стверджувати за додаткової умови $V \subseteq U$?

9. Доведіть, що для довільних підпросторів U, V, W векторного простору виконуються включення:
a) $U \cap (V + W) \supseteq (U \cap V) + (U \cap W)$;
b) $U + (V \cap W) \subseteq (U + V) \cap (U + W)$.

10. Нехай V_1 та V_2 — підпростори простору V. Доведіть такі твердження:
a) якщо $\dim V_1 + \dim V_2 > \dim V$, то $V_1 \cap V_2 \neq \{\mathbf{0}\}$.
b) якщо $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2)$, то підпростори V_1 і V_2 збігаються;
c) якщо $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1$, то один з підпросторів V_1, V_2 міститься в іншому.

11. Знайдіть розмірності $m = \dim(V_1 + V_2)$ і $k = \dim(V_1 \cap V_2)$, якщо:
a) $V_1 = \langle (1,2,0,1), (1,1,1,0) \rangle$, $V_2 = \langle (1,0,1,0), (1,3,0,1) \rangle$;
b) $V_1 = \langle (0,1,1,1), (1,1,1,2), (-2,0,1,1) \rangle$,
$V_2 = \langle (-1,3,2,-1), (1,1,0,-1) \rangle$.

12. Знайдіть базу перетину $V_1 \cap V_2$ і бази підпросторів $V_1 = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$, $V_2 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ та суми $V_1 + V_2$, які б включали базу перетину, якщо:
a) $\boldsymbol{u}_1 = (1,2,-1,-2)$, $\boldsymbol{u}_2 = (3,1,1,1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (-1,0,1,-1)$,
$\boldsymbol{v}_1 = (2,5,-6,-5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,2,-7,-3)$;
b) $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,1,1,1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1,-1,1,-1,1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (2,1,-1,1,2)$,
$\boldsymbol{v}_1 = (-1,2,1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,0,4,0,1)$.

13. Доведіть, що простір $\mathbb{R}[x]$ всіх многочленів є прямою сумою підпростору U тих многочленів, які діляться на даний многочлен $f(x)$ степеня n, і підпростору $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

14. Нехай $U = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$, $V = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 = \cdots = x_n\}$ — два підпростори простору $\mathbb{R}^n$. Доведіть, що $\mathbb{R}^n = U \oplus V$, та знайдіть проекції векторів стандартної бази простору $\mathbb{R}^n$ на кожен з цих підпросторів паралельно іншому підпростору.

15. Доведіть, що перетин $(\boldsymbol{u}+U)\cap(\boldsymbol{w}+W)$ лінійних многовидів $\boldsymbol{u}+U$ і $\boldsymbol{w}+W$ буде непустим тоді й лише тоді, коли $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\in U+W$.

16. Доведіть, що перетин двох лінійних многовидів з напрямними підпросторами U та W відповідно є або порожнім, або лінійним многовидом з напрямним підпростором $U\cap W$.

17. Знайдіть яку–небудь базу факторпростору $\mathbb{R}^4/U$, де:
a) $U=\langle(1,1,1,1),(1,2,3,4)\rangle$;
b) $U=\langle(1,1,1,1),(1,0,0,1),(1,-1,2,-1)\rangle$.

Додаткові задачі

18. Підрахуйте кількість тих k–вимірних підпросторів n–вимірного простору над полем з q елементів, які мають нульовий перетин з даним m–вимірним підпростором.

19.* Доведіть, що для довільних підпросторів V_1, V_2, V_3 векторного простору підпростір $(V_1\cap V_2)+(V_2\cap V_3)+(V_3\cap V_1)$ міститься в підпросторі $(V_1+V_2)\cap(V_2+V_3)\cap(V_3+V_1)$ і що різниця розмірностей цих підпросторів є парним числом.

20. Нехай V — векторний простір над нескінченним полем P. Доведіть, що об'єднання скінченної родини підпросторів простору V буде підпростором тоді й лише тоді, коли один з підпросторів містить усі інші.

21. Нехай $\{\mathbf{0}\}=U_0\subset U_1\subset\cdots\subset U_{n-1}\subset U_n=V$ — повний прапор підпросторів простору V та W — підпростір розмірності ≥ 1. Доведіть, що існує таке k, що $U_k\subseteq U_{k-1}+W$.

22.* Нехай простір V розкладається в пряму суму $V=U_1\oplus U_2$ та $W\subset V$ — його k–вимірний підпростір, який має нульовий перетин як з U_1, так і з U_2. Знайдіть розмірність підпростору $(U_1+W)\cap(U_2+W)$ і вкажіть яку–небудь його базу.

23.** Нехай $V=U\oplus W$ — векторний простір над полем з q елементів, причому $\dim U=m$, $\dim W=l$. Підрахуйте кількість тих k–вимірних підпросторів простору V, які мають нульовий перетин з кожним з підпросторів U і W.

24. Нехай $U\cap V=\{\mathbf{0}\}$. Доведіть, що для кожного проміжного підпростору $U\subseteq W\subseteq U\oplus V$ виконується рівність $W=U\oplus(W\cap V)$.

25. Знайдіть найменший лінійний многовид, який містить дані многовиди $\boldsymbol{u}_0 + U$ та $\boldsymbol{w}_0 + W$.

26. Доведіть, що коли два лінійні многовиди H_1 і H_2 з простору P^n розмірностей m і k відповідно мають спільну точку та $m + k > n$, то $H_1 \cap H_2$ є лінійним многовидом розмірності $\geq m + k - n$.

27. Доведіть, що для довільних підпросторів V_1, V_2 простору V:
a) $(V_1 + V_2)/V_2 \simeq V_1/(V_1 \cap V_2)$;
b) $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1/(V_1 \cap V_2) + \dim V_2/(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$.

Домашнє завдання

28. Доведіть рівність

$$\dim(V_1 + V_2 + V_3) = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 - \dim V_1 \cap V_2 -$$

$$- \dim V_1 \cap V_3 - \dim V_2 \cap V_3 + \dim V_1 \cap V_2 \cap V_3.$$

Узагальніть її на суму n підпросторів.

29. Нехай U, V, W — підпростори векторного простору. Доведіть, що коли $V \subseteq U$, то $U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W)$. Чи залишиться рівність правильною у випадку $V \nsubseteq U$?

30. Знайдіть розмірності $m = \dim(V_1 + V_2)$ та $k = \dim(V_1 \cap V_2)$, якщо:
$V_1 = \langle (2, -1, 0, -2), (3, -2, 1, 0), (1, -1, 1, -1) \rangle$,
$V_2 = \langle (3, -1, -1, 0), (0, -1, 2, 3), (5, -2, -1, 0) \rangle$.

31. Знайдіть бази суми $V_1 + V_2$ і перетину $V_1 \cap V_2$ підпросторів $V_1 = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$ та $V_2 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, якщо:
$\boldsymbol{u}_1 = (-1, 6, 4, 7, -2)$, $\boldsymbol{u}_2 = (-2, 3, 0, 5, -2)$, $\boldsymbol{u}_3 = (-3, 6, 5, 6, -5)$,
$\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 2, 1, -1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, -2, 0, -1, -5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2, 0, 2, 1, -3)$.

32. Нехай $U = \langle\, (1, 1, 1, 1), (-1, -2, 0, 1) \,\rangle$ та $W = \langle\, (-1, -1, 1, -1), (2, 2, 0, 1) \,\rangle$. Доведіть, що $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$, і знайдіть проекцію вектора $(4, 2, 4, 4)$ на підпростір U паралельно підпростору V.

33. Доведіть, що векторний простір $M_n(\mathbb{R})$ всіх дійсних квадратних матриць порядку n є прямою сумою підпростору U симетричних матриць і підпростору W кососиметричних матриць, і знайдіть проекцію матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

на кожен з цих підпросторів паралельно іншому підпростору.

Література. [1], с. 15–20; [2], с. 183–185; [3], с. 21–28; [4], с. 76–82; [5], с. 266–272; [7], с. 96–101; [8], с. 26–30; [9], с. 201–203; [12], с. 307–312; [13], с. 55–64.

Заняття 4. Лінійні відображення та їх матриці

Необхідні поняття. Нехай V і W — векторні простори над полем P. Відображення $\varphi : V \to W$ називається *лінійним*, якщо воно задовольняє такі дві умови:

1) $\varphi(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \varphi(\boldsymbol{v}_1) + \varphi(\boldsymbol{v}_2)$ для довільних векторів $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$;

2) $\varphi(\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{v})$ для довільних вектора $\boldsymbol{v} \in V$ і скаляра $\lambda \in P$.

Множину всіх лінійних відображень $\varphi : V \to W$ часто позначають $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Лінійне відображення простору V в себе часто називають ще *лінійним перетворенням* простору V або *лінійним оператором* у просторі V.

Підпростір $U \subseteq V$ називається *інваріантним відносно* φ (або φ–*інваріантним*), якщо $\varphi(U) \subseteq U$.

Множина $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$ називається *ядром*, а множина $\mathrm{Im}\,\varphi = \{\boldsymbol{w} \in W \mid$ існує такий $\boldsymbol{v} \in V$, що $\varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\}$ — *образом* лінійного відображення $\varphi : V \to W$. Розмірність образу називається *рангом* лінійного відображення φ (позначається $r(\varphi)$ або $\mathrm{rank}(\varphi)$), а розмірність ядра — *дефектом* цього відображення (позначається $\mathrm{def}(\varphi)$).

Нехай $\varphi : V \to W$ — лінійне відображення, а $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ і $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ — бази просторів V і W відповідно. Якщо образи векторів першої бази розкласти за векторами бази простору W:

$$\begin{array}{lcccccccc} \varphi(\boldsymbol{e}_1) & = & t_{11}\boldsymbol{f}_1 & + & t_{21}\boldsymbol{f}_2 & + \cdots + & t_{m1}\boldsymbol{f}_m & , \\ \varphi(\boldsymbol{e}_2) & = & t_{12}\boldsymbol{f}_1 & + & t_{22}\boldsymbol{f}_2 & + \cdots + & t_{m2}\boldsymbol{f}_m & , \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ \varphi(\boldsymbol{e}_n) & = & t_{1n}\boldsymbol{f}_1 & + & t_{2n}\boldsymbol{f}_2 & + \cdots + & t_{mn}\boldsymbol{f}_m & , \end{array} \tag{14}$$

то матриця

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{pmatrix}$$

з коефіцієнтів цих розкладів називається *матрицею лінійного відображення* φ у базах $(\boldsymbol{e})$ і $(\boldsymbol{f})$ та позначається $[\varphi]_{(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})}$ (або $[\varphi]$ або A_φ).

Блочно–діагональну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & A_2 & \cdots & \mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \cdots & A_k \end{pmatrix}$$

називають ще *кронекерівською сумою матриць* $A_1, \ldots, A_k$ і коротко позначають як: $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$.

Нехай простір V розкладається в пряму суму $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ φ–інваріантних підпросторів $W_1, \ldots, W_k$, а $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — така база V, що вектори $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{l_1}$ утворюють базу підпростору W_1, і т.д., $\boldsymbol{e}_{l_{k-1}+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{l_k}$ — базу W_k (тобто база $(\boldsymbol{e})$ узгоджена з таким розкладом). Нехай $\varphi_1 = \varphi|_{W_1}, \ldots, \varphi_k = \varphi|_{W_k}$. Тоді визначене лінійне перетворення $\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_k : V \to V$, де для $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{x}_1 \in W_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in W_k$, маємо: $(\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_k)(\boldsymbol{x}) = \varphi_1(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \varphi_k(\boldsymbol{x}_k)$, яке називається *кронекерівською сумою перетворень* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Зауважимо, що матриця перетворення φ в узгодженій з розкладом базі $(\boldsymbol{e})$ простору V є кронекерівською сумою матриць перетворень $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$.

Необхідні твердження. **1.** Лінійне відображення $\varphi : V \to W$ повністю визначається своїми значеннями на векторах бази $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

2. Якщо $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — база простору V, то для довільних векторів $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in W$ існує (причому єдине) таке лінійне відображення $\varphi : V \to W$, що $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{u}_i$ для всіх i.

3. Ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення $\varphi : V \to W$ є підпростором простору V, а образ $\operatorname{Im}\varphi$ — підпростором простору W.

4. *Теорема про гомоморфізм*: для довільного лінійного відображення $\varphi : V \to W$ простір $\operatorname{Im}\varphi$ і факторпростір $V/\operatorname{Ker}\varphi$ ізоморфні.

5. *Теорема Сильвестра*: для довільного лінійного відображення $\varphi : V \to W$

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi \;=\; \dim V\,.$$

6. *Критерій ін'єктивності*: лінійне відображення $\varphi : V \to W$ буде ін'єктивним тоді й лише тоді, коли $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$.

7. *Критерій сюр'єктивності*: лінійне відображення $\varphi : V \to W$ буде сюр'єктивним тоді й лише тоді, коли воно хоча б одну базу простору V переводить у систему твірних простору W.

8. $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rank} [\varphi]$.

9. $[\varphi(\boldsymbol{v})]_{(\boldsymbol{f})} = [\varphi]_{(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})} \cdot [\boldsymbol{v}]_{(\boldsymbol{e})}$ (або просто $[\varphi(\boldsymbol{v})] = [\varphi] \cdot [\boldsymbol{v}]$).

10. *Теорема про зміну матриці лінійного відображення при переході до нових баз.* Нехай $\varphi : V \to W$ — лінійне відображення, $(\boldsymbol{e})$ і $(\boldsymbol{f})$ — старі, а $(\boldsymbol{e}')$ і $(\boldsymbol{f}')$ — нові бази просторів V і W відповідно, S і T — матриці переходу від $(\boldsymbol{e})$ до $(\boldsymbol{e}')$ та від $(\boldsymbol{f})$ до $(\boldsymbol{f}')$ відповідно. Позначимо $[\varphi] = [\varphi]_{(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})}$, $[\varphi]' = [\varphi]_{(\boldsymbol{e}',\boldsymbol{f}')}$. Тоді $[\varphi]' = T^{-1} \cdot [\varphi] \cdot S$.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Нехай $\boldsymbol{a}$ — фіксований ненульовий вектор звичайного тривимірного простору. Які з наступних перетворень цього простору будуть лінійними: a) $\boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$; b) $\boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$? Якщо перетворення лінійне, знайдіть його ядро і образ.*

Розв'язання. a) Враховуючи властивості дій з векторами, маємо:

$$(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = \big((\alpha_1 \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{a}) + (\alpha_2 \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{a})\big)\boldsymbol{a} =$$

$$= \big(\alpha_1(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{a}) + \alpha_2(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{a})\big)\boldsymbol{a} = \alpha_1(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} + \alpha_2(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a},$$

Отже, перетворення лінійну комбінацію векторів переводить у лінійну комбінацію їх образів з тими ж коефіцієнтами. Тому воно є лінійним.

Образ $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$ вектора $\boldsymbol{v}$ буде нульовим тоді й лише тоді, коли $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}) = 0$, тобто коли вектори $\boldsymbol{v}$ і $\boldsymbol{a}$ перпендикулярні. Тому ядром є площина, перпендикулярна до вектора $\boldsymbol{a}$. З іншого боку, образ $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$ завжди пропорційний вектору $\boldsymbol{a}$, причому коефіцієнт пропорційності $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})$ може бути довільним. Тому образом перетворення є пряма, породжена вектором $\boldsymbol{a}$.

b) Знайдемо образи векторів $\boldsymbol{a}$ і $2\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} \mapsto (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2 \boldsymbol{a}; \quad 2\boldsymbol{a} \mapsto (\boldsymbol{a}, 2\boldsymbol{a})2\boldsymbol{a} = 4|\boldsymbol{a}|^2 \boldsymbol{a}.$$

За умовою $|\boldsymbol{a}|^2 \neq 0$. Але тоді $\varphi(2\boldsymbol{a}) = 4|\boldsymbol{a}|^2 \boldsymbol{a} \neq 2|\boldsymbol{a}|^2 \boldsymbol{a} = 2\varphi(\boldsymbol{a})$. Отже, перетворення не є лінійним. □

Задача 2. *Лінійне перетворення $\varphi : R^3 \to \mathbb{R}^3$ задане правилом*

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3).$$

Знайдіть матрицю цього перетворення і бази його ядра та образу.

Розв'язання. Знайдемо образ кожного з базових векторів $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$:

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1) = \varphi\big((1,0,0)\big) = (2,1,1),$$

$$\varphi(\boldsymbol{e}_2) = \varphi\big((0,1,0)\big) = (-1,-2,1),$$

$$\varphi(\boldsymbol{e}_3) = \varphi\big((0,0,1)\big) = (-1,1,-2).$$

Стовпчиками матриці перетворення φ є образи базових векторів. Тому

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Образ перетворення породжується образами базових векторів, тобто стовпчиками матриці $[\varphi]$. Тому базою образу буде будь–яка максимально лінійно незалежна система стовпчиків матриці $[\varphi]$. Знайдемо її ранг:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, ранг матриці дорівнює 2. Тому в якості бази образу можна взяти будь–які 2 стовпчики матриці $[\varphi]$ (вони непропорційні).

Вектор (x_1, x_2, x_3) належить ядру тоді й лише тоді, коли він задовольняє систему

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0, \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0. \end{array}$$

Ми вже знаємо, що ранг матриці цієї системи (тобто матриці $[\varphi]$) дорівнює 2. Тому фундаментальна система розв'язків складається з одного вектора (який і буде базою ядра). Щоб знайти його, розв'язуємо систему методом Ґауса:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Вибираючи $x_3 = 1$, знаходимо розв'язок $(1, 1, 1)$, який і є базою ядра. $\square$

Задача 3. *Доведіть, що перетворення φ є лінійним, і знайдіть його матрицю $[\varphi]$, якщо φ — це:*

a) *диференціювання у двовимірному векторному просторі $V = \mathcal{L}(\cos x, \sin x)$ з базою $\cos x$, $\sin x$;*

b) *перетворення $\boldsymbol{v} \mapsto [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}]$ простору V_3 з базою $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, де $\boldsymbol{a}$ — фіксований вектор з координатами (a_1, a_2, a_3).*

Розв'язання. а) Оскільки $(\alpha \cos x + \beta \sin x)' = \beta \cos x - \alpha \sin x$, то при диференціюванні елементи з V переходять в елементи з V. Лінійність перетворення випливає з загальних властивостей диференціювання. Позаяк

$$(\cos x)' = 0 \cdot \cos x - 1 \cdot \sin x, \quad (\sin x)' = 1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x\,,$$

то

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Лінійність перетворення випливає з загальних властивостей векторного добутку. Знайдемо образи базових векторів:

$$\varphi(\boldsymbol{i}) = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a_3\boldsymbol{j} - a_2\boldsymbol{k},$$

$$\varphi(\boldsymbol{j}) = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -a_3\boldsymbol{i} + a_1\boldsymbol{k},$$

$$\varphi(\boldsymbol{k}) = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a_2\boldsymbol{i} - a_1\boldsymbol{j}.$$

Тому матриця перетворення φ має вигляд

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Задача 4. *Знайдіть ранг і дефект лінійного перетворення*

$$\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \quad X \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Ранг і дефект лінійного перетворення збігаються з рангом і дефектом його матриці. Щоб знайти матрицю $[\varphi]$, візьмемо в просторі $M_2(\mathbb{R})$ базу з матричних одиниць E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} і знайдемо їх образи:

$$\varphi(E_{11}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E_{11} + E_{12} + E_{21}\,.$$

Аналогічно знаходимо:

$$\varphi(E_{12}) = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -4E_{11} + 3E_{12} + E_{22}\,,$$

$$\varphi(E_{21}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -E_{11} - 3E_{21} + E_{22}\,,$$

$$\varphi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = -E_{12} - 4E_{21} + E_{22}\,.$$

Тому

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо ранг матриці $[\varphi]$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, ранг матриці $[\varphi]$ дорівнює 2. Тоді її дефект, як різниця порядку й рангу, також дорівнює 2. Тому $\operatorname{rank}(\varphi) = \operatorname{def}(\varphi) = 2$. □

Задача 5. *Нехай* $\varphi : V \to W$ *— лінійне відображення і* $U \subseteq V$ *— підпростір, доповнювальний до* $\operatorname{Ker}\varphi$. *Доведіть, що*:

a) *при відображенні* φ *кожна лінійно незалежна система векторів з* U *переходить у лінійно незалежну систему*;

b) *на підпросторі* U *відображення* φ *діє ін'єктивно.*

Розв'язання. a) Нехай $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — лінійно незалежна система векторів з U і

$$\alpha_1\varphi(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + \alpha_k\varphi(\boldsymbol{v}_k) = \mathbf{0}.$$

Тоді $\varphi(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{v}_k) = \mathbf{0}$ і вектор $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{v}_k$ належить ядру $\operatorname{Ker}\varphi$. З іншого боку, $\boldsymbol{v} \in U$. За умовою $U \cap \operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$, тому $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Але тоді з лінійної незалежності векторів $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ випливає, що $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Отже, вектори $\varphi(\boldsymbol{v}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{v}_k)$ — лінійно незалежні.

b) Припустимо, що $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in U$ і $\varphi(\boldsymbol{v}_1) = \varphi(\boldsymbol{v}_2)$. Тоді $\mathbf{0} = \varphi(\boldsymbol{v}_1) - \varphi(\boldsymbol{v}_2) = \varphi(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)$. Отже, $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$. Але $U \cap \operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$, тому $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ і $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$. Це й доводить ін'єктивність відображення φ на підпросторі U. □

Задача 6. *Доведіть, що існує єдине лінійне перетворення φ простору $\mathbb{R}^3$, яке вектори $\boldsymbol{a}_1 = (2,3,5)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,0,0)$ переводить відповідно у вектори $\boldsymbol{b}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1,1,-1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (2,1,2)$, і знайдіть його матрицю:* a) *в тій же базі, в якій задано координати всіх векторів;* b) *у базі $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$.*

Розв'язання. a) Обчислимо ранг матриці A, складеної з векторів–стовпчиків $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки ранг дорівнює 3, то вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ утворюють базу, а тому, за твердженням **2**, потрібне лінійне перетворення φ існує і єдине.

З рівностей $[\varphi]\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}_i$, $i = 1,2,3$, випливає, що для матриць A і B, складених відповідно з векторів–стовпчиків $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ та $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$, виконується рівність $[\varphi]A = B$. Позаяк матриця A — невироджена, то $[\varphi] = B \cdot A^{-1}$. Знаходимо A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right).$$

Отже, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ і

$$[\varphi] = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Матрицею переходу від початкової бази $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ до бази $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ є матриця A. Тому

$$[\varphi]_{(\boldsymbol{a})} = A^{-1}[\varphi]A = A^{-1} \cdot BA^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot B.$$

Отже,

$$[\varphi]_{(\boldsymbol{a})} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -8 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$ □

Задача 7. *Нехай лінійне перетворення* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *у базі* $\boldsymbol{a}_1 = (8, -6, 7)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-16, 7, -13)$, $\boldsymbol{a}_3 = (9, -3, 7)$ *має матрицю*

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть матрицю цього перетворення в базі $\boldsymbol{b}_1 = (1, -2, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (3, -1, 2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (2, 1, 2)$.

Розв'язання. Матрицю переходу $T_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{b})}$ шукаємо методом, описаним у зауваженні 2 до розв'язання зад. 2.6:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & -16 & 9 & 1 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & -3 & -2 & -1 & 1 \\ 7 & -13 & 7 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & 4 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 7 & -3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -11 & 9 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & -11 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & -11 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -6 \end{array}\right).$$

Далі знаходимо $T^{-1}_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{b})}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Тоді

$$[\varphi]_{(\boldsymbol{b})} = T^{-1}_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{b})}[\varphi]_{(\boldsymbol{a})}T_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{b})} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Основні задачі

8. Нехай $V = U \oplus W$. Доведіть, що кожне з наступних перетворень простору V є лінійним:

a) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{u}$ (*проектування на* U *паралельно* W);

b) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}$ (*відбиття від* U *паралельно* W).

9. Які з наступних перетворень простору V_3 (ненульові вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ — фіксовані) є лінійними: a) $\boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{a},\boldsymbol{v})\boldsymbol{b}$; b) $\boldsymbol{v} \mapsto [\boldsymbol{v},\boldsymbol{a}]$?
Якщо перетворення лінійне, знайдіть його ядро та образ.

10. Які з наступних перетворень

a) $f(x) \mapsto f(ax+b)$ (a і b — фіксовані, $a \neq 0$);

b) $f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$; c) $f(x) \mapsto f'(x)$;

d) $f(x) \mapsto f(x+1) - g(x)$ (многочлен $g(x) \neq 0$ — фіксований);

e) $f(x) \mapsto xf(x)$; f) $f(x) \mapsto f(x^2)$

будуть лінійними перетвореннями простору $\mathbb{R}_n[x]$? Якщо перетворення лінійне, знайдіть його ядро і образ.

11. Поле $\mathbb{C}$ розглядається як двовимірний векторний простір над полем $\mathbb{R}$. Знайдіть у базі $1, i$ матрицю оператора множення на число $a+bi$.

12. Що можна сказати про матрицю лінійного перетворення $\varphi : V \to V$ у базі, першими k векторами якої є: a) база ядра $\operatorname{Ker}\varphi$; b) база образу $\operatorname{Im}\varphi$?

13. Як зміниться матриця $[\varphi]_{(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})}$ лінійного відображення $\varphi : V \to W$, якщо: a) в базі $(\boldsymbol{e})$ простору V переставити місцями два вектори; b) в базі $(\boldsymbol{f})$ простору W переставити місцями два вектори?

14. Лінійне відображення $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ задане матрицею

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть усі вектори, які переходять у вектор $(-1, 7, -11, 10)$.

15. Знайдіть базу ядра і базу образу лінійного перетворення з матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Лінійне перетворення простору $\mathbb{R}^3$ в базі $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ має матрицю

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть його матрицю в базі $\boldsymbol{a}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$.

17. a) Доведіть, що у просторі $\mathbb{R}^3$ існує єдине лінійне перетворення, яке переводить вектори $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 2)$ відповідно у вектори $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, і знайдіть матрицю цього перетворення у початковій базі $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

b) Доведіть, що у просторі $\mathbb{R}^3$ існує нескінченно багато лінійних перетворень, які переводять вектори $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ відповідно у вектори $(3, 0, 3)$, $(2, -2, 0)$, $(1, 2, 3)$.

18. Знайдіть необхідну й достатню умову для того, щоб підпростори $V_1 \subseteq V$ і $W_1 \subseteq W$ були відповідно ядром і образом якогось лінійного відображення $V \to W$.

Додаткові задачі

19. Доведіть, що перетворення $\boldsymbol{v} \mapsto [[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{b}]$ тривимірного простору V_3 (ненульові вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ — фіксовані) є лінійним, і знайдіть його ядро та образ.

20. Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$ — фіксована матриця. a) Доведіть, що перетворення $\varphi_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto AX$, є лінійним. b) Знайдіть ранг і дефект перетворення φ_A. c) Знайдіть розмірність $\varphi_A(T_n)$, де T_n — підпростір верхніх трикутних матриць з $M_n(\mathbb{R})$.

21. Опишіть усі лінійні перетворення простору із зад. 1.1.

22. Нехай $a_1, \ldots, a_k$ — попарно різні дійсні числа. Знайдіть дефект лінійного відображення $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^k$, $f(x) \mapsto (f(a_1), \ldots, f(a_k))$.

23. Нехай $\varphi : V \to V$ — лінійне перетворення, $U \subseteq V$ — підпростір. Доведіть, що:

a) $\dim U - \operatorname{def} \varphi \leq \dim \varphi(U) \leq \dim U$;

b) $\dim U \leq \dim \varphi^{-1}(U) \leq \dim U + \operatorname{def} \varphi$.

24. Дві пари підпросторів (U_1, U_2) і (W_1, W_2) простору V називаються еквівалентними, якщо існує таке невироджене лінійне перетворення $\varphi : V \to V$, що $\varphi(U_1) = W_1$ і $\varphi(U_2) = W_2$. Знайдіть необхідну й достатню умову еквівалентності пар (U_1, U_2) і (W_1, W_2).

25. Знайдіть:

a) кількість лінійних відображень з простору $\mathbb{Z}_p^n$ в простір $\mathbb{Z}_p^m$;

b) кількість ін'єктивних лінійних відображень з простору $\mathbb{Z}_p^n$ в простір $\mathbb{Z}_p^m$ ($n \leq m$);

c) кількість сюр'єктивних лінійних відображень з простору $\mathbb{Z}_p^n$ на простір $\mathbb{Z}_p^m$ ($n \geq m$);

d) кількість лінійних відображень рангу k з простору $\mathbb{Z}_p^n$ в простір $\mathbb{Z}_p^m$.

26. Знайдіть усі лінійні перетворення, матриця яких не залежить від вибору бази.

27. Наведіть приклад нелінійного перетворення простору $\mathbb{C}^2$ на себе, яке кожен підпростір переводить у підпростір.

28*. Нехай відображення $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ задається диференційовними (не обов'язково лінійними) функціями

$$f(x_1, \dots, x_m) = (\dots, f_i(x_1, \dots, x_m), \dots)\,,$$

які зберігають нуль (тобто $f_i(0, \dots, 0) = 0$ для всіх $i = 1, \dots, n$). Нехай $(\boldsymbol{e}_j)$ і $(\boldsymbol{e}'_i)$ — стандартні бази просторів $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{R}^n$ відповідно. За відображенням f будується лінійне відображення $df_0 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ за правилом:

$$(df_0)(\boldsymbol{e}_j) = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(0, \dots, 0), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(0, \dots, 0)\Big) \tag{15}$$

(відображення df_0 називається *диференціалом* відображення f у точці $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$). Доведіть, що коли в просторах $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{R}^n$ перейти до нових баз і в цих нових базах знову обчислити диференціал df_0 за формулами (15), то нове відображення $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ збігатиметься з попереднім.

29*. Доведіть, що коли $\dim V = n > 1$, то кожен підпростір розмірності $n + 1$ простору $\operatorname{Hom}(V, V)$ містить принаймні один оператор рангу > 1.

30. Нехай V_1 та W_1 — нетривіальні підпростори просторів V та W відповідно. Чи буде утворювати підпростір простору $\operatorname{Hom}(V, W)$ множина всіх тих лінійних відображень $V \to W$:
a) які мають одне й те ж ядро V_1;
b) ядро яких містить даний підпростір V_1;
c) ядро яких міститься в даному підпросторі V_1;
d) які мають один і той же образ W_1;
e) образ яких містить даний підпростір W_1;
g) образ яких міститься в даному підпросторі W_1?
У разі позитивної відповіді знайдіть розмірність цього підпростору, якщо $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim V_1 = l$, $\dim W_1 = k$.

Домашнє завдання

31. З'ясуйте, які з наступних перетворень простору $\mathbb{R}^3$ будуть лінійними: a) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$;
b) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 3x_2, x_2^3, x_1)$; c) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3)$.

32. Знайдіть базу ядра і базу образу лінійного перетворення:
a) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$;
b) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$.

33. Доведіть, що дане перетворення простору V_3 є лінійним, і знайдіть його матрицю у базі $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:

a) поворот на кут $2\pi/3$ навколо прямої $x = y = z$;

b) ортогональне проектування на пряму $x = y = z$.

34. Знайдіть матрицю лінійного перетворення $X \mapsto X \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ простору $M_2(\mathbb{R})$ у базі з матричних одиниць E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}.

35. Знайдіть базу ядра і базу образу лінійного перетворення з матрицею

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 11 \end{pmatrix}.$$

36. Знайдіть матрицю лінійного перетворення $\varphi(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$, простору V_3 у базі $\boldsymbol{f}_1 = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (2, 0, -1)$, $\boldsymbol{f}_3 = (1, 1, 0)$, якщо $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$.

37. Нехай $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ — база простору V, $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ — база простору W і $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного відображення $\varphi : V \to W$ у цих базах. Знайдіть матрицю відображення φ у базах $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)$ і $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2)$.

38. Нехай лінійне перетворення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ у базі $\boldsymbol{a}_1 = (4, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (5, 3, 2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 2, 1)$ має матрицю

$$\begin{pmatrix} -41 & -51 & -30 \\ -95 & -112 & -67 \\ 219 & 262 & 156 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть матрицю цього перетворення в базі $\boldsymbol{b}_1 = (1, 4, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 3, 1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 2, 3)$.

39. Нехай $U \subseteq V$ — підпростір, $\dim U = p$, $\dim V = m$, $\varphi : V \to W$ — лінійне відображення рангу r. Доведіть, що $p + r - m \leq \dim \varphi(U) \leq \min(p, r)$.

Література. [1], с. 23–30, 34–37; [2], с. 62–73, 214–215, 217–219; [3], с. 95–100, 110–111; [4], с. 92–98, 112–116; [5], с. 351–360; [7], с. 155–165; [8], с. 60–64; [9], с. 194–201; [10], с. 8–13; [12], с. 314–318; [13], с. 69–72, 94–98, 147–149.

Заняття 5. Дії над відображеннями

Необхідні поняття. Нехай V, W — векторні простори над полем P. На множині $\mathrm{Hom}(V,W)$ всіх лінійних відображень $\varphi : V \to W$ природним чином визначаються додавання і множення на скаляри з поля P :

$$(\varphi+\psi)(\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{v}) + \psi(\boldsymbol{v})\,, \qquad (\lambda\cdot\varphi)(\boldsymbol{v}) = \lambda\cdot\varphi(\boldsymbol{v})\,.$$

Відносно цих дій множина $\mathrm{Hom}(V,W)$ утворює векторний простір.

Добуток (або *композиція*) $\varphi\psi$ лінійних відображень $\varphi : V \to U$ і $\psi : U \to W$ визначаються, як звичайно: $(\varphi\psi)(\boldsymbol{v}) := \psi(\varphi(\boldsymbol{v}))$ (вживають також позначення $\varphi\circ\psi$). Добуток відображень дозволяє визначити довільний натуральний степінь φ^n лінійного перетворення $\varphi : V \to V$. Це, у свою чергу, дозволяє для довільного многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ визначити відповідний многочлен $f(\varphi) = a_n\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots a_1\varphi + a_0\varepsilon$ від перетворення φ.

Необхідні твердження. **1.** Для матриць лінійних відображень виконуються рівності: $[\varphi+\psi] = [\varphi]+[\psi]\,,\ \ [\lambda\cdot\varphi] = \lambda[\varphi]\,,\ \ [\varphi\psi] = [\psi][\varphi]\,.$

2. Якщо лінійне перетворення φ — невироджене, то $[\varphi^{-1}] = [\varphi]^{-1}\,.$

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Перетворення φ простору $\mathbb{R}^2$ у базі $\boldsymbol{a}_1 = (-3,7)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,-2)$ має матрицю $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$, а перетворення ψ у базі $\boldsymbol{b}_1 = (6,-7)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-5,6)$ має матрицю $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}$. Знайдіть матриці перетворень $\varphi+\psi$, $\varphi\psi$ та $\psi\varphi$ у початковій базі $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, в якій дано координати всіх векторів.*

Розв'язання. За умовою

$$T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{a})} = \begin{pmatrix}-3 & 1\\ 7 & -2\end{pmatrix},\ \ T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{b})} = \begin{pmatrix}6 & -5\\ -7 & 6\end{pmatrix},$$

$$[\varphi]_{(\boldsymbol{a})} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix},\ \ [\psi]_{(\boldsymbol{b})} = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}.$$

Тому

$$[\varphi]_{(\boldsymbol{e})} = T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{a})}[\varphi]_{(\boldsymbol{a})}T^{-1}_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{a})} = \begin{pmatrix}-3 & 1\\ 7 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$[\psi]_{(\boldsymbol{e})} = T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{b})}[\psi]_{(\boldsymbol{b})}T^{-1}_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{b})} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -143 & -122 \\ 177 & 151 \end{pmatrix}.$$

Звідси знаходимо:

$$[\varphi+\psi]_{(\boldsymbol{e})} = [\varphi]_{(\boldsymbol{e})}+[\psi]_{(\boldsymbol{e})} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -143 & -122 \\ 177 & 151 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -145 & -123 \\ 178 & 152 \end{pmatrix},$$

$$[\varphi\psi]_{(\boldsymbol{e})} = [\psi]_{(\boldsymbol{e})}\cdot[\varphi]_{(\boldsymbol{e})} = \begin{pmatrix} -143 & -122 \\ 177 & 151 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 164 & 21 \\ -203 & -26 \end{pmatrix},$$

$$[\psi\varphi]_{(\boldsymbol{e})} = [\varphi]_{(\boldsymbol{e})}\cdot[\psi]_{(\boldsymbol{e})} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -143 & -122 \\ 177 & 151 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Задача 2. *Доведіть, що для довільних лінійних відображень $\varphi, \psi : V \to W$ і довільного підпростору $U \subseteq V$ виконується включення $(\varphi+\psi)(U) \subseteq \varphi(U)+\psi(U)$. Наведіть приклад, коли $(\varphi+\psi)(U) \neq \varphi(U)+\psi(U)$.*

Розв'язання. Візьмемо довільний вектор $\boldsymbol{v} \in (\varphi+\psi)(U)$. Тоді існує такий $\boldsymbol{u} \in U$, що $\boldsymbol{v} = (\varphi+\psi)(\boldsymbol{u}) = \varphi(\boldsymbol{u})+\psi(\boldsymbol{u})$. Оскільки $\varphi(\boldsymbol{u}) \in \varphi(U)$, $\psi(\boldsymbol{u}) \in \psi(U)$, то $\boldsymbol{v} \in \varphi(U)+\psi(U)$. З довільності $\boldsymbol{v}$ випливає що $(\varphi+\psi)(U) \subseteq \varphi(U)+\psi(U)$.

Нехай тепер лінійне відображення φ і підпростір U такі, що $\varphi(U) \neq \{\mathbf{0}\}$. Візьмемо $\psi = -\varphi$. Тоді $(\varphi+\psi)(U) = \mathcal{O}(U) = \{\mathbf{0}\}$. З іншого боку, $\varphi(U)+\psi(U) = \varphi(U)+(-\varphi)(U) = \varphi(U)+\varphi(U) = \varphi(U)$. Отже, $(\varphi+\psi)(U) \neq \varphi(U)+\psi(U)$. $\square$

Задача 3. *Нехай φ і ψ — лінійні перетворення векторного простору V. Доведіть, що*

$$\max(\operatorname{def}\varphi, \operatorname{def}\psi) \le \operatorname{def}(\varphi\psi) \le \operatorname{def}\varphi + \operatorname{def}\psi.$$

Розв'язання. Доведемо спочатку ліву нерівність задачі. Якщо $\varphi(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$, то $(\varphi\psi)(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$. Тому $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi\psi)$ і

$$\operatorname{def}(\varphi\psi) = \dim\operatorname{Ker}(\varphi\psi) \ge \dim\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{def}\varphi.$$

Нехай $\dim V = n$, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — база $\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\psi$, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ — її розширення до бази $\operatorname{Im}\varphi$, а $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_l$ — її розширення до бази $\mathrm{Ker}\,\psi$. З доведення теореми Ґрасмана випливає, що вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\ldots$, $\boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{b}_1$, $\ldots$, $\boldsymbol{b}_m$, $\boldsymbol{c}_1$, $\ldots$, $\boldsymbol{c}_l$ лінійно незалежні, а тому $k+m+l \leq n$, тобто $m \leq n-k-l$. Для будь–якого вектора $\boldsymbol{v} \in V$ маємо: $\varphi(\boldsymbol{v}) = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k + \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{b}_m$ для деяких скалярів $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m$, бо $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ — база $\mathrm{Im}\,\varphi$. Тому

$$(\varphi\psi)(\boldsymbol{v}) = \psi(\varphi(\boldsymbol{v})) = \psi(\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k + \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{b}_m) =$$
$$= \alpha_1 \psi(\boldsymbol{a}_1) + \cdots + \alpha_k \psi(\boldsymbol{a}_k) + \beta_1 \psi(\boldsymbol{b}_1) + \cdots + \beta_m \psi(\boldsymbol{b}_m) =$$
$$= \beta_1 \psi(\boldsymbol{b}_1) + \cdots + \beta_m \psi(\boldsymbol{b}_m).$$

Отже, вектори $\psi(\boldsymbol{b}_1)$, $\ldots$, $\psi(\boldsymbol{b}_m)$ утворюють систему твірних простору $\mathrm{Im}\,(\varphi\psi)$, а тому $\dim \mathrm{Im}\,(\varphi\psi) \leq m$. Але тоді за теоремою Сильвестра

$$\mathrm{def}\,(\varphi\psi) = \dim \mathrm{Ker}\,(\varphi\psi) = n - \dim \mathrm{Im}\,(\varphi\psi) \geq$$

$$\geq n - m = n - (n-k-l) \geq k + l = \dim \mathrm{Ker}\,\psi = \mathrm{def}\,\psi\,.$$

Це завершує доведення лівої нерівності.

Доведемо тепер праву нерівність. Позначимо через $\widetilde{\varphi}$ обмеження φ на $\mathrm{Ker}\,(\varphi\psi)$. Тоді

$$\mathrm{def}\,(\varphi\psi) = \dim \mathrm{Ker}\,(\varphi\psi) = \dim \mathrm{Im}\,\widetilde{\varphi} + \dim \mathrm{Ker}\,\widetilde{\varphi}\,.$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}\,(\varphi\psi)$ тоді й лише тоді, коли $\varphi(\boldsymbol{v}) \in \mathrm{Ker}\,\psi$. Тому $\mathrm{Im}\,\widetilde{\varphi} \subseteq \mathrm{Ker}\,\psi$, $\mathrm{Ker}\,\widetilde{\varphi} \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$ та

$$\mathrm{def}\,(\varphi\psi) \leq \dim \mathrm{Ker}\,\psi + \dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{def}\,\psi + \mathrm{def}\,\varphi\,. \qquad \square$$

Задача 4. *Нехай* φ *і* ψ *— лінійні перетворення векторного простору* V*. Доведіть, що коли* $V = \mathrm{Ker}\,\varphi \oplus \mathrm{Ker}\,\psi = \mathrm{Im}\,\varphi \oplus \mathrm{Im}\,\psi$, *то* $\mathrm{rank}(\varphi+\psi) = \mathrm{rank}\,\varphi + \mathrm{rank}\,\psi$.

Розв'язання. Оскільки $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$, то

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \dim \mathrm{Ker}\,\psi = \dim \mathrm{Im}\,\varphi + \dim \mathrm{Im}\,\psi\,.$$

З іншого боку, за теоремою Сильвестра

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \mathrm{Im}\,\psi + \dim \mathrm{Ker}\,\psi\,.$$

Тому

$$\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \mathrm{Ker}\,\psi, \quad \dim \mathrm{Im}\,\psi = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi\,. \tag{16}$$

Нехай $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — база $\operatorname{Ker}\varphi$, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ — база $\operatorname{Ker}\psi$. Тоді $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ — база V. Крім того, з (16) випливає, що $\operatorname{rank}\varphi = m$, $\operatorname{rank}\psi = k$.

Оскільки $\varphi(\boldsymbol{a}_1) = \cdots = \varphi(\boldsymbol{a}_k) = \mathbf{0}$, то образ $\operatorname{Im}\varphi$ породжується векторами $\varphi(\boldsymbol{b}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{b}_m)$. Але $\operatorname{rank}\varphi = m$. Тому вектори $\varphi(\boldsymbol{b}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{b}_m)$ утворюють базу $\operatorname{Im}\varphi$. Аналогічно вектори $\psi(\boldsymbol{a}_1), \ldots, \psi(\boldsymbol{a}_k)$ утворюють базу $\operatorname{Im}\psi$. З умови задачі випливає, що вектори $\psi(\boldsymbol{a}_1), \ldots, \psi(\boldsymbol{a}_k)$, $\varphi(\boldsymbol{b}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{b}_m)$ утворюють базу V. Зокрема, вони лінійно незалежні.

З рівностей

$$(\varphi+\psi)(\boldsymbol{a}_1) = \varphi(\boldsymbol{a}_1) + \psi(\boldsymbol{a}_1) = \psi(\boldsymbol{a}_1),\ \ldots, (\varphi+\psi)(\boldsymbol{a}_k) = \psi(\boldsymbol{a}_k),$$

$$(\varphi+\psi)(\boldsymbol{b}_1) = \varphi(\boldsymbol{b}_1) + \psi(\boldsymbol{b}_1) = \varphi(\boldsymbol{b}_1),\ \ldots, (\varphi+\psi)(\boldsymbol{b}_m) = \varphi(\boldsymbol{b}_m)$$

випливає, що образ перетворення $\varphi+\psi$ породжується векторами $\psi(\boldsymbol{a}_1), \ldots, \psi(\boldsymbol{a}_k), \varphi(\boldsymbol{b}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{b}_m)$. Але тоді

$$\operatorname{rank}(\varphi+\psi) = k + m = \operatorname{rank}\varphi + \operatorname{rank}\psi. \qquad \square$$

Задача 5. *Доведіть, що коли два лінійні перетворення φ і ψ рангу 1 мають однакові ядра і однакові образи, то ці перетворення комутують. Чи буде правильним аналогічне твердження для лінійних перетворень рангу $r > 1$?*

Розв'язання. З теореми Сильвестра випливає, що $\dim\operatorname{Ker}\varphi = n-1$, де n — розмірність всього простору. Нехай $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ — база $\operatorname{Ker}\varphi$, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}, \boldsymbol{e}_n$ — її розширення до бази всього простору. Тоді $\operatorname{Im}\varphi = \langle\varphi(\boldsymbol{e}_n)\rangle$. За умовою задачі $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}\psi$. Тому існує таке γ, що $\psi(\boldsymbol{e}_n) = \gamma\varphi(\boldsymbol{e}_n)$.

Очевидно, що

$$(\varphi\psi)(\boldsymbol{e}_i) = (\psi\varphi)(\boldsymbol{e}_i) = \mathbf{0} \quad \text{для всіх} \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Нехай $\varphi(\boldsymbol{e}_n) = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1} + \alpha_n\boldsymbol{e}_n$ для деяких $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Тоді

$$\begin{gathered}(\varphi\psi)(\boldsymbol{e}_n) = \psi(\varphi(\boldsymbol{e}_n)) = \psi(\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1} + \alpha_n\boldsymbol{e}_n) = \\ = \alpha_n\psi(\boldsymbol{e}_n) = \alpha_n\gamma\varphi(\boldsymbol{e}_n)\,, \\ (\psi\varphi)(\boldsymbol{e}_n) = \varphi(\psi(\boldsymbol{e}_n)) = \varphi(\gamma\varphi(\boldsymbol{e}_n)) = \\ = \gamma\varphi(\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1} + \alpha_n\boldsymbol{e}_n) = \gamma\alpha_n\varphi(\boldsymbol{e}_n)\,.\end{gathered}$$

Отже, для вектора $\boldsymbol{e}_n$ також маємо $(\varphi\psi)(\boldsymbol{e}_n) = (\psi\varphi)(\boldsymbol{e}_n)$. Таким чином, перетворення $\varphi\psi$ і $\psi\varphi$ набувають однакових значень на всіх базових векторах, що й доводить рівність $\varphi\psi = \psi\varphi$.

Для перетворень рангу $r > 1$ твердження стає хибним. Змістовно причина полягає в тому, що невироджені перетворення неодновимірного простору не завжди комутують. Потрібний контрприклад можна побудувати, наприклад, так. Нехай $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — база деякого простору. Визначимо перетворення $\varphi\psi$ і $\psi\varphi$ на базових векторах наступним чином:

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1) = 2\boldsymbol{e}_1, \quad \psi(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,$$
$$\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \psi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i, \quad i = 2, \ldots, r \quad (r < n),$$
$$\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \psi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{0}, \quad i = r+1, \ldots, n.$$

Тоді $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}\psi = \mathcal{L}(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r)$, $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi = \mathcal{L}(\boldsymbol{e}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, але

$$(\varphi\psi)(\boldsymbol{e}_1) = 2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, \quad (\psi\varphi)(\boldsymbol{e}_1) = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2. \qquad \square$$

Задача 6. *Доведіть, що для кожного лінійного перетворення φ рангу 1 принаймні одне з перетворень $\varepsilon + \varphi$ та $\varepsilon - \varphi$ є невиродженим.*

Розв'язання. Припустимо, що кожне з перетворень $\varepsilon + \varphi$ і $\varepsilon - \varphi$ є виродженим. Тоді існує такий ненульовий вектор $\boldsymbol{v}$, що $(\varepsilon - \varphi)(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$. Звідси $\varepsilon(\boldsymbol{v}) - \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ і $\varphi(\boldsymbol{v}) = \varepsilon(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$. Зокрема, $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im}\varphi$. Аналогічно існує такий ненульовий вектор $\boldsymbol{u}$, що $(\varepsilon + \varphi)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$, звідки $\varphi(\boldsymbol{u}) = -\varepsilon(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{u}$ і $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Im}\varphi$.

За умовою $\operatorname{rank}\varphi = 1$, тобто $\dim \operatorname{Im}\varphi = 1$. Тому будь–які два вектори з $\operatorname{Im}\varphi$ пропорційні. Нехай $\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{v}$. Тоді

$$-\boldsymbol{u} = \varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}.$$

Але для ненульового вектора $\boldsymbol{u}$ рівність $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$ виконуватися не може. Тому принаймні одне з перетворень $\varepsilon + \varphi$ і $\varepsilon - \varphi$ є невиродженим. $\square$

Задача 7. *Нехай лінійне перетворення $\varphi : V \to V$ є ідемпотентним (тобто $\varphi^2 = \varphi$). Доведіть, що $V = \operatorname{Im}\varphi \oplus \operatorname{Ker}\varphi$.*

Розв'язання. За теоремою Сильвестра $\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V$. Тому досить довести, що $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{\boldsymbol{0}\}$. Нехай $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$. Оскільки $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$. З іншого боку, з $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im}\varphi$ випливає, що $\boldsymbol{v} = \varphi(\boldsymbol{u})$ для деякого вектора $\boldsymbol{u}$. Але тоді з ідемпотентності φ випливає, що $\boldsymbol{v} = \varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(\varphi(\boldsymbol{u})) = \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$. Отже, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ і $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{\boldsymbol{0}\}$. $\square$

Задача 8. *Нехай A — матриця порядку $m \times n$ $(m \le n)$ і рангу r. Доведіть, що існує така матриця B порядку $n \times m$ і рангу $m - r$, що $AB = \mathcal{O}$.*

Розв'язання. На матрицю A можна дивитися як на матрицю деякого лінійного відображення $\varphi : P^n \to P^m$. За теоремою Сильвестра $\dim \operatorname{Ker} \varphi = n - \operatorname{rank} \varphi = n - r$. За умовою $m - r \le n - r$. Виберемо в $\operatorname{Ker} \varphi$ довільні $m - r$ лінійно незалежні вектори $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{m-r}$ і розглянемо лінійне відображення $\psi : P^m \to P^n$, яке на векторах $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ бази простору P^m задається таким чином:

$$\psi(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{a}_1, \ \ldots, \ \psi(\boldsymbol{e}_{m-r}) = \boldsymbol{a}_{m-r}, \quad \psi(\boldsymbol{e}_{m-r+1}) = \cdots = \psi(\boldsymbol{e}_m) = \mathbf{0}.$$

Тоді $\operatorname{Im} \psi = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{m-r})$, а тому ранг перетворення ψ і матриці $B = [\psi]$ дорівнюють $m - r$. Оскільки $\operatorname{Im} \psi \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$, то $\psi\varphi = \mathcal{O}$ і $[\psi\varphi] = \mathcal{O}$. З іншого боку, $[\psi\varphi] = [\varphi] \cdot [\psi] = AB$. Тому $AB = \mathcal{O}$. $\square$

Основні задачі

9. Нехай φ — лінійне перетворення простору V. Доведіть, що:
a) $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq \operatorname{Ker} \varphi^2 \subseteq \operatorname{Ker} \varphi^3 \subseteq \cdots$;
b) якщо для деякого k $\operatorname{Ker} \varphi^k = \operatorname{Ker} \varphi^{k+1}$, то $\operatorname{Ker} \varphi^k = \operatorname{Ker} \varphi^{k+m}$ для всіх $m \in \mathbb{N}$.

10. Доведіть, що коли лінійні перетворення φ та ψ одного й того ж простору комутують, то й будь–які многочлени $f(\varphi)$ та $g(\psi)$ від цих перетворень також комутують.

11. Доведіть, що для невиродженого лінійного перетворення φ перетворення $f(\varphi)$ та $g(\varphi^{-1})$, де f та g — многочлени, комутують.

12. Нехай $\varphi : V \to W$ і $\psi : W \to V$ — такі лінійні відображення, що $\varphi\psi = \varepsilon_V$. Чи випливає звідси, що $\psi\varphi = \varepsilon_W$?

13. Знайдіть перетворення, обернене до перетворення φ із зад. 4.8 b).

14. Нехай φ і ψ — лінійні перетворення векторного простору V. Доведіть, що

$$|\operatorname{rank} \varphi - \operatorname{rank} \psi| \le \operatorname{rank} (\varphi + \psi) \le \operatorname{rank} \varphi + \operatorname{rank} \psi \,.$$

15. Нехай φ і ψ — лінійні перетворення векторного простору V. Доведіть, що: a) $\operatorname{rank}(\varphi\psi) = \operatorname{rank} \varphi - \dim(\operatorname{Im} \varphi \cap \operatorname{Ker} \psi)$;
b) $\operatorname{def}(\varphi\psi) = \operatorname{def} \varphi + \dim(\operatorname{Im} \varphi \cap \operatorname{Ker} \psi)$.

16. Нехай φ є оператором проектування у просторі V (див. зад. 4.8).

a) Доведіть, що $\varepsilon - \varphi$ також є оператором проектування.

b) Знайдіть зв'язок між ядром і образом оператора φ та ядром і образом оператора $\varepsilon - \varphi$.

17. Доведіть, що лінійний оператор φ буде ідемпотентним (тобто $\varphi^2 = \varphi$) тоді й лише тоді, коли він є оператором проектування.

18. Доведіть, що коли оператори проектування π_1 і π_2 простору V комутують, то їх добуток $\pi_1\pi_2$ також є оператором проектування. При цьому: a) $\operatorname{Im}\pi_1\pi_2 = \operatorname{Im}\pi_1 \cap \operatorname{Im}\pi_2$; b) $\operatorname{Ker}\pi_1\pi_2 = \operatorname{Ker}\pi_1 + \operatorname{Ker}\pi_2$.

19. Доведіть, що лінійне перетворення $\varphi : V \to V$ є інволютивним (тобто $\varphi^2 = \varepsilon$) тоді й лише тоді, коли воно є відбиттям (див. зад. 4.8).

20. Доведіть, що для кожного лінійного перетворення $\varphi : V \to V$ рангу 1 знайдеться такий скаляр α, що $\varphi^2 = \alpha\varphi$.

21. Доведіть, що кожне лінійне відображення $\varphi : V \to U$ можна розкласти в добуток $\varphi = \mu\nu$ певних сюр'єктивного $\mu : V \to W$ та ін'єктивного $\nu : W \to U$ лінійних відображень.

22. Доведіть, що кожне лінійне відображення $\varphi : V \to U$ рангу k можна подати у вигляді суми k відображень рангу 1, але не можна подати у вигляді суми менше ніж k відображень рангу 1.

23. Нехай φ і ψ — відповідно оператори диференціювання і множення на x у просторі $\mathbb{R}[x]$. Доведіть, що $\varphi\psi^n - \psi^n\varphi = n\psi^{n-1}$ для довільного натурального n.

Додаткові задачі

24. Доведіть, що у просторі $\mathbb{R}_n[x]$ оператор $\varphi : f(x) \mapsto f(x+1)$ є многочленом від оператора диференціювання δ.

25. Нехай $\varphi, \psi : V \to U$ — два лінійні відображення рангу 1. Доведіть, що $\operatorname{rank}(\varphi+\psi) \le 1$ тоді й лише тоді, коли $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$ або $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}\psi$.

26. Нехай φ і ψ — лінійні перетворення скінченновимірного векторного простору V. Доведіть **нерівність Сильвестра**

$$r(\varphi) + r(\psi) - \dim V \le r(\varphi\psi) \le \min(r(\varphi), r(\psi)).$$

27*. Доведіть, що для довільних перетворень μ, φ, ν, простору V виконується **нерівність Фробеніуса**

$$r(\mu\varphi) + r(\varphi\nu) \leq r(\varphi) + r(\mu\varphi\nu).$$

28. Про лінійні перетворення $\varphi, \psi : V \to V$ відомо, що $\varphi + \psi = \varepsilon$ та $\varphi\psi = \mathcal{O}$. Доведіть, що кожне з перетворень φ, ψ є проектуванням (див. зад. 4.8).

29. Лінійне перетворення $\varphi : V \to V$ називається *псевдовідбиттям*, якщо $\operatorname{rank}(\varphi - \varepsilon) = 1$. Доведіть, що в n–вимірному просторі кожне лінійне перетворення можна розкласти в добуток не більше ніж n псевдовідбиттів.

30*. Нехай φ — лінійне перетворення простору V над полем P і $g(x)$ — найменше спільне кратне многочленів $f_1(x), \ \ldots, \ f_k(x) \in P[x]$. Доведіть, що:

a) $\sum\limits_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} f_i(\varphi) = \operatorname{Ker} g(\varphi)$, причому якщо многочлени $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ попарно взаємно прості, то сума в лівій частині є прямою.

b) $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \operatorname{Im} f_i(\varphi) = \operatorname{Im} g(\varphi)$.

31. Нехай φ — лінійне перетворення простору V над полем P і $d(x)$ — найбільший спільний дільник многочленів $f_1(x), \ldots, f_k(x) \in P[x]$. Доведіть, що

a) $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} f_i(\varphi) = \operatorname{Ker} d(\varphi)$; b) $\sum\limits_{i=1}^{k} \operatorname{Im} f_i(\varphi) = \operatorname{Im} d(\varphi)$.

32. Нехай $V_0 \xrightarrow{\varphi_1} V_1 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_k} V_k$ — послідовність лінійних відображень векторних просторів. Доведіть, що

$$\sum_{i=1}^{k} \dim \operatorname{Ker} \varphi_i - \sum_{i=1}^{k} \dim(V_i / \operatorname{Im} \varphi_i) = \dim V_0 - \dim V_1 .$$

33. Нехай φ — лінійне перетворення n–вимірного простору V. Доведіть, що лівий $\operatorname{Ann}_l(\varphi) = \{\mu \in \operatorname{Hom}(V,V) \mid \mu\varphi = \mathcal{O}\}$ і правий $\operatorname{Ann}_r(\varphi) = \{\nu \in \operatorname{Hom}(V,V) \mid \varphi\nu = \mathcal{O}\}$ *анулятори* перетворення φ є підпросторами простору $\operatorname{Hom}(V,V)$, і знайдіть їх розмірності.

34. Нехай U, V, W, T — векторні простори, $\mu : U \to T$, $\varphi : U \to V$, $\psi : W \to T$ — лінійні відображення. Коли існує таке лінійне відображення $\nu : V \to W$, що $\mu = \varphi\nu\psi$?

35. Доведіть, що сума $\pi_1 + \pi_2$ операторів проектування π_1 і π_2 (див. зад. 4.8) буде оператором проектування тоді й лише тоді, коли $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1 = \mathcal{O}$. При цьому:
a) $\mathrm{Im}\,(\pi_1 + \pi_2) = \mathrm{Im}\,\pi_1 \oplus \mathrm{Im}\,\pi_2$; b) $\mathrm{Ker}\,(\pi_1 + \pi_2) = \mathrm{Ker}\,\pi_1 \cap \mathrm{Ker}\,\pi_2$.

Домашнє завдання

36. Доведіть, що для довільного лінійного перетворення φ простору V виконуються включення $\mathrm{Im}\,\varphi \supseteq \mathrm{Im}\,\varphi^2 \supseteq \mathrm{Im}\,\varphi^3 \supseteq \cdots$.

37. Знайдіть перетворення, обернене до перетворення диференціювання у просторі $\mathcal{L}(\cos x, \sin x)$.

38. Нехай φ і ψ — лінійні перетворення векторного простору V. Доведіть, що $\mathrm{rank}(\varphi\psi) \le \min(\mathrm{rank}\,\varphi, \mathrm{rank}\,\psi)$.

39. Перетворення φ простору $\mathbb{R}^2$ у базі $\boldsymbol{a}_1 = (3, -2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-2, 1)$ має матрицю $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, а перетворення ψ у базі $\boldsymbol{b}_1 = (5, 2)$, $\boldsymbol{b}_2 = (3, 1)$ має матрицю $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. a) Знайдіть матрицю перетворення $\varphi + \psi$ у початковій базі $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, в якій дано координати всіх векторів. b) Знайдіть матрицю перетворення $\varphi\psi$ у базі $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$.

40. Доведіть, що коли перетворення φ простору V є невиродженим, то для довільного перетворення ψ цього простору виконується рівність

$$(\varphi + \psi)\varphi^{-1}(\varphi - \psi) = (\varphi - \psi)\varphi^{-1}(\varphi + \psi).$$

41. Доведіть, що лінійне перетворення φ векторного простору V буде ідемпотентним тоді й лише тоді, коли існує база, в якій матриця цього перетворення є діагональною з нулями і/або одиницями на діагоналі.

Література. [1], с. 30–33; [3], с. 101–109; [4], с. 99–106; [5], с. 360–367; [6], с. 165–166; [7], с. 181–183; [8], с. 64–71; [10], с. 14–16; [12], с. 318–319; [13], с. 98–106.

Заняття 6. Власні числа та власні вектори

Необхідні поняття. Нехай φ — лінійне перетворення векторного простору V над полем P. Підпростір $U \subseteq V$ називається *інваріантним відносно* φ (або φ*–інваріантним*), якщо $\varphi(U) \subseteq U$.

Вектор $\boldsymbol{v} \in V$, що породжує одновимірний φ–інваріантний підпростір, називається *власним вектором* лінійного перетворення φ. Тобто власний вектор — це ненульовий вектор, для якого знайдеться таке $\lambda \in P$, що $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$. Скаляр λ називається *власним значенням* (або *власним числом*) перетворення φ, що відповідає власному вектору $\boldsymbol{v}$. Також кажуть, що власний вектор $\boldsymbol{v}$ відповідає власному числу λ.

База простору, що складається з власних векторів лінійного перетворення, називається *власною базою* цього перетворення.

Нехай лінійне перетворення φ простору V в деякій базі $(\boldsymbol{e})$ задане матрицею A. Многочлен $\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E)$ називається *характеристичним многочленом* матриці A. Також кажуть, що тоді рівняння $\chi_A(\lambda) = 0$ є *характеристичним* (або *віковим*) *рівнянням* матриці A.

Квадратні матриці A та B порядку n називаються *подібними*, якщо існує така невироджена матриця T порядку n, що $B = T^{-1}AT$.

Характеристичні многочлени подібних матриць збігаються, тобто $\chi_A(\lambda) = \chi_{T^{-1}AT}(\lambda)$. Тому можна говорити не про характеристичний многочлен матриці лінійного перетворення φ в деякій базі, а про *характеристичний многочлен* $\chi_\varphi(\lambda)$ *лінійного перетворення* φ.

Множина $V_A^{(\mu)}$ (або коротко $V^{(\mu)}$) всіх власних векторів матриці A, що відповідають фіксованому власному числу μ, поповнена нульовим вектором, утворює підпростір простору V, який називається *власним підпростором.*

Лінійне перетворення φ векторного простору V називається *діагоналізовним*, якщо існує база цього простору, в якій матриця перетворення φ має діагональний вигляд.

Необхідні твердження. **1.** Характеристичний многочлен матриці лінійного перетворення φ не залежить від вибору бази.

2. Якщо $\chi(\lambda) = \det(A-\lambda E) = a_0(-\lambda)^n + a_1(-\lambda)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(-\lambda) + a_n$ — характеристичний многочлен матриці A, то коефіцієнт a_k є сумою всіх головних мінорів порядку k матриці A. Зокрема, $a_0 = 1$, $a_1 = \operatorname{tr} A$, $a_n = \det A$.

3. Число μ буде власним числом матриці A тоді й лише тоді, коли μ є коренем її характеристичного многочлена $\chi_A(\lambda)$.

4. Розмірність власного підпростору $V_A^{(\mu)}$ дорівнює дефекту матриці $A - \mu E$. Базою підпростору $V_A^{(\mu)}$ є фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь з матрицею $A - \mu E$.

5. Для лінійного перетворення φ кількість лінійно незалежних власних векторів з власним числом μ не перевищує кратності μ як кореня характеристичного многочлена перетворення φ.

6. Власні вектори, що відповідають різним власним числам лінійного перетворення, лінійно незалежні.

7. Лінійне перетворення є невиродженим тоді й лише тоді, коли всі його власні числа ненульові.

8. Лінійне перетворення n–вимірного векторного простору є діагоналізованим тоді й лише тоді, коли існує власна база цього перетворення.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Знайдіть* (*над полем* $\mathbb{R}$ *і над полем* $\mathbb{C}$) *власні числа і власні вектори лінійного перетворення, заданого матрицею*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для відшукання власних чисел A лінійного перетворення необхідно спочатку знайти характеристичний многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ його матриці A, а потім всі корені $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ многочлена $\chi_A(\lambda)$. Вони і будуть власними числами. Отже,

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Зауваження 1. Не радимо обчислювати такі визначники "в лоб", розкриваючи їх за якимось рядком або стовпчиком. Такий підхід тягне за собою великі обчислення, в яких легко помилитися. Крім того, знаходження коренів отриманого многочлена може виявитися важкою задачею. Тому спочатку варто спробувати за допомогою елементарних перетворень рядків (стовпчиків) або виділити лінійний множник в якомусь рядку (стовпчику), або звести до блочно–трикутного вигляду, або одержати рядок (стовпчик) з одним ненульовим елементом.

Для обчислення визначника (17) спочатку до першого рядка додамо третій і винесемо спільний множник елементів отриманого рядка за знак визначника:

$$\chi_A(\lambda) = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

(потім від третього стовпчика віднімаємо перший і розкладаємо отриманий визначник спочатку за третім, а потім за першим стовчиками)

$$= (5-\lambda)(-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)(-1-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda)+2) = (\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda-2-i)(\lambda-2+i).$$

Власні числа λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 лінійного перетворення — корені многочлена $\chi_A(\lambda)$. Таким чином, на полем $\mathbb{R}$ маємо два власні числа: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, а над полем $\mathbb{C}$ — чотири: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 2+i$, $\lambda_4 = 2-i$.

Для знаходження власних векторів матриці A, що відповідають власному числу λ_k, необхідно обчислити матрицю $B_{\lambda_k} = A - \lambda_k E$ та знайти всі ненульові розв'язки однорідної системи лінійних рівнянь з матрицею B_{λ_k}. Це будуть усі нетривіальні лінійні комбінації векторів якої–небудь бази простору розв'язків, тобто фундаментальної системи розв'язків.

Розглянемо послідовно наші власні числа. Для $\lambda_1 = -1$ маємо:

$$\left(B_{\lambda_1} \mid 0\right) = \left(A+E \mid 0\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг системи дорівнює 3, тому фундаментальна система розв'язків складається з $4-3=1$ розв'язку. В якості вільної змінної можна взяти x_3.

Надавши цій змінній значення 1, отримуємо вектор $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 0, 1, 0)$, який і буде утворювати базу власного підпростору $V_A^{(\lambda_1)}$.

Для власного числа $\lambda_2 = 5$ маємо:

$$\big(B_{\lambda_2} \mid 0\big) = \big(A - 5E \mid 0\big) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Знову ранг системи дорівнює 3. Вибравши в якості вільної змінної x_1 і надавши їй значення 1, отримуємо вектор $\boldsymbol{v}_2 = (1, 0, 2, 0)$, який утворює базу власного підпростору $V_A^{(\lambda_2)}$.

Для власного числа $\lambda_3 = 2 + i$ знаходимо:

$$\big(B_{\lambda_3} \mid 0\big) = \big(A-(2+i)E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1-i & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1-i & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1-i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-i & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

(домножимо третій та четвертий рядки на $1 + i$)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1-i & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1-i & 0 & 2 & 0 \\ 4+4i & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1-i & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1-i & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1-i & 0 & 2 & 0 \\ 5+5i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1+i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Вибравши в якості вільної змінної x_4 і надавши їй значення 1, отримуємо базу власного підпростору $V_A^{(\lambda_3)}$, що складається з вектора $\boldsymbol{v}_3 = (0, -1 + i, 0, 1)$.

Зауважимо, що всі коефіцієнти матриці A є дійсними числами. Тому власні вектори, що відповідають комплексно спряженим власним числам λ_3 та λ_4, будуть також комплексно спряженими. Отже, базою підпростору $V_A^{(\lambda_4)}$, слугуватиме вектор $\boldsymbol{v}_4 = (0, -1 - i, 0, 1)$, що є спряженим до $\boldsymbol{v}_3$.

Таким чином, над полем $\mathbb{R}$ для власних чисел $\lambda_1 = -1$ та $\lambda_2 = 5$ отримуємо відповідно власні вектори $\mu(-1, 0, 1, 0)$ та $\mu(1, 0, 2, 0)$, де $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Над полем $\mathbb{C}$ власними векторами для чисел $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 2 + i$ та $\lambda_4 = 2 - i$ будуть відповідно $\mu(-1, 0, 1, 0)$, $\mu(1, 0, 2, 0)$, $\mu(0, -1 + i, 0, 1)$ та $\mu(0, -1 - i, 0, 1)$, де $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. □

Задача 2. *У тривимірному просторі* V_3 *з базою* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ *задано лінійне перетворення* $\varphi : \boldsymbol{v} \mapsto [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}]$, *де* $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *— фіксований ненульовий вектор. Знайдіть матрицю, характеристичний многочлен, власні числа та власні вектори цього перетворення.*

Розв'язання. Стовпчики матриці лінійного перетворення є координатами образів відповідних базисних векторів. Оскільки

$$\varphi(\boldsymbol{i}) = [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -a_3\boldsymbol{j} + a_2\boldsymbol{k} ,$$

$$\varphi(\boldsymbol{j}) = [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{a}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3\boldsymbol{i} - a_1\boldsymbol{k} ,$$

$$\varphi(\boldsymbol{k}) = [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{a}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -a_2\boldsymbol{i} + a_1\boldsymbol{j} ,$$

то в базі $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ матриця перетворення φ буде такою:

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Тому характеристичним многочленом є

$$\chi_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 - \lambda & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} .$$

Це один з небагатьох випадків, коли чесне обчислення визначника безпосередньо за означенням призводить до бажаного результату. Отже,

$$\chi_\varphi(\lambda) = -\lambda^3 - a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3 - a_2^2\lambda - a_1^2\lambda - a_3^2\lambda = -\lambda(\lambda^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2).$$

Оскільки φ є перетворенням дійсного векторного простору V_3, то його власними числом є лише $\lambda_1 = 0$ кратності 1, бо $\lambda^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$. До того ж, якщо кратність власного числа дорівнює 1, то всі відповідні власні вектори пропорційні. Тому досить знайти який–небудь один з них. Але один такий вектор легко знаходиться з геометричних міркувань. Справді, з рівності $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = \mathbf{0}$ випливає, що $\varphi(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0} = 0 \cdot \boldsymbol{a}$. Тому власні вектори, що відповідають λ_1, мають вигляд $\mu(a_1, a_2, a_3)$, де $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. □

Задача 3. *Нехай перетворення φ є невиродженим.*

а) *Доведіть, що перетворення φ та φ^{-1} мають одні й ті ж власні вектори.*

b) *Чи правильне аналогічне твердження для перетворень φ та φ^2?*

Розв'язання. а) Зауважимо, що згідно твердження **7** власні числа невиродженого перетворення — ненульові. Якщо до того ж $\boldsymbol{v}$ — власний вектор φ з власним числом λ, то $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ і $\boldsymbol{v} = \varphi^{-1}(\varphi(\boldsymbol{v})) = \varphi^{-1}(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda\varphi^{-1}(\boldsymbol{v})$. Звідси $\varphi^{-1}(\boldsymbol{v}) = \lambda^{-1}\boldsymbol{v}$. Тому кожен власний вектор перетворення φ є власним вектором і перетворення φ^{-1}. Оскільки, у свою чергу, перетворення φ є оберненим до φ^{-1}, то правильне є й обернене твердження. Тому φ та φ^{-1} мають одні й ті ж власні вектори.

b) Для власного вектора $\boldsymbol{v}$ перетворення φ з власним числом λ маємо: $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$. Звідси $\varphi^2(\boldsymbol{v}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda^2\boldsymbol{v}$ і власний вектор перетворення φ буде власним вектором і перетворення φ^2. Навпаки, взагалі кажучи, не вірно. Так для перетворення φ простору $\mathbb{R}^2$ з матрицею $[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ власними векторами є лише вектори $\mu(1,0)$, де $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. А матриця перетворення φ^2 у тій же базі має вигляд $[\varphi^2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тому власними векторами для φ^2 є всі ненульові вектори з $\mathbb{R}^2$.

Зауваження. Іншим прикладом є поворот площини на кут $\pi/2$. Неважко пересвідчитись, що це перетворення взагалі не має власних векторів, у той час як для перетворення φ^2 кожен ненульовий вектор буде власним з власним числом -1. □

Задача 4. *Знайдіть власні числа матриці*

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}, \quad n > 1.$$

Розв'язання. Не завжди власні числа варто шукати як корені характеристичного многочлена. Інколи власні числа можна знайти з інших міркувань як ми це зробимо в цій задачі.

Позначимо $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Якщо $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, то матриця A є нульовою і єдиним власним числом A є число 0 кратності n, тобто $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Нехай тепер $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$. Оскільки ранг добутку двох матриць не перевищує рангу кожного з множників, то ранг $\operatorname{rank}(A) \leq 1$. З іншого боку, $A \neq \mathcal{O}$. Отже, $\operatorname{rank}(A) = 1$ і підпростір розв'язків однорідної системи з матрицею A має розмірність $n - \operatorname{rank}(A) = n - 1$. Тому число 0 є власним числом матриці A кратності не меншої за $n-1$, тобто $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$. Крім того, згідно твердження **2** сума всіх власних чисел матриці дорівнює сліду цієї матриці. Отже, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \lambda_n = \operatorname{tr} A = b_1^2 + \dots + b_n^2$ — інше власне число (кратності 1) матриці A. $\square$

Задача 5. *Доведіть, що* a) *над полем* $\mathbb{C}$, b) *над полем* $\mathbb{R}$ *кожен многочлен* $f(\lambda)$ *степеня* n *зі старшим коефіцієнтом* $(-1)^n$ *є характеристичним многочленом деякої матриці порядку* n.

Розв'язання. a) За основною теоремою алгебри довільний многочлен n-го степеня з комплексними коефіцієнтами має рівно n коренів з урахуванням їх кратності. Тому

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda), \quad \text{де} \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C},$$

і многочлен $f(\lambda)$ буде характеристичним многочленом діагональної матриці $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

b) Нагадаємо, що кожен многочлен n–го степеня з дійсними коефіцієнтами єдиним чином з точністю до порядку множників розкладається в добуток лінійних многочленів $\lambda - \lambda_1$, …, $\lambda - \lambda_m$, що відповідають його дійсним кореням λ_1, …, λ_m, та $t = (n-m)/2$ квадратних многочленів, незвідних над $\mathbb{R}$, що відповідають парам комплексно спряжених коренів. Тому $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_m - \lambda)(a_1 + ib_1 - \lambda)(a_1 - ib_1 - \lambda) \cdots (a_t + ib_t - \lambda)(a_t - ib_t - \lambda)$, де $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, $a_1, \dots, a_t$, $b_1, \dots, b_t \in \mathbb{R}$, $k + 2t = n$, і многочлен $f(\lambda)$ буде характеристичним многочленом такої дійсної матриці порядку n:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 & b_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -b_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_t & b_t \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_t & a_t \end{pmatrix}.$$ □

Задача 6. *Доведіть, що для довільних квадратних матриць A та B порядку n з коефіцієнтами з поля P виконується рівність $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$.*

Розв'язання. Припустимо спочатку, що одна з матриць (нехай, скажімо, A) є оборотною. Тоді $BA = A^{-1}(AB)A$ і матриці BA та AB подібні. Тому $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$ як характеристичні многочлени подібних матриць.

Нехай тепер про оборотність матриць $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ нічого не відомо. Вважатимемо елементи наших матриць змінними величинами a_{ij} та b_{ij} і розглянемо поле раціональних функцій $L = P(a_{ij}, b_{ij})$ змінних a_{ij}, b_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, з коефіцієнтами з поля P. Тоді визначники матриць A та B будуть многочленами від своїх коефіцієнтів a_{ij} та b_{ij}. Тому ці визначники відмінні від нуля, і матриці A та B в полі L — оборотні. Згідно щойно доведеного $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$ у полі L. Це означає, що $\chi_{AB}(\lambda)$ та $\chi_{BA}(\lambda)$ збігаються як многочлени від a_{ij} та b_{ij}, тобто $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$ й у полі P, що й вимагалося. □

Задача 7. *З'ясуйте, чи зводиться матриця*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & -5 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

до діагонального вигляду (над полем $\mathbb{R}$ і над полем $\mathbb{C}$), і в разі, якщо зводиться, знайдіть цей вигляд і відповідну базу.

Розв'язання. Згідно тверджень **4** та **9** матриця A буде діагоналізовною над полем P тоді й лише тоді, коли характеристичний многочлен $\chi_A(\lambda)$

цієї матриці розкладається над полем P на лінійні множники, і для довільного власного числа μ матриці A кратність μ як кореня характеристичного многочлена дорівнює розмірності підпростору $V_A^{(\mu)}$. (Тому одна й та ж матриця над одним полем може бути діагоналізовною, а над іншим — ні.)

Отже, для перевірки матриц на діагоналізовність і спочатку потрібно знайти її характеристичний многочлен. Потім спробувати розкласти на лінійні множники над потрібним полем. У разі, коли такий розклад існує, для кожного власного числа, кратність якого більша за 1, знайти дефект матриці $B_\mu := A - \mu E$ (якщо власне число має кратність 1, то згідно твердження **5** розмірність підпростору $V_A^{(\mu)}$ дорівнює 1). Якщо характеристичний многочлен $\chi_A(\lambda)$ на лінійні множники над заданим полем не розкладається або хоча б для одного власного числа μ дефект матриці B_μ буде меншим кратності μ як кореня $\chi_A(\lambda)$, то робимо висновок, що матриця A не є діагоналізовною. За інших обставин матриця A буде діагоналізовною, причому у власній базі — базі з власних векторів — наша матриця матиме такий діагональний вигляд: по діагоналі стоять всі власні числа, повторені підряд стільки разів, яка їх кратність.

У нашому випадку характеристичний многочлен дорівнює: $\chi_A(\lambda) =$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & -4 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 7 & -5 \\ -4 & 5-\lambda & 0 \\ 1 & 9 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\big((4-\lambda)(5-\lambda)(-4-\lambda) + (-5)\cdot(-4)\cdot 9 + 7\cdot 0\cdot 1 -$$

$$-(-5)\cdot(5-\lambda)\cdot 1 - (4-\lambda)\cdot 0\cdot 9 - 7\cdot(-4)\cdot(-4-\lambda)\big) =$$

$$= (1-\lambda)\big((16-\lambda^2)(\lambda-5) - 33\lambda + 93\big) = (1-\lambda)(-\lambda^3 +$$

$$+5\lambda^2 - 17\lambda + 13) = -(1-\lambda)^2(\lambda^2 - 4\lambda + 13).$$

Одне власне число $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ кратності 2 ми вже знайшли. Два інші — корені многочлена $\lambda^2 - 4\lambda + 13$. Його дискримінант — від'ємний, тому цей многочлен не має дійсних коренів. Отже, наша матриця A не є діагоналізовною над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Перевіримо діагоналізовність A над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. У цьому випадку з'являються ще власні числа $\lambda_3 = 2 + 3i$ та $\lambda_4 = 2 - 3i$

кратності 1. Тому подальшого аналізу вимагає лише власне число $\lambda_1 = 1$ кратності 2. Знайдемо ранг матриці $B_{\lambda_1} := A - \lambda_1 E$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

Отже, $\operatorname{rank}(B_{\lambda_1}) = 2$ і $\operatorname{def}(B_{\lambda_1}) = 4-2 = 2$ дорівнює кратності кореня λ_1. Тому матриця A діагоналізовна над полем $\mathbb{C}$.

Діагональним виглядом буде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix},$$

а відповідною базою — власна база матриці A. Як випливає з (18), власні вектори, що відповідають λ_1 знаходяться з системи

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & x_3 \\ x_4 & = & 2x_3 \end{array} .$$

Надамо вільним змінним x_1 та x_3 базисних значень: $\begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$.

Тоді отримаємо базу підпростору $V_A^{(\lambda_1)}$, що складається з векторів $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0,0)$ та $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,1,2)$.

Для знаходження власних векторів з власним числом λ_3 використовуємо однорідну систему з матрицею

$$B_{\lambda_3} := A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -1-3i & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2-3i & 7 & -5 \\ 0 & -4 & 3-3i & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -6-3i \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1-3i & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 27i-11 & 16-12i \\ 0 & 0 & -13+i & 8+4i \\ 0 & 1 & 9 & -6-3i \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

(ранг матриці B_{λ_3} дорівнює 3, бо власне число λ_3 має кратність 1, тому другий та третій рядки цієї матриці пропорційні)

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1-3i & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -13-i & 8+4i \\ 0 & 1 & 9 & -6-3i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3i-5}{4} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3i-3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо систему

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -\frac{1}{2}x_3 \quad , \\ x_2 & = & -\frac{3i-3}{4}x_3 \quad , \\ x_4 & = & -\frac{3i-5}{4}x_3 \quad . \end{array}$$

Надамо вільній змінній значення $x_3 = 4$. Отримуємо вектор $\boldsymbol{v}_3 = (-2, 3-3i, 4, 5-3i)$, який є базою підпростору $V_A^{(\lambda_3)}$.

Для знаходження бази підпростору $V_A^{(\lambda_4)}$ скористаємося, як і при розв'язанні зад. 6.1, тим, що у випадку дійсної матриці власні вектори, які відповідають комплексно спряженим власним числам, самі є комплексно спряженими. Тому $\boldsymbol{v}_4 = (-2, 3+3i, 4, 5+3i)$.

Отже, вектори $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 1, 2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-2, 3-3i, 4, 5-3i)$ та $\boldsymbol{v}_4 = (-2, 3+3i, 4, 5+3i)$ складають власну базу матриці A. Тому над полем $\mathbb{C}$ ця матриця зводиться до діагонального вигляду. □

Основні задачі

8. Доведіть, що кожен власний вектор перетворення φ буде власним вектором і перетворення ψ, де:
a) $\psi = c\varphi$ ($c \neq 0$), b) $\psi = \varphi - \mu\varepsilon$, c) $\psi = \varphi^k$, d) $\psi = f(\varphi)$ (f — многочлен).
Якщо для перетворення φ вектор $\boldsymbol{v}$ є власним з власним числом λ, то з яким власним числом він буде власним вектором для перетворення ψ?

9. Знайдіть усі лінійні перетворення, для яких кожен вектор є власним.

10. Знайдіть усі лінійні перетворення, які перестановочні з кожним лінійним перетворенням.

11. Знайдіть усі власні вектори оператора диференціювання у просторі:
a) многочленів $\mathbb{R}_n[x]$; b) $\mathcal{L}(\cos x, \sin x)$; c) всіх диференційовних дійсних функцій.

12. Доведіть, що характеристичний многочлен матриці A^{-1} дорівнює

$$(-\lambda)^n \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \chi_A\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

13. Знайдіть характеристичні многочлени таких перетворень:
a) повороту площини V_2 на кут α навколо початку координат;
b) диференціювання у просторі $\mathbb{R}_n[x]$.

14. Знайдіть власні числа матриці

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

над полем $\mathbb{R}$ і над полем $\mathbb{C}$.

15. Знайдіть власні числа і власні вектори лінійного перетворення, заданого матрицею:

a)$\begin{pmatrix} 3+i & -1 \\ 2i & 1-i \end{pmatrix}$; b)$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$; c)$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; d)$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

e)$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; f)$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; g)$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

16. Знайдіть характеристичний многочлен, власні числа і власні вектори лінійного перетворення, заданого матрицею:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n - 1 & a \end{pmatrix}$.

17. Нехай V — скінченновимірний векторний простір над полем $\mathbb{C}$, $\varphi : V \to V$ — лінійне перетворення, $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. Не використовуючи теореми Жордана, доведіть, що кожне власне число перетворення $f(\varphi)$ має вигляд $f(\lambda)$, де λ — якесь власне число перетворення φ.

18. З'ясуйте, чи зводиться матриця до діагонального вигляду (над полем $\mathbb{R}$ та над полем $\mathbb{C}$), і в разі, якщо зводиться, знайдіть цей вигляд і відповідну базу:

a) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

19. Нехай φ та ψ — перестановочні лінійні перетворення скінченновимірного комплексного простору. Доведіть, що для кожного власного числа λ перетворення φ існує такий власний вектор $\boldsymbol{v}$ перетворення φ з власним числом λ, який одночасно буде і власним вектором перетворення ψ.

Додаткові задачі

20. Доведіть, що 1 є власним числом стохастичної матриці, і знайдіть хоча б власний вектор, що відповідає цьому власному числу.

21.* Знайдіть власні числа і власні вектори лінійного перетворення $f(x) \mapsto f(ax+b)$ $(a \neq 0, \pm 1)$ простору $\mathbb{R}_n[x]$.

22.* Знайдіть характеристичний многочлен, власні числа та власні вектори лінійного перетворення, заданого матрицею:

a) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

23.* Знайдіть характеристичний многочлен і власні числа матриці порядку n :

$$\begin{pmatrix} 0 & b & b & \dots & b \\ a & 0 & b & \dots & b \\ a & a & 0 & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Доведіть, що кожна матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 E_{k_1} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1m} \\ 0 & \lambda_2 E_{k_2} & B_{23} & \dots & B_{2m} \\ 0 & 0 & \lambda_3 E_{k_3} & \dots & B_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_m E_{k_m} \end{pmatrix},$$

де числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ попарно різні, зводиться до діагонального вигляду.

25. Доведіть, що для довільної (можливо, нескінченної) множини попарно переставновочних лінійних перетворень скінченновимірного комплексного простору знайдеться:

a) спільний власний вектор;

b) база, в якій матриці всіх цих перетворень будуть верхніми трикутними.

26.* Нехай перетворення $\varphi : V \to V$ n–вимірного простору V має n різних власних значень. Доведіть, що кожне перетворення, яке переставновочне з φ, можна подати у вигляді многочлена від φ.

27.** Нехай матриці $A \in M_n(P)$ і $B \in M_m(P)$ зводяться до діагонального вигляду. Доведіть, що перетворення простору $M_{m\times n}(P)$, визначене правилом a) $X \mapsto AXB$, b) $X \mapsto AX + XB$, зводиться до діагонального вигляду.

28.* Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — власні числа матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$. Знайдіть власні числа такого лінійного перетворення простору $M_n(\mathbb{R})$:

a) $X \mapsto AXA^\top$; b) $X \mapsto AXA^{-1}$ (матриця A — невироджена).

Домашнє завдання

29. Знайдіть власні числа і власні вектори лінійного перетворення $X \mapsto X^\top$ простору $M_n(\mathbb{R})$.

30. Нехай лінійне перетворення φ n–вимірного простору V має n різних власних чисел і $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ — власна база перетворення φ. Доведіть, що для кожного перетворення ψ, яке комутує з φ, вектори $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ також будуть утворювати власну базу.

31. Знайдіть власні числа і власні вектори лінійного перетворення, заданого матрицею:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

32. Знайдіть власні числа та власні вектори лінійного перетворення, заданого матрицею $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$.

33. Перетворення φ простору многочленів $\mathbb{R}_3[x]$ задається правилом $f(x) \mapsto \frac{d}{dx}\big((x+3)f(x)\big)$. Доведіть, що це перетворення є лінійним і знайдіть його власні числа і власні вектори.

34. Зведіть матрицю

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

порядку n до діагонального вигляду і знайдіть відповідну базу.

35. З'ясуйте, чи зводиться матриця до діагонального вигляду (над полем $\mathbb{R}$ і над полем $\mathbb{C}$). Якщо зводиться, то знайдіть цей вигляд і відповідну базу:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Література. [1], с. 37–45; [2], с. 215–216, 220–226; [3], с. 111–122; [4], с. 117–128; [5], с. 367–379; [7], с. 183–189; [8], с. 75–82; [9], с. 206–210; [10], с. 20–25; [12], с. 319–320, 333–335; [13], с. 127–135.

Заняття 7. ЖНФ: нільпотентний випадок

Необхідні поняття. Клітинкою Жордана розмірності k, що відповідає власному числу λ, називається така матриця розміру $k \times k$ (або порядку k):

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Жордановою матрицею J називається квадратна матриця, що складається з діагональних блоків — жорданових клітинок, і нулів поза межами цих блоків:

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & \dots & \mathcal{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{O} & \dots & J_{k_p}(\lambda_p) \end{pmatrix},$$

тобто матриця J розкладається в кронекерівську суму матриць $J_{k_1}(\lambda_1)$, $\dots$, $J_{k_p}(\lambda_p)$. Тому коротко записуватимемо:

$$J = J_{k_1}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus J_{k_p}(\lambda_p)\,.$$

Жордановою базою для лінійного перетворення $\varphi : V \to V$ називається така база простору V, в якій матриця перетворення φ є жордановою або, як ще кажуть, має жорданову нормальну форму (ЖНФ) J_φ.

Звести квадратну матрицю A до жорданової нормальної форми (коротко ЖНФ) означає розв'язати матричне рівняння $X^{-1}AX = J_A$, де X — (невідома) невироджена матриця, а J_A — (невідома) жорданова матриця.

Лінійне перетворення φ називається *нільпотентним*, якщо знайдеться таке число $c \in \mathbb{N}$, що $\varphi^c = \mathcal{O}$. Також кажуть, що квадратна матриця A є *нільпотентною*, якщо для деякого $c \in \mathbb{N}$ виконується рівність $A^c = \mathcal{O}$. Таке найменше натуральне c називають *класом нільпотентності* перетворення φ (відповідно класом нільпотентності матриці A).

Нехай матриця нільпотентного перетворення φ в базі $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ — жорданова клітинка $J_n(0)$. Тоді

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{v}_1) &= \mathbf{0}\,, \\ \varphi(\boldsymbol{v}_2) &= \boldsymbol{v}_1\,, \\ \varphi(\boldsymbol{v}_3) &= \boldsymbol{v}_2\,, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi(\boldsymbol{v}_n) &= \boldsymbol{v}_{n-1}\,. \end{aligned}$$

Така база $(\boldsymbol{v})$ називається *ланцюжковою базою* для перетворення φ з жордановою нормальною формою $J_n(0)$; зображатимемо її такою діаграмою:

$$\boldsymbol{v}_n \mapsto \boldsymbol{v}_{n-1} \mapsto \cdots \mapsto \boldsymbol{v}_1 \mapsto \mathbf{0}\ .$$

Нехай матриця нільпотентного перетворення φ в базі $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ — жорданова матриця $J_\varphi = J_{k_1}(0) \oplus \cdots \oplus J_{k_p}(0)$. Тоді

$$\begin{array}{cccc}
\varphi(\boldsymbol{v}_1) = \mathbf{0}\,, & \varphi(\boldsymbol{v}_{t_1+1}) = \mathbf{0}\,, & \ldots\,, & \varphi(\boldsymbol{v}_{t_{p-1}+1}) = \mathbf{0}\,, \\
\varphi(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1\,, & \varphi(\boldsymbol{v}_{t_1+2}) = \boldsymbol{v}_{t_1+1}\,, & \ldots\,, & \varphi(\boldsymbol{v}_{t_{p-1}+2}) = \boldsymbol{v}_{t_{p-1}+1}\,, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\varphi(\boldsymbol{v}_{t_1}) = \boldsymbol{v}_{t_1-1}\,; & \varphi(\boldsymbol{v}_{t_2}) = \boldsymbol{v}_{t_2-1}\,; & \ldots\,; & \varphi(\boldsymbol{v}_{t_p}) = \boldsymbol{v}_{t_p-1}\,,
\end{array}$$

де $t_1 = k_1,\ t_2 = k_1 + k_2,\ \ldots,\ t_p = k_1 + \cdots + k_p$. Така база $(\boldsymbol{v})$ називається *ланцюжковою базою* перетворення φ з жордановою нормальною формою J_φ, а її діаграма буде такою:

$$\begin{array}{c}
\boldsymbol{v}_{t_1} \mapsto \boldsymbol{v}_{t_1-1} \mapsto \cdots \mapsto \boldsymbol{v}_1 \mapsto \mathbf{0}\ , \\
\boldsymbol{v}_{t_2} \mapsto \boldsymbol{v}_{t_2-1} \mapsto \cdots \mapsto \boldsymbol{v}_{t_1+1} \mapsto \mathbf{0}\ , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ , \\
\boldsymbol{v}_{t_p} \mapsto \boldsymbol{v}_{t_p-1} \mapsto \cdots \mapsto \boldsymbol{v}_{t_{p-1}+1} \mapsto \mathbf{0}\ .
\end{array}$$

Необхідні твердження. **1.** *Теорема про канонічний вигляд матриці лінійного відображення*: для довільного лінійного відображення $\varphi : V \to U$ існують такі бази $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ і $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ просторів V і U відповідно, в яких матриця відображення φ має вигляд

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

де E — одинична матриця.

2. Матриця нільпотентного перетворення в довільній базі є нільпотентною.

3. Нільпотентне перетворення вироджене. (Нільпотентна матриця вироджена.)

4. Клас нільпотентності лінійного перетворення не перевищує розмірності простору.

5. Для нільпотентних перетворень класу нільпотентності m маємо: $\operatorname{Ker}\varphi \supseteq \operatorname{Im}(\varphi^{m-1})$.

6. *Критерій нільпотентності*: для лінійного перетворення φ такі умови рівносильні:

a) перетворення φ — нільпотентне;

b) всі власні числа перетворення φ дорівнюють 0;

c) $\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$.

7. *Теорема Жордана для нільпотентного перетворення.* Для кожного нільпотентного перетворення n–вимірного векторного простору над довільним полем P існує жорданова база. Жорданова нормальна форма матриці нільпотентного пертворення з точністю до перестановки клітинок Жордана визначена однозначно.

8. Кожна нільпотентна матриця A порядку n над довільним полем P зводиться до жорданової нормальної форми. А саме, існує невироджена матриця T, для якої $T^{-1}AT = J_A$. З точністю до перестановки клітинок Жордана нормальна форма матриці A єдина.

9. Дві нільпотентні матриці однакового порядку подібні тоді й тільки тоді, коли вони мають однакові жорданові нормальні форми.

Для знаходження жорданової нормальної форми J_A та матриці T переходу до жорданової бази нільпотентного перетворення A необхідно:

1) Знайти власні числа матриці A. (Це корисно зробити, щоб пересвідчитися, що перетворення з умови задачі є дійсно нільпотентним.)

2) Знайти ранг матриці A і виписати можливі варіанти її жорданової нормальної форми. Кількість клітинок дорівнює дефекту матриці. Для матриць порядку 2 і 3 ЖНФ повністю визначається рангом матриці. Це ж правильно і для матриць порядку 4, за винятком випадку, коли ранг матриці дорівнює 2. В останньому випадку можливі два варіанти ЖНФ: $J_2(0) \oplus J_2(0)$ або $J_3(0) \oplus J_1(0)$. Зі збільшенням порядку матриці кількість варіантів для її ЖНФ швидко зростає.

3) Знайти клас нільпотентності c матриці A, послідовно обчислюючи її степені A^2, A^3, ..., аж поки не отримаємо нульову матрицю. Зауважимо, що клас нільпотентності дорівнює найбільшому порядку жорданової клітинки (або, що те саме, довжині найдовшого ланцюжка діаграми), а число $\mathrm{rank} A^k - \mathrm{rank} A^{k+1}$ дорівнює кількості клітинок, порядок яких більший за k (або, що те саме, кількості ланцюжків діаграми, довжина яких більша за k).

4) Побудувати діаграму для жорданової бази.

5) Побудова векторів жорданової бази починається з ланцюжків найбільшої довжини. Нехай маємо m ланцюжків найбільшої довжини:

$$\boldsymbol{v}_c^{(1)} \mapsto \boldsymbol{v}_{c-1}^{(1)} \mapsto \cdots \mapsto \boldsymbol{v}_1^{(1)} \mapsto \mathbf{0},\ \ldots,\ \boldsymbol{v}_c^{(m)} \mapsto \boldsymbol{v}_{c-1}^{(m)} \mapsto \cdots \mapsto \boldsymbol{v}_1^{(m)} \mapsto \mathbf{0}\,.$$

Тоді вектори $\boldsymbol{v}_1^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_1^{(m)}$ утворюють базу образу $\mathrm{Im}(\varphi)$ перетворення φ, яке в стандартній базі $\boldsymbol{e}_1 \ldots, \boldsymbol{e}_n$ задається матрицею A^{c-1}. Тому в якості $\boldsymbol{v}_1^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_1^{(m)}$ можна взяти довільні лінійно незалежні m стовпчиків матриці A^{c-1}. Нехай це будуть стовпчики з номерами $i_1, \ldots, i_m$. Після цього в якості $\boldsymbol{v}_c^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_c^{(m)}$ беремо відповідно вектори $\boldsymbol{e}_{i_1} \ldots, \boldsymbol{e}_{i_m}$, в якості $\boldsymbol{v}_{c-1}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{c-1}^{(m)}$ — відповідно стовпчики з номерами $i_1, \ldots, i_m$ матриці A, в якості $\boldsymbol{v}_{c-2}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{c-2}^{(m)}$ — відповідно стовпчики з номерами $i_1, \ldots, i_m$ матриці A^2, і т.д.

6) Якщо на попередньому кроці знайдено не всі вектори жорданової бази, то для знаходження решти векторів використовуємо співвідношення між образами і ядрами перетворень φ, φ^2, $\ldots$, які випливають безпосередньо з діаграми (як це робити, буде проілюстровано на конкретних прикладах нижче).

7) Виписати матрицю переходу T, вектор–стовпчики якої є векторами ланцюжкової бази.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Для матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

знайдіть такі невироджені матриці B і C, що $B^{-1}AC = \begin{pmatrix} E & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Спочатку зауважимо, що задача має просте геометричне походження. Якщо інтерпретувати матрицю A як матрицю деякого лінійного відображення $\varphi : V \to W$, то матриці B і C — це матриці переходу до таких баз в просторах W і U відповідно, в яких матриця відображення φ має канонічний вигляд.

З методу Ґауса випливає, що кожну матрицю елементарними перетвореннями рядків і стовпчиків можна звести до вигляду (19). З іншого боку, елементарні перетворення рядків (стовпчиків) матриці A рівносильні множенню A зліва (справа) на відповідні елементарні матриці. Крім того, з рівностей

$$M_1 M_2 \cdots M_k = M_1 M_2 \cdots M_k E = E M_1 M_2 \cdots M_k$$

випливає, що обчислення добутку $M_1 M_2 \cdots M_k$ елементарних матриць можна замінити виконанням відповідних елементарних перетворень рядків (стовпчиків) одиничної матриці. Це дає нам наступний метод розв'язання нашої задачі:

— дописуємо до матриці A зліва і знизу одиничні матриці відповідних порядків і одержуємо таблицю $\left(\begin{array}{c|c} E_m & A \\ \hline & E_k \end{array}\right)$;

— елементарними перетвореннями довгих рядків і довгих стовпчиків зводимо матрицю A до вигляду (19); в результаті отримуємо таблицю $\left(\begin{array}{c|c} D & \begin{matrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline & C \end{array}\right)$, яка рівносильна рівності $DAC = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

— оскільки елементарні матриці невироджені, то матриця D (як добуток елементарних) також невироджена. Тому ми можемо обчислити матрицю $B = D^{-1}$ і одержати розклад

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = DAC = (D^{-1})^{-1}AC = B^{-1}AC\,.$$

У нашому випадку це виглядає так:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline &&&& 1 & 0 & 0 \\ &&&& 0 & 1 & 0 \\ &&&& 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline &&&& 1 & 0 & 0 \\ &&&& 0 & 1 & 0 \\ &&&& 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & & & 1 & 1 & -1 \\ & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & & & 1 & -1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ \hline & & & & 1 & -1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ \hline & & & & 1 & -1 & 4 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ \hline & & & & 1 & -1 & 4 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 17 & -5 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & 1 & -1 & 4 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Таким чином,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 1 & 4 \\ 17 & -5 & 2 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 9 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Задача 2. *Доведіть, що перетворення* $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $X \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, *є нільпотентним, і знайдіть клас нільпотентності.*

Розв'язання. Спочатку знайдемо матрицю цього лінійного перетворення в стандартній базі з матричних одиниць E_{ij}, $i, j = 1, 2$. Маємо:

$$\varphi(E_{11}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно

$$\varphi(E_{12}) = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(E_{21}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Клас нільпотентності дорівнює такому найменшому натуральному числу c, що $[\varphi]^c = \mathcal{O}$. Обчислюємо:

$$[\varphi]^2 = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \\ -4 & -8 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad [\varphi]^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, оператор φ є нільпотентним класу нільпотентності 3. □

Задача 3. *Знайдіть жорданову нормальну форму $J(A)$ і матрицю переходу T до жорданової бази для матриці A :*

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -5 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. а) Оскільки

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -2-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ -2 & -2-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3,$$

то матриця A є нільпотентною. Рядки матриці A пропорційні, тому її ранг дорівнює 1, а дефект дорівнює $3 - 1 = 2$. Тому ЖНФ матриці A

складається з двох клітин. Очевидно, що їх розмірності 2 і 1. Отже, маємо такі ЖНФ і діаграму:

$$J_A = J_2(0) \oplus J_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \qquad \begin{array}{r} \boldsymbol{v}_2 \mapsto \boldsymbol{v}_1 \mapsto \mathbf{0} \\ \boldsymbol{v}_3 \mapsto \mathbf{0} \end{array} .$$

Позначимо через φ перетворення простору $\mathbb{C}^3$, матрицею якого є A, і розглянемо два способи знаходження жорданової бази.

I спосіб. З діаграми видно, що образ $\mathrm{Im}\varphi$ перетворення φ породжується вектором $\boldsymbol{v}_1$. З іншого боку, образ перетворення породжується стовпчиками його матриці. Позаяк усі стовпчики матриці A однакові, то в якості $\boldsymbol{v}_1$ можна взяти будь–який з них. Виберемо перший: $\boldsymbol{v}_1 = (1, -2, 1)$. Насправді те, який саме стовпчик ми вибираємо, є істотним, бо від цього залежить вибір вектора $\boldsymbol{v}_2$, який є прообразом $\boldsymbol{v}_1$. Перший стовпчик матриці A є образом вектора $\boldsymbol{e}_1$ стандартної бази. Тому беремо $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$.

Лишилося знайти вектор $\boldsymbol{v}_3$. З діаграми видно, що він, як і вектор $\boldsymbol{v}_1$, лежить в ядрі $\operatorname{Ker}\varphi$ перетворення φ. Однак $\boldsymbol{v}_1$ і $\boldsymbol{v}_3$ мають бути лінійно незалежні. Тому в якості $\boldsymbol{v}_3$ можна взяти довільний вектор з $\operatorname{Ker}\varphi$, який не пропорційний $\boldsymbol{v}_1$. Ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ — це множина розв'язків системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right). \tag{20}$$

Тому можна взяти, наприклад, $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 1, 0)$. Тоді матриця переходу до жорданової бази матиме вигляд

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II спосіб. З діаграми видно, що вектори $\boldsymbol{v}_1$ та $\boldsymbol{v}_3$ складають базу ядра $\operatorname{Ker}\varphi$ перетворення φ. Однак вони не рівноправні: у вектора $\boldsymbol{v}_1$ має бути прообраз, у той час як на $\boldsymbol{v}_3$ діаграма жодних обмежень не накладає. Запишемо вектор ядра в загальному вигляді (тобто візьмемо загальний розв'язок системи (20)): $\boldsymbol{v} = (-\alpha - \beta, \alpha, \beta)$. Тоді існування для вектора $\boldsymbol{v}$ прообразу рівносильне сумісності системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -\alpha - \beta \\ -2 & -2 & -2 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 & \beta \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -\alpha - \beta \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha - 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + 2\beta \end{array}\right). \tag{21}$$

Система (21) буде сумісна тоді й лише тоді, коли $\alpha + 2\beta = 0$, наприклад, при $\alpha = -2$, $\beta = 1$. Такий вибір параметрів дає нам вектор $\boldsymbol{v}_1 = (1, -2, 1)$.

При даних значеннях параметрів система (21) зводиться до одного рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, і в якості $\boldsymbol{v}_2$ можна взяти будь–який її розв'язок. Наприклад, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 0, 0)$.

Для знаходження $\boldsymbol{v}_3$ параметри α і β треба вибрати так, щоб вийшов вектор, не пропорційний $\boldsymbol{v}_1$. Наприклад, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Тоді отримуємо: $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 1, 0)$. Зокрема, ми ще раз отримали ту ж саму жорданову базу.

Зауваження. 1) Як бачимо, обидва способи побудови жорданової бази містять велику свободу вибору. Наприклад, у другому способі в якості розв'язку системи (21) можна було взяти вектор $\boldsymbol{v}_2 = (1, -1, 1)$, а при побудові третього вектора взяти значення параметрів $\alpha = 1$, $\beta = 1$ і отримати вектор $\boldsymbol{v}_3 = (-2, 1, 1)$. Тоді матриця переходу до жорданової бази мала б вигляд

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Це свідчить, що жорданова база визначена неоднозначно.

2) Для перевірки правильності обчислень можна скористатися рівністю $J_A = T^{-1}AT$. Однак така перевірка вимагає додаткового обчислення оберненої матриці T^{-1}. Значно зручніше перевіряти рівність $TJ_A = AT$.

b) Спочатку знайдемо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 30 & -14 \\ -5 & -19-\lambda & 9 \\ -6 & -23 & 11-\lambda \end{vmatrix} =$$

(до 2-го стовпчика додаємо 3-й і віднімаємо подвоєний 1-й)

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 2\lambda & -14 \\ -5 & -\lambda & 9 \\ -6 & -\lambda & 11-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 8-\lambda & 2 & -14 \\ -5 & -1 & 9 \\ -6 & -1 & 11-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ -5 & -1 & 9 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Розкриваючи останній визначник за другим стовпчиком, отримуємо:

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 4 + 4) = -\lambda^3.$$

Отже, матриця A є нільпотентною. Знайдемо її ранг

$$\begin{pmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -5 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 15 & -7 \\ -5 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 15 & -7 \\ -1 & -4 & 2 \\ -2 & -8 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці A дорівнює 2, тому її ЖНФ містить $3-2=1$ клітину. Отже, маємо такі ЖНФ і діаграму:

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_3 \mapsto \boldsymbol{v}_2 \mapsto \boldsymbol{v}_1 \mapsto \mathbf{0}\ . \tag{22}$$

Знову позначимо через φ перетворення простору $\mathbb{R}^3$, матрицею якого є A. Коли всі ланцюжки діаграми нільпотентної матриці мають однакову довжину (зокрема, коли маємо тільки один ланцюжок), описаний вище перший спосіб знаходження жорданової бази є особливо ефективним.

I спосіб. Оскільки J_A має лише одну клітину розмірності три, то клас нільпотентності матриці A дорівнює 3. Знайдемо

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

З діаграми (22) видно, що $\varphi^2(\boldsymbol{v}_1) = \varphi^2(\boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0}$, $\varphi^2(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_1$. Тому образ $\mathrm{Im}\varphi^2$ перетворення φ^2 породжується вектором $\boldsymbol{v}_1$. З іншого боку, образ перетворення породжується стовпчиками його матриці. Позаяк усі стовпчики матриці A^2 пропорційні, то в якості $\boldsymbol{v}_1$ можна взяти будь–який з них. Виберемо перший: $\boldsymbol{v}_1 = (-2, 1, 1)$.

З рівності $\varphi^2(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_1$ випливає, що в якості $\boldsymbol{v}_3$ треба брати який–небудь прообраз вектора $\boldsymbol{v}_1$ при перетворенні φ^2. Оскільки $\boldsymbol{v}_1$ вибирався як перший стовпчик матриці A^2, то можна взяти $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$.

Нарешті, з рівності $\varphi(\boldsymbol{e}_1) = \varphi(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_2$ випливає, що в якості $\boldsymbol{v}_2$ можна взяти перший стовпчик матриці A: $\boldsymbol{v}_2 = (8, -5, -6)$. Тому матриця переходу до жорданової бази має вигляд

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, для знаходження жорданової бази цим способом нам було потрібно лише обчислити матрицю A^2. Для порівняння знайдемо жорданову базу ще й другим способом з п. а).

II спосіб. З діаграми (22) видно, що вектори $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ можна шукати як прообрази відповідно векторів $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{v}_1$ та $\boldsymbol{v}_2$. Вище при обчисленні рангу матриці A ми виконували лише перетворення рядків. Тому отримані результати можна використати і при розв'язуванні систем лінійних рівнянь з матрицею A, лише доповнивши їх відповідними перетвореннями стовпчика вільних членів.

Отже, вектор $\boldsymbol{v}_1$ шукаємо як ненульовий елемент ядра $\operatorname{Ker}\varphi$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 30 & -14 & 0 \\ -5 & -19 & 9 & 0 \\ -6 & -23 & 11 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Поклавши $x_3 = 1$, отримуємо: $\boldsymbol{v}_1 = (-2, 1, 1)$. Вектор $\boldsymbol{v}_2$ шукаємо як прообраз вектора $\boldsymbol{v}_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 30 & -14 & -2 \\ -5 & -19 & 9 & 1 \\ -6 & -23 & 11 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right).$$

Покладемо $x_3 = 0$. Тоді $\boldsymbol{v}_2 = (-4, 1, 0)$. Вектор $\boldsymbol{v}_3$ шукаємо як прообраз вектора $\boldsymbol{v}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 30 & -14 & -4 \\ -5 & -19 & 9 & 1 \\ -6 & -23 & 11 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & -23 \end{array}\right).$$

Знову покладемо $x_3 = 0$. Отримуємо: $\boldsymbol{v}_3 = (-23, 6, 0)$. Отже, матрицею переходу до жорданової бази буде

$$T = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -23 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Знайдемо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -\lambda \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ -2+\lambda & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 2\lambda & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda\Big(\lambda(\lambda^2-4)+4\lambda\Big) = \lambda^4.$$

Отже, матриця A є нільпотентною. За допомогою елементарних перетворень рядків знайдемо її ранг:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ранг матриці A дорівнює 2, тому її ЖНФ містить $4-2=2$ клітини. Це можуть бути або дві клітини порядку 2, або клітини порядків 3 і 1:

$$J_2(0) \oplus J_2(0) \qquad \text{або} \qquad J_3(0) \oplus J_1(0)\,.$$

Але в першому випадку клас нільпотентності дорівнює 2, а в другому — 3. Щоб знайти клас нільпотентності матриці A, обчислюємо A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

Отже, клас нільпотентності матриці A дорівнює 3. Тому маємо такі ЖНФ і діаграму:

$$J_A = J_3(0) \oplus J_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \qquad \begin{array}{r} \boldsymbol{v}_3 \mapsto \boldsymbol{v}_2 \mapsto \boldsymbol{v}_1 \mapsto \mathbf{0}\ , \\ \boldsymbol{v}_4 \mapsto \mathbf{0}\ . \end{array}$$

Оскільки маємо довгий ланцюжок, то жорданову базу зручно шукати першим способом. З діаграми видно, що для перетворення $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ з матрицею A образ $\mathrm{Im}\varphi^2$ перетворення φ^2 породжується вектором $\boldsymbol{v}_1$. Тому в якості $\boldsymbol{v}_1$ можна брати довільний ненульовий стовпчик матриці A^2. Наприклад, перший: $\boldsymbol{v}_1 = (-2,-2,2,2)$. В якості $\boldsymbol{v}_3$ треба брати який–небудь прообраз вектора $\boldsymbol{v}_1$ при перетворенні φ^2. Оскільки $\boldsymbol{v}_1$ вибирався як перший стовпчик матриці A^2, то можна взяти $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,0)$. Нарешті, $\boldsymbol{v}_2$ є образом вектора $\boldsymbol{v}_3$ при перетворенні φ. Тому $\boldsymbol{v}_2 = (0,-1,-1,0)$.

Лишилося знайти вектор $\boldsymbol{v}_4$. З діаграми видно, що він, як і вектор $\boldsymbol{v}_1$, лежить в ядрі $\operatorname{Ker}\varphi$ перетворення φ. Однак $\boldsymbol{v}_1$ і $\boldsymbol{v}_4$ мають бути лінійно незалежні. Тому в якості $\boldsymbol{v}_4$ можна взяти довільний вектор з $\operatorname{Ker}\varphi$, який не пропорційний $\boldsymbol{v}_1$. Ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ — це множина розв'язків системи

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{23}$$

Тому можна взяти, наприклад, $\boldsymbol{v}_4 = (1,0,0,1)$. Тоді матриця переходу до жорданової бази матиме вигляд

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Знайдемо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 & 1 \\ 0 & -\lambda & 4 \\ -1 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix}^2.$$

Останній визначник можна порахувати, розклавши його за першим стовпчиком. Тому маємо: $\chi_A(\lambda) = \Big((3-\lambda)(-\lambda(-3-\lambda)+8)-(24+\lambda)\Big)^2 = \lambda^6$. Отже, матриця A є нільпотентною. За допомогою елементарних перетворень рядків знаходимо її ранг:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці A дорівнює 4, тому її ЖНФ містить $6-4=2$ клітини. Це можуть бути або клітини порядків 5 і 1, або клітини порядків 4 і 2, або дві клітини порядку 3:

$$\text{або} \quad J_5(0) \oplus J_1(0), \quad \text{або} \quad J_4(0) \oplus J_2(0), \quad \text{або} \quad J_3(0) \oplus J_3(0).$$

Але в першому випадку клас нільпотентності дорівнює 5, у другому — 4, а в третьому — 3. Щоб знайти клас нільпотентності матриці A, обчислимо її степені:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 24 & 6 & 12 & 2 \\ -4 & -8 & -12 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 24 & 48 & 72 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -24 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$A^4 = \mathcal{O}$. Отже, клас нільпотентності матриці A дорівнює 4. Тому маємо такі ЖНФ і діаграму:

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{array}{r} \boldsymbol{v}_4 \mapsto \boldsymbol{v}_3 \mapsto \boldsymbol{v}_2 \mapsto \boldsymbol{v}_1 \mapsto \mathbf{0}\,, \\ \boldsymbol{v}_6 \mapsto \boldsymbol{v}_5 \mapsto \mathbf{0}\,. \end{array} \tag{24}$$

Маємо один довгий ланцюжок, тому вектори цього ланцюжка зручно шукати першим способом. З діаграми видно, що для перетворення $\varphi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ з матрицею A образ $\mathrm{Im}\varphi^3$ перетворення φ^3 породжується вектором $\boldsymbol{v}_1$. Тому в якості $\boldsymbol{v}_1$ вибираємо довільний ненульовий стовпчик (наприклад, четвертий) матриці A^3: $\boldsymbol{v}_1 = (24, -12, 0, 0, 0, 0)$. В якості $\boldsymbol{v}_4$ беремо прообраз $\boldsymbol{v}_1$ при перетворенні φ^3: $\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{e}_4 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$. $\boldsymbol{v}_2$ і $\boldsymbol{v}_3$ знаходимо із співвідношень $\boldsymbol{v}_3 = \varphi(\boldsymbol{v}_4)$ і $\boldsymbol{v}_2 = \varphi^2(\boldsymbol{v}_4)$. Тому $\boldsymbol{v}_3 = (1, 0, 0, 3, 0, -1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (6, 0, -2, 8, -4, 0)$.

З діаграми (24) також видно, що вектори $\boldsymbol{v}_1$, та $\boldsymbol{v}_5$ утворюють базу ядра $\mathrm{Ker}\,\varphi$ перетворення φ, причому в кожного з них є прообраз. Тому прообраз має кожен вектор з ядра, і якості $\boldsymbol{v}_5$ можна взяти довільний вектор з $\operatorname{Ker}\varphi$, який не пропорційний $\boldsymbol{v}_1$. Ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ — це множина розв'язків системи

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

За вільні змінні можна взяти x_2 та x_3. Для $\boldsymbol{v}_1$ ці змінні дорівнюють відповідно $x_2 = -12$ і $x_3 = 0$. Тому коли ми візьмемо $x_2 = 0$ і $x_3 = 1$, то одержимо вектор, не пропорційний $\boldsymbol{v}_1$. Отже, $\boldsymbol{v}_5 = (-3, 0, 1, 8, -4, 0)$.

Нарешті, вектор $\boldsymbol{v}_6$ шукаємо як прообраз $\boldsymbol{v}_5$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 1 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Позаяк нам потрібен лише один розв'язок цієї системи, то покладемо $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Тоді $x_1 = -2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 0$, $x_6 = -1$ і вектор $\boldsymbol{v}_6 = (-2, 0, 0, 3, 0, -1)$. Отже, матриця переходу до жорданової бази така:

$$T = \begin{pmatrix} 24 & 6 & 1 & 0 & -3 & -2\\ -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 8 & 3 & 1 & 8 & 3\\ 0 & -4 & 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Задача 4. *Знайдіть жорданову нормальну форму і матрицю переходу T до жорданової бази для матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Знайдемо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n \ .$$

Отже, матриця A є нільпотентною. Ранг матриці A дорівнює $n-1$, а дефект дорівнює $n-(n-1)=1$. Тому ЖНФ матриці A містить одну клітинку. Тим самим отримуємо такі ЖНФ і діаграму:

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} ; \qquad \boldsymbol{v}_n \mapsto \boldsymbol{v}_{n-1} \mapsto \dots \mapsto \boldsymbol{v}_1 \mapsto \mathbf{0} \ .$$

З діаграми видно, що клас нільпотентності матриці A дорівнює n. Обчислимо:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\cdot 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot 3 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-2)\cdot(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\cdot 2\cdot 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot 3\cdot 4 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} ; \quad \dots ;$$

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (n-1)! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

З діаграми видно, що для перетворення $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ з матрицею A образ $\mathrm{Im}\varphi^{n-1}$ перетворення φ^{n-1} породжується вектором $\boldsymbol{v}_1$. Тому в якості $\boldsymbol{v}_1$ вибираємо ненульовий стовпчик (він тільки один — останній) матриці A^{n-1}. Вектор $\boldsymbol{v}_1$ є образом $\boldsymbol{v}_n$ під дією перетворення φ^{n-1}. З іншого боку, $\boldsymbol{v}_1 = \varphi^{n-1}(\boldsymbol{e}_n)$. Тому можна взяти $\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$. Решта векторів жорданової бази тепер визначається однозначно із співвідношень $\boldsymbol{v}_{n-1} = \varphi(\boldsymbol{v}_n)$, $\boldsymbol{v}_{n-2} = \varphi^2(\boldsymbol{v}_n)$, $\dots$, $\boldsymbol{v}_2 = \varphi^{n-2}(\boldsymbol{v}_n)$, тобто є останніми стовпчиками відповідно матриць A, A^2, $\dots$, A^{n-2}. Таким чином, $\boldsymbol{v}_{n-1} = (0, \dots, 0, 0, n-1, 0)$, $\boldsymbol{v}_{n-2} = (0, \dots, 0, (n-2)(n-1), 0, 0)$, $\dots$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 2{\cdot}3 \cdots (n-1), 0, \dots, 0, 0)$, а матриця переходу до жорданової бази має вигляд

$$T = \begin{pmatrix} 1\cdot 2\cdots(n-1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\cdot 3\cdots(n-1) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Задача 5. *Знайдіть усі матриці, кожна з яких подібна лише собі.*

Розв'язання. Те, що квадратна матриця $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ подібна лише собі, означає, що для кожної невиродженої матриці T виконується рівність $T^{-1}AT = A$ (або $TA = AT$). Тому потрібно знайти всі ті матриці, що перестановочні з усіма невиродженими матрицями. Зокрема, A має бути перестановочною з усіма матрицями вигляду $E + E_{ij}$, де E_{ij} — матрична одиниця. Так при $i = 1$, $j = 2$ отримаємо:

$$A(E + E_{12}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} + a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} + a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} + a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= (E + E_{12})A = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & \dots & a_{1n} + a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Порівнюючи матриці, отримуємо $2n - 1$ рівняння:

$$a_{11} + a_{21} = a_{11},\ a_{12} + a_{22} = a_{11} + a_{12},\ a_{13} + a_{23} = a_{13},\ \dots,$$

$$a_{1n} + a_{2n} = a_{1n};\ a_{22} = a_{21} + a_{22},\ \dots,\ a_{n2} = a_{n1} + a_{n2},$$

з яких знаходимо:

$$a_{21} = 0,\ a_{31} = 0,\ \ldots,\ a_{n1} = 0,\ a_{11} = a_{22},\ a_{23} = 0,\ \ldots,\ a_{2n} = 0.$$

Аналогічні рівності матимемо для інших i та j. Тому матриці, які подібні лише собі, це скалярні матриці вигляду $A = \mathrm{diag}(a, \ldots, a)$, тобто діагональні матриці з однаковими елементами на діагоналі. $\square$

Основні задачі

6. Доведіть, що коли матриці A і B подібні, то матриці A^2 і B^2 також подібні. Чи буде правильним обернене твердження?

7. Доведіть, що подібні матриці мають однаковий слід.

8. Для матриці A знайдіть такі невироджені матриці B і C, що $B^{-1}AC = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, якщо: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;
c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Знайдіть жорданову нормальну форму матриці:
a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Знайдіть жорданову нормальну форму $J(A)$ і матрицю переходу T до жорданової бази для матриці A:
a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 4 & -10 & 10 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

11. Нехай A, B — квадратні матриці з $M_n(P)$. Доведіть, що B буде подібною до A, якщо B одержується з A одним з таких перетворень: a) i-й рядок множиться на число $k \neq 0$, а потім i-й стовпчик ділиться на k; b) до i-го рядка додається j-й, помножений на k, а потім від i-го стовпчика віднімається j-й, помножений на k; c) переставляються i-й і j-й стовпчики, а потім i-й і j-й рядки.

12. Доведіть, що відношення подібності матриць є відношенням еквівалентності.

13. Доведіть, що при центральній симетрії відносно центра квадратна матриця переходить у подібну.

14. Доведіть, що коли хоча б одна з квадратних матриць A і B однакового порядку невироджена, то матриці AB і BA подібні. Чи залишиться твердження правильним для вироджених матриць?

15. Доведіть, що ненульова нільпотентна матриця не зводиться до діагонального вигляду.

16. Нехай $\varphi : V \to V$ — лінійне перетворення, а $V = U \oplus W$ — такий розклад у пряму суму інваріантних підпросторів, що $\varphi|_U$ — невироджене, а $\varphi|_W$ — нільпотентне перетворення. Доведіть, що розмірність W дорівнює кратності нуля як кореня характеристичного многочлена $\chi_\varphi(\lambda)$.

Додаткові задачі

17. Доведіть, що для довільної квадратної матриці $A \in M_n(P)$ множина всіх таких невироджених матриць X, що $X^{-1}AX = A$, замкнена відносно множення і взяття оберненої матриці.

18. Доведіть, що коли комплексні матриці $A_1 = B_1 + iC_1$ і $A_2 = B_2 + iC_2$ подібні, то дійсні матриці $D_1 = \begin{pmatrix} B_1 & -C_1 \\ C_1 & B_1 \end{pmatrix}$ і $D_2 = \begin{pmatrix} B_2 & -C_2 \\ C_2 & B_2 \end{pmatrix}$ також подібні.

19. Нехай φ — нільпотентне перетворення. Доведіть, що перетворення $\varepsilon - \varphi$ є невиродженим.

20. Доведіть, що кожне лінійне перетворення $\mathcal{A}$ n–вимірного комплексного простору однозначно розкладається в пряму суму $\mathcal{A} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{N}$ невиродженого $\mathcal{S}$ і нільпотентного $\mathcal{N}$ перетворень.

21.* Доведіть, що коли матриці A і B задовольняють співвідношення $AB - BA = B$, то матриця B є нільпотентною.

Домашнє завдання

22. Знайдіть жорданову нормальну форму $J(A)$ і матрицю переходу T до жорданової бази для матриці A:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

23. Знайдіть жорданову нормальну форму і жорданову базу оператора двократного диференціювання у просторі многочленів:
a) $\mathbb{R}_{2k-1}[x]$; b) $\mathbb{R}_{2k}[x]$.

24. Знайдіть жорданову нормальну форму і жорданову базу оператора трикратного диференціювання у просторі многочленів $\mathbb{R}_8[x]$.

25. Знайдіть жорданову нормальну форму і жорданову базу перетворення із зад. 7.2.

26. Знайдіть жорданову нормальну форму матриці

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Література. [2], с. 237–242; [4], с. 128–137; [8], с. 92–96; [10], с. 38–42; [12], с. 335–339; [13], с. 157–160.

Заняття 8. ЖНФ: загальний випадок

Необхідні поняття. Кореневим підпростором $V(\lambda, \varphi)$ (або просто $V(\lambda)$), що відповідає власному числу λ лінійного перетворення φ n–вимірного векторного простору V, називається множина всіх тих векторів $\boldsymbol{v} \in V$, для яких $(\varphi - \lambda E)^n \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Для кожного власного числа λ кореневий підпростір $V(\lambda, \varphi)$ є φ–інваріантним.

Власним підпростором $V_\varphi^{(\lambda)}$ (або просто $V^{(\lambda)}$), що відповідає власному числу λ лінійного перетворення φ n–вимірного векторного простору V, називається множина всіх власних векторів перетворення φ, що відповідають власному числу λ, поповнена нульовим вектором, тобто множина всіх тих векторів $\boldsymbol{v} \in V$, для яких $(\varphi - \lambda E)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

Ланцюжковою базою кореневого підпростору $V(\lambda, \varphi)$, що відповідає власному числу λ, називається така його база $\boldsymbol{v}_{ij}$, $1 \le i \le p$, $1 \le j \le p_i$, для якої $(\varphi - \lambda E)\boldsymbol{v}_{ij} = \boldsymbol{v}_{i,j-1}$ та $(\varphi - \lambda E)\boldsymbol{v}_{i1} = \mathbf{0}$. Зобразимо цю базу діаграмою

$$
\begin{array}{l}
\boldsymbol{v}_{1,p_1} \mapsto \boldsymbol{v}_{1,p_1-1} \mapsto \cdots \mapsto \boldsymbol{v}_{1,1} \mapsto \mathbf{0}\ , \\
\boldsymbol{v}_{2,p_2} \mapsto \boldsymbol{v}_{2,p_2-1} \mapsto \cdots \mapsto \boldsymbol{v}_{2,1} \mapsto \mathbf{0}\ , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ , \\
\boldsymbol{v}_{p,p_p} \mapsto \boldsymbol{v}_{p,p_p-1} \mapsto \cdots \mapsto \boldsymbol{v}_{p,1} \mapsto \mathbf{0}\ .
\end{array}
$$

Необхідні твердження. **1.** Множина тих векторів $\boldsymbol{v} \in V$, для яких $(\varphi - \lambda E)^n \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, буде ненульовою тоді й лише тоді, коли λ — власне число перетворення φ.

2. Розмірність кореневого підпростору $V(\lambda, \varphi)$, що відповідає власному числу λ, збігається з кратністю λ як кореня характеристичного многочлена.

3. У кожному кореневому підпросторі існує ланцюжкова база.

4. Кількість ланцюжків фіксованої довжини в різних ланцюжкових базах одного й того ж кореневого підпростору однакова.

5. Кількість ланцюжків у довільному ланцюжковому базисі кореневого підпростору $V(\lambda, \varphi)$ дорівнює розмірності власного підпростору $V_\varphi^{(\lambda)}$.

6. Нехай $\varphi : V \to V$ — лінійне перетворення з характеристичним многочленом $\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — всі його різні власні числа. Тоді простір V розкладається в пряму суму $V = V(\lambda_1, \varphi) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_s, \varphi)$ кореневих підпросторів $V(\lambda_i, \varphi)$. Підпростір $V(\lambda_i, \varphi)$ є інваріантним відносно φ, а його розмірність дорівнює

$\dim V(\lambda_i, \varphi) = k_i$. Перетворення $\varphi - \lambda_i \varepsilon$, нільпотентне на $V(\lambda_i, \varphi)$, є невиродженим на підпросторі $V_i = V(\lambda_1, \varphi) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_{i-1}, \varphi) \oplus V(\lambda_{i+1}, \varphi) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_s, \varphi)$. Крім того, обмеження $\varphi|_{V(\lambda_i, \varphi)}$ перетворення φ на підпростір $V(\lambda_i, \varphi)$ є перетворенням з єдиним власним числом λ_i.

7. *Теорема Жордана* (*загальний випадок*). Для кожного лінійного перетворення n–вимірного векторного простору над алгебраїчно замкненим полем P (зокрема, над $\mathbb{C}$) існує жорданова база. Жорданова нормальна форма матриці лінійного перетворення з точністю до перестановки клітинок Жордана визначена однозначно.

8. Кожна квадратна матриця A порядку n над алгебраїчно замкненим полем P (зокрема, над $\mathbb{C}$) зводиться до жорданової нормальної форми. А саме, існує невироджена матриця S, для якої $S^{-1}AS = J_A$. З точністю до перестановки клітинок Жордана нормальна форма матриці єдина.

9. Нехай φ — лінійне перетворення n–вимірного векторного простору, $J_A = J_{l_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{l_p}(\lambda_p)$ — його жорданова нормальна форма, а m_t — найвищий порядок жорданових клітинок матриці J_A з власним числом λ_t $(1 \leq t \leq p)$. Позначимо число жорданових клітинок порядку k з власним числом λ_t символом $N(k, \lambda_t)$ $(k = 1, 2, \ldots, m_t)$. Нехай також $B_{\lambda_t} = A - \lambda_t E$ і $r_{i,t}$ — ранг матриці $B^i_{\lambda_t}$ $(i = 1, 2, \ldots, m_t + 1)$. Окремо, $r_{0,t} = n$. Тоді:

$$N(k, \lambda_t) = r_{k-1,t} - 2r_{k,t} + r_{k+1,t}. \tag{25}$$

10. Дві квадратні матриці однакового порядку над полем комплексних чисел подібні тоді й тільки тоді, коли вони мають однакові жорданові нормальні форми.

Для знаходження жорданової нормальної форми та жорданової бази лінійного перетворення $\varphi : V \to V$, *заданого матрицею* A *в деякій базі, потрібно*:

1) Знайти власні числа матриці A та їх кратності.

2) Для кожного власного числа λ_i знайти розмірність $\dim V^{\lambda_i}$ відповідного власного підпростору V^{λ_i}, яка дорівнює дефекту $n - \mathrm{rank} B_{\lambda_i}$ матриці $B_{\lambda_i} = A - \lambda_i E$. Число $\dim V^{\lambda_i}$ дорівнює кількості тих жорданових клітинок у нормальній жордановій формі J_A матриці A, що відповідають власному числу λ_i, а сума порядків цих клітинок дорівнює кратності власного числа λ_i. У багатьох випадках (зокрема, для матриць порядку ≤ 4, окрім випадку, коли матриця порядку 4 має єдине власне число кратності 4, якому

відповідають 2 клітинки) цього вже досить, щоб знайти ЖНФ матриці A. Якщо ж цього ще не досить, то для підрахунку кількості $N(k,\lambda_i)$ жорданових клітинок $J_k(\lambda_i)$ порядку k з власним числом λ_i потрібно скористатися рівностями (25).

3) Виписати жорданову нормальну форму

$$J_A = J_{k_1}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus J_{k_s}(\lambda_1)\oplus J_{l_1}(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus J_{l_h}(\lambda_2)\oplus\cdots.$$

та побудувати діаграму

$$\begin{array}{c}
\boldsymbol{v}_{1,k_1}^{(\lambda_1)} \mapsto \boldsymbol{v}_{1,k_1-1}^{(\lambda_1)} \mapsto \cdots \mapsto \boldsymbol{v}_{1,1}^{(\lambda_1)} \mapsto \mathbf{0}\,,\\
\boldsymbol{v}_{2,k_2}^{(\lambda_1)} \mapsto \boldsymbol{v}_{2,k_2-1}^{(\lambda_1)} \mapsto \cdots \mapsto \boldsymbol{v}_{2,1}^{(\lambda_1)} \mapsto \mathbf{0}\,,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\boldsymbol{v}_{s,k_s}^{(\lambda_1)} \mapsto \boldsymbol{v}_{s,k_s-1}^{(\lambda_1)} \mapsto \cdots \mapsto \boldsymbol{v}_{s,1}^{(\lambda_1)} \mapsto \mathbf{0}\,,\\
\\
\boldsymbol{v}_{1,l_1}^{(\lambda_2)} \mapsto \boldsymbol{v}_{1,l_1-1}^{(\lambda_2)} \mapsto \cdots \mapsto \boldsymbol{v}_{1,1}^{(\lambda_2)} \mapsto \mathbf{0}\,,\\
\boldsymbol{v}_{2,l_2}^{(\lambda_2)} \mapsto \boldsymbol{v}_{2,l_2-1}^{(\lambda_2)} \mapsto \cdots \mapsto \boldsymbol{v}_{2,1}^{(\lambda_2)} \mapsto \mathbf{0}\,,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

для жорданової бази. Кількість ланцюжків у діаграмі дорівнює кількості жорданових клітинок, а довжини ланцюжків дорівнюють порядкам жорданових клітинок, яким вони відповідають. Зверніть увагу, що для кожного λ_i ланцюжки, що відповідають цьому власному числу, відображають дію на базові вектори перетворення $\varphi-\lambda_i\varepsilon$, а не перетворення φ.

4) Для кожного власного числа λ_i знайти відповідні вектори ланцюжкової бази. Наприклад, для власного числа λ_1 вектори $\boldsymbol{v}_{1,1}^{(\lambda_1)}$, $\boldsymbol{v}_{2,1}^{(\lambda_1)}$, …, $\boldsymbol{v}_{s,1}^{(\lambda_1)}$ є власними векторами перетворення φ, що відповідають цьому власному числу. Тому в якості $\boldsymbol{v}_{1,1}^{(\lambda_1)}$, $\boldsymbol{v}_{2,1}^{(\lambda_1)}$, …, $\boldsymbol{v}_{s,1}^{(\lambda_1)}$ (які називатимемо *основами ланцюжків для власного числа* λ_1) беремо лінійно незалежні вектори з ядра перетворення $\varphi-\lambda_1\varepsilon$. Вектори $\boldsymbol{v}_{1,2}^{(\lambda_1)}$, $\boldsymbol{v}_{2,2}^{(\lambda_1)}$, …, $\boldsymbol{v}_{s,2}^{(\lambda_1)}$ шукаємо із співвідношень

$$(\varphi-\lambda_1\varepsilon)\big(\boldsymbol{v}_{i,2}^{(\lambda_1)}\big)=\boldsymbol{v}_{i,1}^{(\lambda_1)},\quad i=1,2,\ldots,s\,, \tag{26}$$

вектори $\boldsymbol{v}_{1,3}^{(\lambda_1)}$, $\boldsymbol{v}_{2,3}^{(\lambda_1)}$, …, $\boldsymbol{v}_{s,3}^{(\lambda_1)}$ — із співвідношень

$$(\varphi-\lambda_1\varepsilon)\big(\boldsymbol{v}_{i,3}^{(\lambda_1)}\big)=\boldsymbol{v}_{i,2}^{(\lambda_1)},\quad i=1,2,\ldots,s\,, \tag{27}$$

і т.д. Щоб векторні рівняння (26), (27), ... мали розв'язки, вектори $\boldsymbol{v}_{1,1}^{(\lambda_1)}$, $\boldsymbol{v}_{2,1}^{(\lambda_1)}$, ..., $\boldsymbol{v}_{s,1}^{(\lambda_1)}$ спочатку треба брати, взагалі кажучи, невизначеними (тобто у вигляді загального — з параметрами — розв'язку системи $(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$). У процесі знаходження векторів ланцюжкової бази значення параметрів поступово уточнюються, виходячи з вимог, щоб векторні рівняння (26), (27), ... були сумісними, а вектори $\boldsymbol{v}_{1,1}^{(\lambda_1)}$, $\boldsymbol{v}_{2,1}^{(\lambda_1)}$, ..., $\boldsymbol{v}_{s,1}^{(\lambda_1)}$ — лінійно незалежними (як це робити, буде проілюстровано на конкретних прикладах нижче).

5) Виписати матрицю переходу T, вектор–стовпчики якої є векторами ланцюжкової бази.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Знайдіть жорданову нормальну форму матриці* A :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Якщо матриця A порядку 3 має три різні власні числа λ_1, λ_2 і λ_3, то її ЖНФ має вигляд $J_A = J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2) \oplus J_1(\lambda_3)$. Якщо власними числами є λ_1, λ_1 і λ_2 (тобто λ_1 має кратність 2), то ЖНФ має вигляд $J_A = J_2(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2)$, якщо власний простір V^{λ_1} має розмірність 1, і $J_A = J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2)$, якщо $\dim V^{\lambda_1} = 2$. Якщо ж A має власне число λ кратності 3, то її ЖНФ має вигляд $J_A = \lambda E + J_B$, де $B = A - \lambda E$ — нільпотентна матриця. Таким чином, для знаходження ЖНФ матриці порядку 3 потрібно знати лише власні числа (з урахуванням їх кратності) і розмірності власних підпросторів.

а) Знаходимо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3+\lambda & 3-\lambda \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

(до 1–го рядка додали 3–й рядок і відняли 2–й)

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3-\lambda & 4 \\ 6 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(1+\lambda)^2\,.$$

Отже, маємо власне число $\lambda_1 = 3$ кратності один (якому відповідає одна жорданова клітинка $J_1(3)$ порядку 1) і власне число $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ кратності два. Щоб знайти кількість клітинок, які відповідають другому власному числу, шукаємо розмірність власного підпростору $V^{(\lambda_2)}$, тобто дефект матриці $B_{\lambda_2} = A + E$. Маємо:

$$B_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отже, ранг матриці дорівнює 2, а дефект дорівнює $3-2=1$. Тому буде лише одна клітинка з власним числом $\lambda = -1$, і ЖНФ матриці A має вигляд

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Характеристичний многочлен матриці A дорівнює:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3-3\lambda & -3 & 3 \\ 1-\lambda & -6-\lambda & 13 \\ 1-\lambda & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} =$$

(до потроєного 1–го стовпчика додаємо 2–й і 3–й стовпчики)

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6-\lambda & 13 \\ 1 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5-\lambda & 12 \\ 1 & -3 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 3(1-\lambda) - 3(1-\lambda) + (1-\lambda)^3 = (1-\lambda)^3\,.$$

Тому маємо одне власне число $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ кратності три. Знайдемо розмірність власного підпростору $V^{(\lambda_1)}$, тобто дефект матриці $B_{\lambda_1} = A - E$. Маємо:

$$B_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці дорівнює 2, тому ЖНФ містить $3-2=1$ клітинку:

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Задача 2. *Знайдіть жорданову нормальну форму матриці A :*

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Для матриці порядку 4 можливі такі випадки:

- Усі власні числа λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — різні. Тоді

$$J_A = J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2) \oplus J_1(\lambda_3) \oplus J_1(\lambda_4).$$

- Є три різних власних числа: λ_1, λ_2, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$. У цьому випадку маємо по одній жордановій клітинці порядку 1 для кожного з чисел λ_2, сума порядків клітинок з власним числом λ λ дорівнює 2, а кількість таких клітинок дорівнює дефектові матриці $B_\lambda = A - \lambda E$.

- Є два різних власних числа кратностей 1 і 3 відповідно: λ_1, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$. Тоді маємо одну жорданову клітинку порядку 1 з власним числом λ_1, сума порядків клітинок з власним числом λ дорівнює 3, а λ дорівнює 3, а кількість таких клітинок дорівнює дефектові матриці $B_\lambda = A - \lambda E$.

- Є два різних власних числа кратності 2 кожне: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda'$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda''$. Тоді для кожного з цих чисел сума порядків відповідних жорданових клітинок дорівнює 2, а кількість таких клітинок дорівнює дефектові відповідної матриці $B_\lambda = A - \lambda E$.

- Є лише одне власне число кратності 4: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$. У цьому випадку ЖНФ матриці A має вигляд $J_A = \lambda E + J_B$, де $B = A - \lambda E$ — нільпотентна матриця. Кількість клітинок дорівнює дефектові матриці B, а число $\operatorname{rank} B - \operatorname{rank} B^2$ дорівнює кількості тих клітинок, порядок яких ≥ 2.

a) Знайдемо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 4 & -5-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^4 .$$

Маємо одне власне число $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$ кратності 4. Знайдемо розмірність власного підпростору $V^{(\lambda_1)}$, тобто дефект матриці $B_{\lambda_1} = A + E$.

$$B_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ранг матриці дорівнює 3, тому ЖНФ містить $4 - 3 = 1$ клітинку і

$$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

b) Характеристичний многочлен матриці A дорівнює

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5-\lambda & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^4 .$$

Маємо одне власне число $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$ кратності 4. Розмірність власного підпростору $V^{(\lambda_1)}$ дорівнює дефекту матриці $B_{\lambda_1} = A - 2E$. Знайдемо ранг матриці B_{λ_1} :

$$B_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Таким чином, $\operatorname{rank} B_{\lambda_1} = 2$, тому ЖНФ містить $4 - 2 = 2$ клітинки. Щоб знайти порядки цих клітинок, обчислимо $\operatorname{rank} B_{\lambda_1}^2$. Оскільки

$$B_{\lambda_1}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

то $\operatorname{rank} B_{\lambda_1}^2 = 0$. Отже, $\operatorname{rank} B_{\lambda_1} - \operatorname{rank} B_{\lambda_1}^2 = 2$, тобто обидві клітинки мають порядок ≥ 2. Але тоді вони мають порядок 2 і

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Задача 3. *Знайдіть жорданову нормальну форму J_A і матрицю переходу T до жорданової бази для матриці A :*

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -5 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, e) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

f) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. a) Знайдемо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

(до 3-го рядка додали 2-й)

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^2\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda).$$

Тому маємо власне число $\lambda_1 = 3$ кратності 1 та власне число $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ кратності 2. Знаходимо власний вектор, що відповідає першому з них:

$$\left(B_{\lambda_1} \mid 0\right) = \left(A - 3E \mid 0\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Надавши вільній змінній x_3 значення $x_3 = 1$, отримуємо: $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 1)$.

Знайдемо тепер власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$:

$$\big(B_{\lambda_2} \,\big|\, 0\big) = \big(A{-}2E \,\big|\, 0\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг системи дорівнює 1, а тому власний підпростір $V^{(\lambda_2)}$ має розмірність $3-1=2$ і власному числу $\lambda_2 = 2$ відповідає дві жорданові клітинки порядку 1 кожна. Таким чином, жорданова форма J_A і відповідна діаграма мають вигляд

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \boldsymbol{v}_1 \mapsto \mathbf{0}\ , \\ \boldsymbol{v}_2 \mapsto \mathbf{0}\ , \\ \boldsymbol{v}_3 \mapsto \mathbf{0}\ . \end{array}$$

Щоб знайти власні вектори $\boldsymbol{v}_2$ і $\boldsymbol{v}_3$, які відповідають власному числу $\lambda_2 = 2$, надамо в останній системі вільним змінним x_2 та x_3 таких значень: $\begin{array}{c|c} x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$. Отже, $\boldsymbol{v}_2 = (2, 1, 0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2, 0, 1)$, а матриця переходу до жорданової бази буде такою:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Знайдемо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 & -5 \\ 4 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 & -5 \\ 4 & 1-\lambda & 4 \\ -2-\lambda & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

(до 3-го рядка додали 1-й)

$$= (2{+}\lambda) \begin{vmatrix} 4+\lambda & 1 & 5 \\ 4 & 1-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2{+}\lambda) \begin{vmatrix} -1+\lambda & 1 & 5 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2{+}\lambda)(1{-}\lambda)^2\,.$$

Маємо власне число $\lambda_1 = -2$ кратності 1 та власне число $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ кратності 2. Знаходимо власний вектор для першого з них:

$$\big(B_{\lambda_1} \,\big|\, 0\big) = \big(A{+}2E \,\big|\, 0\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right).$$

Надавши вільній змінній x_3 значення $x_3 = 2$, отримуємо: $\boldsymbol{v}_1 = (-11, 12, 2)$.

Знайдемо тепер власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$:

$$\left(B_{\lambda_2} \mid 0\right) = \left(A - E \mid 0\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -1 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг системи дорівнює 2, отже, власний підпростір $V^{(\lambda_2)}$ має розмірність $3 - 1 = 2$ і власному числу $\lambda_2 = 1$ відповідає одна жорданова клітинка порядку 2. Тому жорданова форма J_A та діаграма жорданової бази будуть такими:

$$J_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{r} \boldsymbol{v}_1 \mapsto \mathbf{0}\ , \\ \boldsymbol{v}_3 \mapsto \boldsymbol{v}_2 \mapsto \mathbf{0}\ . \end{array}$$

Вектор $\boldsymbol{v}_2$ є базою власного підпростору $V^{(\lambda_2)}$. Оскільки цей підпростір одновимірний, то різні бази відрізняються лише множником. Тому можна брати довільний ненульовий вектор з $V^{(\lambda_2)}$. Надавши в останній системі вільній змінній x_3 значення $x_3 = 1$, отримуємо: $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 0, 1)$.

Вектор $\boldsymbol{v}_3$ тепер шукаємо як прообраз вектора $\boldsymbol{v}_2$ при лінійному перетворенні з матрицею B_{λ_2}, тобто як розв'язок системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -1 & -5 & -1 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Оскільки нас влаштовує будь–який розв'язок цієї системи, то покладемо $x_3 = 0$ і отримаємо $\boldsymbol{v}_3 = (0, 1, 0)$.

Отже, матриця переходу до жорданової бази

$$T = \begin{pmatrix} -11 & -1 & 0 \\ 12 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

c) Знайдемо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -3+\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

(від 3-го рядка відняли 2-й)

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^3\,.$$

Таким чином, маємо одне власне число $\lambda = 3$ кратності три. Знаходимо дефект матриці B_λ:

$$B_\lambda = A - 3E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Отже, ЖНФ J_A матриці A містить $3-1=2$ клітинки порядків 1 та 2 відповідно з одним і тим же власним числом $\lambda = 3$. Тому J_A та діаграма жорданової бази будуть такими:

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{r} \boldsymbol{v}_1 \mapsto \mathbf{0}\,, \\ \boldsymbol{v}_3 \mapsto \boldsymbol{v}_2 \mapsto \mathbf{0}\,. \end{array}$$

Оскільки матриця A має тільки одне власне число λ, то, як зауважувалося у вступі до заняття, діаграма насправді відображає дію на базові вектори не перетворення φ з матрицею A, а нільпотентного перетворення $\psi = \varphi - \lambda\varepsilon$ з матрицею B_λ. З діаграми видно, що образ $\mathrm{Im}\psi$ перетворення ψ породжується вектором $\boldsymbol{v}_2$. Позаяк образ перетворення породжується стовпчиками його матриці, а стовпчики матриці B_λ пропорційні (див. (28)), то в якості $\boldsymbol{v}_2$ можна брати будь–який з них. Візьмемо перший: $\boldsymbol{v}_2 = (1,1,1)$. Перший стовпчик матриці A є образом вектора $\boldsymbol{e}_1$ стандартної бази. Тому беремо $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$.

З діаграми також видно, що в якості $\boldsymbol{v}_1$ можна брати довільний вектор з $\mathrm{Ker}\,\psi$, який не пропорційний $\boldsymbol{v}_2$. Ядро $\mathrm{Ker}\,\psi$ — це множина розв'язків системи (28). Очевидно, що коли покласти $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, то одержимо розв'язок, не пропорційний $\boldsymbol{v}_2$. Тому беремо $\boldsymbol{v}_1 = (2,1,0)$. Тоді

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

d) Знайдемо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

(до 1-го рядка додали всі інші)

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

(від останнього рядка відняли 1–й)

$$= (2-\lambda)^4 .$$

Маємо одне власне число $\lambda = 2$ кратності 4. Знаходимо дефект матриці B_λ:

$$B_\lambda = A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Отже, маємо $4 - 3 = 1$ клітинку з власним числом $\lambda = 2$. Тому жорданова нормальна форма і діаграма жорданової бази будуть такими:

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{v}_4 \mapsto \boldsymbol{v}_3 \mapsto \boldsymbol{v}_2 \mapsto \boldsymbol{v}_1 \mapsto \mathbf{0}.$$

Як і в попередній задачі, нам зручно шукати вектори $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ як вектори жорданової бази нільпотентного перетворення $\psi = \varphi - \lambda\varepsilon$ з матрицею B_λ. Позаяк діаграма складається з одного ланцюжка, то жорданову базу зручно шукати аналогічно першому способу розв'язання зад. 7.3 b) з попереднього завдання. Для цього знаходимо степені B_λ^2 і B_λ^3 матриці B_λ (зауважимо, що $B_\lambda^4 = 0$, бо клас нільпотентності перетворення ψ дорівнює довжині ланцюжка, тобто 4):

$$B_\lambda^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі вибираємо довільний ненульовий стовпчик (наприклад, перший) матриці B_λ^3. Отримуємо вектор $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 0, 0)$. Тоді в якості $\boldsymbol{v}_4$ можна брати перший вектор $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$ стандартної бази, а в якості $\boldsymbol{v}_3$ і $\boldsymbol{v}_2$ — перші стовпчики матриць B_λ і B_λ^2 відповідно: $\boldsymbol{v}_3 = (1, 0, 0, -1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 0, -1, 0)$. Тому

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

е) Знайдемо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

(від 1-го рядка відняли 2-й, а від 4-го — 3-й)

$$= (3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 & -1 \\ 6 & -5 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

(від 2-го стовпчика відняли 1-й, а від 3-го — 4-й)

$$= (3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(3-\lambda)^3(2+\lambda).$$

Маємо власне число $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$ кратності 3 і власне число $\lambda_4 = -2$ кратності 1. Оскільки кратність λ_1 дорівнює 3, то щоб знайти кількість жорданових клітинок з цим числом, досить знайти дефект матриці B_{λ_1}:

$$B_{\lambda_1} = A - 3E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Ранг матриці $A-3E$ дорівнює 2. Отже, ЖНФ містить $4-2=2$ клітинки з власним числом λ_1 (порядки цих клітинок можуть бути лише 1 та 2), та одну клітинку порядку 1 з власним числом λ_4. Тому J_A та діаграма жорданової бази будуть такими:

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{r} \boldsymbol{v}_2 \mapsto \boldsymbol{v}_1 \mapsto \mathbf{0}\ , \\ \boldsymbol{v}_3 \mapsto \mathbf{0}\ , \\ \boldsymbol{v}_4 \mapsto \mathbf{0}\ . \end{array}$$

Вектори $\boldsymbol{v}_1$ та $\boldsymbol{v}_3$ складають базу ядра перетворення $\varphi - \lambda_1\varepsilon$, тобто фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь з матрицею B_{λ_1}, причому для вектора $\boldsymbol{v}_1$ повинен існувати прообраз. З (29) випливає, що однорідна система з матрицею B_{λ_1} зводиться до вигляду

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & -2x_3 - x_4 \end{array}\ . \tag{30}$$

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд $(\alpha, -2\alpha-\beta, \alpha, \beta)$. Щоб отримати вектор $\boldsymbol{v}_1$, значення параметрів α і β треба вибрати так, щоб система

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2\alpha-\beta \\ 6 & 1 & -4 & 1 & \alpha \\ -6 & -1 & 4 & -1 & \beta \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 5 & 10 & 5 & 11\alpha+6\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta \end{array}\right) \tag{31}$$

була сумісною. Очевидно, це буде при $\alpha = -\beta$. Вибравши $\alpha = 1$, $\beta = -1$, отримуємо: $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 1, -1)$. Вектор $\boldsymbol{v}_2$ — прообраз $\boldsymbol{v}_1$ — треба шукати, як частковий розв'язок системи (31) при вибраних значеннях параметрів α і β. Поклавши $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, отримуємо: $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 0, 0)$.

В якості $\boldsymbol{v}_3$ можна взяти будь–який розв'язок системи (30), не пропорційний вектору $\boldsymbol{v}_1$. Поклавши, наприклад, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, отримуємо: $\boldsymbol{v}_3 = (1, -2, 1, 0)$. мо $\boldsymbol{v}_3 = (1, -2, 1, 0)$.

Залишилося знайти вектор $\boldsymbol{v}_4$ — власний вектор, що відповідає власному числу λ_4 :

$$\big(A+2E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Надамо вільній змінній x_4 значення $x_4 = 1$. Тоді $\boldsymbol{v}_4 = (0, 0, -1, 1)$.

Отже,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

f) Знайдемо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1-\lambda & -2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1-\lambda & 1 & -\lambda & 1+\lambda & 1+\lambda \\ -1-\lambda & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

(до 1-го стовпчика додали 2-й, 3-й і 4-й; крім того, від 4-го і 5-го стовпчиків відняли 3-й)

$$= (1+\lambda)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1+\lambda)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

(до 3-го стовпчика додали 1-й і 5-й)

$$= (1+\lambda)^3 \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^3 \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^5 .$$

Отже, маємо власне число $\lambda = -1$ кратності 5. Обчислимо ранг матриці B_λ:

$$B_\lambda = A + E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (32)$$

Таким чином, ранг дорівнює 2 і ЖНФ містить $5 - 2 = 3$ клітинки з власним числом $\lambda = -1$. Тому для ЖНФ маємо два можливі варіанти: або $J_A = J_3(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1)$, або $J_A = J_2(\lambda_1) \oplus J_2(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1)$.

Щоб вибрати правильний варіант, обчислимо ранг матриці B_λ^2:

$$B_\lambda^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг B_λ^2 дорівнює 1, а тому ЖНФ матриці A містить

$$N(1, \lambda) = r_0 - 2r_1 + r_2 = 5 - 2 \cdot 2 + 1 = 2$$

клітинок порядку 1. Отже, жорданова нормальна форма J_A та діаграма жорданової бази мають вигляд:

$$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{r} \boldsymbol{v}_3 \mapsto \boldsymbol{v}_2 \mapsto \boldsymbol{v}_1 \mapsto \mathbf{0}\,, \\ \boldsymbol{v}_4 \mapsto \mathbf{0}\,, \\ \boldsymbol{v}_5 \mapsto \mathbf{0}\,. \end{array}$$

Нам знову зручно шукати вектори $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_5$ як вектори жорданової бази нільпотентного перетворення $\psi = \varphi - \lambda\varepsilon$ з матрицею B_λ. Зробимо це двома способами.

I-й спосіб. Діаграма жорданової бази містить один довгий ланцюжок довжини 3. Тому в якості $\boldsymbol{v}_1$ вибираємо довільний ненульовий стовпчик матриці B_λ^2. Наприклад, останній: $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0, 1, 1)$. Тоді в якості $\boldsymbol{v}_3$ беремо останній вектор стандартної бази: $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$, а в якості $\boldsymbol{v}_2$ — останній стовпчик матриці B_λ, тобто $\boldsymbol{v}_2 = (1, 0, 1, 1, 1)$.

З діаграми видно, що вектори $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_4$, $\boldsymbol{v}_5$ ланцюжкової бази утворюють базу ядра перетворення ψ, тобто фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь з матрицею B_λ. З (32) видно, що вільним змінними можна вибрати x_1, x_4, x_5, після чого загальний розв'язок матиме вигляд

$$(\alpha, \alpha, 2\alpha - \beta - \gamma, \beta, \gamma)\,. \tag{33}$$

Для вектора $\boldsymbol{v}_1$ значення параметрів дорівнюють відповідно $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$. Для $\boldsymbol{v}_4$ і $\boldsymbol{v}_5$ їх треба вибрати так, щоб система $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_4$, $\boldsymbol{v}_5$ була лінійно незалежною. Це можна зробити, наприклад, так:

α	β	γ	
1	0	0	для $\boldsymbol{v}_4$,
0	1	0	для $\boldsymbol{v}_5$,

Тоді матимемо: $\boldsymbol{v}_4 = (1, 1, 2, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}_5 = (0, 0, -1, 1, 0)$. Тому

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II-й спосіб. Вектори $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_4$, $\boldsymbol{v}_5$ складають базу ядра перетворення ψ. Тому кожен з них одержується із загального розв'язку (33) конкретним вибором параметрів. Однак ці вектори не рівноправні: якщо на $\boldsymbol{v}_4$ і $\boldsymbol{v}_5$ жодних додаткових обмежень нема, то $\boldsymbol{v}_1$ мусить мати прообраз — вектор $\boldsymbol{v}_3$ — при перетворенні ψ^2. Тому вектор $\boldsymbol{v}_3$ шукаємо як частковий розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь, основна матриця якої збігається з матрицею B_λ^2, а стовпчик вільних членів має вигляд (33):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha - \beta - \gamma \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & \beta \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & \gamma \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - \gamma \end{array}\right).$$

Система буде сумісною тоді і тільки тоді, коли $\alpha = \beta = \gamma$. Покладемо $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ і отримаємо: $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0, 1, 1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0, 1, 0, 0, 0)$.

Вектор $\boldsymbol{v}_2$ є образом вектора $\boldsymbol{v}_3$ під дією перетворення ψ. Оскільки $\boldsymbol{v}_3$ збігається з вектором $\boldsymbol{e}_2$ стандартної бази, то $\boldsymbol{v}_2$ є другим стовпчиком матриці B_λ: $\boldsymbol{v}_2 = (0, -1, 1, 0, 0)$.

Оскільки вектор $\boldsymbol{v}_1$ вийшов таким же, як і при першому способі, то лінійно незалежні з ним вектори $\boldsymbol{v}_4$ та $\boldsymbol{v}_5$ з бази ядра перетворення ψ можна вибирати так само: $\boldsymbol{v}_4 = (1, 1, 2, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}_5 = (0, 0, -1, 1, 0)$. Отже,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Задача 4. *Доведіть, що кожну квадратну комплексну матрицю A можна подати у вигляді $A = A_{\mathrm{diag}} + A_{\mathrm{nilp}}$, де A_{diag} — діагоналізовна, а A_{nilp} — нільпотентна, причому A_{diag} і A_{nilp} комутують.*

Розв'язання. Легко вказати такий розклад для жорданової клітинки: $J_k(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda) + J_k(0)$, де матриця $J_k(\lambda)_{\mathrm{diag}} = \mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$ — діагоналізовна, бо діагональна, а $J_k(\lambda)_{\mathrm{nilp}} = J_k(0)$ — нільпотентна, бо є клітинкою Жордана з власним числом нуль. Звідси для довільної жорданової матриці $J = J_{k_1}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus J_{k_s}(\lambda_s)$ отримуємо: $J = (\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{diag}(\lambda_s, \dots, \lambda_s)) + (J_{k_1}(0) \oplus \dots \oplus J_{k_s}(0))$, де матриця $J_{\mathrm{diag}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{diag}(\lambda_s, \dots, \lambda_s)$ є діагоналізовною як діагональна, а матриця $J_{\mathrm{nilp}} = J_{k_1}(0) \oplus \dots \oplus J_{k_s}(0)$ — нільпотентною як кронекерівська сума нільпотентних жорданових клітинок. Легко бачити, що матриці J_{diag} та J_{nilp} комутують: $J_{\mathrm{diag}} \cdot J_{\mathrm{nilp}} = J_{\mathrm{nilp}} \cdot J_{\mathrm{diag}}$.

Нехай тепер J — жорданова нормальна форма матриці A, а T — матриця переходу до жорданової бази, тобто $J = T^{-1}AT$. Тоді згідно щойно сказаного $J = J_{\mathrm{diag}} + J_{\mathrm{nilp}}$ і

$$A = TJT^{-1} = TJ_{\mathrm{diag}}T^{-1} + TJ_{\mathrm{nilp}}T^{-1} = A_{\mathrm{diag}} + A_{\mathrm{nilp}},$$

де $A_{\mathrm{diag}} = TJ_{\mathrm{diag}}T^{-1}$ і $A_{\mathrm{nilp}} = TJ_{\mathrm{nilp}}T^{-1}$. Матриця A_{diag} є діагоналізовною, бо її жорданова нормальна форма — J_{diag} — є діагональною матрицею, а матриця A_{nilp} — нільпотентною, бо її жорданова нормальна форма містить лише нільпотентні жорданові клітинки. Крім того,

$$A_{\mathrm{diag}} \cdot A_{\mathrm{nilp}} = (TJ_{\mathrm{diag}}T^{-1}) \cdot (TJ_{\mathrm{nilp}}T^{-1}) = TJ_{\mathrm{diag}} \cdot J_{\mathrm{nilp}}T^{-1} =$$

$$= TJ_{\mathrm{nilp}} \cdot J_{\mathrm{diag}}T^{-1} = (TJ_{\mathrm{nilp}}T^{-1}) \cdot (TJ_{\mathrm{diag}}T^{-1}) = A_{\mathrm{nilp}} \cdot A_{\mathrm{diag}},$$

тобто матриці A_{diag} та A_{nilp} комутують. □

Основні задачі

5. Доведіть, що жорданова нормальна форма матриці $A+\alpha E$ дорівнює $J_A+\alpha E$, де J_A — жорданова нормальна форма матриці A.

6. Знайдіть жорданову нормальну форму матриці $J_n^2(a)$.

7. Знайдіть жорданову нормальну форму матриці $J_n^k(a)$, якщо $a\neq 0$.

8. Знаючи жорданову нормальну форму матриці A, знайдіть ЖНФ матриці a) A^2, b) A^{-1} (A — невироджена).

9. Що можна сказати про жорданову нормальну форму матриці A, якщо матриці A і A^{-1} — подібні?

10. Знайдіть жорданові нормальні форми матриць:

a) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -23 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$,

g) $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, i) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

11. Знайдіть жорданові нормальні форми матриць:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & 7 & 9 & 14 \\ 0 & 5 & 0 & 8 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 12 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 5 & 7 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

12. Знайдіть жорданову нормальну форму $J(A)$ і матрицю переходу T до жорданової бази для матриці A:

a) $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

13. Знайдіть жорданову нормальну форму $J(A)$ і матрицю переходу T до жорданової бази для матриці A:

a) $\begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 47 \\ 0 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & 47 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

g) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

i) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \\ 15 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, j) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

k) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & 15 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, l) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

14. Знайдіть жорданову нормальну форму $J(A)$ і матрицю переходу T до жорданової бази для матриці A:

a) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 8 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

15. З'ясуйте, чи є серед матриць A, B і C подібні:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -8 & 12 & -6 \\ -10 & 18 & -10 \\ -12 & 24 & -14 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -2 & 16 & 12 \\ 4 & -28 & -20 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -12 & 8 & 20 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 59 & -63 & 52 \\ -147 & 159 & -132 \\ -244 & 263 & -219 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 59 & -63 & 52 \\ -147 & 159 & -132 \\ -244 & 263 & -218 \end{pmatrix}$.

16. Знайдіть жорданову нормальну форму матриці $A = (a_{ij})$ порядку n, де $a_{ij} = \begin{cases} a, & \text{якщо } i = j; \\ 1, & \text{якщо } j = i + 2; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$

17. Доведіть, що коли лінійне перетворення φ має скінченний порядок (тобто $\varphi^k = \varepsilon$ для деякого натурального k), то воно діагоналізовне.

18. Знайдіть жорданову нормальну форму лінійного перетворення $f(x,y) \mapsto f(x+1, y+1)$ у просторі:

a) $\mathbb{R}_2[x,y]$ всіх многочленів від x і y степеня ≤ 2;

b) $\mathbb{R}^{(2)}[x,y]$ всіх многочленів від x і y, степінь яких за кожною змінною не перевищує 2.

Додаткові задачі

19. Знайдіть нормальну жорданову форму матриці лінійного перетворення $f(x) \mapsto f(ax+b)$ $(a \neq 0)$ простору $\mathbb{R}_n[x]$.

20*. Знайдіть жорданову нормальну форму лінійного перетворення $f(x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$ у просторі:

a) $\mathbb{R}_n[x,y]$ всіх многочленів від x і y степеня $\leq n$;

b) у просторі $\mathbb{R}^{(n)}[x,y]$ всіх многочленів від x і y, степінь яких за кожною змінною не перевищує n.

21. Доведіть, що в n–вимірному комплексному векторному просторі множина всіх лінійних перетворень, перестановочних з даним перетворенням φ, утворює векторний простір розмірності $\geq n$.

22*. Нехай U — множина всіх лінійних перетворень комплексного векторного простору, які перестановочні з даним перетворенням φ. Доведіть, що коли перетворення перестановочне з кожним перетворенням з U, то воно є многочленом від φ.

23*. a) Доведіть, що взаємно транспоновані матриці A і $A^\top$ завжди подібні. b) Доведіть, що матрицю T таку, що $A^\top = T^{-1}AT$, можна вибрати симетричною.

24*. Доведіть, що довільну квадратну матрицю A можна зобразити у вигляді добутку двох симетричних матриць, одна з яких є невиродженою.

25. Доведіть, що комплексна матриця, всі власні числа якої є різними, подібна супроводжуючій матриці

$$\begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

свого характеристичного многочлена

$$(-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0).$$

Домашнє завдання

26. Матриця A відрізняється від жорданової клітинки $J_n(1)$ тим, що на місці $(n,1)$ стоїть число $a > 0$. Знайдіть жорданову нормальну форму матриці A.

27. У жордановій матриці J усі одинички поза діагоналлю замінили числом $a \neq 0$. Доведіть, що нова матриця подібна матриці J.

28. Знайдіть жорданові нормальні форми матриць:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$,

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

29. Знайдіть жорданову нормальну форму $J(A)$ і матрицю переходу T до жорданової бази для матриці A:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

30. Що можна сказати про жорданову нормальну форму матриці лінійного перетворення φ комплексного векторного простору, якщо $\varphi^2 = \varphi^3$?

Література. [1], с. 205–210; [2], с. 242–243; [4], с. 138–143; [5], с. 379–393; [8], с. 86–92; [9], с. 379–387; [10], с. 42–44; [12], с. 320–330, 339–341; [13], с. 167–172.

Заняття 9. Мінімальний многочлен та функції від матриць

Необхідні поняття. Ненульовий многочлен $f(\lambda) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \in P[\lambda]$ називається *анулюючим многочленом* перетворення φ простору V над полем P, якщо

$$f(\varphi) = a_0\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \dots + a_{n-1}\varphi + a_n\varepsilon = \mathcal{O}\,.$$

Аналогічно визначається анулюючий многочлен квадратної матриці.

Мінімальним многочленом $m_\varphi(\lambda)$ лінійного перетворення φ називається нормований анулюючий многочлен цього перетворення найменшого можливого степеня.

Значення функції $f(x)$ від клітинно–діагональної матриці
$A = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix}$ дорівнює $f(A) = \begin{pmatrix} f(B_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(B_k) \end{pmatrix}$.

Значення аналітичної функції $f(x)$ від жорданової клітинки $J_k(\lambda)$ дорівнює

$$f(J_k(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(k-3)}(\lambda)}{(k-3)!} & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Необхідні твердження. **1.** Многочлен $f(\lambda)$ є анулюючим многочленом перетворення φ простору V тоді й лише тоді, коли він є анулюючим многочленом матриці $[\varphi]$ цього перетворення в деякій базі (в довільній базі).

2. Теорема Гамільтона–Келі. Характеристичний многочлен лінійного перетворення φ (квадратної матриці A) завжди є анулюючим многочленом цього перетворення (цієї матриці).

3. Властивості мінімального многочлена:

a) Мінімальний многочлен $m_\varphi(\lambda)$ лінійного перетворення φ визначений однозначно.

b) Довільний анулюючий многочлен перетворення φ (зокрема, і характеристичний многочлен $\chi_\varphi(\lambda)$) ділиться на його мінімальний многочлен $m_\varphi(\lambda)$.

c) Кожне власне число перетворення φ є коренем його мінімального многочлена.

d) Мінімальний многочлен $m_{J_m(\lambda_0)}(\lambda)$ жорданової клітинки $J_m(\lambda_0)$ дорівнює $(\lambda_0 - \lambda)^m$.

f) Нехай $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ — розклад простору V у пряму суму інваріантних підпросторів, $\varphi_i = \varphi|_{V_i}$ — обмеження перетворення φ на підпростір V_i і $m_{\varphi_i}(\lambda)$ — мінімальний многочлен перетворення φ_i. Тоді $m_\varphi(\lambda) = \text{НСК}(m_{\varphi_1}(\lambda), \dots, m_{\varphi_k}(\lambda))$.

4. Нехай A — квадратна матриця, J_A — її ЖНФ, T — матриця переходу до жорданової бази. Тоді для аналітичної функції f

$$f(A) = Tf(J_A)T^{-1}\,.$$

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Знайдіть мінімальний многочлен лінійного перетворення $\varphi : \boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$ звичайного тривимірного простору V ($\boldsymbol{a}$ — фіксований ненульовий вектор).*

Розв'язання. У площині, перпендикулярній до $\boldsymbol{a}$, виберемо довільні неколінеарні вектори $\boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{c}$. Тоді трійка некомпланарних векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ є базою простору V. У цій базі матриця перетворення φ має вигляд

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{a}|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_1(|\boldsymbol{a}|^2) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0)\,.$$

Тому мінімальний многочлен $m_\varphi(\lambda) = (\lambda - |\boldsymbol{a}|^2) \cdot \lambda = \lambda^2 - |\boldsymbol{a}|^2\lambda\,.$ □

Задача 2. *Розв'яжіть рівняння* $X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Знайдемо для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ її характеристичний многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2.$$

Оскільки ранг матриці $A-4E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ дорівнює 1, то ЖНФ матриці A має вигляд $J_A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Перетворення $\varphi - 4\varepsilon$ на векторах $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ жорданової бази діє наступним чином:

$$\boldsymbol{v}_2 \mapsto \boldsymbol{v}_1 \mapsto \mathbf{0}.$$

З вигляду матриці $A-4E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ випливає, що в якості жорданової бази можна взяти $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_2 = (0,1)$, $\boldsymbol{v}_1 = (1,1)$. Тоді матрицею переходу до жорданової бази буде матриця $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Початкове рівняння буде рівносильне рівнянню

$$T^{-1}XT \cdot T^{-1}XT = T^{-1}AT = J_A\,,$$

яке після заміни $Y = T^{-1}XT$ набуває вигляду $Y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Оскільки значення функції $f(x)$ від жорданової клітинки $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ дорівнює $\begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$, а нам потрібна функція $f(x) = \pm\sqrt{x}$, то $Y = \pm\begin{pmatrix} 2 & 1/4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Звідси

$$X = TYT^{-1} = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1/4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Задача 3. *Використовуючи* ЖНФ, *обчисліть*:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^{100}$; b) $\exp\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. a) Знайдемо ЖНФ J_A матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ і матрицю T переходу до жорданової бази.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2-\lambda & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda).$$

Оскільки маємо два різні власні числа $\lambda_1 = 2$ і $\lambda_2 = 3$, то $J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Далі для кожного з власних чисел шукаємо відповідний власний вектор:

$$\big(A - 2E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Тому для $\lambda_1 = 2$ одним з власних векторів є $(1, 1)$.

$$\big(A - 3E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тому для $\lambda_2 = 3$ одним з власних векторів є $(2, 3)$.

Отже, $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Оскільки $J_A = T^{-1}AT$, то $A = TJ_AT^{-1}$ і

$$A^{100} = (TJ_AT^{-1})^{100} = TJ_A^{100}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{100} - 2 \cdot 3^{100} & 2 \cdot 3^{100} - 2 \cdot 2^{100} \\ 3 \cdot 2^{100} - 3 \cdot 3^{100} & 3 \cdot 3^{100} - 2 \cdot 2^{100} \end{pmatrix}.$$

b) Як і в попередньому випадку, шукаємо ЖНФ J_A матриці $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ і матрицю T переходу до жорданової бази.

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -5 \\ 6 & 4-\lambda & -9 \\ 5 & 3 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -5 \\ 1-\lambda & 4-\lambda & -9 \\ 1-\lambda & 3 & -7-\lambda \end{vmatrix} =$$

(усі стовпчики додали до першого)

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & 4-\lambda & -9 \\ 1 & 3 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big(4 - (2-\lambda)(2+\lambda)\big) = \lambda^2(1-\lambda).$$

Простому кореню $\lambda_1 = 1$ відповідає клітинка $J_1(1)$. Щоб знайти кількість клітинок з власним числом $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, шукаємо ранг матриці

$A - 0 \cdot E = A$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & -9 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $\operatorname{rank} A = 2$ і $\operatorname{def} A = 3 - 2 = 1$. Тому ЖНФ матриці A містить єдину клітинку $J_2(0)$ з власним числом 0 і має вигляд

$$J_A = J_1(1) \oplus J_2(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектори $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ жорданової бази шукаємо з рівнянь $(A - E)\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$, $A\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$, $A\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -5 & 0 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 5 & 3 & -8 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

тому $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 1)$;

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -9 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

тому $\boldsymbol{v}_2 = (1, 3, 2)$;

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & -5 & 1 \\ 6 & 4 & -9 & 3 \\ 5 & 3 & -7 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right),$$

тому $\boldsymbol{v}_3 = (0,3,1)$. Отже, матриця переходу до жорданової бази має вигляд

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $(e^x)' = e^x$, то

$$\exp(J_A) = \begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^0 & e^0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Позаяк $J_A = T^{-1}AT$, то $\exp(J_A) = T^{-1}\exp(A)T$, звідки $\exp(A) = T\exp(J_A)T^{-1}$. Знаходимо

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

і завершуємо обчислення:

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3e-1 & e & -3e+1 \\ 3e & e+3 & -3e-3 \\ 3e-1 & e+1 & -3e \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Задача 4. *Доведіть, що для кожного невиродженого лінійного перетворення φ простору V знайдеться такий многочлен $f(x)$ степеня $< \dim V$, що $\varphi^{-1} = f(\varphi)$.*

Розв'язання. Перетворення буде невиродженим тоді й лише тоді, коли серед його власних чисел немає 0. Оскільки власні числа — це не що інше, як корені характеристичного многочлена $\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$, то в цьому випадку $a_n \neq 0$. За теоремою Гамільтона–Келі $\chi_A(\varphi) = (-1)^n\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \dots + a_{n-1}\varphi + a_n\varepsilon = \mathcal{O}$. Отже,

$$\varphi\big((-1)^{n-1}\varphi^{n-1} - a_1\varphi^{n-2} - \dots - a_{n-1}\varepsilon\big) = a_n\varepsilon\,.$$

Тому $$\varphi^{-1} = \frac{1}{a_n}\big((-1)^{n-1}\varphi^{n-1} - a_1\varphi^{n-2} - \dots - a_{n-1}\varepsilon\big). \qquad \square$$

Основні задачі

5. Наведіть приклад двох матриць, які мають однакові характеристичні й однакові мінімальні многочлени, але не є подібними.

6. Знайдіть необхідну й достатню умову для того, щоб мінімальний і характеристичний многочлени комплексної матриці збігалися.

7. Знайдіть мінімальний многочлен a) тотожного перетворення, b) нульового перетворення, c) проектування на нетривіальний підпростір, d) відбиття відносно підпростору (див. зад. 4.8).

8. Розв'яжіть рівняння $X^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

9. Доведіть, що для кожної квадратної матриці A виконується рівність

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A.$$

10. Доведіть, що для матриці порядку ≥ 2 і рангу 1 мінімальний многочлен має степінь 2.

11. Для яких значень p існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}^n$?

12. Використовуючи ЖНФ, обчисліть

a) $\exp \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, b) $\ln \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

13. a) Доведіть, що для комутуючих матриць A та B виконується рівність: $e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$.

b) Наведіть приклад таких матриць A та B порядку 2, для яких $e^A \cdot e^B \neq e^B \cdot e^A$.

14. Доведіть, що для комутуючих матриць A та B виконуються рівності:

a) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$;

b) $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$.

15. Доведіть, що для довільної квадратної матриці A виконується рівність $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

16. Доведіть, що для довільної невиродженої комплексної матриці A і кожного натурального числа k рівняння $X^k = A$ має розв'язок.

Додаткові задачі

17. Знайдіть усі матриці, які комутують з жордановою клітинкою $J_n(\lambda)$.

18. Нехай $\lambda \neq \mu$. Розв'яжіть матричне рівняння $X \cdot J_m(\lambda) = J_k(\mu) \cdot X$.

19. Доведіть, що коли мінімальний многочлен лінійного перетворення φ збігається з характеристичним, то кожне перетворення, яке перестановочне з φ, буде многочленом від перетворення φ.

20. Нехай φ — лінійне перетворення простору V. Ненульовий многочлен f називається *анулюючим для вектора* $\boldsymbol{v} \in V$, якщо $f(\varphi)(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$. Многочлен найменшого степеня, який анулює вектор $\boldsymbol{v}$, називається *мінімальним* многочленом цього вектора і позначається $m_{\varphi,\boldsymbol{v}}(x)$. Доведіть, що:

a) для кожного вектора існує анулюючий многочлен степеня, що не перевищує розмірності простору;

b) мінімальний многочлен вектора визначений однозначно з точністю до скалярного множника;

c) кожен анулюючий многочлен вектора ділиться на його мінімальний многочлен;

d) мінімальний многочлен перетворення φ ділиться на мінімальний многочлен кожного вектора.

21. Доведіть, що: a) добуток $m_{\varphi,\boldsymbol{v}}(x) \cdot m_{\varphi,\boldsymbol{u}}(x)$ ділиться на $m_{\varphi,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}}(x)$;

b) якщо $m_{\varphi,\boldsymbol{v}}(x)$ та $m_{\varphi,\boldsymbol{u}}(x)$ взаємно прості, то

$$m_{\varphi,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}}(x) = m_{\varphi,\boldsymbol{v}}(x) \cdot m_{\varphi,\boldsymbol{u}}(x)\,.$$

22. Доведіть, що для довільної бази $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ простору V :

a) многочлен $m_{\varphi,\boldsymbol{e}_1}(x) \cdots m_{\varphi,\boldsymbol{e}_n}(x)$ є анулюючим для φ;

b) найменше спільне кратне многочленів $m_{\varphi,\boldsymbol{e}_1}(x), \ldots, m_{\varphi,\boldsymbol{e}_n}(x)$ є мінімальним многочленом перетворення φ.

23. Доведіть, що для кожного лінійного перетворення φ простору V існує вектор $\boldsymbol{v} \in V$, мінімальний многочлен якого збігається з мінімальним многочленом перетворення φ.

24.* Нехай $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ та $\chi_A(x)$ — характеристичний многочлен матриці A. Доведіть, що визначник матриці $f(A)$ дорівнює результанту многочленів $f(x)$ і $\chi_A(x)$.

25. Доведіть, що для довільних квадратної матриці A і невиродженої матриці C однакових порядків виконується рівність $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^{A}C$.

Домашнє завдання

26. Знайдіть мінімальний многочлен діагональної матриці $\operatorname{diag}(a_1, \ldots . a_n)$ з попарно різними елементами на діагоналі.

27. Доведіть, що певний степінь мінімального многочлена матриці ділиться на характеристичний многочлен цієї матриці.

28. Знайдіть мінімальний многочлен матриці:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \ \text{b)} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

29. Використовуючи ЖНФ, обчисліть:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}^{64}; \ \text{b)} \exp \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \ \text{c)} \sin \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}.$$

30. Доведіть, що для кожної квадратної матриці A виконується рівність

$$\sin 2A = 2 \sin A \cdot \cos A\,.$$

Література. [1], с. 210–214; [2], с. 244–253; [5], с. 393–399; [9], с. 387–391; [10], с. 30–38; [13], с. 196–204.

Заняття 10. Інваріантні та кореневі підпростори

Необхідні поняття. Підпростір $U \subseteq V$ називається *інваріантним* відносно лінійного перетворення $\varphi : V \to V$ (або *φ–інваріантним*), якщо $\varphi(U) \subseteq U$, тобто $\varphi(\boldsymbol{u}) \in U$ для кожного вектора $\boldsymbol{u} \in U$.

Кореневим підпростором, що відповідає числу λ, називається множина $V_\varphi(\lambda) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \text{існує таке натуральне } k, \text{ що } (\varphi - \lambda\varepsilon)^k(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$.

База $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ простору V називається *узгодженою* з k–вимірним φ–інваріантним підпростором W, якщо перші k векторів $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ утворюють базу підпростору W.

Необхідні твердження. **1.** Ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ і образ $\operatorname{Im}\varphi$ лінійного перетворення $\varphi : V \to V$ є інваріантними підпросторами.

2. Перетин і сума інваріантних підпросторів також є інваріантними підпросторами.

3. Інваріантний підпростір відносно лінійного перетворення φ залишається інваріантним і відносно кожного многочлена від φ.

4. Кореневий підпростір $V_\varphi(\lambda)$ є φ–інваріантним.

5. Кореневий підпростір $V_\varphi(\lambda)$ є ненульовим тоді й лише тоді, коли λ — власне число перетворення φ.

6. Якщо $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ — база підпростору U, інваріантного відносно лінійного перетворення φ простору V, а $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — її розширення до бази простору V, то в цій базі матриця перетворення φ має вигляд $[\varphi] = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathcal{O} & C \end{pmatrix}$. Матриця A є матрицею обмеження $\varphi|_U$ перетворення φ на підпростір U в базі $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$.

7. Нехай простір V розкладається в пряму суму $V = U_1 \oplus U_2$ φ–інваріантних підпросторів U_1 та U_2 з базами $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ та $\boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ відповідно. Тоді в базі $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ матриця перетворення φ має вигляд $\begin{pmatrix} A & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & C \end{pmatrix}$. Матриця A є матрицею обмеження $\varphi|_{U_1}$ перетворення φ на підпростір U_1, а матриця C — матрицею обмеження $\varphi|_{U_2}$ перетворення φ на підпростір U_2 в базах $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ та $\boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ відповідно.

8. Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — усі попарно різні власні числа перетворення φ простору V. Тоді V розкладається в пряму суму $V = V_\varphi(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V_\varphi(\lambda_k)$ відповідних кореневих підпросторів.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Нехай φ — лінійне перетворення простору V. Доведіть, що кожен підпростір, який містить образ* $\operatorname{Im}\varphi$, *буде інваріантним відносно φ.*

Розв'язання. Нехай $U \supseteq \operatorname{Im}\varphi$. Для довільного вектора $\boldsymbol{v} \in U$ маємо $\varphi(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im}\varphi$, а тому $\varphi(\boldsymbol{v}) \in U$. Отже, U — інваріантний підпростір. $\square$

Задача 2. *Доведіть, що коли перетворення φ є невиродженим, то перетворення φ та φ^{-1} мають одні й ті ж інваріантні підпростори.*

Розв'язання. Нехай U — інваріантний підпростір перетворення φ. Тоді $\varphi(U) \subseteq U$. Позаяк перетворення φ — невироджене, то $\dim\varphi(U) = \dim U$.

Разом з попереднім включенням це дає $\varphi(U) = U$. Звідси отримуємо:

$$\varphi^{-1}(U) = \varphi^{-1}(\varphi(U)) = (\varphi^{-1}\varphi)(U) = \varepsilon(U) = U\,.$$

Отже, U є інваріантним підпростором перетворення φ^{-1}. Оскільки $\varphi = (\varphi^{-1})^{-1}$, то так само доводиться, що кожний інваріантний підпростір перетворення φ^{-1} буде інваріантним і відносно φ. Тому φ і φ^{-1} мають одні й ті ж інваріантні підпростори. $\square$

Задача 3. *Знайдіть усі інваріантні підпростори лінійного перетворення $\varphi : \boldsymbol{v} \mapsto [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}]$ звичайного тривимірного простору V (вектор $\boldsymbol{a}$ — фіксований ненульовий).*

Розв'язання. З означення векторного добутку випливає, що породжена вектором $\boldsymbol{a}$ пряма L і перпендикулярна до $\boldsymbol{a}$ площина U будуть інваріантними підпросторами. Покажемо, що інших нетривіальних інваріантних підпросторів нема.

Нехай W — ненульовий інваріантний підпростір. Візьмемо в W довільний ненульовий вектор $\boldsymbol{v}$. Якщо $\varphi^2(\boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}$, то кожен з векторів $\varphi(\boldsymbol{v})$ і $\varphi^2(\boldsymbol{v})$ буде перпендикулярним до $\boldsymbol{a}$. Крім того, $\varphi(\boldsymbol{v})$ та $\varphi^2(\boldsymbol{v})$ також перпендикулярні. Тому $\varphi(\boldsymbol{v})$ і $\varphi^2(\boldsymbol{v})$ породжують площину U. Якщо при цьому $\boldsymbol{v} \notin U$, то підпростір W містить три некомпланарні вектори $\boldsymbol{v}$, $\varphi(\boldsymbol{v})$ і $\varphi^2(\boldsymbol{v})$, а тому $W = V$.

Припустимо тепер, що $\varphi^2(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ для кожного $\boldsymbol{v} \in W$. Тоді $\varphi(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$, бо в противному разі ненульовий вектор $\varphi(\boldsymbol{v})$ є перпендикулярним до $\boldsymbol{a}$ та $\varphi^2(\boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}$. А це буде тоді й лише тоді, коли $\boldsymbol{v}$ і $\boldsymbol{a}$ колінеарні, тобто коли $\boldsymbol{v} \in L$.

Таким чином, якщо $\varphi^2(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ для всіх $\boldsymbol{v} \in W$, то $W = L$. В противному разі $W = U$ або $W = V$. $\square$

Задача 4. *Знайдіть власні числа і кореневі підпростори лінійного перетворення, заданого матрицею* $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Щоб знайти власні числа, обчислюємо характеристичний многочлен матриці A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 2 \\ -5 & 7-\lambda & -5 \\ -6 & 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{2-й стовпчик} \\ \text{додаємо} \\ \text{до 1-го й 3-го}}}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ 2-\lambda & 7-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 7-\lambda & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda).$$

Таким чином, маємо два кореневі підпростори: $V_A(2)$ та $V_A(3)$. Враховуючи кратність коренів, можемо сказати, що кореневий простір $V_A(3)$ — це ядро перетворення з матрицею $A-3E$, а кореневий простір $V_A(2)$ — це ядро перетворення з матрицею $(A-2E)^2$. Обчислюємо:

$$A - 3E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -5 & 4 & -5 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix},$$

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -5 & 5 & -5 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}, \quad (A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -5 & 5 & -5 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Як відомо, базою ядра перетворення з матрицею B є фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Шукаємо ці бази для матриць $A-3E$ та $(A-2E)^2$ відповідно:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & -5 & 0 \\ -6 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Фундаментальна система розв'язків складається з одного вектора $(2,-5,-6)$, тому $V_A(3) = \big\langle (2,-5,-6) \big\rangle$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -5 & 5 & -5 & 0 \\ -6 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Фундаментальна система розв'язків складається з векторів $(-1,0,1)$ і $(1,1,0)$. Тому $V_A(2) = \big\langle (-1,0,1), (1,1,0) \big\rangle$. □

Задача 5. *Знайдіть усі підпростори простору* $\mathbb{R}^3$, *інваріантні відносно перетворення з матрицею* $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Щоб знайти власні числа, обчислюємо характеристичний многочлен матриці (наявність двох нулів дозволяє обчислити відповідний визначник "в лоб"):

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -6 & 4 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\lambda^2 + 4 - 6\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4 = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2).$$

Отже, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i$. Оскільки над $\mathbb{R}$ є лише одне власне число 2, причому кратності 1, то маємо лише один одновимірний інваріантний підпростір — той, який породжується відповідним власним вектором. Шукаємо його:

$$(A - 2E \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Тому власним вектором буде $(4, 2, 1)$, а відповідним одновимірним інваріантним підпростором — підпростір $U = \langle (4, 2, 1) \rangle$.

Кожному з двох спряжених між собою комплексних коренів відповідає один і той же двовимірний інваріантний підпростір. Щоб знайти його, перейдемо до поля $\mathbb{C}$ і знайдемо для $\lambda_2 = 1+i$ відповідний власний вектор:

$$(A - (1+i)E \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3-i & -6 & 4 & 0 \\ 1 & -1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-i & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2+2i & 4 & 0 \\ 1 & -1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-i & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-i & 0 \end{array}\right).$$

Власним вектором буде $(2i, 1+i, 1) = (0, 1, 1) + i(2, 1, 0)$. "Дійсна" $(0, 1, 1)$ та "уявна" $(2, 1, 0)$ компоненти цього вектора дають базу відповідного двовимірного інваріантного підпростору $W = \langle (0, 1, 1), (2, 1, 0) \rangle$.

Припустимо, шо існує ще якийсь нетривіальний інваріантний підпростір V. Ми вже показали, що єдиним одновимірним інваріантним підпростором є U. Тому V може бути лише двовимірним. Позаяк $2+2 =$

$4 > 3 = \dim \mathbb{R}^3$, то $V \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$. Але $V \neq W$ і перетин інваріантних підпросторів знову є інваріантним, то лишається лише одна можливість: $V \cap W = U$. Але це також неможливе, бо $U \nsubseteq W$.

Таким чином, маємо лише два нетривіальні інваріантні підпростори — U та W. $\square$

Задача 6. *Знайдіть усі інваріантні підпростори лінійного перетворення φ простору V, якщо в базі $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ його матриця є жордановою клітинкою $J_n(\lambda)$.*

Розв'язання. Нехай U — інваріантний підпростір. Позначимо через k найбільший номер ненульової координати векторів з U і виберемо в U такий вектор $\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{e}_k$, для якого $\alpha_k \neq 0$. Підпростір U буде інваріантним і відносно перетворення $\psi = \varphi - \lambda\varepsilon$, яке на вектори бази діє наступним чином:

$$\boldsymbol{e}_n \mapsto \boldsymbol{e}_{n-1} \mapsto \boldsymbol{e}_{n-2} \mapsto \cdots \mapsto \boldsymbol{e}_2 \mapsto \boldsymbol{e}_1 \mapsto \mathbf{0}.$$

Але тоді підпростору U належатимуть і вектори

$$\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{u}) &= \alpha_2 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{e}_{k-1}, \\
\psi^2(\boldsymbol{u}) &= \alpha_3 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{e}_{k-2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi^{k-2}(\boldsymbol{u}) &= \alpha_{k-1} \boldsymbol{e}_1 + \alpha_k \boldsymbol{e}_2, \\
\psi^{k-1}(\boldsymbol{u}) &= \alpha_k \boldsymbol{e}_1.
\end{aligned}$$

Оскільки $\alpha_k \neq 0$, то рухаючись цими рівностями знизу догори, одержимо, що кожен з векторів $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}_{k-1}$, $\boldsymbol{e}_k$ належить підпростору U, а тому $U \supseteq \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k \rangle$. Але з вибору числа k випливає, що $U \subseteq \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k \rangle$. Отже, $U = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k \rangle$.

З іншого боку, очевидно, що кожен підпростір вигляду $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k \rangle$ буде інваріантним відносно φ. Таким чином, φ має рівно $n+1$ інваріантних підпросторів, а саме: $\{\mathbf{0}\}$, $\langle \boldsymbol{e}_1 \rangle$, $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$, $\ldots$, $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$. $\square$

Задача 7. *Знайдіть усі підпростори, інваріантні відносно лінійного перетворення, заданого матрицею A:*

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \ \text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ \text{c) } A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. a) Спочатку знайдемо жорданову нормальну форму матриці A та жорданову базу. Матриця трикутна, тому її власними числами є $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, а жордановою базою будуть відповідні власні вектори $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, що є фундаментальними системами розв'язків лінійних систем з матрицями

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \text{ та } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

відповідно. Тому маємо:

$$J_A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right),$$

$\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,-2,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (4,-6,1)$. Тоді підпросторами, інваріантними відносно A будуть: одновимірні — $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_2 \rangle$ та $\langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$, двовимірні — $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_2 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$, а також тривіальні — $\{\mathbf{0}\}$ та $\mathbb{C}^3$.

b) Власними числами матриці A є $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$. Знаходимо її жорданову нормальну форму та жорданову базу. Власні вектори шукаємо як фундаментальні системи розв'язків лінійних систем з матрицями

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \text{ та } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

відповідно. Для $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ отримуємо власний вектор $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0)$, а для $\lambda_3 = 1$ — власний вектор $\boldsymbol{v}_3 = (-5,6,2)$. Тоді жорданова форма J_A та діаграма жорданової бази будуть такими:

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{r} \boldsymbol{v}_2 \mapsto \boldsymbol{v}_1 \mapsto \mathbf{0}\ , \\ \boldsymbol{v}_3 \mapsto \mathbf{0}\ . \end{array}$$

Вектор $\boldsymbol{v}_2$ знаходимо як один з розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з матрицею

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Можна взяти, наприклад, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 1, 0)$.

Залишилося зауважити, що оскільки кожному власному числу відповідає лише одна клітина в жордановій нормальній формі, то маємо скінченну кількість інваріантних підпросторів: одновимірні — $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ та $\langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$, двовимірні — $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$ та $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_2 \rangle$ і тривіальні — $\{\mathbf{0}\}$ та $\mathbb{C}^3$.

c) Знаходимо, як і раніше, жорданову нормальну форму та жорданову базу матриці A. Власні числа λ_1, λ_2, λ_3 — це корені характеристичного многочлена

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

Тому $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Власні вектори, що їм відповідають, шукаємо як фундаментальні системи розв'язків відповідних лінійних систем.

$$(A + 2E \,|\, 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Для $\lambda_1 = -2$ в якості власного вектора можна взяти $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 1, 1)$.

$$(A - E \,|\, 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тому для $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ буде два лінійно незалежних власних вектори. Можна взяти, наприклад, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-2, 1, 0)$. Тоді

$$J_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Одновимірні інваріантні підпростори породжуються власними векторами. У нашому випадку це $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ для λ_1 та довільний підпростір вигляду $\langle \alpha \boldsymbol{v}_2 + \beta \boldsymbol{v}_3 \rangle$, де α, β одночасно не дорівнюють нулю, — для $\lambda_2 = \lambda_3$. Але кожен підпростір вигляду $\langle \alpha\beta \boldsymbol{v}_2 + \beta \boldsymbol{v}_3 \rangle$ при $\beta \neq 0$ збігається з підпростором $\langle \alpha \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \rangle$. Тому різними одновимірними інваріантними підпросторами будуть: $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $\langle \alpha \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$ (їх, на відміну від попередніх двох випадків, уже буде нескінченна кількість). Двовимірних інваріантних підпросторів також буде нескінченно багато: $\langle \boldsymbol{v}_2 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \oplus \langle \alpha \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$. І маємо ще два тривіальні підпростори — $\{\mathbf{0}\}$ та $\mathbb{C}^3$. $\square$

Задача 8. *Нехай φ — лінійне перетворення векторного простору V над полем $\mathbb{C}$. Доведіть, що кожний інваріантний підпростір перетворення φ є прямою сумою його перетинів з усіма кореневими підпросторами перетворення φ.*

Розв'язання. За твердженням **8** простір V розкладається в пряму суму $V = V_\varphi(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V_\varphi(\lambda_k)$ кореневих підпросторів. Нехай $U \subseteq V$ — інваріантний підпростір, $U(\lambda_i) := U \cap V_\varphi(\lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$. Потрібно довести, що $U = U(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus U(\lambda_k)$.

Справді, довільний вектор $\boldsymbol{u} \in U$ можна записати у вигляді $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k$, де $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Нехай мінімальний многочлен перетворення φ має вигляд $m_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$. Тоді для довільного i $(1 \le i \le k)$ $(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{m_i}(\boldsymbol{v}_i) = \mathbf{0}$.

Покажемо, що $\boldsymbol{v}_k \in U$. Для цього розглянемо многочлен $g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_{k-1})^{m_{k-1}}$. Тоді для довільного i $(1 \le i \le k-1)$ $g(\varphi)(\boldsymbol{v}_i) = \mathbf{0}$. З іншого боку, з взаємної простоти $g(\lambda)$ і $(\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ випливає існування таких многочленів $p(\lambda)$ і $q(\lambda)$, що

$$p(\lambda)g(\lambda) + q(\lambda)(\lambda - \lambda_k)^{m_k} = 1.$$

Інваріантний підпростір залишається інваріантним і відносно кожного многочлена від φ. Тому

$$\boldsymbol{v}_k = \varepsilon(\boldsymbol{v}_k) = \big(p(\varphi)g(\varphi) + q(\varphi)(\varphi - \lambda_k\varepsilon)^{m_k}\big)(\boldsymbol{v}_k) = p(\varphi)g(\varphi)(\boldsymbol{v}_k) =$$

$$= p(\varphi)\big(\mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} + g(\varphi)(\boldsymbol{v}_k)\big) = p(\varphi)\big(g(\varphi)(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + g(\varphi)(\boldsymbol{v}_{k-1}) + g(\varphi)(\boldsymbol{v}_k)\big) =$$

$$= p(\varphi)\big(g(\varphi)(\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k)\big) = p(\varphi)g(\varphi)(\boldsymbol{u}) \in U.$$

Аналогічно доводиться, що $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1} \in U$. Разом з $\boldsymbol{v}_i \in V(\lambda_i)$ це дає, що $\boldsymbol{v}_i \in U(\lambda_i)$. Отже, $U \subseteq U(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus U(\lambda_k)$.

Зворотне включення очевидне. □

Задача 9. *Доведіть, що для лінійного перетворення φ векторного простору V над полем $\mathbb{C}$ кількість інваріантних підпросторів буде скінченною тоді й лише тоді, коли мінімальний і характеристичний многочлени перетворення φ збігаються.*

Розв'язання. Мінімальний і характеристичний многочлени збігаються тоді й лише тоді, коли ЖНФ перетворення φ для кожного власного числа λ містить лише одну клітинку з цим числом, тобто коли для кожного власного числа λ з точністю до пропорційності є лише один власний вектор.

Необхідність. Нехай $\boldsymbol{v}$ і $\boldsymbol{w}$ — власні вектори з власним числом λ. Тоді будь–яка їх ненульова лінійна комбінація $\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}$ знову буде власним вектором з цим же власним числом. Тому якщо для якогось власного числа λ існує два лінійно незалежні власні вектори $\boldsymbol{v}$ і $\boldsymbol{w}$, то кожний одновимірний підпростір з $\mathcal{L}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ буде інваріантним, і перетворення φ матиме нескінченно багато інваріантних підпросторів.

Достатність. Нехай

$$\chi_\varphi(\lambda) = m_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

і $V_\varphi(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V_\varphi(\lambda_k)$ — розклад простору в пряму суму кореневих підпросторів. Згідно зад. 10.8 кожен інваріантний підпростір U має вигляд $U = U(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus U(\lambda_k)$, де $U(\lambda_i) = U \cap V_\varphi(\lambda_i)$ — інваріантний підпростір $(i = 1, \ldots, k)$. Оскільки $\dim V(\lambda_i) = m_i$, то з розв'язання зад. 10.6 випливає, що доданок $U(\lambda_i)$ можна вибрати рівно $m_i + 1$ способами. Тому маємо рівно $(m_1 + 1) \cdots (m_k + 1)$ інваріантних підпросторів. Зокрема, їх буде скінченна кількість. $\square$

Основні задачі

10. Нехай φ — лінійне перетворення простору V. Доведіть, що кожен підпростір, який міститься в ядрі $\operatorname{Ker}\varphi$, буде інваріантним відносно φ.

11. Доведіть, що характеристичний многочлен обмеження $\varphi|_U$ лінійного перетворення φ на інваріантний підпростір U є дільником характеристичного многочлена перетворення φ.

12. Доведіть, що мінімальний многочлен обмеження $\varphi|_U$ лінійного перетворення φ на інваріантний підпростір U є дільником мінімального многочлена перетворення φ.

13. Доведіть, що коли в просторі V існує база з власних векторів перетворення $\varphi : V \to V$, то й кожен інваріантний підпростір має базу з власних векторів.

14. a) Нехай φ — лінійне перетворення простору V над полем $\mathbb{C}$. Доведіть, що кожний ненульовий інваріантний підпростір містить принаймні один власний вектор. b) Чи залишиться це твердження правильним для лінійного перетворення простору над полем $\mathbb{R}$?

15. Доведіть, що коли серед інваріантних підпросторів лінійного перетворення φ векторного простору V над полем $\mathbb{C}$ одновимірним буде тільки один, то V не розкладається в пряму суму ненульових інваріантних підпросторів.

16. Доведіть, що для кожного лінійного перетворення φ n–вимірного векторного простору V над полем $\mathbb{C}$ існує такий ланцюг

$$\{\mathbf{0}\} = U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_{n-1} \subset U_n = V$$

φ–інваріантних підпросторів, що $\dim U_k = k$ для всіх k.

17. Знайдіть усі лінійні перетворення, для яких кожен підпростір є інваріантним.

18. Доведіть, що коли лінійне перетворення n–вимірного векторного простору має n різних власних чисел, то воно має рівно 2^n різних інваріантних підпросторів.

19. Знайдіть власні числа і кореневі підпростори лінійного перетворення, заданого матрицею:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

20. Знайдіть усі підпростори простору $\mathbb{R}^3$, інваріантні відносно перетворення з матрицею $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

21. Доведіть, що для лінійного перетворення $X \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$ простору $M_2(\mathbb{R})$ підпростори $U_1 = \langle E_{11}, E_{21} \rangle$ та $U_2 = \langle E_{12}, E_{22} \rangle$ є інваріантними.

22. Доведіть, що коли лінійні перетворення φ і ψ комутують, то ядро кожного з них є інваріантним підпростором для обох перетворень.

Додаткові задачі

23. Нехай для лінійного перетворення φ характеристичний многочлен збігається з мінімальним і дорівнює $(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{n_m}$. Позначимо через a_k кількість інваріантних підпросторів розмірності k. Знайдіть многочлен $f(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$.

24. Нехай мінімальний многочлен $m_\varphi(\lambda)$ перетворення φ є незвідним многочленом степеня k. Доведіть, що для кожного ненульового вектора $\boldsymbol{v}$ вектори $\boldsymbol{v}$, $\varphi(\boldsymbol{v})$, $\ldots$, $\varphi^{k-1}(\boldsymbol{v})$ утворюють базу інваріантного підпростору, який не містить інших нетривіальних інваріантних підпросторів.

25. Нехай V — скінченновимірний векторний простір над полем P. Доведіть, що коли характеристичний многочлен перетворення $\varphi : V \to V$ є незвідним над P, то φ не має нетривіальних інваріантних підпросторів.

26. Нехай V — n–вимірний векторний простір над полем P. Доведіть, що коли многочлен $f = x^n - a_1x^{n-1} - \cdots - a_{n-1}x - a_n$ є незвідним над P, то перетворення $\varphi : V \to V$ з матрицею

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

не має нетривіальних інваріантних підпросторів.

27. Нехай V — n–вимірний векторний простір, $1 \le k < n$ — фіксоване натуральне число. Знайдіть усі лінійні перетворення простору V, для яких кожен підпростір розмірності k є інваріантним.

28.** Доведіть, що кожна дійсна квадратна матриця зводиться до квазітрикутної матриці, в якої на діагоналі стоять клітинки порядку 1 або 2.

29.* Доведіть, що кожне лінійне перетворення n–вимірного дійсного простору має: a) інваріантний підпростір розмірності 1 або 2; b) інваріантний підпростір розмірності $n-1$ або $n-2$.

30.* Нехай підпростори U і W простору V є інваріантними відносно перетворення $\varphi : V \to V$. Доведіть, що $\chi_{\varphi|_{U+W}}(\lambda) \cdot \chi_{\varphi|_{U\cap W}}(\lambda) = \chi_{\varphi|_U}(\lambda) \cdot \chi_{\varphi|_W}(\lambda)$.

31.* Нехай λ_1, $\ldots$, λ_n — виписані в певному порядку корені характеристичного многочлена перетворення $\varphi : V \to V$ n–вимірного комплексного векторного простору. Доведіть, що існує така база простору V, в якій матриця $[\varphi]$ перетворення φ буде верхньою трикутною, причому на головній діагоналі стоятимуть числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ саме в такому порядку.

32.* Нехай лінійні перетворення φ і ψ комплексного векторного простору V задовольняють рівність $\varphi^2 = \psi^2 = \varepsilon$. Доведіть, що φ і ψ мають спільний інваріантний підпростір розмірності 1 або 2.

33. Доведіть, що: a) для кожного лінійного перетворення φ n–вимірного простору V існує таке натуральне число k, що $V = \operatorname{Im}\varphi^k \oplus \operatorname{Ker}\varphi^k$; b) завжди можна взяти $k \leq n$; c) $\operatorname{Im}\varphi^k$ є φ–інваріантним підпростором і обмеження $\varphi\,|_{\operatorname{Im}\varphi^k}$ є невиродженим перетворенням; d) $\operatorname{Ker}\varphi^k$ є φ–інваріантним підпростором і обмеження $\varphi\,|_{\operatorname{Ker}\varphi^k}$ є нільпотентним перетворенням.

34. Лінійне перетворення φ називається *одноклітинним*, якщо його ЖНФ є клітинкою Жордана. Доведіть, що коли два одноклітинні перетворення комутують, то їх інваріантні підпростори збігаються.

35. Нехай V — векторний простір скрізь визначених і нескінченну кількість разів диференційовних дійсних функцій, а перетворення $\varphi : V \to V$ визначається правилом $f(x) \to f'(x)$. Знайдіть усі власні вектори та кореневі підпростори перетворення φ.

36.* Нехай $A \in M_m(\mathbb{C})$ і $B \in M_n(\mathbb{C})$ — такі матриці, що для довільних власних чисел λ_i матриці A і μ_j матриці B виконується нерівність $\lambda_i + \mu_j \neq 0$. Доведіть, що для кожної матриці $C \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ матричне рівняння $AX + XB = C$ має єдиний розв'язок.

37.* Нехай комплексний векторний простір V розпадається в пряму суму $V = U \oplus W$ підпросторів, інваріантних відносно перетворення φ, причому обмеження $\varphi\big|_U$ і $\varphi\big|_W$ не мають спільних власних чисел. Доведіть, що U і W будуть інваріантними відносно кожного перетворення ψ, яке комутує з φ.

Домашнє завдання

38. Доведіть, що образ і прообраз інваріантного підпростору також є інваріантними підпросторами.

39. Доведіть, що перетворення φ і $\varphi - k\varepsilon$ мають одні й ті ж інваріантні підпростори.

40. Доведіть, що кожне лінійне перетворення n–вимірного комплексного простору має інваріантний підпростір розмірності $n - 1$.

41. Знайдіть власні числа і кореневі підпростори лінійного перетворення, заданого матрицею A:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

42. Знайдіть усі підпростори, інваріантні відносно лінійного перетворення, заданого матрицею A:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \text{ c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

43. Знайдіть усі підпростори простору $\mathbb{R}^3$, інваріантні відносно обох перетворень з матрицями $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

44. Нехай V — простір усіх дійсних функцій.

a) Доведіть, що перетворення $\varphi_a : V \to V$, $f(x) \mapsto f(x-a)$, є лінійним, а підпростір $\langle \sin x, \cos x \rangle$ є φ_a–інваріантним.

b) Нехай $\psi = \varphi_a|_W$ — обмеження перетворення φ_a на підпростір $W = \langle \sin x, \cos x \rangle$. Знайдіть матрицю перетворення ψ в базі $\sin x, \cos x$.

45. Нехай φ — лінійне перетворення векторного простору V над полем $\mathbb{C}$. Доведіть, що V розкладається в пряму суму інваріантних підпросторів, кожен з яких містить рівно одну інваріантну пряму.

Література. [1], с. 198–201.

Заняття 11. Лінійні функції. Спряжений простір

Необхідні поняття. Якщо V — векторний простір над полем P, то лінійні відображення $\varphi : V \to P$ називають *лінійними функціоналами* (або *лінійними функціями*, або *лінійними формами*, або *ковекторами*) на просторі V.

Простір V^* усіх лінійних функцій на V називається простором, *спряженим* (або *двоїстим*, або *дуальним*) до V.

Нехай $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ — фіксована база простору V. Лінійні функції φ_1, $\dots$, φ_n, визначені рівностями $\varphi_i(\boldsymbol{x}) = x_i$, називаються *координатними функціями* відносно бази $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$. База простору V^* з координатних функцій називається *спряженою* (або *двоїстою*, або *дуальною*) до бази $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$.

Необхідні твердження. **1.** Якщо $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ — база простору V, то лінійну функцію $\varphi : V \to P$ можна подати у вигляді

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{де} \quad a_k = \varphi(\boldsymbol{e}_k)\,,$$

який називається *зображенням* функції φ у базі $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$.

2. Простори V і V^* мають однакову розмірність. Зокрема, вони ізоморфні.

3. Координатні функції відносно бази $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ утворюють базу спряженого простору V^*.

4. Теорема про канонічний ізоморфізм між V і V^{**}. Якщо кожному вектору $\boldsymbol{v}$ зі скінченновимірного простору V зіставити лінійну функцію $f_{\boldsymbol{v}} : \varphi \mapsto \varphi(\boldsymbol{v})$ на спряженому просторі V^*, то відображення $\boldsymbol{v} \mapsto f_{\boldsymbol{v}}$ є ізоморфізмом простору V на простір V^{**}.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *З'ясуйте, чи буде лінійною визначена на звичайному тривимірному просторі V функція a) $\varphi : \boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$, b) $\varphi : \boldsymbol{v} \mapsto ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{b})$ (ненульові вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ — фіксовані), і в разі, якщо буде, знайдіть її ядро.*

Розв'язання. а) Якщо вектор $\boldsymbol{v}$ ненульовий, то $\varphi(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{0}$. Але тоді

$$\varphi(2\boldsymbol{v}) = (2\boldsymbol{v}, 2\boldsymbol{v}) = 4(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \neq 2\varphi(\boldsymbol{v}) = 2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}).$$

Отже, функція φ — не лінійна.

b) Використовуючи властивості векторного й скалярного добутків, маємо:

$$\begin{gathered} \varphi(c\boldsymbol{v}) = ([\boldsymbol{a}, c\boldsymbol{v}], \boldsymbol{b}) = (c[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{b}) = c([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{b}) = c\varphi(\boldsymbol{v}), \\ \varphi(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) = ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}], \boldsymbol{b}) = ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}], \boldsymbol{b}) = \\ = ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{b}) + ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}], \boldsymbol{b}) = \varphi(\boldsymbol{v}) + \varphi(\boldsymbol{u}). \end{gathered}$$

Отже, функція φ — лінійна.

Щоб знайти ядро функції φ, зауважимо, що вектор $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}]$ перпендикулярний векторові $\boldsymbol{a}$. Тому у випадку, коли вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ колінеарні, скалярний добуток $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{b})$ завжди буде дорівнювати 0, і ядром функції φ буде весь простір V.

Розглянемо тепер випадок, коли вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ не колінеарні. Доповнимо пару $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ до бази $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ простору V. Тоді довільний вектор $\boldsymbol{v}$ можна записати у вигляді $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$. Враховуючи лінійність функції φ, маємо:

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = ([\boldsymbol{a}, x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}], \boldsymbol{b}) = x([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}], \boldsymbol{b}) + y([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{b}) + z([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}], \boldsymbol{b}).$$

Перший доданок дорівнює 0, бо $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$. Другий доданок також дорівнює 0, бо вектори $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ і $\boldsymbol{b}$ перпендикулярні. Вектор $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ — ненульовий, а тому він не може бути перпендикулярним до всіх векторів бази. Оскільки він перпендикулярний до $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, то він не перпендикулярний векторові $\boldsymbol{c}$. А тому третій доданок дорівнює 0 лише тоді, коли $z = 0$. Отже, $\varphi(\boldsymbol{v}) = 0$ тоді й лише тоді, коли вектор $\boldsymbol{v}$ має вигляд $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$. Таким чином, у випадку, коли вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ не колінеарні, ядро функції φ збігається з лінійною оболонкою $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ векторів $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$. □

Задача 2. *Знайдіть яку–небудь базу ядра дійсної лінійної функції* $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$.

Розв'язання. Вектор $\boldsymbol{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ належатиме ядру функції f тоді й лише тоді, коли

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0. \tag{34}$$

Таким чином, ядро функції f збігається з простором розв'язків однорідної лінійної системи рівнянь (34), а базою ядра буде довільна фундаментальна система розв'язків системи (34). Вибираючи в якості вільних невідомих $x_2, x_3, \ldots, x_n$, стандартним способом знаходимо ФСР:

$$\boldsymbol{v}_2 = (-2, 1, 0, \ldots, 0), \boldsymbol{v}_3 = (-3, 0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{v}_n = (-n, 0, \ldots, 0, 1). \quad \square$$

Задача 3. *Доведіть, що для кожної ненульової функції φ на n–вимірному просторі V існує така база $\boldsymbol{e}_1$, …, $\boldsymbol{e}_n$ простору V, що $\varphi(\boldsymbol{v})$ дорівнює першій координаті вектора $\boldsymbol{v}$ у базі $\boldsymbol{e}_1$, …, $\boldsymbol{e}_2$.*

Розв'язання. Нехай $\varphi : V \to P$ — ненульова функція. За теоремою Сильвестра $\dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = n$. Оскільки функція φ — ненульова, то $\dim \operatorname{Im} \varphi \geq 1$. З іншого боку, $\operatorname{Im} \varphi \subseteq P$, а розмірність P як векторного простору над P дорівнює 1. Тому $\dim \operatorname{Im} \varphi = 1$ і $\dim \operatorname{Ker} \varphi = n - 1$.

Виберемо довільну базу $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, …, $\boldsymbol{e}_n$ ядра $\operatorname{Ker} \varphi$ і доповнимо її до бази $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ всього простору. Нехай $\varphi(\boldsymbol{u}) = c$. Позаяк $\boldsymbol{u} \notin \operatorname{Ker} \varphi$, то $c \neq 0$. Тоді $\varphi\big(\frac{1}{c}\boldsymbol{u}\big) = 1$ і вектори $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{c}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ також утворюють базу простору V. У цій базі маємо

$$\begin{aligned}\varphi(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + x_2\varphi(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + x_n\varphi(\boldsymbol{e}_n) = \\ = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + \cdots + x_n \cdot 0 = x_1\,,\end{aligned}$$

тобто $\varphi(\boldsymbol{v})$ дорівнює першій координаті вектора $\boldsymbol{v}$. $\square$

Задача 4. *Для кожного дійсного числа a визначимо на просторі $\mathbb{R}[x]$ лінійну функцію φ_a правилом $\varphi_a(f) = f(a)$. Чи будуть функції φ_a, $a \in \mathbb{R}$, лінійно незалежними?*

Розв'язання. Припустимо, що функції φ_a, $a \in \mathbb{R}$, лінійно залежні. Тоді серед них має бути скінченна лінійно залежна система функцій. Отже, існують такі попарно різні числа a_1, …, a_n, що

$$c_1\varphi_{a_1} + \cdots + c_n\varphi_{a_n} = \mathbf{0}\,, \tag{35}$$

причому серед коефіцієнтів c_1, …, c_n є ненульові. Рівність (35) можна переписати у вигляді

$$c_1 f(a_1) + \cdots + c_n f(a_n) = 0\,. \tag{36}$$

Остання рівність означає, що для кожного многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$ набір його значень $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ у точках a_1, …, a_n є розв'язком лінійного рівняння

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0\,. \tag{37}$$

Позаяк обмежень на степінь многочлена f нема, то за теоремою про існування інтерполяційного многочлена набір $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ можна вибирати довільним. Але довільний набір буде розв'язком рівняння (37) лише в тому випадку, коли всі його коефіцієнти c_1, …, c_n — нульові. Таким чином, припущення про лінійну залежність функцій φ_a, $a \in \mathbb{R}$, приводить до суперечності, і ці функції — лінійно незалежні. $\square$

Задача 5. *Доведіть, що коли дві лінійні функції φ_1 та φ_2 на векторному просторі V мають однакові ядра, то вони відрізняються скалярним множником.*

Розв'язання. Нехай $\dim V = n$ і $\operatorname{Ker}\varphi_1 = \operatorname{Ker}\varphi_2 = U$. Якщо U збігається з усім простором V, то обидві функції φ_1 і φ_2 нульові і твердження задачі очевидне.

Нехай тепер $U \neq V$. У розв'язанні зад. 11.3 показано, що розмірність ядра ненульової лінійної функції дорівнює $n-1$, тому $\dim U = n-1$. Виберемо в U якусь базу $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ і доповнимо її до бази $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}, \boldsymbol{e}_n$ всього простору. Тоді для довільного вектора $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1} + x_n\boldsymbol{e}_n$ маємо:

$$\varphi_1(\boldsymbol{v}) = x_1\varphi_1(\boldsymbol{e}_1) + \ldots + x_{n-1}\varphi_1(\boldsymbol{e}_{n-1}) + x_n\varphi_1(\boldsymbol{e}_n) = x_n\varphi_1(\boldsymbol{e}_n),$$

$$\varphi_2(\boldsymbol{v}) = x_1\varphi_2(\boldsymbol{e}_1) + \ldots + x_{n-1}\varphi_2(\boldsymbol{e}_{n-1}) + x_n\varphi_2(\boldsymbol{e}_n) = x_n\varphi_2(\boldsymbol{e}_n).$$

Оскільки $\boldsymbol{e}_n \notin U$, то $\varphi_1(\boldsymbol{e}_n) \neq 0$. Але тоді $\varphi_2(\boldsymbol{v}) = \dfrac{\varphi_2(\boldsymbol{e}_n)}{\varphi_1(\boldsymbol{e}_n)}\,\varphi_1(\boldsymbol{v})$. □

Задача 6. *Нехай* $\dim V = n$. *Доведіть, що функції* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *з простору* V^* *утворюють базу цього простору тоді й лише тоді, коли для довільного вектора* $\boldsymbol{v}$ *з рівностей* $\varphi_1(\boldsymbol{v}) = \cdots = \varphi_n(\boldsymbol{v}) = 0$ *випливає рівність* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Розв'язання. Необхідність. Нехай функції $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ утворюють базу простору V^* і $\varphi_1(\boldsymbol{v}) = \cdots = \varphi_n(\boldsymbol{v}) = 0$. Припустимо, що $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Тоді вектор $\boldsymbol{v}$ можна доповнити до бази $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ простору V. Розглянемо лінійну функцію φ, яка кожному вектору $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{v} + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ ставить у відповідність його першу координату x_1. Позаяк $\boldsymbol{v}$ має в базі $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ координати $(1, 0, \ldots, 0)$, то $\varphi(\boldsymbol{v}) = 1$. З іншого боку, функцію φ можна записати у вигляді лінійної комбінації $\varphi = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$ функцій бази. Тому

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = c_1\varphi_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + c_n\varphi_n(\boldsymbol{v}) = 0\,.$$

Отримана суперечність доводить, що $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Достатність. Нехай тепер з рівностей $\varphi_1(\boldsymbol{v}) = \cdots = \varphi_n(\boldsymbol{v}) = 0$ завжди випливає рівність $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Оскільки $\dim V^* = \dim V = n$, а в n–вимірному просторі довільні n лінійно незалежні вектори утворюють базу, то досить показати, що функції $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ лінійно незалежні. Припустимо, що це не так. Тоді існують такі коефіцієнти $c_1, \ldots, c_n$, причому не всі нульові, що

$$c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n = \boldsymbol{0}\,.$$

Без обмеження загальності можна вважати, що $c_n \neq 0$. Оскільки $\dim \operatorname{Ker} \varphi \geq n-1$ для кожної лінійної функції φ, то згідно теореми Ґрасмана:

$$\dim(\operatorname{Ker} \varphi_1 \cap \operatorname{Ker} \varphi_2) \geq (n-1) + (n-1) - n = n-2;$$

$$\dim(\operatorname{Ker} \varphi_1 \cap \operatorname{Ker} \varphi_2 \cap \operatorname{Ker} \varphi_3) =$$

$$= \dim\bigl((\operatorname{Ker} \varphi_1 \cap \operatorname{Ker} \varphi_2) \cap \operatorname{Ker} \varphi_3\bigr) \geq (n-2) + (n-1) - n = n-3;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dim(\operatorname{Ker} \varphi_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} \varphi_{n-1}) =$$

$$= \dim\bigl((\operatorname{Ker} \varphi_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} \varphi_{n-1}) \cap \operatorname{Ker} \varphi_{n-1}\bigr) \geq 2 + (n-1) - n = 1.$$

Тому в перетині $\operatorname{Ker} \varphi_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} \varphi_{n-1}$ можна взяти ненульовий вектор $\boldsymbol{v}$. Цей вектор належить кожному з ядер $\operatorname{Ker} \varphi_k$, $1 \leq k \leq n-1$, тому $\varphi_1(\boldsymbol{v}) = \cdots = \varphi_{n-1}(\boldsymbol{v}) = 0$. Крім того,

$$\varphi_n(\boldsymbol{v}) = \frac{-1}{c_n}(c_1\varphi_1 + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1})(\boldsymbol{v}) = \frac{-1}{c_n}\bigl(c_1\varphi_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(\boldsymbol{v})\bigr) = 0.$$

Отже, припущення приводить до суперечності і функції $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — лінійно незалежні. $\square$

Задача 7. *Нехай* $V = \mathbb{R}_n[x]$, $a \in \mathbb{R}$, *а функції* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *визначені правилом*: $\varphi_k(f) = f^{(k)}(a)$.

a) *Доведіть, що функції* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *утворюють базу простору* V^*.

b) *Знайдіть спряжену базу* $f_0, f_1, \ldots, f_n$ *простору* V.

c) *Якого змісту набуває в цьому випадку формула* $f = \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi_k(f) f_k$?

Розв'язання. a) Розклад многочлена $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ за степенями $x-a$ має вигляд:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (38)$$

Тому якщо

$$\varphi_0(f) = \varphi_1(f) = \cdots = \varphi_n(f) = 0,$$

то

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = f^{(n)}(a) = 0,$$

і з рівності (38) випливає, що $f = 0$. Оскільки $\dim V = n + 1$, то згідно зад. 11.6 функції φ_0, φ_1, …, φ_n утворюють базу простору V^*.

b) Многочлен $f_k(x)$ спряженої бази задовольняє умову

$$\varphi_0(f_k) = \cdots = \varphi_{k-1}(f_k) = \varphi_{k+1}(f_k)) = \cdots = \varphi_n(f_k) = 0, \quad \varphi_k(f_k) = 1,$$

тобто

$$f_k^{(0)}(a) = \cdots = f_k^{(k-1)}(a) = f_k^{(k+1)}(a) = \cdots = f_k^{(n)}(a) = 0, \quad f_k^{(k)}(a) = 1.$$

З рівності (38) тоді випливає, що $f_k(x) = \dfrac{(x-a)^k}{k!}$.

c) Враховуючи пункт b), формула $f = \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi_k(f) f_k$ набуває вигляду:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

тобто збігається з формулою (38) (іншими словами, це формула розкладу многочлена $f(x)$ в ряд Тейлора в точці $x = a$). $\square$

Основні задачі

8. Чи може ненульова лінійна функція на комплексному векторному просторі набувати лише дійсних значень?

9. З'ясуйте, чи буде лінійною визначена на звичайному тривимірному просторі V функція a) $\boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})$, b) $\boldsymbol{v} \mapsto ([\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}], \boldsymbol{v})$, і в разі, якщо буде, знайдіть її ядро ($\boldsymbol{a}$ — фіксований ненульовий вектор).

10. Знайдіть яку–небудь базу ядра дійсної лінійної функції:
a) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$;
b) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 - x_2 + \cdots + (-1)^{n-1} x_n$.

11. Доведіть, що для кожного ненульового вектора $\boldsymbol{v}$ існує така лінійна функція φ, що $\varphi(\boldsymbol{v}) = 1$.

12. Доведіть, що для для кожного цілого числа $k \geq 0$ відображення

$$\text{a) } \mu^{(k)} : f \mapsto f(k), \quad \text{b) } \nu^{(k)} : f \mapsto f^{(k)}(0), \quad \text{c) } \tau^{(k)} : f \mapsto \int_0^k f(x)dx$$

є лінійною функцією на просторі $\mathbb{R}_n[x]$.

13. Чи вичерпуються всі лінійні функції на просторі $\mathbb{R}_n[x]$ функціями вигляду $\varphi_a : f(x) \mapsto f(a)$?

14. Знайдіть максимальну лінійно незалежну підсистему системи

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4,\\
\varphi_2 &= 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4,\\
\varphi_3 &= 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4,\\
\varphi_4 &= x_1 + 7x_3 + 11x_4
\end{aligned}$$

лінійних функцій і виразіть через неї решту функцій системи.

15. Доведіть, що кожний $(n-1)$–вимірний підпростір n–вимірного простору є ядром деякої лінійної функції на цьому просторі.

16. Доведіть, що кожний k–вимірний підпростір n–вимірного простору є перетином ядер певних $n-k$ визначених на цьому просторі лінійних функцій.

17. Доведіть, що n лінійних функцій на n–вимірному просторі будуть лінійно незалежні тоді й лише тоді, коли перетин їх ядер містить лише нульовий вектор.

18. Доведіть, що система функцій $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \ldots, \tau^{(n+1)}$ із зад. 11.12 є базою простору, спряженого до простору $\mathbb{R}_n[x]$.

19. Нехай $V = \mathbb{R}_n[x]$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — попарно різні дійсні числа, а функції $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ визначені правилом: $\varphi_i(f) = f(a_i)$.
a) Доведіть, що функції $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ утворюють базу простору V^*.
b) Знайдіть спряжену базу $f_0, f_1, \ldots, f_n$ простору V.
c) Якого змісту набуває в цьому випадку формула $f = \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi_k(f) f_k$?

Додаткові задачі

20. Кожному вектору $\boldsymbol{a}$ площини V поставимо у відповідність функцію $\varphi_{\boldsymbol{a}} : V \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$. Доведіть, що відображення $\boldsymbol{a} \mapsto \varphi_{\boldsymbol{a}}$ є ізоморфізмом простору V на V^*.

21. Доведіть, що вектори $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ лінійно незалежні тоді й лише тоді, коли існують такі лінійні функції $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ на просторі V, що $\det(\varphi^i(\boldsymbol{v}_j)) \neq 0$.

22*. Доведіть, що простір многочленів $\mathbb{Q}[x]$ не ізоморфний своєму спряженому.

23*. Доведіть, що жоден нескінченновимірний простір не ізоморфний своєму спряженому.

24. Нехай U — підпростір простору V. Множина

$$U^{\perp} = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(\boldsymbol{u}) = 0 \text{ для всіх } \boldsymbol{u} \in U\}$$

називається *анулятором* підпростору U. Симетрично визначається анулятор підпростору $W \subseteq V^*$. Доведіть, що:

a) анулятор підпростору $U \subseteq V$ є підпростором спряженого простору V^*;

b) $U_1 \subseteq U_2$ тоді й лише тоді, коли $U_1^{\perp} \supseteq U_2^{\perp}$;

c) $U_1^{\perp} = U_2^{\perp}$ тоді й лише тоді, коли $U_1 = U_2$;

d) кожний підпростір простору V^* є анулятором деякого підпростору $U \subseteq V$;

e) $\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$;

f) $(U^{\perp})^{\perp} = U$;

g) $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$;

h) $(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$.

25*. Нехай добуток $l_1(\boldsymbol{v}) \cdot l_2(\boldsymbol{v})$ двох лінійних функцій l_1 і l_2, визначених на просторі V (не обов'язково скінченновимірному), тотожно дорівнює нулю. Доведіть, що принаймні одна з лінійних функцій l_1 і l_2 тотожно дорівнює нулю.

26*. Доведіть, що для кожної лінійної функції $f : M_n(P) \to P$ існує, причому єдина, така матриця A, що $f(X) = \operatorname{tr}(AX)$ для всіх $X \in M_n(P)$.

Домашнє завдання

27. З'ясуйте, чи буде лінійною визначена на звичайному тривимірному просторі V функція a) $\boldsymbol{v} \mapsto \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})$, b) $\boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{v}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}])$, і в разі, якщо буде, знайдіть її ядро ($\boldsymbol{a}$ — фіксований ненульовий вектор).

28. Знайдіть яку–небудь базу ядра дійсної лінійної функції

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_2 + x_4 + \cdots + \tfrac{1+(-1)^n}{2} x_n.$$

29. Нехай V — векторний простір визначених на відрізку $[-1,1]$ неперервних дійсних функцій, функція $g(x) \in V$ — фіксована. Які з наступних функцій

$$\text{a) } f \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)dx, \quad \text{b) } f \mapsto \int_{-1}^{1} f^2(x)dx, \quad \text{c) } f \mapsto \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

є лінійними на V?

30. Знайдіть максимальну лінійно незалежну підсистему системи

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 8x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4,\\
\varphi_2 &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4,\\
\varphi_3 &= 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4,\\
\varphi_4 &= x_1 - x_2 - x_3 + 7x_4,\\
\varphi_5 &= 5x_2 + 4x_3 - 17x_4
\end{aligned}$$

лінійних функцій і виразіть через неї решту функцій системи.

31. Доведіть, що кожна база простору V є спряженою до деякої бази простору V^*.

Література. [1], с. 77–80; [2], с. 187–191; [3], с. 55–56; [5], с. 302–309; [7], с. 166–172; [8], с. 33–37, 82–84; [12], с. 312–314; [13], с. 91–93, 147.

Заняття 12. Білінійні функції

Необхідні поняття. Функція двох змінних $\varphi : V \times V \to P$, де V — векторний простір над полем P, називається *білінійною*, якщо вона лінійна за кожною змінною, тобто якщо для довільних векторів $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in V$ і скаляра $c \in P$ виконуються рівності:
a) $\varphi(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) = \varphi(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + \varphi(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})$; $\varphi(c\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = c\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$;
b) $\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) + \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2)$; $\varphi(\boldsymbol{v}, c\boldsymbol{w}) = c\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

Матриця

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} \varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & \varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) & \dots & \varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n) \\ \varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & \varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) & \dots & \varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1) & \varphi(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_2) & \dots & \varphi(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}$$

називається *матрицею білінійної функції* $\varphi : V \times V \to P$ у базі $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}_n$.

Білінійна функція φ на просторі V називається *симетричною* (відповідно *кососиметричною*), якщо для довільних векторів $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V$ виконується рівність $\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ (відповідно $\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = -\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$).

Якщо φ — білінійна функція на просторі V, то відношення

$$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$$

називається відношенням *ортогональності* (*перпендикулярності*).

Лівим $S_l^{\perp}$ і *правим* $S_r^{\perp}$ *ортогональними доповненнями* непорожньої підмножини $S \subseteq V$ називаються відповідно множини

$$S_l^{\perp} := \{\boldsymbol{u} \in V \mid \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \text{ для всіх } \boldsymbol{v} \in S\} \text{ та } S_r^{\perp} := \{\boldsymbol{u} \in V \mid \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u} \text{ для всіх } \boldsymbol{v} \in S\}.$$

Якщо білінійна функція φ симетрична, то $S_l^{\perp} = S_r^{\perp}$ і говорять просто про *ортогональне доповнення* $S^{\perp}$.

Функція $f : V \to \mathbb{C}$ на комплексному векторному просторі V називається *напівлінійною*, якщо виконуються такі дві умови:
1) $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ для довільних $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$;
2) $f(\alpha \boldsymbol{u}) = \overline{\alpha} f(\boldsymbol{u})$ для довільних $\alpha \in \mathbb{C}$ і $\boldsymbol{u} \in V$.

Функція $f : V \times V \to \mathbb{C}$ на комплексному векторному просторі називається *півторалінійною*, якщо вона лінійна за першим аргументом і напівлінійна — за другим. Півторалінійна функція називається *ермітовою*, якщо для довільних векторів $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{\varphi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}\,.$$

Матриця $A \in M_n(\mathbb{C})$ називається *ермітовою*, якщо $A^{\top} = \overline{A}$.

Необхідні твердження. **1.** Якщо $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — база простору V, то білінійна функція зображується у вигляді

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varphi(x_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n, y_1 \boldsymbol{y}_1 + \cdots + y_m \boldsymbol{y}_m) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j,$$

де $a_{ij} = \varphi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{y}_j)$. Таке зображення білінійної функції через координати відповідних векторів часто називають *білінійною формою.*

2. Якщо A — матриця білінійної функції φ у базі $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, а $[\boldsymbol{v}]$ і $[\boldsymbol{w}]$ — координати векторів $\boldsymbol{v}$ і $\boldsymbol{w}$ у цій же базі, то

$$\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = [\boldsymbol{v}]^{\top} \cdot A \cdot [\boldsymbol{w}]\,.$$

3. При переході до нової бази у просторі V матриця білінійної функції $\varphi : V \times V \to P$ змінюється за правилом

$$A' = S^\top \cdot A \cdot S\,,$$

де S — матриця переходу до нової бази.

4. Ранг матриці білінійної функції не залежать від вибору бази.

5. *Теорема про канонічний вигляд симетричної білінійної функції*: для кожної симетричної білінійної функції φ існує ортогональна база, в якій вона має вигляд

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a_1 x_1 y_1 + a_2 x_2 y_2 + \cdots + a_k x_k y_k.$$

6. *Теорема про канонічний вигляд кососиметричної білінійної функції*: для кожної кососиметричної білінійної функції φ існує база, в якій вона має вигляд

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 + \cdots + x_{2k-1} y_{2k} - x_{2k} y_{2k-1}.$$

7. *Теорема Якобі.* Якщо всі головні кутові мінори $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$ матриці A білінійної функції φ ненульові, то існує ортогональна база $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, в якій функція φ зображується у вигляді

$$\varphi(\boldsymbol{x}, y) = \Delta_1 \cdot x_1 y_1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot x_2 y_2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \cdot x_3 y_3 + \cdots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \cdot x_n y_n\,.$$

8. Якщо характеристика поля P не дорівнює 2, то простір усіх білінійних функцій розкладається в пряму суму підпростору симетричних та підпростору кососиметричних білінійних функцій.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *З'ясуйте, які з наступних функцій будуть білінійними функціями на просторі* $\mathbb{R}^3$ *векторів–рядків*:

a) $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 - |\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}|^2$;

b) $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *дорівнює сумі координат вектора* $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$;

c) $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{y}$.

У разі позитивної відповіді знайдіть матрицю відповідної білінійної функції в стандартній базі простору $\mathbb{R}^3$.

Розв'язання. Нехай $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Безпосередньо обчислюємо:

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + (x_3+y_3)^2 -$$
$$-(x_1^2+x_2^2+x_3^2) - (y_1^2+y_2^2+y_3^2) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3\,.$$

Отримали білінійну форму. Тому функція f — білінійна.

b) Оскільки

$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)\boldsymbol{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\boldsymbol{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\boldsymbol{k},$$

то

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_2y_1\,.$$

Отже, знову отримали білінійну форму, і тому функція f є білінійною.

c) $$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, значеннями функції f є матриці порядку 3, а не елементи поля $\mathbb{R}$. Тому функція f не є білінійною. □

Задача 2. *Нехай в деякій базі $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ простору V білінійна функція $\varphi : V \times V \to P$ має матрицю F, а лінійні перетворення $\mathcal{A},\mathcal{B} : V \to V$ — матриці A і B відповідно. Доведіть, що функція $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \varphi(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}),\mathcal{B}(\boldsymbol{y}))$ є білінійною, і знайдіть її матрицю в цій же базі.*

Розв'язання. Використовуючи лінійність перетворення $\mathcal{A}$ і білінійність функції φ перевіримо лінійність функції ψ за першим аргументом:

$$\psi(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}) = \varphi(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2),\mathcal{B}(\boldsymbol{y})) = \varphi(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1)+\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2),\mathcal{B}(\boldsymbol{y})) =$$
$$= \varphi(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1),\mathcal{B}(\boldsymbol{y})) + \varphi(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2),\mathcal{B}(\boldsymbol{y})) = \psi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}) + \psi(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y});$$
$$\psi(c\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \varphi(\mathcal{A}(c\boldsymbol{x}),\mathcal{B}(\boldsymbol{y})) = \varphi(c\mathcal{A}(\boldsymbol{x}),\mathcal{B}(\boldsymbol{y})) = c\varphi(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}),\mathcal{B}(\boldsymbol{y})) = c\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

Лінійність ψ за другим аргументом перевіряється аналогічно.

Позначимо матрицю функції ψ через P. Тоді $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = [\boldsymbol{x}]^\top \cdot P \cdot [\boldsymbol{y}]$. З іншого боку,

$$\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \varphi(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}),\mathcal{B}(\boldsymbol{y})) = [\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]^\top \cdot F \cdot [\mathcal{B}(\boldsymbol{y})] =$$
$$= [A \cdot \boldsymbol{x}]^\top \cdot F \cdot [B \cdot \boldsymbol{y}] = [\boldsymbol{x}]^\top \cdot A^\top F B \cdot [\boldsymbol{y}].$$

Таким чином, для всіх векторів $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ має виконуватися рівність $[\boldsymbol{x}]^\top \cdot P \cdot [\boldsymbol{y}] = [\boldsymbol{x}]^\top \cdot A^\top F B \cdot [\boldsymbol{y}]$. Тому $P = A^\top F B$. □

Задача 3. *Нехай білінійна функція φ на просторі V є невиродженою. Доведіть, що для кожного ненульового вектора $\boldsymbol{u}$ існує такий вектор $\boldsymbol{v}$, що $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \neq 0$.*

Розв'язання. Оскільки вектор $\boldsymbol{u}$ ненульовий, то його можна доповнити до бази $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ простору V. Позаяк функція φ невироджена, то матриця

$$\begin{pmatrix} \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) & \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_2) & \dots & \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_n) \\ \varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{u}) & \varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) & \dots & \varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{u}) & \varphi(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_2) & \dots & \varphi(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}$$

функції φ у цій базі не може мати нульових рядків. Тому серед чисел $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$, $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_2)$, …, $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_n)$ є принаймні одне ненульове. □

Задача 4. *Знайдіть матрицю білінійної функції в новій базі, якщо відомі її матриця* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *в старій базі та матриця* $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *переходу до нової бази.*

Розв'язання. Використовуючи правило зміни матриці білінійної функції при переході до нової бази (твердження **3**), отримуємо:

$$A' = S^{\top} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix}.$$

□

Задача 5. *Зведіть симетричну білінійну форму*

$$x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 5x_3y_3 \tag{39}$$

до діагонального вигляду методом Якобі та знайдіть формули переходу до нових координат.

Розв'язання. Нехай $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — база, в якій білінійна форма має вигляд (39). Тоді в цій базі матриця форми буде такою:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо її головні мінори:

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

Отже, дана форма зводиться до вигляду

$$\Delta_1 \cdot u_1 v_1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot u_2 v_2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \cdot u_3 v_3 = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \,.$$

За методом Якобі ортогональна база $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$, в якій форма має діагональний вигляд, шукається у вигляді:

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{f}_2 = \alpha_{12}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{f}_3 = \alpha_{13}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{23}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

Коефіцієнт α_{12} шукаємо з умови ортогональності вектора $\boldsymbol{f}_2$ до вектора $\boldsymbol{e}_1$:

$$0 = \varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2) = \varphi(\boldsymbol{e}_1, \alpha_{12}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = \alpha_{12}\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + \varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \alpha_{12} \cdot 1 + 1.$$

Звідси знаходимо: $\alpha_{12} = -1$.

Коефіцієнти α_{13} та α_{23} шукаємо з умови ортогональності вектора $\boldsymbol{f}_3$ до векторів $\boldsymbol{e}_1$ та $\boldsymbol{e}_2$:

$$\begin{gathered} 0 = \varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_3) = \varphi(\boldsymbol{e}_1, \alpha_{13}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{23}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \\ = \alpha_{13}\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + \alpha_{23}\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + \varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = \alpha_{13} + \alpha_{23}; \\ 0 = \varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_3) = \varphi(\boldsymbol{e}_2, \alpha_{13}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{23}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \\ = \alpha_{13}\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + \alpha_{23}\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + \varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = \alpha_{13} + 2\alpha_{23} + 2. \end{gathered}$$

З отриманої системи

$$\alpha_{13} + \alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{13} + 2\alpha_{23} = -2$$

знаходимо: $\alpha_{13} = 2$, $\alpha_{23} = -2$.

Таким чином,

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{f}_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{f}_3 = 2\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

і матриця переходу до нової бази має вигляд

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

З рівності
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$
тепер знаходимо формули переходу до нових координат:
$$x_1 = u_1 - u_2 + 2u_3, \quad x_2 = u_2 - 2u_3, \quad x_3 = u_3.$$
Аналогічно виражаються y_i через v_i. $\square$

Задача 6. *Зведіть кососиметричну білінійну форму*
$$x_1y_2 - x_2y_1 + 2(x_1y_3 - x_3y_1) - x_1y_4 + x_4y_1 - 3(x_2y_4 - x_4y_2)$$
до діагонального вигляду і знайдіть формули переходу до нових координат.

Розв'язання. Групуємо спочатку члени зі змінними x_1 і y_1:
$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1(y_2 + 2y_3 - y_4) - y_1(x_2 + 2x_3 - x_4) - 3(x_2y_4 - x_4y_2).$$
Після невиродженої лінійної заміни змінних
$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2 + 2x_3 - x_4, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = x_4$$
і аналогічної заміни y_i на y_i' отримуємо (враховуючи, що $x_2 = x_2' - 2x_3' - x_4'$):
$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= x_1'y_2' - x_2'y_1' - 3(x_2' - 2x_3' - x_4')y_4' + 3x_4'(y_2' - 2y_3' - y_4') = \\ &= x_1'y_2' - x_2'y_1' - 3x_2'y_4' + 3x_4'y_2' + 6x_3'y_4' - 6x_4'y_3'. \end{aligned}$$
Оскільки змінні x_2 і y_2 входять не тільки в два перші доданки, то групуємо члени з цими змінними:
$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1' + 3x_4')y_2' - x_2'(y_1' + yx_4') + 6x_3'y_4' - 6x_4'y_3'.$$
Після невиродженої лінійної заміни змінних
$$x_1'' = x_1' + 3x_4', \quad x_2'' = x_2', \quad x_3'' = x_3', \quad x_4'' = x_4'$$
і аналогічної заміни y_i' на y_i'' отримуємо:
$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1''y_2'' - x_2''y_1'' + 6x_3''y_4'' - 6x_4''y_3''.$$

Це вже майже канонічний вигляд, лишилося тільки "підправити" коефіцієнти при двох останніх доданках. Це легко робиться заміною

$$u_1 = x_1'', \quad u_2 = x_2'', \quad u_3 = 6x_3'', \quad u_4 = x_4''$$

(і аналогічною заміною y_i'' на v_i), після чого отримуємо остаточний канонічний вигляд:

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = u_1 v_2 - u_2 v_1 + u_3 v_4 - u_4 v_3.$$

Формули переходу до нових координат знаходяться послідовним виконанням замін:

$$\begin{gathered} u_1 = x_1'' = x_1' + 3x_4' = x_1 + 3x_4, \quad u_2 = x_2'' = x_2' = x_2 + 2x_3 - x_4, \\ u_3 = 6x_3'' = 6x_3' = 6x_3, \quad u_4 = x_4'' = x_4' = x_4. \end{gathered}$$

Аналогічно виражаються v_i через y_i. □

Задача 7. *Доведіть, що дійсна й уявна частини ермітової функції φ на n–вимірному векторному просторі V над полем $\mathbb{C}$ є відповідно симетричною й кососиметричною функціями на V, якщо V розглядати як $2n$–вимірний дійсний простір.*

Розв'язання. Нехай φ_{Re} і φ_{Im} — відповідно дійсна й уявна частини функції φ. Тоді $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \varphi_{Re}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + i\varphi_{Im}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Використовуючи ермітовість функції φ, можемо записати:

$$\begin{gathered} \varphi_{Re}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) + i\varphi_{Im}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \overline{\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})} = \\ = \overline{\varphi_{Re}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + i\varphi_{Im}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})} = \varphi_{Re}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - i\varphi_{Im}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}). \end{gathered}$$

З рівності двох комплексних чисел отримуємо:

$$\varphi_{Re}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \varphi_{Re}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \quad \varphi_{Im}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = -\varphi_{Im}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}),$$

що й треба було довести. □

Задача 8. *У базі $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0), \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ простору $\mathbb{R}^3$ задано білінійну функцію з матрицею $F = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ і підпростір $U = \langle (1,-1,0), (-2,3,1) \rangle$. Знайдіть ліве і праве ортогональне доповнення підпростору U відносно цієї функції.*

Розв'язання. Позначимо $\boldsymbol{u}_1 = (1,-1,0)$, $\boldsymbol{u}_2 = (-2,3,1)$. Вектор $\boldsymbol{v} = (x_1,x_2,x_3)$ буде належати лівому ортогональному доповненню $U_l^\perp$ підпростору U тоді й лише тоді, коли він буде ортогональний до кожного з векторів $\boldsymbol{u}_1$ і $\boldsymbol{u}_2$, тобто коли будуть виконуватися рівності

$$[\boldsymbol{v}]^\top \cdot F \cdot [\boldsymbol{u}_1] = 0, \qquad [\boldsymbol{v}]^\top \cdot F \cdot [\boldsymbol{u}_2] = 0.$$

Переходячи до координат, одержуємо систему

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix}4&1&3\\3&3&6\\2&5&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=0,\quad (x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix}4&1&3\\3&3&6\\2&5&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}=0,$$

або

$$3x_1 - 3x_3 = 0, \qquad -2x_1 + 9x_2 + 20x_3 = 0.$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо, що її фундаментальна система розв'язків складається з одного вектора $(1,-2,1)$, а тому $U_l^\perp = \langle(1,-2,1)\rangle$.

Аналогічно вектор $\boldsymbol{v} = (x_1,x_2,x_3)$ буде належати правому ортогональному доповненню $U_r^\perp$ тоді й лише тоді, коли кожен з векторів $\boldsymbol{u}_1$ та $\boldsymbol{u}_2$ буде ортогональний до $\boldsymbol{v}$. Це дає систему

$$(1,-1,0)\cdot\begin{pmatrix}4&1&3\\3&3&6\\2&5&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,\quad (-2,3,1)\cdot\begin{pmatrix}4&1&3\\3&3&6\\2&5&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

або

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \qquad 3x_1 + 12x_2 + 21x_3 = 0.$$

Фундаментальна система розв'язків цієї системи складається з вектора $(1,5,-3)$, а тому $U_r^\perp = \langle(1,5,-3)\rangle$. □

Основні задачі

9. З'ясуйте, які з наступних функцій будуть білінійними функціями на просторі $M_n(\mathbb{R})$:

a) $\varphi(A,B) = \operatorname{tr}(AB)$; b) $\varphi(A,B) = \operatorname{tr}(AB - BA)$; c) $\varphi(A,B) = AB$;
d) $\varphi(A,B) = \operatorname{tr}(A+B)$; e) $\varphi(A,B) = \operatorname{tr}(A\cdot B^\top)$.

У разі позитивної відповіді з'ясуйте, чи буде ця білінійна функція симетричною, і знайдіть її матрицю в базі з матричних одиниць E_{ij}.

10. Білінійна функція f на просторі $\mathbb{R}^3$ задана своєю матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Обчисліть $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, якщо $\boldsymbol{x} = (1, 0, 3)$, $\boldsymbol{y} = (-1, 2, -4)$.

11. Знайдіть розмірність простору a) симетричних, b) кососиметричних білінійних функцій від n змінних.

12. Доведіть, що для довільної білінійної функції φ на просторі V множина $\{\boldsymbol{v} \in V \mid \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0\}$ буде підпростором.

13. Не виконуючи обчислень, з'ясуйте, чи еквівалентні білінійні функції:

a) $\varphi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_3 - 2x_2y_1 - x_3y_2 + 3x_3y_1$,
$\varphi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_2 + 2x_2y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 - 3x_3y_1$;

b) $\varphi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + ix_1y_2$,
$\varphi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + (1+i)x_1y_2 + (1-i)x_2y_1 - ix_2y_2$;

c) $\varphi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2 + 6x_2y_3 + 7x_3y_1 +$
$+ 8x_3y_2 + 10x_3y_3$, $\varphi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - x_3y_1 + 5x_3y_3$.

14. Зведіть симетричну білінійну форму до діагонального вигляду методом Якобі і знайдіть формули переходу до нових координат:

a) $2x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 + 3x_3y_3$;

b) $x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + x_2y_2 + x_3y_3$.

15. Методом Якобі з'ясуйте, чи будуть еквівалентними над полем $\mathbb{R}$ білінійні функції з матрицями $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

16. Зведіть кососиметричну білінійну форму до діагонального вигляду і знайдіть формули переходу до нових координат:

a) $x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + 2(x_2y_3 - x_3y_2)$;

b) $2(x_1y_2 - x_2y_1) + x_1y_3 - x_3y_1 + 3(x_2y_3 - x_3y_2)$;

c) $x_1y_2 - x_2y_1 + 2(x_1y_3 - x_3y_1) + 4(x_2y_4 - x_4y_2)$.

17. У базі $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ простору $\mathbb{R}^3$ задано білінійну функцію з матрицею $F = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 5 \\ 5 & -5 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ і підпростір $U = \langle (2, 0, -3), (3, 1, -5) \rangle$. Знайдіть ліве і праве ортогональне доповнення підпростору U відносно цієї функції.

18. Нехай у певній базі $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ простору V білінійна функція $\varphi : V \times V \to P$ має матрицю F, а лінійне перетворення $\mathcal{A} : V \to V$ — матрицю A. Доведіть, що кожна з функцій $\psi_l(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \varphi(\mathcal{A}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})$, $\psi_r(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{u}, \mathcal{A}(\boldsymbol{v}))$ і $\psi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \varphi(\mathcal{A}(\boldsymbol{u}), \mathcal{A}(\boldsymbol{v}))$ є білінійною і знайдіть у цій же базі матриці цих функцій.

19. У базі $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ простору $\mathbb{R}^3$ задано білінійну форму φ з матрицею $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ і лінійне перетворення $\mathcal{A}$ з матрицею $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Знайдіть у цій же базі матриці білінійних форм $\psi_r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}, \mathcal{A}(\boldsymbol{y}))$ і $\psi_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varphi(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$.

20. Нехай φ_1 і φ_2 — дві невироджені білінійні форми на просторі V. Доведіть, що існує таке невироджене лінійне перетворення $\psi : V \to V$, що $\varphi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varphi_1(\psi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$.

21. Доведіть, що додатно визначена симетрична білінійна функція буде невиродженою на кожному підпросторі.

Додаткові задачі

22. Наведіть приклад симетричної білінійної функції та підпросторів U та W, для яких рівність $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$ не виконується.

23. З'ясуйте, чи будуть еквівалентними над полем $\mathbb{Q}$ білінійні функції із зад. 12.15.

24. Доведіть, що білінійна функція $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}\,(AB)$ на просторі $M_n(\mathbb{R})$ є невиродженою.

25. Доведіть, що білінійну функцію $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ можна подати у вигляді добутку $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = l_1(\boldsymbol{u}) \cdot l_2(\boldsymbol{v})$ двох лінійних функцій $l_1(\boldsymbol{u})$ та $l_2(\boldsymbol{v})$ тоді й лише тоді, коли φ має ранг 1.

26.* Доведіть, що для кожної несиметричної білінійної функції рангу 1 існує база, в якій вона зображується у вигляді $x_1 y_2$.

27. Доведіть, що ненульова косиметрична білінійна функція не може розкладатися в добуток двох лінійних функцій.

28. Нехай φ — додатно визначена ермітова функція на комплексному просторі V, $\mathcal{A} : V \to V$ — лінійне перетворення.

a) Доведіть, що коли для кожного вектора $\boldsymbol{v} \in V$ $\varphi(\mathcal{A}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) = 0$, то перетворення $\mathcal{A}$ — нульове.

b) Чи залишиться це твердження правильним для симетричних білінійних функцій на дійсному просторі?

29.* Нехай $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum a_{ij}x_iy_j$ та $\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum b_{ij}x_iy_j$ — невід'ємно (додатно) визначені симетричні функції. Доведіть, що білінійна функція $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum a_{ij}b_{ij}x_iy_j$ також є невід'ємно (додатно) визначеною.

30. Нехай φ — невироджена кососиметрична білінійна функція на n–вимірному просторі. Доведіть, що для кожної кососиметричної матриці A порядку n знайдеться така система векторів $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, що A збігається з матрицею Грама $G = (\varphi(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j))$ цієї системи векторів.

31.* Доведіть, що коли для довільних векторів $\boldsymbol{u}$ та $\boldsymbol{v}$ з рівності $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ випливає рівність $\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0$, то білінійна функція φ є симетричною або кососиметричною.

32. Доведіть, що ермітова функція $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ відновлюється за своєю квадратичною функцією $f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$.

33.* Підпростір $U \subseteq V$ називається *ізотропним* відносно білінійної функції φ, якщо $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ для всіх $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in U$. Нехай φ — кососиметрична, а $V^\perp$ — її ядро. Доведіть, що розмірність максимального ізотропного підпростору U дорівнює $\dim U = \dfrac{\dim V + \dim V^\perp}{2}$.

Домашнє завдання

34. З'ясуйте, які з наступних функцій будуть білінійними функціями на $\mathbb{C}$ як векторному просторі над $\mathbb{R}$: a) $f(z, u) = \mathrm{Re}\,(zu)$; b) $f(z, u) = \mathrm{Re}\,(z\overline{u})$; c) $f(z, u) = |zu|$; d) $f(z, u) = \mathrm{Im}\,(z\overline{u})$. У разі позитивної відповіді з'ясуйте, чи буде ця білінійна функція симетричною, і знайдіть її матрицю в базі $1, i$.

35. З'ясуйте, при яких елементарних перетвореннях бази простору матриця білінійної функції змінюється за тим же правилом, що й матриця лінійного перетворення.

36. Білінійна функція f на просторі $\mathbb{C}^3$ задана своєю матрицею $A = \begin{pmatrix} i & 1+i & 0 \\ -1+i & 0 & 2-i \\ 2+i & 3-i & -1 \end{pmatrix}$. Обчисліть $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, якщо $\boldsymbol{x} = (1+i, 1-i, 1)$, $\boldsymbol{y} = (-2+i, -i, 3+2i)$.

37. Знайдіть матрицю білінійної функції в новій базі, якщо відомі її матриця $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ в старій базі та матриця $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ переходу до нової бази.

38. У базі $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ простору $\mathbb{R}^3$ задано білінійну форму φ з матрицею $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ і лінійне перетворення $\mathcal{A}$ з матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Знайдіть у цій же базі матриці білінійних форм $\psi_r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}, \mathcal{A}(\boldsymbol{y}))$ та $\psi_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varphi(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$.

39. Знайдіть канонічний вигляд симетричної білінійної функції
$$2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 - x_2y_3 + 3x_3y_1 - x_3y_2 + x_3y_3.$$

40. Зведіть кососиметричну білінійну форму до діагонального вигляду і знайдіть формули переходу до нових координат:

a) $x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_4 + x_4y_1 + 2(x_2y_3 - x_3y_2) + 3(x_3y_4 - x_4y_3)$;

b) $x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_4 - x_4y_1 - x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3$.

41. У просторі $\mathbb{R}^3$ знайдіть ортогональне доповнення до підпростору $U = \langle (1,2,3), (4,5,6) \rangle$ відносно білінійної функції з матрицею
$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Література. [1], с. 81–83; [2], с. 191–195; [3], с. 57–61; [4], с. 187–191; [5], с. 309–321; [7], с. 200–204, 205–210, 212–215; [8], с. 41–44; [13], с. 207–211.

Заняття 13. Квадратичні функції

Необхідні поняття. Квадратичною функцією $f : V \to P$ на просторі V називається функція, яка одержується з деякої білінійної функції $\varphi : V \times V \to P$ ототожненням аргументів (тобто $f(\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ для всіх $\boldsymbol{v} \in V$).

Матрицею $[f]$ *квадратичної функції* $f(\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ у базі $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ називають матрицю $A = (a_{ij})$ відповідної симетричної білінійної функції φ у цій же базі.

Квадратична функція

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j}^{n} 2a_{ij} x_i x_j$$

має *канонічний вигляд*, якщо ненульовими є лише коефіцієнти при квадратах (тобто коли з $i < j$ випливає $a_{ij} = 0$).

Кожну квадратичну функцію невиродженим лінійним перетворенням можна звести до канонічного вигляду. Більше того, якщо квадратична функція має ранг r, то невиродженим лінійним перетворенням її можна звести до вигляду

$$y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_r^2 \tag{40}$$

у дійсному випадку і до вигляду

$$y_1^2 + \cdots + y_r^2 \tag{41}$$

в комплексному випадку. Такий вигляд квадратичної функції називається *нормальним.*

Якщо дійсна квадратична функція f зводиться до вигляду (40), то пара (k, r) називається *сигнатурою* квадратичної форми f, а самі числа k та r — відповідно *додатним* і *від'ємним індексами інерції* функції f.

Дійсна квадратична функція $f(x)$ на просторі V називається *додатно визначеною*, якщо для кожного ненульового вектора $\boldsymbol{x}$ $f(\boldsymbol{x}) > 0$. Замінюючи в цьому означенні знак $>$ послідовно на $\geq$, $<$ та $\leq$, приходимо відповідно до понять *невід'ємно визначеної*, *від'ємно визначеної* і *недодатно визначеної* квадратичних функцій.

Симетрична білінійна функція $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ називається *додатно визначеною*, якщо такою є відповідна квадратична функція $f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$. Враховуючи бієкцію (при фіксованій базі простору) між симетричними білінійними функціями і симетричними матрицями, можна говороти про *додатно визначені симетричні матриці*. Аналогічно переносяться і поняття *невід'ємної визначеності*, *від'ємної визначеності* і *недодатної визначеності*.

Необхідні твердження. **1.** Якщо $\varphi = \varphi_{\text{сим}} + \varphi_{\text{кос}}$ — розклад білінійної функції φ в суму симетричної й кососиметричної, то квадратична функція $f(\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ повністю визначається симетричною компонентою $\varphi_{\text{сим}}$ функції φ і не залежить від її кососиметричної компоненти. Більше того, ця відповідність між симетричними білінійними функціями на просторі V і квадратичними функціями на V є взаємно однозначною.

2. Якщо $[f]$ — матриця квадратичної функції φ у базі $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, а $[\boldsymbol{x}]$ — координати вектора $\boldsymbol{x}$ у цій же базі, то

$$f(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}]^\top \cdot [f] \cdot [\boldsymbol{x}]\,.$$

3. При переході до нової бази у просторі V матриця квадратичної функції $\varphi : V \times V \to P$ змінюється за правилом

$$[f]' = S^\top \cdot [f] \cdot S\,,$$

де S — матриця переходу до нової бази.

4. *Метод Якобі зведення квадратичної функції до канонічного вигляду.* Якщо головні кутові мінори

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

матриці квадратичної функції f від n змінних ненульові, то існує ортогональна база, в якій функція f має канонічний вигляд

$$f = \Delta_1 x_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} x_3^2 + \cdots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2\,.$$

5. *Закон інерції дійсних квадратичних форм.* Кількість додатних і кількість від'ємних коефіцієнтів у канонічному вигляді дійсної квадратичної форми не залежать від способу її зведення до канонічного вигляду.

6. Дійсна квадратична функція буде додатно визначеною тоді й лише тоді, коли її додатний індекс інерції дорівнює розмірності простору.

7. *Критерій Сильвестра додатної визначеності квадратичної функції.* Дійсна квадратична функція f з матрицею $[f] = (a_{ij})$ буде додатно визначеною тоді й лише тоді, коли всі головні кутові мінори

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

матриці $[f]$ є додатними.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Знайдіть симетричну білінійну форму, асоційовану з квадратичною формою* $f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, *якщо*

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 4x_1y_3 + x_2y_1 - 5x_2y_3 + x_3y_3.$$

Розв'язання. Форма, яку потрібно знайти, це — перший доданок у розкладі форми $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ у суму симетричної й кососиметричної форм. Позаяк такий розклад має вигляд

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\big(\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \varphi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\big) + \frac{1}{2}\big(\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \varphi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\big),$$

то шукана форма дорівнює

$$\frac{1}{2}\big(\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \varphi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\big) = \frac{1}{2}\big((2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 4x_1y_3 + x_2y_1 - 5x_2y_3 + x_3y_3)+$$
$$+(2y_1x_1 - 3y_1x_2 - 4y_1x_3 + y_2x_1 - 5y_2x_3 + y_3x_3)\big) =$$
$$= 2x_1y_1 - x_1y_2 - 2x_1y_3 - x_2y_1 - \frac{5}{2}x_2y_3 - 2x_3y_1 - \frac{5}{2}x_3y_2 + x_3y_3. \quad \square$$

Задача 2. *Зведіть дійсну квадратичну функцію*

$$f = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1x_3 - 12x_2x_3 + 4x_3^2 - 4x_2x_4 - 8x_3x_4 - x_4^2$$

до канонічного вигляду методом Лагранжа і методом Якобі.

Розв'язання. а) Метод Лагранжа. Спочатку доповнюємо групу членів з x_1 до повного квадрату:

$$x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 = (x_1 + 3x_2 - 2x_3)^2 - 9x_2^2 - 4x_3^4 + 12x_2x_3\,.$$

Після заміни $y_1 = x_1 + 3x_2 - 2x_3$ отримуємо:

$$y_1^2 - 4x_2^2 - 4x_2x_4 - 8x_3x_4 - x_4^2.$$

Далі доповнюємо до повного квадрату групу членів з x_2:

$$-4x_2^2 - 4x_2x_4 = -(2x_2 + x_4)^2 + x_4^2$$

і після заміни $y_2 = 2x_2 + x_4$ отримуємо:

$$f = y_1^2 - y_2^2 - 8x_3x_4.$$

Квадрати змінних x_3 та x_4 відсутні. Тому робимо допоміжну заміну

$$x_3 = y_3 + y_4, \qquad x_4 = y_3 - y_4$$

(або, що те ж саме, $y_3 = \frac{1}{2}(x_3 + x_4)$, $y_4 = \frac{1}{2}(x_3 - x_4)$). Після цього квадратична функція вже набуває канонічного вигляду:

$$f = y_1^2 - y_2^2 - 8y_3^2 + 8y_4^2.$$

b) Метод Якобі. Виписуємо матрицю квадратичної функції:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -6 & -2 \\ -2 & -6 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \tag{42}$$

і починаємо обчислювати головні кутові мінори:

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки $\Delta_3 = 0$, а визначник матриці квадратичної форми ненульовий:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -6 & -2 \\ -2 & -6 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 64,$$

то метод Якобі безпосередньо для матриці (42) не спрацьовує. Потрібна допоміжна заміна змінних, яка зробить головні кутові мінори ненульовими. Спробуємо перенумерувати змінні у зворотному порядку:

$$z_1 = x_4, \quad z_2 = x_3, \quad z_3 = x_2, \quad z_4 = x_1.$$

Квадратична функція набуває вигляду

$$z_4^2 + 6z_4z_3 + 5z_3^2 - 4z_4z_2 - 12z_3z_2 + 4z_2^2 - 4z_3z_1 - 8z_2z_1 - z_1^2,$$

а її матриця — вигляду

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & -6 & -2 \\ -2 & -6 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Зауважимо, що матрицю (43) можна одержати з (42) перестановкою рядків у зворотному порядку, а потім такою ж перестановкою стовпчиків. Головні кутові мінори тепер дорівнюють:

$$\Delta_1 = -1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = -20,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & -6 \\ -2 & -6 & 5 \end{vmatrix} = -176,\ \Delta_4 = 64.$$

Позаяк усі вони ненульові, то можна виписувати канонічний вигляд:

$$\Delta_1 \cdot y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot y_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \cdot y_3^2 + \frac{\Delta_4}{\Delta_3} \cdot y_4^2 = -y_1^2 + 20 \cdot y_2^2 + \frac{44}{5} \cdot y_3^2 - \frac{4}{11} \cdot y_4^2.$$

□

Зауваження. Як бачимо, канонічний вигляд квадратичної функції дуже сильно залежить від способу зведення до такого вигляду. Що не залежить від способу зведення, так це кількість додатних і кількість від'ємних коефіцієнтів.

Задача 3. *Знайдіть нормальний вигляд дійсної квадратичної функції* $4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$ *і невироджене лінійне перетворення змінних, яке приводить до цього вигляду.*

Розв'язання. Оскільки нам потрібно знайти і відповідне перетворення координат, то зводити функцію до нормального вигляду краще методом Лагранжа:

$$(4x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 - 3x_2x_3 = (2x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2x_3.$$

Після заміни $2x_1 - x_2 + x_3 = y_1,\ \ x_2 = y_2 + y_3,\ \ x_3 = y_2 - y_3$ функція набуває канонічного вигляду:

$$y_1^2 - y_2^2 + y_3^2.$$

Перетворення змінних, яке приводить функцію до цього вигляду, виписується вже легко:

$$x_2 = y_2 + y_3, \quad x_3 = -y_2 + y_3,$$
$$x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + x_2 - x_3) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 - y_2 + y_3) = \frac{1}{2}y_1 + y_3. \qquad \square$$

Задача 4. *Знайдіть невироджене лінійне перетворення змінних, яке переводить квадратичну функцію*

$$f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$$

у квадратичну функцію

$$g = 4y_1^2 + y_2^2 + 9y_3^2 - 12y_1y_3\,.$$

Розв'язання. Зведемо спочатку кожну з функцій до нормального вигляду методом Лагранжа:

$$\begin{aligned}
f &= 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3 = \\
&= (5x_1^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3) + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_2x_3 = \\
&= \Big(\sqrt{5}x_1 + \frac{4}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{3}{\sqrt{5}}x_3\Big)^2 + \frac{9}{5}x_2^2 + \frac{1}{5}x_3^2 + \frac{6}{5}x_2x_3 = \\
&= \Big(\sqrt{5}x_1 + \frac{4}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{3}{\sqrt{5}}x_3\Big)^2 + \Big(\frac{3}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}x_3\Big)^2.
\end{aligned}$$

Після заміни $\sqrt{5}x_1 + \frac{4}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{3}{\sqrt{5}}x_3 = z_1,\ \frac{3}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}x_3 = z_2,\ x_3 = z_3$ отримуємо: $f = z_1^2 + z_2^2$.

Аналогічно:

$$\begin{aligned}
g &= 4y_1^2 + y_2^2 + 9y_3^2 - 12y_1y_3 = \\
&= (4y_1^2 - 12y_1y_3) + y_2^2 + 9y_3^2 = (2y_1 - 3y_3)^2 + y_2^2.
\end{aligned}$$

Після заміни $2y_1 - 3y_3 = z_1,\ y_2 = z_2,\ y_3 = z_3$ отримуємо: $g = z_1^2 + z_2^2$.

Таким чином, ми привели обидві функції до одного й того ж нормального вигляду. Тепер знаючи, як зети виражаються через ікси та ігреки, можна ікси виразити через ігреки:

$$x_3 = z_3 = y_3;$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}\Big(z_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}x_3\Big) = \frac{\sqrt{5}}{3}z_2 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{\sqrt{5}}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3;$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(z_1 - \frac{4}{\sqrt{5}}x_2 - \frac{3}{\sqrt{5}}x_3\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 - 3y_3) - \frac{4}{5}\Big(\frac{\sqrt{5}}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3\Big) - \frac{3}{5}y_3 =$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}y_1 - \frac{4\sqrt{5}}{15}y_2 - \Big(\frac{3\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{3}\Big)y_3.$$

Таким чином, лінійне перетворення змінних, яке переводить функцію f у функцію g, має вигляд:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}y_1 - \frac{4\sqrt{5}}{15}y_2 - \Big(\frac{3\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{3}\Big)y_3, \quad x_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3, \quad x_3 = y_3. \quad \square$$

Задача 5. *Зведіть квадратичну функцію* $f = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i<j}^{n} x_i x_j$ *до канонічного вигляду.*

Розв'язання. Щоб коефіцієнти матриці функції були цілими числами, зручно замість f взяти функцію $2f$ (очевидно, що ці функції еквівалентні). Тоді матриця функції матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Головні кутові мінори цієї матриці легко обчислюються (спочатку всі рядки додаємо до першого, а потім, після винесення спільного множника за визначник, від кожного рядка віднімаємо перший):

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+1 & k+1 & k+1 & \dots & k+1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (k+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} = (k+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (k+1).$$

За методом Якобі виписуємо канонічний вигляд:

$$f = 2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 + \frac{4}{3}y_3^2 + \dots + \frac{n+1}{n}y_n^2. \qquad \square$$

Задача 6. *З'ясуйте, чи будуть еквівалентними над полем* $\mathbb{R}$ *або над полем* $\mathbb{C}$ *квадратичні функції* $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$ *та* $g = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$?

Розв'язання. Зведемо обидві функції до канонічного вигляду методом Лагранжа:

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3 = \\ &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) + x_3^2 = \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^3, \end{aligned}$$

де $x_1 - x_2 = y_1$, $x_2 + 2x_3 = y_2$, $x_3 = y_3$.

$$\begin{aligned} g = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 = (x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 = \\ = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + 4x_2x_3 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^3, \end{aligned}$$

де $x_1 - 2x_2 + x_3 = y_1$, $2x_2 = y_2 + y_3$, $2x_3 = y_2 - y_3$.

Оскільки сигнатури функцій — відповідно $(3,0)$ та $(2,1)$ — різні, то над полем $\mathbb{R}$ вони не еквівалентні. З іншого боку, ранги обох функцій дорівнюють 3. Тому над полем $\mathbb{C}$ вони еквівалентні. $\square$

Задача 7. *З'ясуйте, для яких значень параметра* λ *дійсна квадратична функція* $f = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ *буде додатно визначеною.*

Розв'язання. За критерієм Сильвестра функція f буде додатно визначеною тоді й лише тоді, коли всі головні кутові мінори її матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

будуть додатними. Обчислимо ці мінори:

$$\Delta_1 = 5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 10.$$

Позаяк $\Delta_1 > 0$ і $\Delta_2 > 0$, то функція f буде додатно визначеною тоді й лише тоді, коли буде виконуватися нерівність $\Delta_3 = \lambda - 10 > 0$, тобто коли $\lambda > 10$. □

Основні задачі

8. Знайдіть симетричну білінійну функцію, асоційовану з квадратичною функцією:

a) $x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;
b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

9. Знайдіть кількість класів еквівалентних між собою квадратичних функцій від n невідомих a) над полем $\mathbb{C}$, b) над полем $\mathbb{R}$.

10. Зведіть квадратичну функцію до канонічного вигляду методом Якобі:

a) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
b) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;
c) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;
d) $x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

11. Зведіть квадратичну функцію до нормального вигляду методом Лагранжа:

a) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$;
b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$;
c) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$;
d) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

12. Знайдіть нормальний вигляд дійсної квадратичної функції і невироджене лінійне перетворення, яке приводить до цього вигляду:

a) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

b) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$.

13. Знайдіть невироджене лінійне перетворення, яке переводить квадратичну функцію $f = 3x_1^2 + 10x_2^2 + 25x_3^2 - 12x_1x_2 - 18x_1x_3 + 40x_2x_3$ у квадратичну функцію $g = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2$.

14. З'ясуйте, чи будуть еквівалентними над полем $\mathbb{R}$ або над полем $\mathbb{C}$ квадратичні функції f та g:

a) $f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$,
$g = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;

b) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$,
$g = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$;

15. З'ясуйте, які з наступних квадратичних функцій еквівалентні між собою над полем $\mathbb{R}$:

a) $f_1 = x_1^2 - x_2x_3$, $f_2 = y_1y_2 - y_3^2$, $f_3 = z_1z_2 + z_3^2$;

b) $f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$, $f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3$, $f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3$.

16. Зведіть квадратичну функцію до канонічного вигляду:

a) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n$; b) $\sum\limits_{i<j}^{n} x_ix_j$.

17. Доведіть, що в додатно визначеної квадратичної форми всі коефіцієнти при квадратах є додатними. Чи буде ця умова достатньою для додатної визначеності квадратичної форми?

18. З'ясуйте, чи буде додатно визначеною квадратична функція:
$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 6x_3x_4$;

19. З'ясуйте, для яких значень параметра λ квадратична функція буде додатно визначеною:

a) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$;

b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.

20. Доведіть, що квадратична функція буде від'ємно визначеною тоді й лише тоді, коли знаки головних кутових мінорів $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ її матриці чергуються, причому $\Delta_1 < 0$.

21. З'ясуйте, для яких значень параметра λ квадратична функція буде від'ємно визначеною:
a) $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$;
b) $\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

22. Доведіть, що коли в симетричній матриці всі головні кутові мінори додатні, то всі діагональні елементи також додатні.

23. Нехай $l_1, \dots, l_p, l_{p+1}, \dots, l_{p+q}$, — дійсні лінійні функції від $x_1, \dots, x_n$. Доведіть, що для квадратичної функції $f = l_1^2 + \dots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - \dots - l_{p+q}^2$ додатний індекс інерції $\leq p$, а від'ємний індекс $\leq q$.

Додаткові задачі

24. Знайдіть невироджене лінійне перетворення змінних, яке приводить квадратичну функцію із зад. 13.5 до нормального вигляду.

25.* Зведіть квадратичну функцію $\sum\limits_{i<j}^{n} |i-j| \cdot x_i x_j$ до нормального вигляду.

26. Знайдіть додатний і від'ємний індекси інерції квадратичної функції $f(A) = \operatorname{tr} A^2$ на просторі матриць $M_n(\mathbb{R})$.

27.* Відомо, що в деякій базі головні мінори матриці дійсної квадратичної форми f від чотирьох змінних задовольняють умови $\triangle_1 > 0$, $\triangle_2 = \triangle_3 = 0$, $\triangle_4 > 0$. Знайдіть сигнатуру форми f.

28. Доведіть, що дійсна квадратична форма $f = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, яка задовольняє умову $a_{ii} > \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, $i = 1, 2 \dots, n$, є додатно визначеною.

29.* Доведіть, що квадратична форма буде невід'ємно (додатно) визначеною тоді й лише тоді, коли її матриця A розкладається в добуток $A = B^\top B$, де B — (невироджена) матриця.

30. Нехай A — додатно визначена матриця. Доведіть, що обернена матриця A^{-1} і приєднана матриця A^* також додатно визначені.

31. Доведіть, що для кожної додатно визначеної квадратичної функції f виконується нерівність $\sqrt{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})} \leq \sqrt{f(\boldsymbol{x})} + \sqrt{f(\boldsymbol{y})}$. За яких умов буде мати місце рівність?

32. Нехай f та g — дійсні квадратичні функції на n–вимірному просторі, причому принаймні одна з них є додатно визначеною. Доведіть, що "поверхні" $f = 1$ і $g = 1$ не мають спільних точок тоді й лише тоді, коли функція $f - g$ є додатно або від'ємно визначеною.

33.* Доведіть, що коли дійсна квадратична функція f набуває значень різних знаків (тобто існують такі вектори $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, що $f(\boldsymbol{v}_1) < 0$ та $f(\boldsymbol{v}_2) > 0$), то в просторі існує база з ізотропних векторів (вектор $\boldsymbol{v}$ називається *ізотропним*, якщо $f(\boldsymbol{v}) = 0$).

34.* Доведіть, що множина ізотропних векторів утворює підпростір тоді й лише тоді, коли відповідна функція f є невід'ємно або недодатно визначеною. Знайдіть розмірність цього підпростору.

35. Підпростір $U \subseteq V$ називається *ізотропним* відносно білінійної функції φ, якщо $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ для всіх $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in U$. Нехай φ — невироджена симетрична білінійна функція, а p та q — її додатний і від'ємний індекси інерції відповідно. Доведіть, що максимальна розмірність ізотропного підпростору дорівнює $\min(p, q)$.

36. Чи будуть еквівалентними квадратичні функції:
a) $f = 4x^2 + 8xy + 3y^2$ та $g = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ над $\mathbb{Z}$;
b) $f = 3x^2 + 6xy$ та $g = 2x^2 + 3xy + 4y^2$ над $\mathbb{Z}_7$?

37.* Нехай f — невироджена квадратична функція на просторі V над довільним полем P. Доведіть, що коли f набуває значення 0 на якомусь ненульовому векторі, то вона набуває усіх значень з поля P.

38.** (**Правило Гундельфінґера**) Нехай послідовність $\Delta_0 = 1$, Δ_1, $\ldots$, Δ_n головних кутових мінорів матриці квадратичної форми f від n змінних задовольняє такі умови:
1) $\Delta_n \neq 0$;
2) якщо $\Delta_k = 0$ для деякого k, $1 \leq k < n$,, то $\Delta_{k-1}\Delta_{k+1} \neq 0$.
Нульовим значенням Δ_k довільним чином припишемо знаки. Доведіть, що додатний (від'ємний) індекс інерції форми f дорівнює числу повторень (перемін) знака в послідовності Δ_0, Δ_1, $\ldots$, Δ_n.

39.** Доведіть, що над полем $\mathbb{R}$ з точністю до лінійної заміни змінних існує рівно 5 типів кубічних форм від двох змінних.

Домашнє завдання

40. Знайдіть симетричну білінійну функцію, асоційовану з квадратичною функцію $f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, якщо $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -x_1y_1 + x_2y_1 - 2x_2y_2 + 3x_2y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_3$.

41. Знайдіть необхідні й достатні умови того, щоб дійсна квадратична функція $f(\boldsymbol{x})$ була еквівалентна функції $-f(\boldsymbol{x})$.

42. Зведіть квадратичну функцію до канонічного вигляду методом Якобі:

a) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$;
b) $x_1^2 + 4x_2^2 + 11x_3^2 + 24x_4^2 - 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 16x_3x_4$.

43. Зведіть квадратичну функцію до канонічного вигляду методом Лагранжа:

a) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$;
b) $x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_1x_4 + x_2x_3 + 2x_2x_4 + x_3x_4$.

44. Знайдіть нормальний вигляд дійсної квадратичної функції

$$-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$$

і невироджене лінійне перетворення, яке приводить до цього вигляду.

45. З'ясуйте, чи будуть еквівалентними над полем $\mathbb{R}$ або над полем $\mathbb{C}$ квадратичні функції $f = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$ та $g = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

46. З'ясуйте, для яких значень параметра λ дійсна квадратична функція буде додатно визначеною:

a) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$;
b) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Література. [1], с. 83–100; [2], с. 194, 198–201; [3], с. 62–84, 87–94; [4], с. 191–198; [5], с. 321–337; [7], с. 204–205, 215–219; [8], с. 45–57; [10], с. 54–64, 77–81; [12], с. 143–156; [13], с. 211–227, 237–243, 284–292, 313–316.

Заняття 14. Геометрія евклідових та унітарних просторів

Необхідні поняття. Евклідовим простором називається векторний простір над полем дійсних чисел з фіксованою додатно визначеною симетричною білінійною функцією φ. Ця функція зазвичай називається *скалярним добутком.*

Унітарним простором називається векторний простір над полем комплексних чисел з фіксованою додатно визначеною ермітовою півторалінійною функцією φ. Ця функція називається (*ермітовим*) *скалярним добутком.*

Оскільки функція φ — фіксована, то замість $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ вживають коротші позначення $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ або $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$.

Довжиною (або *нормою*) вектора $\boldsymbol{v}$ називається число $|\boldsymbol{v}| := \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}$.

Вектори $\boldsymbol{u}$ та $\boldsymbol{v}$ називаються *ортогональними*, якщо $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$.

База, вектори якої попарно ортогональні, називається *ортогональною.* Якщо до того ж усі вектори бази мають довжину 1, то база називається *ортонормованою.*

Множина $U^{\perp}$ всіх векторів, ортогональних до кожного вектора з U називається *ортогональним доповненням* U.

В евклідовому просторі кут α між ненульовими векторами $\boldsymbol{v}$ та $\boldsymbol{u}$ визначається рівністю $\cos\alpha := \dfrac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})}{|\boldsymbol{v}| \cdot |\boldsymbol{u}|}$. Зауважимо, що в унітарному просторі поняття кута не визначається.

Необхідні твердження. **1.** Довільна система попарно ортогональних ненульових векторів є лінійно незалежною.

2. Два скінченновимірні евклідові (унітарні) простори будуть ізоморфними тоді й лише тоді, коли вони мають однакову розмірність.

3. *Нерівність Коші–Буняковського–Шварца.* Для довільних векторів $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ евклідового (унітарного) простору виконується нерівність

$$|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}| \leq |\boldsymbol{v}| \cdot |\boldsymbol{u}| \ .$$

Рівність досягається, коли вектори $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ пропорційні.

4. *Нерівність трикутника.* $|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}| \leq |\boldsymbol{v}|+|\boldsymbol{u}|$ для довільних векторів $\boldsymbol{v}$ та $\boldsymbol{u}$ евклідового (унітарного) простору.

5. У кожному евклідовому (унітарному) просторі існує ортонормована база.

6. Для довільної непустої підмножини U ортогональне доповнення $U^{\perp}$ є підпростором. Якщо U — підпростір, то $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

7. Для довільного підпростору $U \subseteq V$ евклідового (унітарного) простору V виконується рівність $V = U \oplus U^{\perp}$. Зокрема, $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$.

8. Якщо $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — ортонормована база простору V, то скалярний добуток векторів $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ та $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}_n$ обчислюється за формулою

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

в евклідовому просторі, і за формулою

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

— в унітарному просторі.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Нехай* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_1$ *і* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_2$ *— два різні скалярні добутки на одному й тому ж векторному просторі* V*. Доведіть, що функція* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_2$ *також є скалярним добутком на* V*.*

Розв'язання. Якщо в просторі зафіксувати базу, то з'являється взаємно однозначна відповідність між симетричними білінійними (відповідно ермітовими півторалінійними) функціями і симетричними (відповідно ермітовими) матрицями. Позаяк сума двох таких матриць знову є симетричною (відповідно ермітовою), то функція $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_2$ є симетричною білінійною (відповідно ермітовою півторалінійною).

Лишилося довести додатну визначеність нашої функції. Та це відразу випливає з того, що для ненульового вектора $\boldsymbol{x}$ обидва доданки в правій частині виразу $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})_2$ є додатними. □

Задача 2. *У просторі* $\mathbb{R}^4$ *зі стандартним скалярним добутком знайдіть довжини сторін і внутрішні кути трикутника з вершинами* $A = (1, 2, 1, 2)$, $B = (3, 1, -1, 0)$, $C = (1, 1, 0, 1)$.

Розв'язання. Щоб знайти координати вектора $\overrightarrow{XY}$ з початком у точці X і кінцем у точці Y, треба від координат кінця відняти координати початку. Тому $\overrightarrow{AB} = (3, 1, -1, 0) - (1, 2, 1, 2) = (2, -1, -2, -2)$. Аналогічно знаходимо: $\overrightarrow{AC} = (0, -1, -1, -1)$; $\overrightarrow{BC} = (-2, 0, 1, 1)$. Тепер легко знайти довжини сторін трикутника:

$$|AB| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}; \quad |AC| = \sqrt{3}, \quad |BC| = \sqrt{6}.$$

Щоб знайти кути, спочатку знаходимо їх косинуси:

$$\cos\angle A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|AB|\cdot|AC|} = \frac{5}{\sqrt{39}},$$

$$\cos\angle B = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|BA|\cdot|BC|} = \frac{8}{\sqrt{78}}, \qquad \cos\angle C = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|CA|\cdot|CB|} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Звідси $\angle A = \arccos\frac{5}{\sqrt{39}}$, $\angle B = \arccos\frac{8}{\sqrt{78}}$, $\angle C = \arccos\frac{-\sqrt{2}}{3}$. □

Задача 3. *У просторі* $\mathbb{R}_2[x]$ *зі скалярним добутком*

$$(f(x), g(x)) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

знайдіть кути трикутника, утвореного векторами 1, x *та* $1+x$.

Розв'язання. Маємо три вершини трикутника: $A = 1$, $B = x$, $C = 1+x$. Як і в попередній задачі, знаходимо:

$$\overrightarrow{AB} = x - 1, \quad \overrightarrow{AC} = (1+x) - 1 = x, \quad \overrightarrow{BC} = (1+x) - x = 1.$$

Звідси

$$|AB| = \sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}} = \sqrt{\int_{-1}^{1}(1-x)^2dx} = \sqrt{\left(x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

$$|AC| = \sqrt{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}} = \sqrt{\int_{-1}^{1}x^2dx} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

$$|BC| = \sqrt{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}} = \sqrt{\int_{-1}^{1}1^2dx} = \sqrt{2}.$$

Далі знаходимо:

$$\cos\angle A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|AB|\cdot|AC|} = \frac{\int_{-1}^{1}(x-1)xdx}{|AB|\cdot|AC|} = \frac{1}{2},$$

звідки $\angle A = 30°$. Аналогічно знаходимо:

$$\cos\angle B = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|BA|\cdot|BC|} = \frac{\int_{-1}^{1}(1-x)dx}{|BA|\cdot|BC|} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

$$\cos\angle C = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|CA|\cdot|CB|} = \frac{\int_{-1}^{1}x dx}{|CA|\cdot|CB|} = 0\,,$$

звідки $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$. □

Задача 4. *Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.*

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — паралелограм. Позначимо: $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$. Тоді сторони $\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{BC}$ дорівнюють відповідно $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$. Для діагоналей $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ маємо: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. Тому

$$|AC|^2 + |BD|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2 = (\boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2) +$$
$$+(\boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{ba} + \boldsymbol{a}^2) = 2\boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{b}^2 = |AB|^2 + |DC|^2 + |AD|^2 + |BC|^2\,,$$

що й треба було довести. □

Задача 5. *Знайдіть довжину діагоналі n–вимірного одиничного куба і кути, які вона утворює з ребрами куба.*

Розв'язання. Будемо вважати, що одиничний куб розташований так, що його вершини мають координати $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, де кожна з координат ε_i дорівнює або 0, або 1. Вершини $A = (0, 0, \ldots, 0)$ та $B = (1, 1, \ldots, 1)$ є протилежними, тому діагональ $\overrightarrow{AB}$ є вектором з координатами $(1, 1, \ldots, 1)$. Її довжина дорівнює

$$|AB| = \sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}} = \sqrt{n}\,.$$

Дві вершини куба є сусідніми тоді й тільки тоді, коли вони розрізняються однією координатою. Але тоді в однієї з вершин ця координата буде 0, а в іншої — 1. Тому ребро, яке з'єднує сусідні вершини, буде вектором вигляду $\boldsymbol{a} = (\ldots, 0, 1, 0, \ldots)$. Кут α між таким вектором і діагоналлю $\overrightarrow{AB}$ легко обчислюється:

$$\cos\angle\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}}{|AB|\cdot|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,,$$

звідки $\alpha = \arccos(1/\sqrt{n})$. □

Задача 6. *Нехай евклідовий простір E розкладається в пряму суму підпросторів U та V. Доведіть, що $E = U^{\perp} \oplus V^{\perp}$.*

Розв'язання. Якщо $E = U \oplus V$, то $\dim E = \dim U + \dim V$. Але згідно твердження **7** $\dim U^{\perp} = \dim E - \dim U$ та $\dim V^{\perp} = \dim E - \dim V$. Тому

$$\begin{aligned}\dim U^{\perp} + \dim V^{\perp} &= (\dim E - \dim U) + (\dim E - \dim V) = \\ &= 2\dim E - (\dim U + \dim V) = \dim E\end{aligned}$$

і для доведення рівності $E = U^{\perp} \oplus V^{\perp}$ досить показати, що $U^{\perp} \cap V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. Для цього розглянемо довільний вектор $\boldsymbol{a} \in U^{\perp} \cap V^{\perp}$. За умовою вектор $\boldsymbol{a}$ можна записати у вигляді $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, де $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{v} \in V$. Але $\boldsymbol{a} \in U^{\perp}$, тому $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}) = 0$. Аналогічно доводиться, що $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = 0$. Тому

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = 0 + 0 = 0\,.$$

Рівність $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ рівносильна тому, що $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$. Отже, $U^{\perp} \cap V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, що й треба було довести. □

Задача 7. *Доведіть, що коли в ортонормованій базі підпростір U задається лінійно незалежною системою лінійних рівнянь, то коефіцієнти цих рівнянь є координатами векторів бази ортогонального доповнення $U^{\perp}$.*

Розв'язання. Нехай підпростір U задається системою рівнянь

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = 0, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = 0. \end{array} \tag{44}$$

За умовою рівняння лінійно незалежні, тому ранг матриці системи (44) дорівнює m, підпростір U має розмірність $n - m$, а підпростір $U^{\perp}$ — розмірність $n - (n - m) = m$.

Рівність $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0$ можна трактувати, як умову ортогональності векторів $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ та $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Отже, кожен з векторів $\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, …, $\boldsymbol{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$ є ортогональним до кожного розв'язку $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системи (44), тобто до кожного вектора з U. Тому вектори $\boldsymbol{a}_1$, …, $\boldsymbol{a}_m$ належать підпростору $U^{\perp}$. Позаяк вони лінійно незалежні, а їх кількість дорівнює розмірності підпростору, то вони утворюють базу цього підпростору. □

Задача 8. *Знайдіть базу ортогонального доповнення до підпростору U, породженого векторами* $\boldsymbol{a}_1 = (1,3,0,2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,7,-1,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2,4,-1,0)$.

Розв'язання. Вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ належить ортогональному доповненню до підпростору U тоді й тільки тоді, коли він ортогональний до кожного з векторів $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, тобто коли $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1) = 0$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_2) = 0$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_3) = 0$. У термінах координат це означає, що вектор $\boldsymbol{x}$ задовольняє систему рівнянь

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 3x_2 & & & + & 2x_4 & = 0, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = 0, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & & & = 0. \end{array} \tag{45}$$

Таким чином, ортогональне доповнення $U^\perp$ збігається з множиною розв'язків системи (45), а база підпростору $U^\perp$ — з фундаментальною системою розв'язків цієї системи. Розв'язуючи систему (45) методом Ґауса, отримуємо:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Вибираючи в якості вільних змінних x_2 та x_4, знаходимо фундаментальну систему розв'язків:

x_1	x_2	x_3	x_4
-3	1	-2	0
-2	0	-4	1

.

Таким чином, базу ортогонального доповнення $U^\perp$ утворюють вектори $\boldsymbol{b}_1 = (-3, 1, -2, 0)$ та $\boldsymbol{b}_2 = (-2, 0, -4, 1)$. $\square$

Основні задачі

9. На звичайному тривимірному векторному просторі V визначимо функції:

a) $\varphi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|$; b) $\varphi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}| \cdot \cos^3(\widehat{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}})$;

c) $\varphi_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, де $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — звичайний скалярний добуток.

Які з цих функцій є скалярними добутками?

10. Знайдіть довжини сторін і внутрішні кути трикутника, вершини якого задані координатами:

a) $A = (2, 4, 2, 4, 2)$, $B = (6, 4, 4, 4, 6)$, $C = (5, 7, 5, 7, 2)$;

b) $A = (1, 2, 3, 2, 1)$, $B = (3, 4, 0, 4, 3)$,
$C = (1 + \frac{5}{26}\sqrt{78},\ 2 + \frac{5}{13}\sqrt{78},\ 3 + \frac{10}{13}\sqrt{78},\ 2 + \frac{5}{13}\sqrt{78},\ 1 + \frac{5}{26}\sqrt{78})$.

11. З'ясуйте, гострокутним чи тупокутним буде трикутник з вершинами 0, $x^2 + 3x$, $2x^2 + 2x - 1$, якщо в просторі $\mathbb{R}_2[x]$ скалярний добуток задається правилом:

a) $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2, b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$;

b) $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2, b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = a_0 b_0 + 2a_1 b_1 + a_2 b_2$.

12. Доведіть, що квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.

13. Знайдіть кут між мимобіжними діагоналями двох сусідніх граней куба.

14. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо n–вимірного одиничного куба, і з'ясуйте, для яких n цей радіус менший за ребро куба.

15. Доведіть, що довжина ортогональної проекції ребра n–вимірного куба на довільну його діагональ дорівнює $1/n$ довжини діагоналі.

16. Доведіть, що проекції вершин n–вимірного куба на його діагональ ділять її на n рівних частин.

17. Знайдіть кількість тих діагоналей n–вимірного куба, які ортогональні даній діагоналі.

18. Нехай $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — ортогональна база евклідового простору E_n, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — кути, які утворює вектор $\boldsymbol{v}$ з векторами бази. Доведіть, що $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cdots + \cos^2\alpha_n = 1$.

19. Нехай вектор $\boldsymbol{a}$ та число c — фіксовані. Який геометричний зміст має множина $\{\boldsymbol{v} \in V \mid (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}) = c\}$?

20. Доведіть, що в унітарному просторі з ортогональності векторів $\boldsymbol{u}$ та $\boldsymbol{v}$ випливає рівність $|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2$. Чи має місце зворотне твердження?

21. Доведіть, що в унітарному просторі вектори $\boldsymbol{u}$ та $\boldsymbol{v}$ будуть ортогональними тоді й лише тоді, коли для довільних чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ виконується рівність $|\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}|^2 = |\alpha\boldsymbol{u}|^2 + |\beta\boldsymbol{v}|^2$.

22. Доведіть, що для довільних підпросторів U і V евклідового простору виконуються рівності:

a) $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$; b) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.

23. У просторі $M_n(\mathbb{R})$ зі скалярним добутком $(A, B) = \operatorname{tr}(A^\top B)$ знайдіть ортогональне доповнення до підпростору: a) матриць з нульовим слідом; b) верхніх трикутних матриць; c) симетричних матриць.

24. Знайдіть базу ортогонального доповнення до підпростору, породженого векторами:

a) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 2, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 1, -2, 1)$;
b) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, -1, -1, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2, 1, 1, 3)$.

25. Підпростір U евклідового простору задано системою рівнянь:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & - & 2x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 9x_3 & - & x_4 & = & 0. \end{array}$$

Знайдіть систему рівнянь, яка задає ортогональне доповнення $U^\perp$.

26. Знайдіть ліве і праве ядра білінійної функції $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}(\boldsymbol{y}))$, визначеної на евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ із стандартним скалярним добутком, якщо лінійне перетворення $\mathcal{A}$ задане матрицею

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Додаткові задачі

27. Доведіть, що в унітарному просторі виконується тотожність

$$4(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|^2 + i|\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}|^2 - i|\boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v}|^2.$$

28. Доведіть, що для довільного лінійного перетворення φ евклідового простору виконуються рівності:

a) $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim(\operatorname{Ker} \varphi)^\perp$; b) $\dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim(\operatorname{Im} \varphi)^\perp$.

29. Доведіть, що точки A_0, A_1, ..., A_n, де $A_0 = (0, 0, \ldots, 0)$ та

$$A_k = \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 1}}, \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2 \cdot k \cdot (k-1)}}, \sqrt{\frac{k+1}{2k}}, 0, \ldots, 0 \right)$$

для $k = 1, 2, \ldots, n$, є вершинами правильного n–вимірного симплекса з ребром 1. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо цього симплекса.

30. Нехай U та V підпростори евклідового простору E, причому $\dim U < \dim V$. Доведіть, що в підпросторі V знайдеться ненульовий вектор, який буде ортогональний до всіх векторів з U.

31. У просторі $M_n(\mathbb{C})$ зі скалярним добутком $(A, B) = \operatorname{tr}(A^\top B)$ знайдіть ортогональне доповнення до множини ермітових матриць.

32. Доведіть, що коли у дійсному просторі в якійсь базі матриця (a_{ij}) білінійної функції φ є симетричною та для всіх i виконується нерівність $a_{ii} > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$, то функція φ визначає в цьому просторі скалярний добуток.

33.** Нехай $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ та $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ — ортонормовані бази відповідно підпросторів U та W евклідового простору, і нехай $A = \big((\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_j)\big)$ матриця порядку $k \times m$. Доведіть, що всі власні числа матриці $A^\top A$ належать відрізку $[0, 1]$ і не залежать від вибору баз у підпросторах U та W.

34.* У просторі $\mathbb{R}_n[x]$ всіх дійсних многочленів степеня $\leq n$ визначимо скалярний добуток: $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{+1} f(x) g(x) dx$. Доведіть, що *многочлени Лежандра*

$$P_0(x) = 1, \quad P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} \big((x^2-1)^k\big) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

утворюють ортогональну базу простору $\mathbb{R}_n[x]$.

35.* Знайдіть довжину многочлена Лежандра $P_k(x)$ як елемента евклідового простору $\mathbb{R}_n[x]$ із зад. 14.34.

36.* Обчисліть значення многочлена Лежандра $P_k(x)$ при $x = 1$.

37.** Нехай $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця порядку $n + 1$, в якій $a_{ii} = 0$ для всіх i та $a_{ij} > 0$ для всіх $i \neq j$. Знайдіть умови, необхідні й достатні для того, щоб A була матрицею віддалей для деякої системи $n + 1$ точок n–вимірного евклідового простору.

38.* 4–вимірний куб перетинається 3–вимірною гіперплощиною, що проходить через центр куба й ортогональна до діагоналі. Знайдіть форму тіла, яке утворюється при перетині.

39.** Знайдіть об'єм n–вимірної кулі радіуса 1.

Домашнє завдання

40. Як зміниться кут між ненульовими векторами $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$, якщо:
a) вектор $\boldsymbol{a}$ помножити на додатне число;
b) вектор $\boldsymbol{b}$ помножити на від'ємне число;
c) кожен з векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ помножити на від'ємне число?

41. У просторі $\mathbb{R}^4$ зі стандартним скалярним добутком знайдіть довжини сторін і внутрішні кути трикутника з вершинами $A = (0, 0, 0, 0)$, $B = (2, -1, 3, -2)$, $C = (3, 1, 5, 1)$.

42. У просторі $\mathbb{R}_2[x]$ зі скалярним добутком $(a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ знайдіть многочлен $f_0(x)$, рівновіддалений від многочленів $f_1(x) = 3x^2+2x+1$, $f_2(x) = -x^2+2x+1$, $f_3(x) = 3x^2+2x+5$, $f_4(x) = 3x^2 + 5x + 2$, і віддаль від $f_0(x)$ до цих многочленів.

43. Доведіть, що в евклідовому просторі рівність $|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}|$ виконується тоді й лише тоді, коли вектори $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ та $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ — ортогональні. Який геометричний зміст цього твердження?

44. Знайдіть базу ортогонального доповнення до підпростору, породженого векторами $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (-1, 1, -1, 1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (2, 0, 2, 0)$.

45. Підпростір U евклідового простору задано системою рівнянь:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 11x_3 & - & 13x_4 & = & 0, \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 18x_3 & - & 23x_4 & = & 0. \end{array}$$

Знайдіть систему рівнянь, яка задає ортогональне доповнення $U^{\perp}$.

46. Знайдіть ліве і праве ядра білінійної функції $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}(\boldsymbol{y}))$, визначеної на евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ із стандартним скалярним добутком, якщо лінійне перетворення $\mathcal{A}$ має матрицю

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Література. [1], с. 49–51, 55–57; [2], с. 202–204, 209–213; [3], с. 30–38, 84–86; [4], с. 144–154; [5], с. 337–343; [7], с. 135–146; [8], с. 103–113, 117–122; [9], с. 211–219; [10], с. 64–66; [12], с. 345–349; [13], с. 246–256, 292–297.

Заняття 15. Ортогоналізація й проектування

Необхідні поняття. Розклад вектора $\boldsymbol{v} \in V$ у суму $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}''$, де $\boldsymbol{v}' \in U$, а $\boldsymbol{v}'' \in U^{\perp}$, називається *ортогональним проектуванням* вектора $\boldsymbol{v}$ на підпростір U. Компоненти $\boldsymbol{v}'$ та $\boldsymbol{v}''$ називаються відповідно *ортогональною проекцією* на підпростір U і *ортогональною складовою* вектора $\boldsymbol{v}$.

Віддаллю між векторами $\boldsymbol{u}$ та $\boldsymbol{v}$ називається довжина вектора $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$.

Віддаллю між вектором $\boldsymbol{v}$ і підпростором U називається мінімум віддалей між $\boldsymbol{v}$ і векторами з підпростору U.

Кутом між вектором $\boldsymbol{v}$ і підпростором U вважають кут між вектором $\boldsymbol{v}$ і його ортогональною проекцією $\boldsymbol{v}'$ на цей підпростір.

Необхідні твердження. **1.** *Лема про ортогоналізацію.* Для довільного набору $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ векторів евклідового (унітарного) простору V існує набір векторів $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$, який задовольняє такі дві умови:

1) набір векторів $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ є ортогональним, тобто $\boldsymbol{b}_i \perp \boldsymbol{b}_j$ для довільних $i \neq j$;

2) для довільного k, $1 \leq k \leq m$,

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k \rangle .$$

2. Вектори $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2, \ldots$ з попередньої леми про ортогоналізацію можна шукати за допомогою процедури, яка називається *процесом ортогоналізації Ґрама–Шмідта*:

1) $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$;

2) якщо вектори $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{i-1}$ вже знайдено, то наступний вектор шукається за правилом: $\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{a}_i - \sum\limits_{s=1}^{i-1} \dfrac{(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_s)}{(\boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{b}_s)} \boldsymbol{b}_s$;

3) якщо на якомусь кроці отримаємо $\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{0}$, то викидаємо вектор $\boldsymbol{a}_i$ і продовжуємо процес ортогоналізації для системи $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_m$.

3. Кожну ортогональну систему ненульових векторів можна доповнити до ортогональної бази всього простору.

4. Ортогональна проекція $\boldsymbol{p}$ вектора $\boldsymbol{v}$ на пряму, яка визначається вектором $\boldsymbol{a}$, дорівнює $\boldsymbol{p} = \dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$.

5. Віддаль між вектором $\boldsymbol{v}$ і підпростором U дорівнює довжині ортогональної складової вектора $\boldsymbol{v}$ при його ортогональному проектуванні на підпростір U.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Знайдіть ортогональну базу підпростору, породженого векторами:*

а) $\boldsymbol{a}_1 = (2,3,-4,-6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,8,-2,-16)$, $\boldsymbol{a}_3 = (12,5,-14,5)$, $\boldsymbol{a}_4 = (3,11,4,-7)$ *евклідового простору,*

b) $\boldsymbol{a}_1 = (0,1-i,2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-i,2+3i,i)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0,0,2i)$ — *унітарного.*

Розв'язання. а) Ортогональну базу шукаємо за допомогою процесу ортогоналізації Ґрама–Шмідта. Маємо $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = (2,3,-4,-6)$. Вектор $\boldsymbol{b}_2$ шукаємо у вигляді $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \alpha_1\boldsymbol{b}_1$, причому коефіцієнт α_1 визначається з умови ортогональності вектора $\boldsymbol{b}_2$ до $\boldsymbol{b}_1$:

$$0 = (\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_1) = (\boldsymbol{a}_2 + \alpha_1\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1) = (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1) + \alpha_1(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1) = 130 + \alpha_1\cdot 65,$$

звідки $\alpha_1 = -2$ і

$$\boldsymbol{b}_2 = (1,8,-2,-16) - 2\cdot(2,3,-4,-6) = (-3,2,6,-4).$$

Вектор $\boldsymbol{b}_3$ шукаємо у вигляді $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 + \alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2$, причому коефіцієнти α_1, α_2 визначаються з умови ортогональності вектора $\boldsymbol{b}_3$ до векторів $\boldsymbol{b}_1$ і $\boldsymbol{b}_2$:

$$\begin{aligned}0 = (\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_1) &= (\boldsymbol{a}_3 + \alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_1) = (\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1) + \alpha_1(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1) + \alpha_2(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_1) = \\ &= (\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1) + \alpha_1(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1) = 65 + \alpha_1\cdot 65,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 = (\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_2) &= (\boldsymbol{a}_3 + \alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2) + \alpha_1(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2) + \alpha_2(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2) = \\ &= (\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2) + \alpha_2(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2) = -130 + \alpha_2\cdot 65.\end{aligned}$$

Звідси знаходимо: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$ і

$$\boldsymbol{b}_3 = (12,5,-14,5) - (2,3,-4,-6) + 2\cdot(-3,2,6,-4) = (4,6,2,3).$$

Вектор $\boldsymbol{b}_4$ шукаємо у вигляді $\boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{a}_4 + \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{b}_3$, причому коефіцієнти α_1, α_2, α_3 визначаються з умови ортогональності вектора $\boldsymbol{b}_4$ до векторів $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ та $\boldsymbol{b}_3$:

$$0 = (\boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_1) = (\boldsymbol{a}_4 + \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_1) =$$
$$= (\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_1) + \alpha_1(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) + \alpha_2(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1) + \alpha_3(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_1) =$$
$$= (\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_1) + \alpha_1(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = 65 + \alpha_1 \cdot 65.$$

Аналогічно знаходимо:

$$0 = (\boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_4 + \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_2) =$$
$$= (\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_2) + \alpha_2(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2) = 65 + \alpha_2 \cdot 65,$$

$$0 = (\boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_3) = (\boldsymbol{a}_4 + \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3) =$$
$$= (\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_3) + \alpha_3(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3) = 65 + \alpha_3 \cdot 65.$$

Звідси $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -1$ і

$$\boldsymbol{b}_4 = (3, 11, 4, -7) - (2, 3, -4, -6) - (-3, 2, 6, -4) - (4, 6, 2, 3) = (0, 0, 0, 0).$$

Поява в процесі ортогоналізації нульового вектора означає, що початкові вектори були лінійно залежні. В ортогональну базу включаємо лише отримані в процесі ортогоналізації ненульові вектори. Таким чином, шукана ортогональна база складається з векторів $\boldsymbol{b}_1 = (2, 3, -4, -6)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-3, 2, 6, -4)$ та $\boldsymbol{b}_3 = (4, 6, 2, 3)$.

b) Аналогічно п. a) ортогональну базу шукаємо за допомогою процесу ортогоналізації Ґрама–Шмідта. При цьому $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = (0, 1 - i, 2)$. Вектор $\boldsymbol{b}_2$ шукаємо у вигляді

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)} \boldsymbol{b}_1 = (-i, 2 + 3i, i) -$$
$$- \frac{-1 + 7i}{6} \Big(0, 1 - i, 2\Big) = \frac{1}{3} \Big(-3i, 3 + 5i, 1 - 4i \Big),$$

а вектор $\boldsymbol{b}_3$ — у вигляді

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)} \boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)} \boldsymbol{b}_2 = (0, 0, 2i) - \frac{4i}{6} \Big(0, 1 - i, 2\Big) -$$

$$-\frac{-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}i}{\frac{60}{9}}\left(-i, 1+\frac{5}{3}i, \frac{1}{3}-\frac{4}{3}i\right) = \frac{1}{10}\left(-1-4i, -1-i, i\right).$$

Таким чином, шукана ортогональна база складається з векторів $\boldsymbol{b}_1 = (0, 1-i, 2)$, $\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{3}(-3i, 3+5i, 1-4i)$ та $\boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{10}(-1-4i, -1-i, i)$. □

Задача 2. *Знайдіть ортогональну базу ортогонального доповнення до підпростору U, породженого векторами* $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1,2,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,0,0,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2,1,-1,-1,2)$.

Розв'язання. Вектор $\boldsymbol{x}$ належить ортогональному доповненню до підпростору U тоді і тільки тоді, коли він ортогональний до кожного з векторів $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, тобто є розв'язком системи

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 &+& x_2 &+& x_3 &+& 2x_4 &+& x_5 &=& 0,\\ x_1 & & & & &+& x_4 &-& x_5 &=& 0,\\ 2x_1 &+& x_2 &-& x_3 &-& x_4 &+& 2x_5 &=& 0. \end{array}$$

База ортогонального доповнення є фундаментальною системою розв'язків цієї системи. Розв'язуючи її методом Ґауса, отримуємо:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Вибираючи в якості вільних змінних x_4 та x_5, знаходимо фундаментальну систему розв'язків:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	-3	1	0	1
-1	1	-2	1	0

Таким чином, базу ортогонального доповнення $U^{\perp}$ утворюють вектори $\boldsymbol{b}_1 = (1,-3,1,0,1)$ і $\boldsymbol{b}_2 = (-1,1,-2,1,0)$. Застосовуючи до цих векторів процес ортогоналізації Ґрама–Шмідта, знаходимо ортогональну базу: $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{b}_1 = (1,-3,1,0,1)$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{b}_2 + \alpha\boldsymbol{e}_1$, причому з ортогональності $\boldsymbol{e}_2$ до $\boldsymbol{e}_1$ отримуємо:

$$0 = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{e}_1) + \alpha(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = -6 + 12\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{1}{2}\,.$$

Отже, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{b}_2 + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}, 1, \dfrac{1}{2}\right)$. $\square$

Задача 3. *Нехай $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — ортогональна база евклідового простору V. Доведіть, що для кожного вектора $\boldsymbol{v} \in V$ виконується рівність $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{v}$, де $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_i}$ — проекція вектора $\boldsymbol{v}$ на одновимірний підпростір $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle$.*

Розв'язання. Оскільки вектор $\boldsymbol{a}$ є базою підпростору $\langle \boldsymbol{a} \rangle$, то проекція $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v}$ має вигляд $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{a}$. Нехай $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{v} = \lambda_i \boldsymbol{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Для кожного i можемо записати $\boldsymbol{v} = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_i$, де вектор $\boldsymbol{v}_i$ ортогональний до вектора $\boldsymbol{e}_i$. Тому

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i) = (\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{e}_i) = (\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i) + (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{e}_i) = \lambda_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i).$$

З іншого боку, для вектора $\boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{e}_j$ маємо:

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i) = \lambda_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i).$$

Але тоді $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_i) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i) - (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_i) = \lambda_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) - \lambda_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = 0$. Отже, вектор $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ ортогональний до кожного вектора бази $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Тому $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ та $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$, що й треба було довести. $\square$

Задача 4. *Нехай $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — довільна система векторів евклідового простору E. Доведіть, що для кожного вектора $\boldsymbol{v} \in E$ система лінійних рівнянь*

$$\begin{array}{ccccccccc}
(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)\, x_1 & + & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\, x_2 & + & \cdots & + & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_k)\, x_k & = & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{v}), \\
(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1)\, x_1 & + & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2)\, x_2 & + & \cdots & + & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_k)\, x_k & = & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}), \\
\multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\
(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1)\, x_1 & + & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_2)\, x_2 & + & \cdots & + & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k)\, x_k & = & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{v})
\end{array} \tag{46}$$

має принаймні один розв'язок. За якої умови розв'язок буде єдиним?

Розв'язання. Нехай $(x_1, \ldots, x_k)$ — розв'язок системи (46). Розглянемо вектор $\boldsymbol{u} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_k \boldsymbol{a}_k$. Тоді систему (46) можна переписати у вигляді:

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{v}), \quad (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}), \quad \ldots, \quad (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{v}). \tag{47}$$

З іншого боку, якщо $\boldsymbol{v}'$ — ортогональна проекція вектора $\boldsymbol{v}$ на підпростір $U = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k \rangle$, то для $\boldsymbol{v}'$ виконуються рівності

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{v}') = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{v}), \quad (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}') = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}), \quad \dots, \quad (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{v}') = (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{v}). \tag{48}$$

З рівностей (47) і (48) випливає, що

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{u}) = 0, \ \ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{u}) = 0, \ \dots, \ (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{u}) = 0.$$

Отже, вектор $\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{u}$, який належить підпростору U, ортогональний до системи твірних $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_k$ цього підпростору. Тому $\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ та $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{u}$.

Таким чином, набір $(x_1, \dots, x_k)$ буде розв'язком системи (46) тоді й лише тоді, коли цей набір складається з коефіцієнтів розкладу $\boldsymbol{v}' = x_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + x_k \boldsymbol{a}_k$ ортогональної проекції $\boldsymbol{v}'$ вектора $\boldsymbol{v}$ на підпростір U за системою твірних $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ цього підпростору. Розклад за системою твірних існує завжди. Зрозуміло також, що такий розклад буде єдиним тоді і тільки тоді, коли система твірних є базою, тобто коли вектори $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_k$ лінійно незалежні. □

Зауваження. 1) Розв'язання системи (46) дає метод знаходження ортогональної проекції вектора $\boldsymbol{v}$ на підпростір $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k \rangle$. Визначник основної матриці цієї системи є визначником Ґрама системи векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$.

2) Задача та її розв'язання повністю переносяться і на випадок унітарного простору з однією зміною: у розв'язанні вектор $\boldsymbol{u} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + x_k \boldsymbol{a}_k$ треба замінити на $\boldsymbol{u} = \overline{x}_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + \overline{x}_k \boldsymbol{a}_k$.

Ще один метод знаходження ортогональної проекції вектора на підпростір описується в розв'язанні наступної задачі.

Задача 5. *Знайдіть ортогональну проекцію $\boldsymbol{v}'$ вектора $\boldsymbol{v} = (5, 2, -2, 2)$ на підпростір $U = \langle (2, 1, 1, -1), (1, 1, 3, 0), (1, 2, 8, 1) \rangle$ і відповідну ортогональну складову $\boldsymbol{v}''$.*

Розв'язання. Знайдемо спочатку базу підпростору U. Для цього знайдемо ранг матриці, утвореної з векторів системи твірних:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці дорівнює 2, тому $\dim U = 2$. В якості бази підпростору U можна взяти перший і третій рядки останньої матриці: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 3, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 5, 1)$.

Тепер знайдемо базу ортогонального доповнення $U^{\perp}$, якою є фундаментальна система розв'язків системи $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}) = 0$, $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}) = 0$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Вибираючи в якості вільних змінних x_3 та x_4, знаходимо фундаментальну систему розв'язків:

x_1	x_2	x_3	x_4
2	-5	1	0
1	-1	0	1

Таким чином, базу ортогонального доповнення $U^{\perp}$ утворюють вектори $\boldsymbol{e}_3 = (2, -5, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_4 = (1, -1, 0, 1)$.

Щоб знайти координати вектора $\boldsymbol{v}$ в базі $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$, розв'язуємо систему $x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 + x_4\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{v}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -5 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -5 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 16 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 41 & 0 & -41 \\ 0 & -1 & 16 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

З останньої системи послідовно знаходимо: $x_3 = -1$, $x_2 = -2$, $x_4 = 4$, $x_1 = 3$.

Після цього ортогональна проекція $\boldsymbol{v}'$ та ортогональна складова $\boldsymbol{v}''$ знаходяться легко:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}' &= x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 = 3 \cdot (1, 1, 3, 0) - 2 \cdot (0, 1, 5, 1) = (3, 1, -1, -2), \\ \boldsymbol{v}'' &= x_3\boldsymbol{e}_3 + x_4\boldsymbol{e}_4 = -2 \cdot (2, -5, 1, 0) + 4 \cdot (1, -1, 0, 1) = (2, 1, -1, 4). \quad \square \end{aligned}$$

Задача 6. *Знайдіть віддаль від точки, заданої вектором* $\boldsymbol{v}$, *до підпростору* U, *заданого системою рівнянь*:

$$\text{a)}\quad \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0, \end{array} \qquad \boldsymbol{v} = (7, -4, -1, 2);$$

$$\text{b)}\quad \begin{array}{l} x_1 + (1-i)x_2 - ix_3 = 0, \\ -ix_1 + 4x_2 = 0, \end{array} \qquad \boldsymbol{v} = (1, 0, i).$$

Розв'язання. Віддаль від точки, заданої вектором $\boldsymbol{v}$, до підпростору U дорівнює ортогональній складовій $\boldsymbol{v}''$ вектора $\boldsymbol{v}$. Зауважимо, що $\boldsymbol{v}''$ одночасно є ортогональною проекцією вектора $\boldsymbol{v}$ на підпростір $U^\perp$. Якщо U задається системою лінійних рівнянь, то системою твірних підпростору $U^\perp$ є набір векторів, складених з коефіцієнтів рівнянь цієї системи.

a) У нашому випадку простір $U^\perp$ породжується векторами $\boldsymbol{a}_1 = (2, 1, 1, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, 2, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 2, 2, -9)$.

Для знаходження ортогональної проекції застосуємо метод зад. 15.4. У нашому випадку система (46) набуває вигляду

$$\begin{array}{rcrcrcr} 15x_1 & + & 13x_2 & - & 21x_3 & = & 15, \\ 13x_1 & + & 18x_2 & + & 2x_3 & = & 13, \\ -21x_1 & + & 2x_2 & + & 90x_3 & = & -21. \end{array}$$

Один з розв'язків видно одразу: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Тому ортогональна проекція вектора $\boldsymbol{v}$ на підпростір $U^\perp$ дорівнює

$$\boldsymbol{v}'' = 1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 = (2, 1, 1, 3),$$

а віддаль від точки, заданої вектором $\boldsymbol{v}$, до підпростору U дорівнює $|\boldsymbol{v}''| = \sqrt{15}$.

b) Аналогічно пункту a) простір $U^\perp$ породжується векторами $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1-i, -i)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-i, 4, 0)$. Знову для знаходження ортогональної проекції застосуємо метод зад. 15.4. Тоді система (46) набуває вигляду

$$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & + & (4-3i)x_2 & = & 0, \\ (4+3i)x_1 & + & 17x_2 & = & -i. \end{array}$$

Розв'язком буде $x_1 = \frac{1}{43}\Big(3 + 4i\Big)$, $x_2 = -\frac{4}{43}i$. Враховуючи зауваження після розв'язання зад. 15.4, отримуємо, що ортогональна проекція вектора $\boldsymbol{v}$ на підпростір $U^\perp$ дорівнює

$$\boldsymbol{v}'' = \frac{1}{43}\Big(3 - 4i\Big) \cdot \boldsymbol{a}_1 + \frac{4}{43}i \cdot \boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{43}\Big(3 - 8i, 15 - 7i, -4 - 3i\Big),$$

а віддаль від точки, заданої вектором $\boldsymbol{v}$, до підпростору U дорівнює $|\boldsymbol{v}''| = \frac{2}{43}\sqrt{93}$. □

Задача 7. *Знайдіть віддаль від точки, заданої вектором* $\boldsymbol{v} = (4, 2, -5, 1)$, *до лінійного многовиду, заданого системою рівнянь*

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + \ x_3 + 2x_4 &= \ \ 9, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 12. \end{aligned} \tag{49}$$

Розв'язання. Віддаль від точки, заданої вектором $\boldsymbol{v}$, до лінійного многовиду $\boldsymbol{v}_0 + U$ дорівнює довжині ортогональної складової вектора $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0$ відносно напрямного підпростору U. Напрямним підпростором многовиду, заданого системою рівнянь (49), є множина розв'язків відповідної однорідної системи

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + \ x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned} \tag{50}$$

В якості вектора $\boldsymbol{v}_0$ можна взяти будь–який розв'язок системи (49). Вибравши вільними невідомими x_3 та x_4 і поклавши $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, отримуємо розв'язок $\boldsymbol{v}_0 = (3, -1, 1, 0)$.

Замість ортогональної складової вектора $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 = (1, 3, -6, 1)$ відносно підпростору U шукаємо його ортогональну проекцію на підпростір $U^{\perp}$, породжений векторами $\boldsymbol{a}_1 = (2, -2, 1, 2)$ та $\boldsymbol{a}_2 = (2, -4, 2, 3)$. Знову застосовуючи метод зад. 4, одержуємо систему

$$\begin{aligned} 13x_1 + 20x_2 &= -8, \\ 20x_1 + 33x_2 &= -19, \end{aligned}$$

розв'язком якої є $x_1 = 4$, $x_2 = -3$.

Тому ортогональна проекція $\boldsymbol{u}$ вектора $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0$ на підпростір $U^{\perp}$ дорівнює

$$\boldsymbol{u} = 4 \cdot \boldsymbol{a}_1 - 3 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 4 \cdot (2, -2, 1, 2) - 3 \cdot (2, -4, 2, 3) = (2, 4, -2, -1),$$

а віддаль від точки, заданої вектором $\boldsymbol{v}$, до многовиду, заданого системою рівнянь (49), дорівнює $|\boldsymbol{u}| = 5$. □

Задача 8. *Знайдіть кут* α *між вектором* $\boldsymbol{v} = (-3, 15, 1, -5)$ *і підпростором* $U = \langle (2, 3, -4, -6), (1, 8, -2, -16), (1, -5, -2, 10) \rangle$.

Розв'язання. Кут між вектором і підпростором — це кут між вектором і його ортогональною проекцією на цей підпростір. Щоб знайти ортогональну проекцію $\boldsymbol{v}'$ вектора $\boldsymbol{v}$, спочатку ортогоналізуємо систему твірних $\boldsymbol{a}_1 = (2,3,-4,-6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,8,-2,-16)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,-5,-2,10)$ підпростору U методом Ґрама–Шмідта:

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = (2,3,-4,-6);$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\cdot \boldsymbol{b}_1 = (1,8,-2,-16) - \frac{130}{65}(2,3,-4,-6) = (-3,2,6,-4);$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\cdot \boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2)}\cdot \boldsymbol{b}_2 =$$

$$= (1,-5,-2,10) - \frac{-65}{65}(2,3,-4,-6) - \frac{-65}{65}(-3,2,6,-4) = (0,0,0,0).$$

Таким чином, ортогональна база підпростору U складається з векторів $\boldsymbol{b}_1 = (2,3,-4,-6)$ та $\boldsymbol{b}_2 = (-3,2,6,-4)$.

Знайдемо тепер проекції вектора $\boldsymbol{v}$ на одновимірні підпростори $\langle \boldsymbol{b}_1\rangle$ та $\langle \boldsymbol{b}_2\rangle$ відповідно:

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}_1}\boldsymbol{v} = \frac{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_1, \quad \mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}_2}\boldsymbol{v} = \frac{(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}_2.$$

Згідно зад. 15.3 ортогональна проекція $\boldsymbol{v}'$ вектора $\boldsymbol{v}$ на підпростір U дорівнює

$$\boldsymbol{v}' = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}_1}\boldsymbol{v} + \mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}_2}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = (-1,5,2,-10).$$

Тому $\cos\alpha = \dfrac{(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}'|\cdot|\boldsymbol{v}|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, звідки $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$. □

Задача 9. *Знайдіть віддаль між площинами* P_1 *та* P_2 *чотиривимірного евклідового простору, якщо в ортонормованій базі вони задані відповідно рівняннями* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_0 + t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2$ *та* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0 + t_1\boldsymbol{b}_1 + t_2\boldsymbol{b}_2$, *де* $\boldsymbol{a}_0 = (2,1,0,1)$, $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,0,0,1)$, $\boldsymbol{b}_0 = (1,-1,-1,0)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1,1,0,-1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1,1,2,3)$.

Розв'язання. Спочатку покажемо, що віддаль між лінійними многовидами $P_1 = \boldsymbol{v}_1 + U_1$ та $P_2 = \boldsymbol{v}_2 + U_2$ дорівнює довжині ортогональної складової $\boldsymbol{v}''$ вектора $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ відносно підпростору $U = U_1 + U_2$. Для цього візьмемо довільні точки $A_1 \in P_1$ та $A_2 \in P_2$, задані відповідно векторами $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}_1$ та $\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{u}_2$. Тоді

$$|A_1A_2| = |(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}_1) - (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{u}_2)| = |(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) + (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)| =$$
$$= |\boldsymbol{v}'' + (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)|,$$

де $\boldsymbol{v}'$ та $\boldsymbol{v}''$ — відповідно ортогональна проекція та ортогональна складова вектора $\boldsymbol{v}$. Оскільки $\boldsymbol{v}'' \in U^{\perp}$, а $\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \in U$, то за теоремою Піфагора

$$|A_1A_2| = \sqrt{|\boldsymbol{v}''|^2 + |\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2} \leq |\boldsymbol{v}''|. \tag{51}$$

Позаяк вектори $\boldsymbol{u}_1$ і $\boldsymbol{u}_2$ — довільні, то їх різниця $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ може бути довільним вектором з U. Зокрема, $\boldsymbol{u}_1$ і $\boldsymbol{u}_2$ можна вибрати так, щоб ця різниця дорівнювала $-\boldsymbol{v}'$. Але тоді з (51) випливає, що в цьому випадку $|A_1A_2| = |\boldsymbol{v}''|$.

Таким чином, $\min\limits_{A_1 \in P_1, A_2 \in P_2} |A_1A_2| = |\boldsymbol{v}''|$, що й треба було довести.

У нашому випадку $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{b}_0$, $U_1 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$, $U_2 = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 = (1, 2, 1, 1)$.

Знайдемо тепер розмірність підпростору $U = U_1 + U_2$ (яка дорівнює рангу його системи твірних $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Отже, $\dim U = 3$ і $U = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1 \rangle$. А тому ортогональну складову $\boldsymbol{v}''$ краще шукати як ортогональну проекцію вектора $\boldsymbol{v}$ на одновимірний підпростір $U^{\perp}$. Останній є множиною розв'язків системи $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}) = 0$, $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}) = 0$, $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{x}) = 0$, а базою $U^{\perp}$ є фундаментальна система розв'язків цієї системи. Використовуючи останню матрицю з (52), знаходимо єдиний вектор фундаментальної системи: $\boldsymbol{e} = (-1, 2, -2, 1)$.

Таким чином, ортогональна проекція вектора $\boldsymbol{v}$ на підпростір $U^{\perp} = \langle \boldsymbol{e} \rangle$ дорівнює

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}} \boldsymbol{v} = \frac{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e})} \boldsymbol{e} = \frac{1}{5} \boldsymbol{e} = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right).$$

Тому віддаль між площинами P_1 та P_2 дорівнює $|\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}} \boldsymbol{v}| = \dfrac{1}{5}\sqrt{10}$. □

Основні задачі

10. Нехай $\boldsymbol{v}_1$ — ортогональна проекція вектора $\boldsymbol{v}$ на підпростір U, а $\boldsymbol{v}_2$ — ортогональна проекція вектора $\boldsymbol{v}_1$ на підпростір $W \subseteq U$. Доведіть, що $\boldsymbol{v}_2$ є ортогональною проекцією вектора $\boldsymbol{v}$ на підпростір W.

11. Визначте в просторі $\mathbb{R}_n[x]$ скалярний добуток таким чином, щоб многочлени 1, x, $\frac{x^2}{2!}$, …, $\frac{x^n}{n!}$ утворили ортонормовану базу.

12. Знайдіть ортогональну базу підпростору, породженого векторами:
a) $\boldsymbol{e}_1 = (1,1,-1,-2)$, $\boldsymbol{e}_2 = (5,8,-2,-3)$, $\boldsymbol{e}_3 = (3,9,3,8)$;
b) $\boldsymbol{e}_1 = (1,1,-1,-2)$, $\boldsymbol{e}_2 = (-2,1,5,11)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,3,3,7)$,
$\boldsymbol{e}_4 = (3,-3,-3,-9)$;
c) $\boldsymbol{e}_1 = (1,2,1,3)$, $\boldsymbol{e}_2 = (4,1,1,1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (3,1,1,0)$;
d) $\boldsymbol{e}_1 = (0,1+2i,-i)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1,-1,2-i)$, $\boldsymbol{e}_3 = (2,1,-i)$.

13. Перевірте, що система векторів $\boldsymbol{e}_1 = (1,-1,1,-3)$, $\boldsymbol{e}_2 = (-4,1,5,0)$ є ортогональною, і доповніть її до ортогональної бази всього простору.

14. Перевірте, що система векторів $\boldsymbol{e}_1 = (-\frac{11}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{2}{3})$ та $\boldsymbol{e}_2 = (-\frac{2}{15}, -\frac{14}{15}, -\frac{1}{3})$ є ортонормованою, і доповніть її до ортонормованої бази всього простору.

15. Знайдіть ортогональну проекцію $\boldsymbol{v}'$ вектора $\boldsymbol{v}$ на підпростір U і відповідну ортогональну складову $\boldsymbol{v}''$:
a) $\boldsymbol{v} = (-3,5,9,3)$, $U = \langle (1,1,1,1), (2,-1,1,1), (2,-7,-1,-1) \rangle$;
b) $\boldsymbol{v} = (4,-1,-3,4)$, $U = \langle (1,1,1,1), (1,2,2,-1), (1,0,0,3) \rangle$.

16. Знайдіть віддаль від точки, заданої вектором $\boldsymbol{v}$, до підпростору, заданого системою рівнянь:

a) $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 0, \end{aligned} \qquad \boldsymbol{v} = (-3,0,-5,9);$$

b) $x_1 - 3x_2 + 2x_4 - x_5 = 0, \qquad \boldsymbol{v} = (3,3,-1,1,-1);$

c) $x_1 + (5+4i)x_2 - ix_3 = 0, \qquad \boldsymbol{v} = (1,-1,i).$

17. Доведіть, що віддаль від точки, заданої вектором $\boldsymbol{v}$, до підпростору $U = \{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0\}$ дорівнює $\dfrac{|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})|}{|\boldsymbol{a}|}$ (ненульовий вектор $\boldsymbol{a}$ — фіксований).

18. Знайдіть віддаль від точки, заданої вектором $\boldsymbol{v}$, до лінійного многовиду $\boldsymbol{v}_0 + U$, якщо:
a) $\boldsymbol{v} = (0,0,0,0)$, $\boldsymbol{v}_0 = (1,1,1,1)$, $U = \langle (1,2,3,4) \rangle$;
b) $\boldsymbol{v} = (1,2,-1,1)$, $\boldsymbol{v}_0 = (0,-1,1,1)$, $U = \langle (0,-3,-1,5), (4,-1,-3,3) \rangle$.

19. Нехай $\boldsymbol{v}'$ — ортогональна проекція вектора $\boldsymbol{v}$ на підпростір U. Доведіть, що коли вектор $\boldsymbol{u} \in U$ ортогональний до $\boldsymbol{v}'$, то він ортогональний і до $\boldsymbol{v}$.

20. Знайдіть кут між вектором $\boldsymbol{v}$ і підпростором U, якщо:
a) $\boldsymbol{v}=(2,2,1,1)$, $U=\langle(3,4,-4,-1),(0,1,-1,2)\rangle$;
b) $\boldsymbol{v}=(1,0,3,0)$, $U=\langle(5,3,4,-3),(1,1,4,5),(2,-1,1,2)\rangle$.

21. Знайдіть кут, який утворює діагональ n–вимірного куба з його k–вимірною гранню.

22. Знайдіть віддаль між площинами P_1 та P_2 чотиривимірного евклідового простору, якщо в ортонормованій базі вони задані відповідно рівняннями $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_0+t_1\boldsymbol{a}_1+t_2\boldsymbol{a}_2$ та $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_0+t_1\boldsymbol{b}_1+t_2\boldsymbol{b}_2$, де $\boldsymbol{a}_0=(4,5,3,2)$, $\boldsymbol{a}_1=(1,2,2,2)$, $\boldsymbol{a}_2=(2,-2,1,2)$, $\boldsymbol{b}_0=(1,-2,1,-3)$, $\boldsymbol{b}_1=(2,0,2,1)$, $\boldsymbol{b}_2=(1,-2,0,-1)$.

Додаткові задачі

23. Застосуйте процес ортогоналізації Ґрама–Шмідта до бази 1, x, x^2, x^3, x^4 простору $\mathbb{R}_4[x]$, якщо скалярний добуток у цьому просторі визначається правилом $(f,g)=\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

24. Доведіть, що у просторі тригонометричних многочленів (тобто всіх функцій вигляду $f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\sin kx+b_k\cos kx)$) зі скалярним добутком $(f(x),g(x))=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ система функцій 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\dots$, $\sin nx$, $\cos nx$, $\dots$ утворює ортогональну систему.

25. Нехай $0\subset U_1\subset U_2\subset\cdots\subset U_n=V$ — такий ланцюг підпросторів n–вимірного евклідового простору V, що $\dim U_k=k$. Доведіть, що існує така ортонормована база простору V, яка включає базу кожного з підпросторів U_k. Скільки таких баз можна побудувати?

26. Нехай $U=U_1+U_2+\cdots+U_k$, де підпростори U_1, U_2, $\dots$, U_k — попарно ортогональні, а α_1, α_2, $\dots$, α_k — кути, які вектор $\boldsymbol{v}$ утворює з цими підпросторами. Доведіть, що $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cdots+\cos^2\alpha_k=1$.

27. Знайдіть у просторі $\mathbb{R}_n[x]$ зі скалярним добутком

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)=a_0b_0+a_1b_1+\cdots+a_nb_n$$

віддаль від многочлена $g(x)$ до підпростору $U=\{f(x)\mid f(1)=0\}$.

28.* Доведіть, що віддаль d від точки, заданої вектором $\boldsymbol{v}$, до лінійного многовиду $\boldsymbol{v}_0+U$, де U — підпростір з базою $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$, можна обчислити за допомогою визначника Ґрама: $d^2=\dfrac{\Gamma(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0)}{\Gamma(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_k)}$.

29.** У просторі $\mathbb{R}_n[x]$ дійсних многочленів степеня $\leq n$ із скалярним добутком $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$ знайдіть віддаль від початку координат до лінійного многовиду всіх нормованих многочленів степеня n.

30.** Доведіть, що віддаль між протилежними k та $(n-k-1)$–вимірними гранями правильного n–вимірного симплекса дорівнює віддалі між їх центрами, і знайдіть її, якщо ребро симплекса дорівнює 1.

31. Доведіть, що сума квадратів довжин проекцій векторів будь–якої ортонормованої бази евклідового простору на k–вимірний підпростір дорівнює k.

32. Доведіть, що в просторі $\mathbb{R}^n$ із стандартним скалярним добутком тоді й лише тоді існує ортогональна база з векторів, усі координати яких дорівнюють ± 1, коли $n = 2$ або n кратне 4.

33. У n–вимірному евклідовому просторі вибрали k векторів, кожні два з яких утворюють між собою кут $\pi/3$. Доведіть, що $k \leq n$.

34. У n–вимірному евклідовому просторі вибрали k векторів, кожні два з яких утворюють між собою тупий кут. Доведіть, що $k \leq n + 1$.

35. Нехай $\mathbb{R}^n$ — евклідовий простір зі стандартним скалярним добутком. Доведіть, що довільна ідемпотентна симетрична матриця $P \in M_n(\mathbb{R})$ є матрицею проектування на підпростір U, породжений стовпчиками матриці P (тобто для кожного вектора $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ його ортогональна проекція $\boldsymbol{v}'$ на підпростір U дорівнює $P\boldsymbol{v}$).

36. (**Теорема Шура**) Доведіть, що для кожного лінійного перетворення унітарного простору існує ортонормована база, в якій матриця цього перетворення буде верхньою трикутною.

37.* Знайдіть кут між площинами P_1 та P_2 чотиривимірного евклідового простору, якщо в ортонормованій базі вони задані відповідно рівняннями $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_0 + t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2$ та $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0 + t_1\boldsymbol{b}_1 + t_2\boldsymbol{b}_2$, де $\boldsymbol{a}_0 = (3, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{b}_0 = (2, 1, 1, 3)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, -1, 1, -1)$.

38.* Знайдіть кут між двовимірними гранями $A_0A_1A_2$ та $A_0A_3A_4$ правильного чотиривимірного симплекса $A_0A_1A_2A_3A_4$.

39. Доведіть, що в евклідовому просторі об'єм k–вимірного паралелепіпеда, побудованого на векторах $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{v}_k$, задовольняє рівність $V^2(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = \Gamma(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$, де $\Gamma(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ — визначник Ґрама системи векторів $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{v}_k$.

40. Доведіть, що в евклідовому просторі для об'єму паралелепіпеда виконується нерівність

$$V(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m) \leq V(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) \cdot V(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)\,,$$

причому рівність виконується тоді й лише тоді, коли $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j) = 0$ для всіх i, j.

Домашнє завдання

41. Знайдіть ортогональну базу підпростору, породженого векторами:
a) $\boldsymbol{e}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (3,3,-1,-1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (-2,0,6,8)$;
b) $\boldsymbol{e}_1 = (2,1,3,-1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (7,4,3,-3)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1,1,-6,0)$, $\boldsymbol{e}_4 = (5,7,7,8)$;
c) $\boldsymbol{e}_1 = (2,1,i)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1-i,2,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (-i,0,1-i)$.

42. Перевірте, що система векторів $\boldsymbol{e}_1 = (1,-2,1,3)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2,1,-3,1)$ є ортогональною, і доповніть її до ортогональної бази.

43. Знайдіть ортонормовану базу підпростору розв'язків системи:
a) $\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0; \end{array}$ b) $\begin{array}{l} x_1 \ + (1-i)x_2 - ix_3 = 0, \\ -ix_1 + \quad 4x_2 \qquad\qquad = 0. \end{array}$

44. Знайдіть ортогональну проекцію $\boldsymbol{v}'$ вектора $\boldsymbol{v}$ на підпростір U і відповідну ортогональну складову $\boldsymbol{v}''$:
a) $\boldsymbol{v} = (5,2,-2,2)$, $U = \langle (2,1,1,-1), (1,1,3,0), (1,2,8,1) \rangle$;
b) $\boldsymbol{v} = (2,-5,3,4)$, $U = \langle (1,3,3,5), (1,3,-5,-3), (1,-5,3,-3) \rangle$.

45. Знайдіть віддаль від точки, заданої вектором $\boldsymbol{v}$, до підпростору, заданого системою рівнянь:

a) $\begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 + \ x_3 + \ x_4 & = & 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 0, \end{array}$ $\boldsymbol{v} = (2,4,0,-1)$;

b) $\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 - \ x_4 & = & 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 & = & 0, \end{array}$ $\boldsymbol{v} = (3,3,-4,2)$;

c) $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0$, $\boldsymbol{v} = (3,3,-1,1,-1)$.

46. Знайдіть віддаль від точки, заданої вектором $\boldsymbol{v}$, до лінійного многовиду, заданого системою рівнянь:

a) $\begin{array}{rcl} x_1+2x_2+x_3-\ \ x_4 &=& 1, \\ x_1+3x_2+x_3-3x_4 &=& 2, \end{array}$ $\quad \boldsymbol{v}=(2,4,-4,2);$

b) $x_1+ix_2-(2-i)x_3=0,$ $\quad \boldsymbol{v}=(0,-i,1+i).$

47. Знайдіть кут між вектором $\boldsymbol{v}$ і підпростором U:
a) $\boldsymbol{v}=(1,3,-1,3)$, $U=\langle(1,-1,1,1),(5,1,-3,3)\rangle$;
b) $\boldsymbol{v}=(2,2,-1,1)$, $U=\langle(1,-1,1,1),(-1,2,3,1),(1,0,5,3)\rangle$.

Література. [1], с. 52–55; [2], с. 196–197, 205–209; [3], с. 38–51; [4], с. 154–157; [5], с. 343–351; [7], с. 139–140, 148–149, 172–174; [9], с. 213–214; [12], с. 349–354; [13], с. 256–274.

Заняття 16. Оператори в евклідових та унітарних просторах

Необхідні поняття. Перетворення φ евклідового (унітарного) простору V називається *ізометрією* або *ортогональним* (*унітарним*), якщо це перетворення зберігає скалярний добуток, тобто $(\varphi(\boldsymbol{u}),\varphi(\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ для всіх $\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\in V$.

Дійсна квадратна матриця A називається *ортогональною*, якщо $A\cdot A^\top=E$. Комплексна квадратна матриця A називається *унітарною*, якщо $A\cdot\overline{A}^\top=E$.

Лінійне перетворення φ^* евклідового (унітарного) простору V називається *спряженим* до перетворення $\varphi: V\to V$, якщо для довільних векторів $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$ виконується рівність $\big(\varphi(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v}\big)=\big(\boldsymbol{u},\varphi^*(\boldsymbol{v})\big)$.

Лінійне перетворення φ називається *самоспряженим*, якщо воно збігаються зі своїми спряженим (тобто якщо $\varphi^*=\varphi$). Самоспряжене перетворення евклідового (відповідно унітарного) простору ще називають симетричним (відповідно ермітовим).

Комплексна квадратна матриця A називається *ермітовою*, якщо $A=\overline{A}^\top$.

Необхідні твердження. **1.** Ізометрія евклідового (унітарного) простору є лінійним перетворенням.

2. Для лінійного перетворення φ евклідового (унітарного) простору наступні твердження рівносильні:

a) φ — ізометрія;

b) φ зберігає довжини векторів;

c) в ортонормованій базі матриця перетворення φ є ортогональною (унітарною);

d) перетворення φ деяку ортонормовану базу переводить в ортонормовану;

e) перетворення φ будь–яку ортонормовану базу переводить в ортонормовану.

3. Для матриці A наступні умови є рівносильними:

a) матриця A — ортогональна;

b) вектори–рядки матриці A утворюють ортонормовану систему;

c) вектори–стовпчики матриці A утворюють ортонормовану систему.

4. Матриця переходу від однієї ортонормованої бази евклідового (унітарного) простору до іншої ортонормованої бази є ортогональною (унітарною).

5. Власні числа унітарного перетворення за модулем дорівнюють 1, а власні числа ортогонального перетворення дорівнюють ± 1.

6. Якщо A — ортогональна (унітарна) матриця, то $|\det A| = 1$.

7. В ортонормованій базі евклідового (відповідно унітарного) простору матриці A і A^* спряжених перетворень φ і φ^* пов'язані співвідношенням $A^* = A^\top$ (відповідно $A^* = \overline{A}^\top$).

8. Нехай $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — база евклідового (унітарного) простору V, G — матриця Ґрама бази $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, $\varphi : V \to V$ — лінійне перетворення. Тоді в базі $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ матриці перетворень φ і φ^* пов'язані співвідношенням $\overline{[\varphi^*]} = G^{-1}[\varphi]^\top G$.

9. *Властивості спряжених перетворень*:

a) $\varepsilon^* = \varepsilon$; b) $\varphi^{**} = \varphi$; c) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$; d) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$;

e) якщо обернене перетворення φ^{-1} існує, то $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$;

f) $(c\varphi)^* = \overline{c}\varphi^*$ для довільного скаляра c.

10. Нехай φ — лінійне перетворення евклідового (унітарного) простору V. Якщо підпростір $U \subseteq V$ є інваріантним відносно перетворення φ, то його доповнення $U^\perp$ буде інваріантним відносно спряженого перетворення φ^*. Зокрема, якщо перетворення φ — самоспряжене, то ортогональне доповнення $U^\perp$ також буде φ–інваріантним.

11. *Властивості самоспряжених перетворень*:

a) тотожне перетворення ε є самоспряженим;

b) сума самоспряжених перетворень знову є самоспряженим перетворенням;

c) добуток $\varphi\psi$ самоспряжених перетворень φ та ψ буде самоспряженим тоді й лише тоді, коли перетворення φ та ψ комутують, тобто $\varphi\psi = \psi\varphi$;

d) якщо самоспряжене перетворення φ є невиродженим, то обернене перетворення φ^{-1} також буде самоспряженим;

e) кратне $c\varphi$ ненульового самоспряженого перетворення φ буде самоспряженим тоді й лише тоді, коли скаляр c є дійсним числом.

12. Усі власні числа самоспряженого перетворення є дійсними. Як наслідок, усі власні числа дійсних симетричних і комплексних ермітових матриць є дійсними.

13. Для кожного самоспряженого перетворення евклідового (унітарного) простору існує власна ортонормована база.

14. *Канонічний вигляд матриці ортогонального перетворення.* Для кожного ортогонального перетворення φ n–вимірного евклідового простору V існує ортонормована база $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ (т.зв. *канонічна ортонормована база*), в якій матриця перетворення φ має вигляд

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & & & & & & \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos\alpha_k & \sin\alpha_k & & & \\ & & & -\sin\alpha_k & \cos\alpha_k & & & \\ & & & & & \lambda_{2k+1} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

де $\lambda_{2k+1}, \ldots, \lambda_n \in \{-1, 1\}$, а всі невідмічені елементи є нулями. При цьому характеристичний многочлен перетворення φ має вигляд $\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha_1 + 1)\cdots(\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha_k + 1)(\lambda - \lambda_{2k+1})\cdots(\lambda - \lambda_n)$.

14. *Канонічний вигляд матриці унітарного перетворення.* Для кожного унітарного перетворення φ n–вимірного унітарного простору V існує ортонормована база $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ (*канонічна ортонормована база*), в якій матриця перетворення φ має вигляд $[\varphi] = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, причому $|a_1| = \cdots = |a_n| = 1$.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Для ортогонального перетворення φ, заданого в ортонормованій базі матрицею A, знайдіть канонічний вигляд його матриці і* *канонічну ортонормовану базу*:

a) $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. a) Спочатку знайдемо власні числа матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \frac{1}{27} \cdot \begin{vmatrix} 2-3\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-3\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2-3\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27} \cdot \begin{vmatrix} 3-3\lambda & 3-3\lambda & 3-3\lambda \\ 2 & -1-3\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2-3\lambda \end{vmatrix} = \frac{1-\lambda}{9} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1-3\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2-3\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1-\lambda}{9} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3-3\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 3-3\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(1+\lambda).$$

Таким чином, маємо власне число $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ кратності 2 і просте власне число $\lambda_3 = -1$. Тому в канонічній ортонормованій базі матриця перетворення матиме вигляд $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Далі знаходимо відповідні власні вектори. Для $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ці вектори шукаємо з системи

$$\big(A - E \mid 0\big) = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Легко вказуються два лінійно незалежні розв'язки цієї системи: $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 0)$. Застосовуючи до них процес ортогоналізації Ґрама–Шмідта, отримуємо:

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = (1, 0, -1), \quad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)} \cdot \boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 1).$$

Власний вектор для $\lambda_3 = -1$ шукаємо з системи

$$\big(A + E \mid 0\big) = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right),$$

розв'язком якої є вектор $\boldsymbol{a}_3 = (1, -2, 1)$.

Вектор $\boldsymbol{a}_3$ ортогональний до $\boldsymbol{b}_1$ та $\boldsymbol{b}_2$, оскільки власні вектори ортогонального перетворення, що відповідають різним власним числам, є ортогональними. Нормуючи систему векторів $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, знаходимо канонічну ортонормовану базу:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, -1), \quad \boldsymbol{f}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1), \quad \boldsymbol{f}_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}(1, -2, 1).$$

b) Знову починаємо із знаходження власних чисел:

$$\chi_A(\lambda) = \frac{1}{27} \cdot \begin{vmatrix} 2-3\lambda & -1 & 2 \\ 2 & 2-3\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2-3\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27} \cdot \begin{vmatrix} 3-3\lambda & 3-3\lambda & 3-3\lambda \\ 2 & 2-3\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2-3\lambda \end{vmatrix} = \frac{1-\lambda}{9} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2-3\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2-3\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1-\lambda}{9} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3\lambda & -3 \\ 0 & 3 & 3-3\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1).$$

Таким чином, маємо одне дійсне власне число $\lambda_1 = 1$ і два комплексні: $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i \sin\frac{\pi}{3}$. Спочатку знайдемо власний вектор для $\lambda_1 = 1$:

$$\bigl(A - E \bigm| 0\bigr) = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

що дає $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1)$. Далі шукаємо власний вектор матриці A, який відповідає комплексному власному числу $\lambda = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\left(A - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)E \,\middle|\, 0\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{array}\right).$$

Одним з розв'язків цієї системи є вектор

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right) = \boldsymbol{a}_2 + i\boldsymbol{a}_3,$$

де $\boldsymbol{a}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$, $\boldsymbol{a}_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

Зауважимо, що для дійсної матриці A, дійсних векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ і скалярів $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ з рівності

$$A \cdot (\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}) = (\alpha + i\beta)(\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}) = (\alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}) + i(\alpha\boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{a})$$

випливають рівності

$$A \cdot \boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}, \qquad A \cdot \boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{a}. \tag{53}$$

Безпосередньо перевіряється, що вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ попарно ортогональні, тобто $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3 = 0$. Тому вони лінійно незалежні і утворюють базу. Оскільки $A \cdot (\boldsymbol{a}_2 + i\boldsymbol{a}_3) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\boldsymbol{a}_2 + i\boldsymbol{a}_3)$, то з рівностей (53) випливає, що в базі $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ матриця перетворення φ буде мати вигляд

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Після нормування з бази $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ одержимо ортонормовану базу $\boldsymbol{f}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}(2, -1, -1)$, $\boldsymbol{f}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, -1, 1)$. Оскільки вектор $\boldsymbol{a}_1$ є власним, а вектори $\boldsymbol{a}_2$ і $\boldsymbol{a}_3$ породжують інваріантний підпростір і мають однакову довжину, то після нормування бази матриця перетворення φ не зміниться, тобто знову матиме вигляд (54).

Таким чином, канонічною базою є $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$, а канонічним виглядом матриці перетворення φ є матриця (54). □

Задача 2. *Ортогональне перетворення φ простору $\mathbb{R}^3$ зі стандартним скалярним добутком переводить вектори $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1)$ та $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, -1)$ відповідно у вектори $(-1, -1, 1)$ та $(1, -1, 0)$. Знайдіть його матрицю у стандартній базі $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ цього простору, якщо її визначник дорівнює -1.*

Розв'язання. Нехай $\varphi(\boldsymbol{e}_3) = (x_1, x_2, x_3)$. Оскільки $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{e}_3$ та $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{e}_3$, то

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1) = \varphi(\boldsymbol{a}_2) + \varphi(\boldsymbol{e}_3) = (1, -1, 0) + (x_1, x_2, x_3) = (1 + x_1, -1 + x_2, x_3),$$

і, аналогічно,

$$\varphi(\boldsymbol{e}_2) = \varphi(\boldsymbol{a}_1) - \varphi(\boldsymbol{a}_2) - 2\varphi(\boldsymbol{e}_3) = (-2 - 2x_1, -2x_2, 1 - 2x_3).$$

З ортогональності перетворення φ та ортонормованості бази $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ випливають рівності

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1) \cdot \varphi(\boldsymbol{e}_3) = 0, \varphi(\boldsymbol{e}_2) \cdot \varphi(\boldsymbol{e}_3) = 0, \varphi(\boldsymbol{e}_3) \cdot \varphi(\boldsymbol{e}_3) = 1,$$

що дає нам систему рівнянь:

$$\begin{aligned} x_1 + x_1^2 - x_2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0, \\ -2x_1 - 2x_1^2 - 2x_2^2 + x_3 - 2x_3^2 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1. \end{aligned} \tag{55}$$

Враховуючи третє, з перших двох рівнянь одержуємо систему лінійних рівнянь

$$x_1 - x_2 = -1, \qquad 2x_1 - x_3 = -2,$$

загальний розв'язок якої має вигляд

$$x_1 = t, \quad x_2 = 1 + t, \quad x_3 = 2 + 2t.$$

Підставляючи ці значення в третє з рівнянь (55), одержуємо: $6t^2 + 10t + 4 = 0$, звідки $t = -1$ або $t = -\frac{2}{3}$. При $t = -1$ маємо:

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1) = (0, -1, 0), \quad \varphi(\boldsymbol{e}_2) = (0, 0, 1), \quad \varphi(\boldsymbol{e}_3) = (-1, 0, 0).$$

Це дає матрицю перетворення

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Але її визначник дорівнює 1, тому вона нас не влаштовує. При $t = -\frac{2}{3}$ маємо:

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \varphi(\boldsymbol{e}_2) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \quad \varphi(\boldsymbol{e}_3) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

що дає матрицю

$$[\varphi] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Позаяк її визначник дорівнює -1, то вона і є шуканою. $\square$

Задача 3. *Знайдіть перетворення, спряжене до перетворення* $\varphi(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}]$ *звичайного тривимірного евклідового простору (вектор* $\boldsymbol{a}$ *— фіксований).*

Розв'язання. Легко бачити, що $(\varphi(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}) = ([\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}], \boldsymbol{u})$ є змішаним добутком векторів $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{u}$. За властивостями змішаного добутку

$$([\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}], \boldsymbol{u}) = -([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}], \boldsymbol{v}) = -(\boldsymbol{v}, [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}]) = -(\boldsymbol{v}, \varphi(\boldsymbol{u})) = (\boldsymbol{v}, -\varphi(\boldsymbol{u})).$$

Тому $\varphi^* = -\varphi$. □

Задача 4. *У просторі* $\mathbb{R}_2[x]$ *з базою* $1,\ x,\ x^2$ *знайдіть матрицю перетворення, спряженого до диференціювання, якщо скалярний добуток задається правилом* $(f(x), g(x)) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$.

Розв'язання. У базі $1,\ x,\ x^2$ перетворення $\varphi : f(x) \mapsto f'(x)$ має матрицю

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі скористаємося твердженням **6**. Для цього обчислимо матрицю Ґрама бази $1,\ x,\ x^2$:

$$G(1, x, x^2) = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,x) & (1,x^2) \\ (x,1) & (x,x) & (x,x^2) \\ (x^2,1) & (x^2,x) & (x^2,x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(для прикладу: $(x, x^2) = (-1) \cdot (-1)^2 + 0 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 = 0$). Оскільки

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 3/2 \end{pmatrix},$$

то за твердженням **6** матриця спряженого перетворення дорівнює

$$[\varphi^*] = G^{-1}[\varphi]^\top G =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$ □

Задача 5. *Нехай в деякій базі скалярний добуток задається білінійною функцією з матрицею F, а лінійне перетворення φ — матрицею A. Знайдіть матрицю спряженого перетворення φ^* у цій же базі, якщо*

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матриця F білінійної функції, якою задається скалярний добуток, — це не що інше, як матриця Ґрама даної бази. Тому, за твердженням **6**, матриця спряженого перетворення дорівнює $[\varphi^*] = F^{-1}A^\top F$. Оскільки

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

то

$$[\varphi^*] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ -5 & -7 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$ □

Задача 6. *Знайдіть власну ортонормовану базу перетворення φ і його матрицю в цій базі, якщо в стандартній ортонормованій базі його матриця A дорівнює:*

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Зауважимо, що в обох випадках перетворення φ є самоспряженим, бо обидві матриці є самоспряженими. Тому згідно твердження **13** власна ортонормована база існує.

a) Спочатку шукаємо власні числа матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2+2i \\ 2-2i & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda-5)(\lambda+1).$$

Таким чином, власними числами є $\lambda_1 = 5$ та $\lambda_2 = -1$, тому у власній ортонормованій базі перетворення φ буде мати матрицю $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Далі для кожного з власних чисел шукаємо відповідний власний вектор:

$$\bigl(A-5E \mid 0\bigr) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2+2i & 0 \\ 2-2i & -4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1-i & 0 \end{array}\right);$$

$$\bigl(A+E \mid 0\bigr) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2+2i & 0 \\ 2-2i & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1+i & 0 \end{array}\right).$$

Розв'язками цих систем є, наприклад, вектори $\boldsymbol{a}_1 = (1+i, 1)$ та $\boldsymbol{a}_2 = (1+i, -2)$ відповідно. Позаяк власні вектори самоспряженого перетворення, що відповідають різним власним числам, попарно ортогональні, то для знаходження власної ортонормованої бази лишається лише нормувати отриману систему власних векторів:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,(1+i, 1)\,, \quad \boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_2|} = \frac{\sqrt{6}}{6}\,(1+i, -2)\,.$$

b) Знову починаємо із знаходження власних чисел матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(6-\lambda)^2.$$

Таким чином, власними числами є $\lambda_1 = 3$ та $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$, а тому у власній ортонормованій базі перетворення φ матиме матрицю

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Далі шукаємо відповідні власні вектори:

$$\bigl(A-3E \mid 0\bigr) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, для $\lambda_1 = 3$ власним вектором буде $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1)$.

$$\bigl(A-6E \mid 0\bigr) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Легко вказуються два лінійно незалежні розв'язки цієї системи: $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 1, -1)$ — власні вектори для $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$.

Оскільки власні вектори, що відповідають різним власним числам попарно ортогональні, то для знаходження власної ортонормованої бази процес ортогоналізації досить застосовувати лише для векторів $\boldsymbol{a}_2$ та $\boldsymbol{a}_3$. Тому

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{b}_2)}\,\boldsymbol{b}_2 = \Big(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\Big).$$

Для знаходження власної ортонормованої бази лишається лише нормувати систему векторів $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{|\boldsymbol{b}_1|} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,(1, 1, 1), \quad \boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{|\boldsymbol{b}_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1, 0, -1),$$
$$\boldsymbol{f}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{|\boldsymbol{b}_3|} = \frac{\sqrt{6}}{6}\,(-1, 2, -1).$$

□

Задача 7. *Доведіть, що самоспряжені перетворення φ та ψ евклідового (унітарного) простору V комутують тоді й лише тоді, коли вони мають спільну власну ортонормовану базу.*

Розв'язання. Достатність умови очевидна: якщо перетворення φ і ψ мають спільну власну базу, то в цій базі матриці перетворень є діагональними. А діагональні матриці комутують.

Для доведення необхідності умови застосуємо індукцію за розмірністю простору. База індукції перевіряється легко. Справді, вектор $\boldsymbol{e}$ одиничної довжини з одновимірного простору V є власним для довільного лінійного перетворення цього простору. А тому $\boldsymbol{e}$ утворює власну ортонормовану базу для кожного перетворення простору V.

Нехай тепер $\dim V > 1$. Оскільки всі власні числа самоспряженого перетворення є дійсними, то із зад. 6.19 випливає, що перетворення φ та ψ мають спільний власний вектор $\boldsymbol{v}$. У свою чергу, з твердження **10** випливає, що ортогональне доповнення $U = \langle \boldsymbol{v} \rangle^{\perp}$ буде інваріантним підпростором для кожного з перетворень φ та ψ. Обмеження самоспряженого перетворення на інваріантний підпростір знову є самоспряженим перетворенням. Позаяк $\dim U < \dim V$, то, за припущенням індукції, для самоспряжених перетворень $\varphi|_U$ та $\psi|_U$, які комутують, існує спільна власна ортонормована база. Поповнивши її вектором $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$, одержимо спільну власну ортонормовану базу перетворень φ і ψ. □

Основні задачі

8. З'ясуйте, чи буде перетворення $\boldsymbol{v} \mapsto [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}]$ (вектор $\boldsymbol{a}$ — фіксований) звичайного тривимірного евклідового простору ортогональним.

9. Нехай A та B — дійсні матриці. Доведіть, що коли комплексна матриця $A+iB$ є унітарною, то дійсна матриця $\left(\begin{smallmatrix} A & -B \\ B & A \end{smallmatrix}\right)$ є ортогональною.

10. З'ясуйте, чи буде ортогональним перетворення $\varphi : f(x) \mapsto x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ простору $\mathbb{R}_n[x]$ $(n > 0)$, якщо скалярний добуток задається правилом:

a) $(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$;

b) $(f(x), g(x)) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

11. Для ортогонального перетворення, заданого в ортонормованій базі матрицею A, знайдіть канонічний вигляд його матриці та канонічну ортонормовану базу:

a) $A = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

12. Знайдіть перетворення, спряжене до повороту евклідової площини на кут α.

13. Знайдіть перетворення, спряжене до проектування координатної площини на вісь абсцис паралельно бісектрисі першого й третього координатних кутів.

14. Доведіть, що добуток $\varphi\psi$ самоспряжених перетворень φ і ψ буде самоспряженим тоді й лише тоді, коли вони комутують.

15. Доведіть, що для довільного лінійного перетворення φ унітарного простору кожне з перетворень $\varphi^*\varphi$ і $\varphi\varphi^*$ буде самоспряженим.

16. Доведіть, що ядро та образ спряженого перетворення φ^* є ортогональними доповненнями відповідно до образу та ядра перетворення φ.

17. Знайдіть матрицю спряженого перетворення φ^*, якщо перетворення φ переводить вектори $\boldsymbol{a}_1 = (0,0,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,1)$ у вектори $\boldsymbol{b}_1 = (1,2,1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (3,1,2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (7,-1,4)$ відповідно (координати векторів дано в ортонормованій базі).

18. В ортонормованій базі $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ вектори $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ мають координати $\boldsymbol{f}_1 = (1,2,1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (1,1,2)$, $\boldsymbol{f}_3 = (1,1,0)$. Перетворення φ у базі $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$ має матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$. Знайдіть у цій же базі матрицю спряженого перетворення φ^*.

19. Самоспряжене перетворення φ простору $\mathbb{R}^3$ зі стандартним скалярним добутком переводить вектори $(2,2,-1)$ та $(2,-1,2)$ відповідно у вектори $(5,-1,-1)$ та $(3,3,3)$. Знайдіть його матрицю у стандартній базі простору $\mathbb{R}^3$, якщо слід перетворення дорівнює 3.

20. У просторі $\mathbb{R}_2[x]$ з базою $1,\ x,\ x^2$ знайдіть матрицю перетворення, спряженого до диференціювання, якщо скалярний добуток задається правилом $(f,g) = \int\limits_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$.

21. Нехай у деякій базі скалярний добуток задається білінійною функцією з матрицею F, а лінійне перетворення — матрицею A. Знайдіть матрицю спряженого перетворення φ^* у цій же базі, якщо:

a) $F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

22. Знайдіть власну ортонормовану базу перетворення φ і його матрицю в цій базі, якщо в стандартній ортонормованій базі воно має матрицю:

a) $\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Додаткові задачі

23. Нехай $\{\mathbf{0}\} \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_n = V$ та $\{\mathbf{0}\} \subset W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_n = V$ — два такі ланцюги підпросторів n–вимірного евклідового простору V, що $\dim U_k = \dim W_k = k$. Доведіть, що існує ортогональне перетворення, яке переводить перший з ланцюгів у другий.

24. Доведіть, що кожен елемент унітарної матриці дорівнює за модулем своєму доповняльному мінорові.

25.* Доведіть, що для довільних унітарного перетворення φ і натурального числа k існує таке унітарне перетворення ψ, яке є многочленом від φ і задовольняє рівність $\psi^k = \varphi$. Зокрема, в множині унітарних перетворень можна добувати корені.

26.** Нехай k — фіксоване натуральне число та $n > k$. Доведіть, що кожне лінійне перетворення φ n–вимірного евклідового простору, яке зберігає об'єми k–вимірних паралелепіпедів, є ізометрією.

27. Доведіть, що коли лінійне перетворення φ евклідового (унітарного) простору має дві з наступних властивостей:

a) φ — самоспряжене перетворення,
b) φ — ортогональне (унітарне) перетворення,
c) φ — інволютивне перетворення (тобто $\varphi^2 = \varepsilon$),

то воно має й третю властивість.

28. У просторі $M_n(\mathbb{R})$ визначимо скалярний добуток матриць $X = (x_{ij})$ та $Y = (y_{ij})$ правилом $(X, Y) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_{ij}y_{ij}$. Для фіксованих матриць A та B знайдіть перетворення, спряжене до перетворення: a) $X \mapsto AXB$; b) $X \mapsto AX + XB$.

29. Нехай φ — самоспряжене перетворення і для кожного вектора $\boldsymbol{v}$ виконується рівність $(\varphi(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) = 0$. Доведіть, що $\varphi = \mathcal{O}$.

30. Доведіть, що для дійсної кососиметричної матриці A матриця $E+A$ буде невиродженою, а матриця $(E - A)(E + A)^{-1}$ — ортогональною.

31. Нехай φ — самоспряжене перетворення унітарного простору. Доведіть, що:

a) перетворення $\varphi - i\varepsilon$ — невироджене;
b) перетворення $\psi = (\varphi - i\varepsilon)^{-1}(\varphi + i\varepsilon)$ — унітарне;
c) перетворення $\psi + \varepsilon$ — невироджене;
d) $\varphi = i(\psi - \varepsilon)(\psi + \varepsilon)^{-1}$.

32.** Доведіть, що для кожного лінійного відображення $\varphi : U \to V$ евклідових просторів існує, причому єдине, таке лінійне відображення $\varphi^+ : V \to U$, що $\varphi\varphi^+\varphi = \varphi$, $\varphi^+\varphi\varphi^+ = \varphi^+$, а відображення $\varphi\varphi^+$ та $\varphi^+\varphi$ — самоспряжені.

33. Доведіть, що для кожного лінійного перетворення φ n–вимірного евклідового простору існує ортонормована система векторів $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, яка перетворенням φ переводиться в ортогональну систему $\varphi(\boldsymbol{v}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{v}_n)$.

34. Скільки власних ортонормованих баз має самоспряжене перетворення n–вимірного евклідового простору, якщо власні числа є попарно різними?

35. Як пов'язані жорданові нормальні форми спряжених перетворень φ та φ^*?

36. Доведіть, що для довільного лінійного перетворення φ евклідового або унітарного простору виконується рівність $(e^{\varphi})^* = e^{\varphi^*}$.

Домашнє завдання

37. Доведіть, що унітарне перетворення має інваріантні підпростори усіх можливих розмірностей.

38. Для ортогонального перетворення, заданого в ортонормованій базі матрицею A, знайдіть канонічний вигляд його матриці і канонічну ортонормовану базу:

$$\text{a)}\ A = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{b)}\ A = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

39. У просторі $\mathbb{R}_2[x]$ з базою $1,\ x,\ x^2$ знайдіть матрицю перетворення, спряженого до диференціювання, якщо скалярний добуток задається правилом $(a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$.

40. Нехай у деякій базі скалярний добуток задається білінійною формою з матрицею F, а лінійне перетворення — матрицею A. Знайдіть у цій же базі матрицю спряженого перетворення φ^*, якщо:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

41. Нехай φ та ψ — самоспряжені перетворення унітарного простору. Доведіть, що кожне з перетворень $\varphi\psi + \psi\varphi$ та $i(\varphi\psi - \psi\varphi)$ є самоспряженим.

42. Знайдіть власну ортонормовану базу перетворення φ і його матрицю в цій базі, якщо в стандартній ортонормованій базі воно має матрицю:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Література. [1], с. 58–61; [2], с. 226–232; [3], с. 123–134, 151–155; [4], с. 164–183; [5], с. 399–416; [6], с. 189–196; [8], с. 126–131, 136–138; [9], с. 219–222; [10], с. 46–50, 66–77; [12], с. 355–362; [13], с. 302–311.

Заняття 17. Нормальні оператори

Необхідні поняття. Лінійне перетворення φ евклідового (унітарного) простору називається *нормальним*, якщо воно переставне зі своїм спряженим, тобто $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$.

Матриця A називається *нормальною*, якщо $A \cdot \overline{A}^\top = \overline{A}^\top \cdot A$.

Зведенням дійсної квадратичної функції до головних осей називається її зведення до канонічного вигляду за допомогою ортогонального перетворення.

Необхідні твердження. **1.** Ортогональні, унітарні та самоспряжені перетворення є нормальними.

2. Власні вектори нормального перетворення, що відповідають різним власним числам, ортогональні.

3. Якщо $\boldsymbol{v}$ — власний вектор нормального перетворення φ з власним числом λ, то $\boldsymbol{v}$ буде також власним вектором перетворення φ^* з власним числом $\overline{\lambda}$.

4. *Основна теорема про нормальні перетворення.* Лінійне перетворення φ унітарного простору буде нормальним тоді й тільки тоді, коли для нього існує власна ортонормована база.

5. Кожну дійсну квадратичну форму відповідним ортогональним перетворенням можна звести до вигляду

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \cdots + \alpha_r y_r^2\,,$$

де r — ранг форми, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — ненульові власні числа матриці цієї форми. Зокрема, для ортогональної еквівалентності дійсних квадратичних форм необхідно й достатньо, щоб збігалися характеристичні многочлени матриць цих форм.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Доведіть, що поворот евклідової площини на кут α є нормальним перетворенням.*

Розв'язання. В ортонормованій базі матриця повороту на кут α має вигляд $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Матрицею спряженого перетворення буде транспонована матриця $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, тобто матриця повороту на кут $-\alpha$. Очевидно, що повороти на кути α та $-\alpha$ комутують. Тому поворот евклідової площини є нормальним перетворенням. $\square$

Задача 2. *Доведіть, що перетворення φ унітарного простору буде нормальним тоді й лише тоді, коли для довільного числа λ ядро й образ перетворення $\varphi - \lambda\varepsilon$ ортогональні.*

Розв'язання. Нехай перетворення φ унітарного простору V — нормальне. Якщо λ не є власним числом, то $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon) = \{\mathbf{0}\}$, а тому ядро й образ перетворення $\varphi - \lambda\varepsilon$ ортогональні.

Нехай тепер λ — власне число. За основною теоремою про нормальні перетворення для φ існує власна ортонормована база $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Без обмеження загальності можемо вважати, що $\varphi(\boldsymbol{a}_1) = \lambda\boldsymbol{a}_1, \ldots, \varphi(\boldsymbol{a}_k) = \lambda\boldsymbol{a}_k$, а для довільного $j > k \quad \varphi(\boldsymbol{a}_j) = \lambda_j \boldsymbol{a}_j$, причому $\lambda_j \neq \lambda$. Тоді

$$(\varphi - \lambda\varepsilon)(\boldsymbol{a}_j) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{якщо } j \leq k; \\ (\lambda_j - \lambda)\boldsymbol{a}_j, & \text{якщо } j > k. \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon) = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle, \quad \mathrm{Im}(\varphi - \lambda\varepsilon) = \langle \boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle.$$

Позаяк вектори бази попарно ортогональні, то ядро $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon)$ і образ $\mathrm{Im}(\varphi - \lambda\varepsilon)$ також ортогональні.

Доведемо тепер достатність умови. Щоб довести нормальність φ, досить показати, що для φ існує власна ортонормована база. Доведемо це індукцією за розмірністю простору V. База індукції очевидна, бо кожне лінійне перетворення одновимірного простору таку базу має.

Візьмемо довільне власне число λ. Оскільки

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon) + \dim \operatorname{Im}(\varphi - \lambda\varepsilon) =$$
$$= \dim \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon) + \dim\bigl(\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon)\bigr)^{\perp},$$

то $\dim \operatorname{Im}(\varphi - \lambda\varepsilon) = \dim\bigl(\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon)\bigr)^{\perp}$. Крім того, за умовою, $\operatorname{Im}(\varphi - \lambda\varepsilon) \subseteq \bigl(\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon)\bigr)^{\perp}$. Тому $\operatorname{Im}(\varphi - \lambda\varepsilon) = \bigl(\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon)\bigr)^{\perp}$. Оскільки образ перетворення є інваріантним підпростором, а інваріантні підпростори перетворень φ і $\varphi - \lambda\varepsilon$ збігаються, то $\operatorname{Im}(\varphi - \lambda\varepsilon)$ є інваріантним підпростором перетворення φ. Отже, можна розглянути обмеження $\psi = \varphi|_{\operatorname{Im}(\varphi - \lambda\varepsilon)}$ перетворення φ на підпростір $\operatorname{Im}(\varphi - \lambda\varepsilon)$. Тоді для довільного λ маємо:

$$\operatorname{Ker}(\psi - \lambda\varepsilon) \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon), \qquad \operatorname{Im}(\psi - \lambda\varepsilon) \subseteq \operatorname{Im}(\varphi - \lambda\varepsilon).$$

Тому $\operatorname{Ker}(\psi - \lambda\varepsilon)$ та $\operatorname{Im}(\psi - \lambda\varepsilon)$ ортогональні. Позаяк $\dim \operatorname{Im}(\varphi - \lambda\varepsilon) < \dim V$, то, за припущенням індукції, для перетворення ψ існує власна ортонормована база. Очевидно, що кожний власний вектор перетворення ψ буде і власним вектором перетворення φ. Доповнивши цю базу ортонормованою базою ядра $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon)$, одержимо власну ортонормовану базу перетворення φ. □

Зауваження. В евклідових просторах умова зад. 17.2 не є достатньою для нормальності перетворення. Контрприкладом слугує довільне перетворення, яке не має власних векторів і не є нормальним (наприклад, перетворення двовимірного простору з матрицею $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ в ортонормованій базі).

Задача 3. *Доведіть, що лінійне перетворення φ унітарного простору V буде нормальним тоді й лише тоді, коли кожний власний вектор перетворення φ є власним вектором і для перетворення φ^*.*

Розв'язання. Необхідність умови випливає з твердження **3**, тому доведемо лише достатність. Для цього досить показати, що з умови задачі випливає існування для перетворення φ власної ортонормованої бази. Це очевидно, якщо $\dim V = 1$. Далі застосуємо індукцію за розмірністю простору V.

Нехай $\boldsymbol{a}$ — власний вектор перетворень φ. За твердженням **3** він буде власним і для перетворення φ^*. Тоді для довільного вектора $\boldsymbol{v}$ з ортогонального доповнення $\langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp$ маємо:

$$(\boldsymbol{a}, \varphi(\boldsymbol{v})) = (\varphi^*(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v}) = (\mu \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = \mu(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = 0.$$

Отже, $\varphi(\boldsymbol{v}) \in \langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp$. Аналогічно доводиться, що $\varphi^*(\boldsymbol{v}) \in \langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp$. Таким чином, ортогональне доповнення $\langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp$ є інваріантним підпростором кожного з перетворень φ та φ^*. Тоді для обмеження $\varphi|_{\langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp}$ спряженим перетворенням буде $\left(\varphi|_{\langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp}\right)^* = \varphi^*|_{\langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp}$, а тому обмеження $\varphi|_{\langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp}$ також задовольняє умову задачі. Оскільки $\dim\langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp < \dim V$, то, за припущенням індукції, для перетворення $\varphi|_{\langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp}$ існує власна ортонормована база. Поповнивши її вектором $\boldsymbol{a}$, одержимо власну ортонормовану базу перетворення φ. □

Задача 4. *Перевірте, що матриця*

$$A = \begin{pmatrix} 2-i & -1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 0 & 1 & 2-i \end{pmatrix}$$

є нормальною, і знайдіть для неї власну ортонормовану базу.

Розв'язання. Якщо ми покажемо, що для перетворення з даною матрицею існує власна ортонормована база, то тим самим, згідно твердження **4**, буде доведена і нормальність матриці. Для цього спочатку знайдемо власні числа матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-i-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-i-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-i-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-i-\lambda & 0 & 2-i-\lambda \\ -1 & 1-i-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-i-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-i-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1-i-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-i-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-i-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-i-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-i-\lambda \end{vmatrix} = (2-i-\lambda)(-i-\lambda)(3-i-\lambda)\ .$$

Таким чином, маємо три власні числа: $\lambda_1 = 2 - i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = 3 - i$. Далі шукаємо відповідні власні вектори:

$$\big(A - (2-i)E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Розв'язком цієї системи (і, відповідно, власним вектором для $\lambda_1 = 2-i$) буде, наприклад, вектор $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 1)$.

$$\big(A+iE \mid 0\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Розв'язком цієї системи (і, відповідно, власним вектором для $\lambda_2 = i$) буде, наприклад, вектор $\boldsymbol{a}_2 = (1, 2, -1)$.

$$\big(A - (3-i)E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Розв'язком цієї системи (і, відповідно, власним вектором для $\lambda_3 = 3-i$) буде, наприклад, вектор $\boldsymbol{a}_3 = (-1, 1, 1)$.

Позаяк власні вектори з різними власними числами лінійно незалежні, то маємо власну базу $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 2, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1, 1, 1)$. Легко перевіряється, що ці вектори попарно ортогональні:

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = 0.$$

Нормуючи їх, одержуємо власну ортонормовану базу: $\boldsymbol{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}(1, 2, -1)$, $\boldsymbol{e}_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1, 1, 1)$. □

Задача 5. *Зведіть квадратичну форму до головних осей і знайдіть матрицю переходу до відповідної ортонормованої бази*:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

b) $-x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Розв'язання. a) Записуємо матрицю A квадратичної форми і шукаємо її власні числа:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5-\lambda & 5-\lambda \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)(1+\lambda)^2.$$

Таким чином, власними числами будуть $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Тому після зведення до головних осей квадратична форма набуває вигляду $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

Стовпчиками матриці переходу до відповідної ортонормованої бази будуть вектори власної ортонормованої бази перетворення з матрицею A. Тому шукаємо власні вектори матриці A:

$$\big(A - 5E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Розв'язком цієї системи (тобто власним вектором для $\lambda_1 = 5$) буде, наприклад, вектор $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1)$.

$$\big(A + E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Легко вказуються два лінійно незалежні розв'язки цієї системи (власні вектори для $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$): $\boldsymbol{a}_2 = (1, -1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 0, -1)$.

Щоб перейти до ортогональної бази перетворення з матрицею A, застосуємо до системи $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ процес ортогоналізації:

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)} \cdot \boldsymbol{b}_2 = \Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\Big).$$

Нормуючи систему $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$, знаходимо відповідні стовпчики матриці

T переходу до ортонормованої бази. Тому

$$T = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Як і в попередньому випадку, записуємо матрицю A квадратичної форми і шукаємо її власні числа:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4-2\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} =$$

(до 1-го рядка додали 3-й і подвоєний 2-й)

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -4 & -8-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda)(7+\lambda)\lambda.$$

Таким чином, власними числами будуть $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -7$, $\lambda_3 = 0$, а після зведення до головних осей квадратична форма набуває вигляду $2y_1^2 - 7y_2^2$.

Щоб знайти ортонормовану базу, шукаємо власні вектори матриці A:

$$\big(A - 2E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -7 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Розв'язком цієї системи, тобто власним вектором для $\lambda_1 = 2$, буде, наприклад, вектор $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1)$.

$$\big(A + 7E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Розв'язком цієї системи, тобто власним вектором для $\lambda_2 = -7$, буде, наприклад, вектор $\boldsymbol{a}_2 = (2, 1, -4)$.

$$\big(A - 0 \cdot E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Розв'язком цієї системи, тобто власним вектором для $\lambda_3 = 0$, буде, наприклад, вектор $\boldsymbol{a}_3 = (3, -2, 1)$.

Оскільки перетворення з симетричною матрицею A є нормальним, то власні вектори, що відповідають різним власним числам, попарно ортогональні. Тому лишилося лише нормувати систему $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|} = \frac{\sqrt{6}}{6}(1, 2, 1), \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_2|} = \frac{\sqrt{21}}{21}(2, 1, -4),$$
$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{a}_3}{|\boldsymbol{a}_3|} = \frac{\sqrt{14}}{14}(3, -2, 1).$$

Таким чином, матриця T переходу до ортонормованої бази має вигляд

$$T = \frac{\sqrt{42}}{42}\begin{pmatrix} \sqrt{7} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{3} \\ 2\sqrt{7} & \sqrt{2} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{7} & -4\sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

□

Задача 6. *Покажіть, що одна з двох даних квадратичних функцій*

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^3 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3,$$
$$g = 2x_1^2 + 8x_2^2 + 3x_3^3 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

є додатно визначеною, і знайдіть невироджене лінійне перетворення, яке приводить одну з цих функцій до нормального, а іншу — до канонічного вигляду. Знайдіть також цей канонічний вигляд.

Розв'язання. Запишемо матриці даних квадратичних функцій і знайдемо їх головні кутові мінори:

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ \Delta_1 = 1, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$[g] = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \Delta_1 = 2, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, у функції f всі головні кутові мінори додатні, а тому за критерієм Сильвестра вона буде додатно визначеною. Зведемо її методом Лагранжа до нормального вигляду:

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^3 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 =$$
$$= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

де $y_1 = x_1 + x_2 - x_3$, $y_2 = x_2 + x_3$, $y_3 = x_3$. Оскільки звідси $x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3$, $x_2 = y_2 - y_3$, $x_3 = y_3$, то функція g зводиться при цьому до вигляду

$$g = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^3 + 4y_1y_2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3.$$

Зокрема, маємо такий зв'язок між старими і новими координатами:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Позаяк тепер у координатах y_1, y_2, y_3 функція f задає стандартний скалярний добуток, то ми можемо звести функцію g до головних осей. Для цього записуємо в цих координатах матрицю A функції g, а потім шукаємо власні числа та відповідні власні вектори:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5-\lambda & 5-\lambda \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -(5-\lambda)(2-\lambda)\lambda.$$

Таким чином, власними числами будуть $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$. Тому після зведення до головних осей квадратична функція набуває вигляду $g = 5z_1^2 + 2z_2^2$. Ортонормована база, в якій функція g має такий вигляд, складається з власних векторів. Знайдемо їх:

$$\big(A - 5E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином, для $\lambda_1 = 5$ власним вектором буде, наприклад, вектор $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1)$.

$$\big(A - 2E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Для $\lambda_2 = 2$ власним вектором буде, наприклад, вектор $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, -2)$.

$$\big(A - 0 \cdot E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Для $\lambda_3 = 0$ власним вектором буде, наприклад, вектор $\boldsymbol{a}_3 = (1, -1, 0)$. Після нормування системи $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ одержуємо матрицю переходу:

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Це дає нам ще один зв'язок між координатами:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи співвідношення (56), звідси отримуємо лінійне перетворення

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -4 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

яке приводить функцію f до нормального вигляду $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$, а функцію g — до канонічного вигляду $5z_1^2 + 2z_2^2$. □

Задача 7. *Нехай U — інваріантний підпростір нормального перетворення φ. Доведіть, що кожен з підпросторів U та $U^\perp$ буде інваріантним як відносно φ, так і відносно φ^*.*

Розв'язання. У розв'язанні зад. 17.3 показано, що для кожного власного вектора $\boldsymbol{a}$ нормального перетворення φ ортогональне доповнення $\langle \boldsymbol{a} \rangle^{\perp}$ є φ–інваріантним підпростором. Звідси та основної теореми про нормальні перетворення випливає, що кожний інваріантний підпростір нормального перетворення має базу з власних векторів. Крім того, за твердженням **3**, кожний власний вектор нормального перетворення φ є також власним вектором перетворення φ^*. Тому кожний інваріантний підпростір перетворення φ буде інваріантним і відносно φ^*.

Лишилося показати, що ортогональне доповнення $U^{\perp}$ також буде інваріантним відносно φ. Розглянемо довільні $\boldsymbol{u} \in U$ та $\boldsymbol{v} \in U^{\perp}$. Оскільки $(\boldsymbol{u}, \varphi(\boldsymbol{v})) = (\varphi^*(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})$ та $\varphi^*(\boldsymbol{u}) \in U$, то $(\boldsymbol{u}, \varphi(\boldsymbol{v})) = 0$. З довільності $\boldsymbol{u} \in U$ випливає, що $\varphi(\boldsymbol{v}) \in U^{\perp}$, що й треба було довести. □

Задача 8. *Доведіть, що коли нормальні перетворення φ та ψ унітарного простору V комутують, то для них існує спільна власна ортонормована база.*

Розв'язання. Для одновимірного простору це очевидно. Далі застосуємо індукцію за розмірністю простору V.

Нехай λ — власне число перетворення φ, а $V_{\varphi}^{(\lambda)}$ — відповідний власний підпростір. Тоді для кожного $\boldsymbol{v} \in V_{\varphi}^{(\lambda)}$ маємо:

$$\varphi(\psi(\boldsymbol{v})) = \psi(\varphi(\boldsymbol{v})) = \psi(\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda \psi(\boldsymbol{v}).$$

Отже, $\psi(\boldsymbol{v}) \in V_{\varphi}^{(\lambda)}$, а тому $V_{\varphi}^{(\lambda)}$ — інваріантний підпростір перетворення ψ. Звідси випливає, що довільний власний вектор обмеження $\psi|_{V_{\varphi}^{(\lambda)}}$ перетворення ψ на підпростір $V_{\varphi}^{(\lambda)}$ буде спільним власним вектором перетворень φ та ψ. Нехай $\boldsymbol{a}$ — один з таких векторів. Згідно зад. 17.7 ортогональне доповнення $\langle \boldsymbol{a} \rangle^{\perp}$ буде інваріантним як відносно φ та ψ, так і відносно φ^* та ψ^*. Зокрема, обмеження на цей підпростір кожного з перетворень φ і ψ буде нормальним, а тому ці обмеження задовольняють умову задачі. Оскільки $\dim \langle \boldsymbol{a} \rangle^{\perp} < \dim V$, то, за припущенням індукції, для перетворень $\varphi|_{\langle \boldsymbol{a} \rangle^{\perp}}$ та $\psi|_{\langle \boldsymbol{a} \rangle^{\perp}}$ існує власна ортонормована база. Поповнивши її нормованим вектором $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$, одержимо спільну власну ортонормовану базу перетворень φ та ψ. □

Задача 9. *Знайдіть ортогональне лінійне перетворення, яке одночасно приводить до канонічного вигляду кожну з даних квадратичних* *функцій*:

$$f = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^3 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3,$$
$$g = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^3 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Розв'язання. Безпосередньо перевіряється, що матриці

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad [g] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

квадратичних функцій f та g комутують. Оскільки ці матриці симетричні, на них можна дивитися як на матриці самоспряжених перетворень в ортонормованій базі. Позаяк самоспряжене перетворення є нормальним, то згідно зад. 17.8 вони мають спільну власну ортонормовану базу. Якщо перейти до цієї бази, то кожна з функцій f та g набуде канонічного вигляду. Щоб знайти власну ортонормовану базу перетворення з матрицею $[f]$, шукаємо спочатку власні числа цієї матриці:

$$\chi_{[f]}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 2+\lambda \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2+\lambda) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -(2+\lambda)(\lambda-3)(\lambda-6).$$

Далі для кожного з чисел $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$ шукаємо відповідний власний вектор:

$$\big([f] + 2E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином, для $\lambda_1 = -2$ власним вектором буде, наприклад, вектор $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, -1)$.

$$\big([f] - 3E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Тому для $\lambda_2 = 3$ власним вектором буде, наприклад, вектор $\boldsymbol{a}_2 = (1, -1, 1)$.

$$\big([f] - 6E \mid 0\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Тому для $\lambda_3 = 6$ власним вектором буде, наприклад, вектор $\boldsymbol{a}_3 = (1, 2, 1)$.

Безпосередньо перевіряється, що $[g]\boldsymbol{a}_1 = 6\boldsymbol{a}_1$, $[g]\boldsymbol{a}_2 = -6\boldsymbol{a}_2$, $[g]\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$. Тому для перетворення з матрицею $[g]$ вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ будуть власними з власними числами відповідно 6, -6 та 0.

Нормуючи систему $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, одержимо ортонормовану базу, матрицею переходу до якої буде

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Це дає нам ортогональне перетворення координат, яке приводить обидві функції до канонічного вигляду:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

При цьому функції f та g набувають відповідно вигляду $-2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2$ та $6y_1^2 - 6y_2^2$. $\square$

Основні задачі

10. Доведіть, що перетворення $\varphi(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}]$ звичайного тривимірного евклідового простору (вектор $\boldsymbol{a}$ — фіксований) є нормальним.

11. Чи можна в просторі многочленів $\mathbb{R}_n[x]$, $n \geq 1$, визначити скалярний добуток таким чином, щоб стало нормальним перетворення:

a) $f(x) \mapsto f'(x)$; b) $f(x) \mapsto f(x + a)$ (a — фіксоване число)?

12. Доведіть, що нормальне перетворення:

a) буде самоспряженим тоді й лише тоді, коли всі його власні значення є дійсними;

b) буде унітарним тоді й лише тоді, коли всі його власні значення за модулем дорівнюють 1.

13. Доведіть, що коли нормальне перетворення φ унітарного простору комутує з перетворенням ψ, то кожне з перетворень φ та φ^* комутує з кожним з перетворень ψ та ψ^*.

14. Перевірте, що матриця A є нормальною, і знайдіть для неї власну ортонормовану базу:

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{b)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. Перевірте, що матриці

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

нормальні і комутують між собою. Побудуйте для них спільну ортонормовану базу.

16. Зведіть квадратичну форму до головних осей:
a) $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;
b) $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;
c) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_3x_4$;
d) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 8x_2x_4 + 4x_3x_4$;
e) $4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_4^2 + x_5^2 - 4x_1x_2 + 12x_4x_5$;
f) $3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_4^2 + 4x_5^2 + x_6^2 + 8x_1x_2 - 6x_3x_4 + 4x_5x_6$.

17. Зведіть квадратичну форму до головних осей і знайдіть матрицю переходу до відповідної ортонормованої бази:
a) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
b) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
c) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;
d) $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;
e) $2x_1x_4 + 6x_2x_3$;
f) $5x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+5x_4^2-10x_1x_2+2x_1x_3+6x_1x_4+6x_2x_3+2x_2x_4-10x_3x_4$.

18. Доведіть, що невироджена квадратична функція f зводиться до нормального вигляду ортогональним перетворенням тоді й лише тоді, коли її матриця $[f]$ є ортогональною.

19. Доведіть, що кожну дійсну симетричну матрицю A можна розкласти в добуток $A = Q^{-1}DQ$, де матриця Q — ортогональна, а D — діагональна.

20. Розкладіть матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

в добуток $A = Q^{-1}DQ$, де матриця Q — ортогональна, а D — діагональна.

21. Покажіть, що одна з квадратичних функцій f та g є додатно визначеною, і знайдіть невироджене лінійне перетворення, яке приводить одну з цих функцій до нормального, а іншу — до канонічного вигляду. Знайдіть також цей канонічний вигляд:

a) $f = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2, \quad g = x_1^2 + 56x_2^2 + 16x_1x_2;$

b) $f = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3,$
$g = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^3 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3;$

c) $f = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^3 - x_4^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_3x_4,$
$g = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^3 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_4.$

22. Знайдіть ортогональне лінійне перетворення, яке одночасно приводить до канонічного вигляду кожну з даних квадратичних функцій:

$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4,$
$g = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^3 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4.$

Додаткові задачі

23. Доведіть, що лінійне перетворення φ евклідового (унітарного) простору V буде нормальним тоді й лише тоді, коли для всіх $\boldsymbol{x} \in V$ виконується рівність $|\varphi(\boldsymbol{x})| = |\varphi^*(\boldsymbol{x})|$.

24. Перетворення φ простору $\mathbb{R}^3$ має в стандартній базі цього простору матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Визначте в просторі $\mathbb{R}^3$ скалярний добуток таким чином, щоб перетворення φ стало нормальним.

25. У просторі $M_n(\mathbb{R})$ скалярний добуток матриць $X = (x_{ij})$ та $Y = (y_{ij})$ визначимо правилом: $(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} y_{ij}$. Доведіть, що коли фіксовані матриці A та B є нормальними, то кожне з перетворень $X \mapsto AXB$ та $X \mapsto AX + XB$ також є нормальним.

26. Нехай φ та ψ — нормальні перетворення. Доведіть, що з рівності $\varphi\psi = \mathcal{O}$ випливає рівність $\psi\varphi = \mathcal{O}$.

27. Нехай φ — нормальне перетворення унітарного простору, а k — натуральне число. Знайдіть кількість таких нормальних перетворень ψ, що $\psi^k = \varphi$.

28.* Доведіть, що перетворення φ буде нормальним тоді й лише тоді, коли спряжене перетворення φ^* можна подати у вигляді многочлена від φ.

29. Доведіть, що лінійне перетворення φ унітарного простору буде нормальним тоді й лише тоді, коли його можна розкласти в добуток $\varphi = \mu\nu$ таких самоспряженого перетворення μ й унітарного перетворення ν, які комутують між собою.

30. Доведіть, що кожне лінійне перетворення φ унітарного простору однозначно зображується у вигляді $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, де φ_1 та φ_2 — самоспряжені перетворення. При цьому перетворення φ буде нормальним тоді й лише тоді, коли перетворення φ_1 та φ_2 комутують між собою.

31. Доведіть, що кронекерівський добуток $A \times B$ нормальних матриць A та B (можливо, різного порядку) також є нормальною матрицею.

32. Зведіть квадратичну форму до головних осей:

a) $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$; b) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i<j}^{n} x_i x_j$; c) $\sum\limits_{i<j}^{n} x_i x_j$.

33.* Нехай f і g — дві квадратичні функції з матрицями $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ та $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ відповідно, причому функція f — додатно визначена. Доведіть, що невиродженим лінійним перетворенням їх можна звести до вигляду $f = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, $g = \mu_1 x_1^2 + \cdots + \mu_n x_n^2$, де $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — корені рівняння $\det(B - \mu A) = 0$.

34.* Нехай квадратичні функції g_1 та g_2 — додатно визначені. Доведіть, що пару функцій f_1, g_1 можна перевести невиродженим лінійним перетворенням у пару функцій f_2, g_2 тоді й лише тоді, коли рівняння $\det([f_1] - \mu[g_1]) = 0$ та $\det([f_2] - \mu[g_2]) = 0$ мають одні й ті ж корені.

35. З'ясуйте, чи можна квадратичні функції $f = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$ та $g = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$ одночасно звести до канонічного вигляду невиродженим лінійним перетворенням.

Домашнє завдання

36. Визначимо в просторі $\mathbb{R}_n[x]$ скалярний добуток правилом:

$(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) = a_0b_0 + a_1b_1 + \dots + a_nb_n$.

Доведіть, що перетворення $f(x) \mapsto x^n f(1/x)$ є нормальним.

37. Перевірте, що матриця

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

є нормальною, і знайдіть для неї власну ортонормовану базу.

38. Зведіть до головних осей квадратичну функцію

$$7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

39. Зведіть квадратичну функцію до головних осей і знайдіть матрицю переходу до відповідної ортонормованої бази:

a) $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

b) $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

40. Знайдіть канонічний вигляд функції f, до якого її можна звести невиродженим лінійним перетворенням, яке зводить додатно визначену функцію g до нормального вигляду:

a) $f = 21x_1^2 - 18x_2^2 + 6x_3^3 + 4x_1x_2 + 28x_1x_3 + 6x_2x_3$,
$g = 11x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^3 - 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$;

b) $f = 14x_1^2 - 4x_2^2 + 17x_3^3 + 8x_1x_2 - 40x_1x_3 - 26x_2x_3$,
$g = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^3 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$.

41. Покажіть, що одна з квадратичних форм f та g є додатно визначеною, і знайдіть невироджене лінійне перетворення, яке приводить одну з цих форм до нормального, а іншу — до канонічного вигляду. Знайдіть також цей канонічний вигляд:

a) $f = -4x_1x_2, \quad g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$;

b) $f = x_1^2 + 5x_2^2 + 14x_3^3 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3$,
$g = x_1^2 + 14x_2^2 + 4x_3^3 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Література. [1], с. 62–71; [3], с. 134–147, 157–163; [5], с. 420–421; [7], с. 196–199; [8], с. 131–135, 139–142; [9], с. 226–231; [10], с. 51–53; [12], с. 160–163, 363–366; [13], с. 298–302.

Відповіді та вказівки

Заняття 1. **5.** a) Неодноелементна абелева група з нульовим множенням на скаляри; b) множина $\mathbb{R}^2$ зі звичайним додаванням і таким множенням на скаляри: $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2)$. **6.** b) $\dim \mathcal{B}(M) = n$, базу утворюють одноелементні підмножини. c) (i) Так; (ii) ні. *Вказ.* Підмножини множини M зручно задавати характеристичними векторами. **7.** *Вказ.* c), d) Двічі продиференціюйте лінійну комбінацію, яка дорівнює 0, і застосуйте індукцію; e) використайте визначник Вандермонда. **8.** a), b) Ні. *Вказ.* a) $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$, b) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^4 x - \sin^4 x$. **9.** a), b), e), f), g), h) Так; c), d) ні. **10.** a), b), d), e), h) Так; f), g) ні; c) так, якщо $|A| = 1$, і ні, якщо $|A| > 1$. *Вказ.* f), g) розгляньте функції $\sin x + 2x$ і $\sin x - 2x$. **11.** a), b) так; c) ні. **12.** a), b) Усі многочлени степеня ≤ 2; c), d) усі многочлени степеня ≤ 2 з нульовою сумою коефіцієнтів. **13.** a) $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 - x_4 = 0$; b) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; c) $0 = 0$; d) $x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + 2x_4 = 0$, $2x_1 + x_2 - x_5 = 0$. **14.** *Вказ.* $\mathbb{R}(a, b)$ містить підпростір $\mathbb{R}[x]$ усіх дійсних многочленів. **15.** a), b) Ні; c) так. **16.** a) 0, якщо, V не є одновимірним простором над полем $\mathbb{Z}_2$; b), c) $(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$; d) $\frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{m-1})}{(q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{m-1})}$. *Вказ.* b) i-й вектор бази не може бути лінійною комбінацією попередніх, тому його можна вибрати $q^n - q^{i-1}$ способами; c) рядки матриці утворюють базу простору V; d) чисельник — кількість способів вибору в просторі V набору з m лінійно незалежних векторів (див. вказ. до b)), знаменник — кількість наборів, що породжують один і той же підпростір (тобто кількість баз m–вимірного підпростору). **18.** $\dim = 2$. Базу утворюють функції $\sin x, \cos x$. **19.** a) Так, 0; b) ні для $n > 1$; c) так, $n - 1$. *Вказ.* c) У полі $\mathbb{Z}_2$ $x^2 = x$. **20.** *Вказ.* Якщо $\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n$, то $\boldsymbol{v} = (\alpha_1 + \beta)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta)\boldsymbol{e}_n + \beta \boldsymbol{e}_{n+1}$. Сума коефіцієнтів останньої лінійної комбінації дорівнює 0, якщо $\beta = -\frac{1}{n+1}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$. Однозначність випливає з того, що з рівності $\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n + \alpha_{n+1} \boldsymbol{e}_{n+1}$ випливає рівність $\boldsymbol{v} = (\alpha_1 - \alpha_{n+1})\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (\alpha_n - \alpha_{n+1})\boldsymbol{e}_n$, коефіцієнти якої визначені однозначно. **21.** *Вказ.* Запишіть вектор $\boldsymbol{v}$ у вигляді $\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n + \alpha_{n+1} \boldsymbol{e}_{n+1}$ і додайте до правої частини $k(\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_n + \boldsymbol{e}_{n+1})$, де $k = -\min\limits_i \alpha_i$. **23.** $\lambda \neq 1$ для парних n і $\lambda \neq -1$ для непарних n. **26.** $x_1 - x_3 - x_4 = 0$, $x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

Заняття 2. **8.** $n - 1$. **9.** Тільки b). **10.** Наприклад, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ і $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$. **11.** a) Наприклад, x^5, $x^5 + x^4$, $x^5 + x^3$, $x^5 + x^2$, $x^5 + x$, $x^5 + 1$. b) Ні. **12.** 3; наприклад,

f_1, f_2, f_3. **13.** $(1,1,1)$. **14.** . a) $(2,-1,-1,1,-1,1)$, b) $(1,-1,-1,2,-1,1)$. **15.** $g_i(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_0)(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. *Вказ.* Використайте інтерполяційний многочлен Лагранжа. **16.** $T_{(a)\to(b)} = $
$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T_{(b)\to(a)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **17.** $\begin{pmatrix} 9 & 40 & 9 \\ -3 & -11 & -2 \\ 8 & 37 & 8 \end{pmatrix}$.
18. a) Переставляться відповідні два рядки; b) переставляться відповідні два стовпчики; c) матриця переходу відобразиться симетрично відносно свого центра. **20.** *Вказ.* Зіставте многочлену $f = (x-a)(b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_n)$ набір b_1, b_2, $\ldots$, b_n. **22.** a) $\binom{n+k-1}{k-1}$; b) $\binom{n+k}{k}$. *Вказ.* a) Зведіть до розбиття числа n у суму k невід'ємних доданків. b) Зведіть до однорідних многочленів від $k+1$ змінних і використайте a). **23.** a) 2^n; b) $\binom{n}{k}$. **24.** $A \times B^\top$. **25.** $(p^n-1)(p^n-p)(p^n-p^2)\cdots(p^n-p^{n-1})$. *Вказ.* При фіксованій базі першого простору ізоморфізм однозначно задається її образом, який є базою другого простору і може вибиратися довільно. Далі використайте зад. 1.16. **26.** *Вказ.* Перевірте, що відображення $\varphi : \boldsymbol{v} \to \bar{\boldsymbol{v}}$ зберігає операції додавання та множення на елементи з $\mathbb{C}$. **27.** a) Так, 1; b) так, $\left[\frac{n+3}{2}\right]$ при $n > 1$; c) так, $n-1$; d) ні; e) так, $n-1$. **28.** Наприклад, додати x^5 і 1. **29.** Розмірність 3; база $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_5$. **30.** a) $(1,2,3)$; b) $(1,0,-1,0)$.

31. $T_{(f)\to(g)} = \begin{pmatrix} 0 & -18 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $T_{(g)\to(f)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -5 & 0 \\ -4 & 6 & -10 & 0 \\ 3 & -3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

32. $T_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{b})} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $T_{(\boldsymbol{b})\to(\boldsymbol{a})} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Заняття 3. **7.** В усіх випадках $V_i + V_j = V$, $V_2 \cap V_1 = V_2 \cap V_3 = V_2 \cap V_4 = \{\mathbf{0}\}$, $V_1 \cap V_3 = V_1 \cap V_4 = V_3 \cap V_4 =$ підпростір діагональних матриць. **8.** a) Ні. b) Рівність правильна. *Вказ.* a) Візьміть 3 різні одновимірні підпростори з $\mathbb{R}^2$. b) Якщо $u \in U$, то $u = v + w$, де $v \in V$, $w \in W$. Але тоді $v \in U \cap V$, $w = u - v \in U$ і $w \in U \cap W$. Зворотне включення очевидне. **11.** a) $m = 3$, $k = 1$; b) $m = 3$, $k = 2$. **12.** a) $V_1 \cap V_2 = V_2$, база $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$; $V_1 + V_2 = V_1$, база $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{u}_1$. b) База перетину $\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3$, бази підпросторів $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v}_2$ і $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, база суми $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$. **14.** Проекція кожного на V дорівнює $(1/n, \ldots, 1/n)$, проекція $(\ldots,0,1,0\ldots)$ на U дорівнює $(\ldots,-1/n,(n-1)/n,-1/n,\ldots)$. **15.** *Вказ.* Якщо $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}_1$, то $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{u}_1\in U+W$. Навпаки, якщо $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{w}_2\in U+W$, то $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}_2$. **16.** *Вказ.* Нехай P і Q є множинами розв'язків СЛР S_1 і S_2 відповідно. Тоді підпросторами розв'язків відповідних однорідних СЛР S_1' і S_2' є U і W. $P\cap Q$ є множиною розв'язків СЛР $\begin{cases}S_1\\S_2\end{cases}$, а підпростором розв'язків відповідної однорідної СЛР $\begin{cases}S_1'\\S_2'\end{cases}$ є $U\cap W$. **17.** a) $(1,0,0,0)+U$, $(0,1,0,0)+U$; b) $(1,0,0,0)+U$. **18.** $\frac{(q^{n-m}-1)(q^{n-m-1}-1)\cdots(q^{n-m-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)}$, якщо $k+m\geq n$; 0 в іншому випадку. *Вказ.* Об'єднання баз k–вимірного і даного m–вимірного підпросторів має бути лінійно незалежним. **19.** *Вказ.* Включення $(V_1\cap V_2)+(V_2\cap V_3)+(V_3\cap V_1)\subseteq(V_1+V_2)\cap(V_2+V_3)\cap(V_3+V_1)$ очевидне. Перейдіть до факторпростору за $(V_1\cap V_2)+(V_2\cap V_3)+(V_3\cap V_1)$ і зведіть задачу до випадку, коли підпростори V_1, V_2, V_3 мають попарні нульові перетини. **20.** *Вказ.* Нехай $V=U_1\cup\cdots\cup U_k$, $k>1$, і жодну з компонент U_i не можна викинути. Тоді існують такі $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, що $\boldsymbol{v}\in U_1$, $\boldsymbol{v}\notin U_2\cup\cdots\cup U_k$, $\boldsymbol{w}\notin U_1$, $\boldsymbol{w}\in U_2\cup\cdots\cup U_k$. Позаяк $\alpha\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\notin U_1$ для довільного $\alpha\in P$, то $\alpha\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\in U_2\cup\cdots\cup U_k$ для довільного α. Поле P нескінченне, тому знайдуться такі $\alpha_1\neq\alpha_2$, що $\alpha_1\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ та $\alpha_1\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ належать одній і тій же компоненті U_j, $j>1$. Але тоді $(\alpha_1\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})-(\alpha_2\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\alpha_1-\alpha_2)\boldsymbol{v}\in U_j$, звідки $\boldsymbol{v}\in U_2\cup\cdots\cup U_k$, що суперечить вибору $\boldsymbol{v}$. **21.** *Вказ.* Розгляньте послідовність підпросторів $U_0+W\subset U_1+W\subset\cdots\subset U_{n-1}+W\subset U_n+W$ і покажіть, що $U_{k-1}+W=U_k+W$ для деякого k. **22.** $2k$. **25.** $\boldsymbol{u}_0+U+W+\mathcal{L}(\boldsymbol{w}_0-\boldsymbol{u}_0)$. **29.** Ні. **30.** $m=4$, $k=2$. **31.** $V_1+V_2=\mathcal{L}\big(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{v}_1\big)$, $V_1\cap V_2=\mathcal{L}\big((1,1,1,1,1),(0,2,3,1,-1)\big)$. **32.** $(-1,-3,1,3)$. **33.** $\frac{1}{2}(A+A^\top)$, $\frac{1}{2}(A-A^\top)$.

Заняття 4. **9.** a) Так; ядро — площина, перпендикулярна до $\boldsymbol{a}$, образ — пряма, породжена $\boldsymbol{b}$; b) так; ядро — пряма, породжена $\boldsymbol{a}$, образ —– площина, перпендикулярна до $\boldsymbol{a}$. **10.** Позначимо відповідне перетворення через φ. a) Так; $\operatorname{Ker}\varphi=0$, $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}_n[x]$; b) так; $\operatorname{Ker}\varphi=\mathbb{R}_0[x]$, $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}_{n-1}[x]$; c) так; $\operatorname{Ker}\varphi=\mathbb{R}_0[x]$, $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}_{n-1}[x]$; d), e), f) — ні. **11.** $\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$. **12.** a) Перші k стовпчиків нульові, решта — лінійно незалежні; b) перші k рядків лінійно незалежні, решта — нульові. **13.** a) Переставляться відповідні стовпчики; b) переставляться відповідні рядки. **14.** $(2,1,-3,-1,1)+\alpha(1,0,-2,-4,-4)+\beta(1,-2,0,0,0)$,

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. **15.** Образ — $\mathbb{R}^3$, база ядра — $(17, -5, 2, 9)$. **16.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

17. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Вказ.* b) Обидві трійки векторів пов'язані одним і тим же лінійним співвідношенням. **18.** *Відп.* $\dim V_1 + \dim W_1 = \dim V$. **19.** Якщо $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ — перпендикулярні, то ядро — площина, перпендикулярна до $\boldsymbol{b}$, а образ — пряма, натягнута на $\boldsymbol{a}$. У противному разі ядро — пряма, натягнута на $\boldsymbol{a}$, а образ — площина, перпендикулярна до $\boldsymbol{b}$. **20.** b) $\operatorname{rank} \varphi_A = n \cdot \operatorname{rank} A$; c) $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$, де r_k — ранг системи перших k стовпчиків матриці A. **21.** $x \mapsto x^a$, де число $a \in \mathbb{R}$ — фіксоване. **22.** $n + 1 - k$ при $k \le n$ і 0 при $k > n$. **23.** *Вказ.* За теоремою Сильвестра: a) $\dim U = \dim \varphi(U) + \dim(U \cap \operatorname{Ker} \varphi)$; b) $\dim \varphi^{-1}(U) = \dim U + \dim(\varphi^{-1}(U) \cap \operatorname{Ker} \varphi)$. **24.** $\dim U_1 = \dim W_1$, $\dim U_2 = \dim W_2$, $\dim U_1 \cap U_1 = \dim W_1 \cap W_2$. **25.** a) p^{mn}; b) $(p^m - 1)(p^m - p) \cdots (p^m - p^{n-1})$; c) $\frac{(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1)}{(p-1)(p^2-1)\cdots(p^{n-m}-1)} \cdot p^{m(m-1)/2}$; d) $\frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdots(p^{n-k+1}-1)(p^m-1)(p^{m-1}-1)\cdots(p^{m-k+1}-1)}{(p-1)(p^2-1)\cdots(p^k-1)} \cdot p^{k(k-1)/2}$. **26.** Гомотетії $\boldsymbol{v} \mapsto k\boldsymbol{v}$, де k — фіксоване. *Вказ.* Дослідіть, як змінюється матриця лінійного перетворення, якщо до одного з векторів бази додати інший. **27.** *Вказ.* Наприклад, $(z_1, z_2) \mapsto (\overline{z_1}, \overline{z_2})$. **29.** *Вказ.* Нехай підпростір U розмірності $n + 1$ містить лише оператори рангу ≤ 1. Зафіксуйте ненульовий оператор $\varphi \in U$ і покажіть, що множини $W_1 = \{\psi \in U \mid \operatorname{Ker} \psi \supseteq \operatorname{Ker} \varphi\}$ і $W_2 = \{\psi \in U \mid \operatorname{Im} \psi \subseteq \operatorname{Im} \varphi\}$ є підпросторами з U розмірності $\le n$ кожен. Далі візьміть $\psi_1 \notin W_1$, $\psi_2 \notin W_2$ і покажіть, що оператор $\psi_1 + \psi_2$ має ранг 2. **30.** Підпростори тільки у випадках b) та g). Розмірності відповідно nk і $m(n - l)$. **31.** Тільки c). **32.** a) $(1, 1, 1)$ — база образу; $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ — база ядра. b) Образ — $\mathbb{R}^3$, ядро — $\{\boldsymbol{0}\}$.

33. a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **34.** $\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$. **35.** База ядра — $(-3, -5, 0, 1)$, $(1, 3, 1, 0)$; база образу — будь–які 2 стовпчики матриці.

36. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 20 & -5 & 15 \\ -16 & 4 & -12 \\ 24 & -5 & 18 \end{pmatrix}$. **37.** $\begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 3 & 7 & 12 \end{pmatrix}$. **38.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Заняття 5. **9.** *Вказ.* a) Для $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} \varphi^{k-1}$ маємо рівності $\varphi^k(\boldsymbol{v}) = \varphi(\varphi^{k-1}(\boldsymbol{v})) = \varphi(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$. b) Використовуючи a), покажіть, що з $\operatorname{Ker} \varphi^k =$

$\operatorname{Ker}\varphi^{k+1}$ випливає $\operatorname{Ker}\varphi^{k+1} = \operatorname{Ker}\varphi^{k+2}$, і застосуйте індукцію. **11.** *Вказ.* Використайте зад. 5. 10. **12.** Ні. *Вказ.* Розгляньте відображення $\varphi : P^2 \to P^3$ і $\psi : P^3 \to P^2$ з матрицями $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ і $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ відповідно. **13.** φ. **14.** *Вказ.* Права нерівність випливає з включення $\langle(\varphi+\psi)(\boldsymbol{e}_1), \ldots, (\varphi+\psi)(\boldsymbol{e}_n)\rangle \subseteq \langle\varphi(\boldsymbol{e}_1), \psi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n), \psi(\boldsymbol{e}_n)\rangle$. Для доведення лівої застосуйте праву нерівність до кожної з пар $\varphi+\psi$, $-\varphi$ та $\varphi+\psi$, $-\psi$. **15.** *Вказ.* a) Нехай $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — база $\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\psi$, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ – її розширення до бази $\operatorname{Im}\varphi$. Тоді $\psi(\boldsymbol{b}_1), \ldots, \psi(\boldsymbol{b}_m)$ — база $\operatorname{Im}(\varphi\psi)$. b) Використайте a) і теорему Сильвестра. **16.** b) $\operatorname{Ker}(\varepsilon-\varphi) = \operatorname{Im}\varphi$, $\operatorname{Im}(\varepsilon-\varphi) = \operatorname{Ker}\varphi$. **17.** *Вказ.* Використайте зад. 5.7 і доведіть, що коли $\varphi^2 = \varphi$, то $\varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ для кожного $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im}\varphi$. **18.** *Вказ.* Перша частина задачі випливає з зад. 5.17. a) Включення $\operatorname{Im}\pi_1\pi_2 \subseteq \operatorname{Im}\pi_1 \cap \operatorname{Im}\pi_2$ випливає з того, що $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$, а протилежне включення — з того, що обмеження оператора проектування π на підпростір $\operatorname{Im}\pi$ є тотожним перетворенням. b) Включення $\operatorname{Ker}\pi_1\pi_2 \supseteq \operatorname{Ker}\pi_1 + \operatorname{Ker}\pi_2$ випливає з того, що $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$. Нехай тепер $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}\pi_1\pi_2$. Тоді $\pi_1(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker}\pi_2$. Крім того, $\boldsymbol{v} - \pi_1(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker}\pi_1$. Тому $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}\pi_1 + \operatorname{Ker}\pi_2$. **19.** *Вказ.* Нехай $V_1 = \{\boldsymbol{u} \mid \varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}\}$, $V_2 = \{\boldsymbol{u} \mid \varphi(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{u}\}$. Тоді $V_1 \cap V_2 = \{\boldsymbol{0}\}$, $\boldsymbol{u}+\varphi(\boldsymbol{u}) \in V_1$, $\boldsymbol{u}-\varphi(\boldsymbol{u}) \in V_2$, $\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{u}+\varphi(\boldsymbol{u})\big) + \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{u}-\varphi(\boldsymbol{u})\big)$. **20.** *Вказ.* Нехай $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ — база $\operatorname{Ker}\varphi$, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}, \boldsymbol{e}_n$ — її розширення до бази V. Якщо $\varphi(\boldsymbol{e}_n) = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n$, то $\varphi^2 = \alpha_n\varphi$. **21.** *Вказ.* Скористайтесь теоремою про гомоморфізм. **22.** *Вказ.* Якщо $\operatorname{Im}\varphi_i = \langle\boldsymbol{v}_i\rangle$, $i = 1, \ldots, k$, то $\operatorname{Im}(\varphi_1 + \cdots + \varphi_k) \subseteq \langle\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\rangle$. **23.** *Вказ.* Порахуйте праву та ліву частини рівності від степенів x. **24.** $\varphi = \varepsilon + \frac{1}{1!}\delta + \frac{1}{2!}\delta^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\delta^n$. *Вказ.* Скористайтеся розкладом $f(x+1)$ у ряд Тейлора. **25.** *Вказ.* Якщо $\operatorname{Ker}\varphi \neq \operatorname{Ker}\psi$, то можна вибрати лінійно незалежні $\boldsymbol{a} \in \operatorname{Ker}\varphi \setminus \operatorname{Ker}\psi$ і $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Ker}\psi \setminus \operatorname{Ker}\varphi$. Тоді $\operatorname{Im}\varphi = \langle\boldsymbol{b}\rangle$, $\operatorname{Im}\psi = \langle\boldsymbol{a}\rangle$ і $\operatorname{Im}(\varphi+\psi) = \langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$. **26.** *Вказ.* Використайте зад. 5.38 і теорему Сильвестра. **27.** *Вказ.* Оскільки $r(\varphi) = r(\varphi\nu) + \dim(\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\nu)$, то досить довести, що $\dim(\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\nu) \geq r(\mu\varphi) - r(\mu\varphi\nu)$. Але $r(\mu\varphi) = r(\mu\varphi\nu) + \dim(\operatorname{Im}\mu\varphi \cap \operatorname{Ker}\nu)$. **28.** *Вказ.* Помножте рівність $\varphi + \psi = \varepsilon$ спочатку зліва, а потім справа, на ψ і використайте зад. 5.17. **30.** *Вказ.* a) Включення $\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} f_i(\varphi) \subseteq \operatorname{Ker} g(\varphi)$ очевидне. Нехай тепер $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} g(\varphi)$. Позаяк многочлени $h_i = g/f_i$, $1 \leq i \leq k$, в сукупності взаємно прості, то існують такі $u_1, \ldots, u_k \in P[x]$, що $h_1u_1 + \cdots + h_ku_k = 1$. Тоді $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k$, де $\boldsymbol{v}_i = h_iu_i(\varphi)(\boldsymbol{v})$. Далі покажіть, що $\boldsymbol{v}_i \in \operatorname{Ker} f_i(\varphi)$. **31.** *Вказ.* a) Включення $\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} f_i(\varphi) \supseteq \operatorname{Ker} d(\varphi)$ очевидне. Для доведення зворотного включення запишіть $d(x)$ у вигляді $f_1u_1 + \cdots + f_ku_k =$

d, де $u_1, \dots, u_k \in P[x]$. Тоді для довільного $\boldsymbol{v} \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} f_i(\varphi)$ буде $d(\varphi)(\boldsymbol{v}) = \sum_i u_1(f_i(\varphi)(\boldsymbol{v})) = \mathbf{0}$. **32.** *Вказ.* Застосуйте індукцію по k. **33.** $\dim \operatorname{Ann}_r(\varphi) = \dim \operatorname{Ann}_l(\varphi) = n(n - r(\varphi))$. **34.** $\operatorname{Ker}\mu \supseteq \operatorname{Ker}\varphi$ і $\operatorname{Im}\mu \subseteq \operatorname{Im}\psi$. **35.** *Вказ.* Якщо $(\pi_1+\pi_2)^2 = \pi_1+\pi_2$, то $\pi_1\pi_2+\pi_2\pi_1 = \mathcal{O}$. Домноживши останню рівність зліва і справа на π_1, отримаємо: $\pi_1\pi_2+\pi_1\pi_2\pi_1 = \mathcal{O}$, $\pi_1\pi_2\pi_1 + \pi_2\pi_1 = \mathcal{O}$. Звідси $\pi_1\pi_2 - \pi_2\pi_1 = \mathcal{O}$. Отже, $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1 = \mathcal{O}$. a) Включення $\operatorname{Im}(\pi_1 + \pi_2) \subseteq \operatorname{Im}\pi_1 + \operatorname{Im}\pi_2$ очевидне. З $\pi_1\pi_2 = \mathcal{O}$ випливає $\operatorname{Im}\pi_1 \subseteq \operatorname{Ker}\pi_2$. Оскільки $\operatorname{Ker}\pi_2 \cap \operatorname{Im}\pi_2 = \{\mathbf{0}\}$, то $\operatorname{Im}\pi_1 \cap \operatorname{Im}\pi_2 = \{\mathbf{0}\}$. Тому сума $\operatorname{Im}\pi_1 + \operatorname{Im}\pi_2$ — пряма. Нехай тепер $\boldsymbol{v} = \pi_1(\boldsymbol{v}_1) + \pi_2(\boldsymbol{v}_2) \in \operatorname{Im}\pi_1 \oplus \operatorname{Im}\pi_2$. Тоді $(\pi_1+\pi_2)(\boldsymbol{v}) = \pi_1^2(\boldsymbol{v}_1)+(\pi_1\pi_2)(\boldsymbol{v}_1)+\pi_2\pi_1(\boldsymbol{v}_2)+\pi_2^2(\boldsymbol{v}_2) = \pi_1^2(\boldsymbol{v}_1) + \pi_2^2(\boldsymbol{v}_2) = \pi_1(\boldsymbol{v}_1) + \pi_2(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}$, що дає зворотне включення. b) З $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1 = \mathcal{O}$ випливає включення $\operatorname{Ker}(\pi_1 + \pi_2) \supseteq \operatorname{Ker}\pi_1 \cap \operatorname{Ker}\pi_2$. Нехай тепер $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}(\pi_1 + \pi_2)$. З $\pi_1(\boldsymbol{v}) + \pi_2(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ отримуємо $\pi_1(\boldsymbol{v}) = \pi_1^2(\boldsymbol{v}) = \pi_1(-\pi_2(\boldsymbol{v})) = -(\pi_2\pi_1)(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$, звідки $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}\pi_1$. Аналогічно доводиться, що $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}\pi_2$. **36.** *Вказ.* Якщо $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im}\varphi^k$, тобто $\boldsymbol{v} = \varphi^k(\boldsymbol{u})$, то $\boldsymbol{v} = \varphi^{k-1}(\varphi(\boldsymbol{u})) \in \operatorname{Im}\varphi^{k-1}$. **37.** $-\varphi$. **38.** *Вказ.* $\operatorname{Im}(\varphi\psi) \subseteq \operatorname{Im}\psi$ і $\dim V \geq \dim\varphi(V)$, звідки $\dim\psi(V) \geq \dim(\varphi\psi)(V)$. **39.** a) $[\varphi+\psi]_{(\boldsymbol{e})} = \begin{pmatrix} -24 & 138 \\ -27 & 33 \end{pmatrix}$; b) $[\varphi\psi]_{(\boldsymbol{a})} = \begin{pmatrix} -148 & -1563 \\ -262 & -2767 \end{pmatrix}$. **41.** *Вказ.* Використайте зад. 5. 17.

Заняття 6. **8.** a) $c\lambda$; b) $\lambda - \mu$; c) λ^k; d) $f(\lambda)$. **9.** Кратні ε. **10.** Кратні ε. *Вказ.* Якщо φ комутує з ψ, для якого $\operatorname{Ker}\psi = \mathcal{L}(\boldsymbol{v})$, то $\boldsymbol{v}$ є власним вектором для φ. Далі використайте зад. 6.9. **11.** a) Многочлени нульового степеня; b) нема; c) $f(x) = ce^{\lambda x}$, $c \neq 0$. **12.** *Вказ.* $\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \det(A^{-1} - \lambda E) = \det(A^{-1}(E - \lambda A)) = \det(-\lambda A^{-1}(A - \frac{1}{\lambda}E)) = (-\lambda)^n(\det A)^{-1}\chi_A(\frac{1}{\lambda})$. **13.** a) $\lambda^2 - (2\cos\alpha)\lambda + 1$; b) λ^{n+1}. **14.** Над $\mathbb{R}$: a) $\varnothing$, b) 2, c) $\varnothing$; над $\mathbb{C}$ додатково: a) $1+2i, 1-2i$, b) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $i, -i, 1+i, 1-i$. **15.** a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, власні вектори $c(1, 1+i)$ $(c \neq 0)$; b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, власні вектори $c(3, 1, 1)$ $(c \neq 0)$; c) $\lambda_1 = 3$, власні вектори $c(1, 2, 2)$; $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, власні вектори $c(1, 2, 1)$ $(c \neq 0)$; d) $\lambda_1 = 1$, власні вектори $c(1, 1, 1)$, $\lambda_2 = 2$, власні вектори $c(1, 0, 1)$, $\lambda_3 = 3$, власні вектори $c(1, 1, 0)$ $(c \neq 0)$; e) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, власні вектори $c_1(1, 2, 0, 0) + c_2(0, 1, 1, 2)$ (c_1 і c_2 не дорівнюють 0 одночасно); f) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, власні вектори $c_1(1, 0, 1, 0)+c_2(0, 0, 0, 1)$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, власні вектори $c_1(0, 1, 0, 0)+c_2(0, 0, 1, 0)$ (c_1 і c_2 не дорівнюють 0 одночасно); g) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, власні вектори $c_1(2, -1, 0, 0) + c_2(3, 0, 0, -1)$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$, власні вектори $c_1(1, -1, 0, 1) + c_2(0, 0, 1, 0)$ (c_1 і c_2 не дорівнюють 0 одночасно). **16.** a) $(-1)^n(\lambda - n)\lambda^{n-1}$, $\lambda_1 = n$, власні вектори $c(1, 1, \dots, 1)$ $(c \neq 0)$, $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, власні вектори $(x_1, \dots, x_n)$, де $x_1+\dots+x_n = 0$;

b) $(-1)^n(\lambda-a-b(n-1))(\lambda-a+b)^{n-1}$, $\lambda_1=a+b(n-1)$, власні вектори $c(1,1,\dots,1)$ $(c\neq 0)$, $\lambda_2=\dots=\lambda_n=a-b$, власні вектори $(x_1,\dots,x_n)$, де $x_1+\dots+x_n=0$; c) $(-1)^n\lambda^{n-2}(\lambda^2-a\lambda-(b_1c_1+b_2c_2+\dots+b_{n-1}c_{n-1}))$. *Вказ.* b) Матриця є многочленом від матриці з a). **17.** *Вказ.* Перетворення φ і $f(\varphi)$ — перестановочні. Нехай λ' — власне число перетворення $f(\varphi)$. Тоді $V^{\lambda'}=\{\boldsymbol{v}\in V \mid f(\varphi)(\boldsymbol{v})=\lambda'\boldsymbol{v}\}$ — інваріантний підпростір для $f(\varphi)$. Перетворення $\varphi|_{V^{(\lambda')}}$ має якийсь власний вектор $\varphi(\boldsymbol{w})=\lambda\boldsymbol{w}$, де λ — власне число перетворення φ. Тоді, з одного боку, $f(\varphi)(\boldsymbol{w})=f(\lambda)\boldsymbol{w}$, а з іншого — $f(\varphi)(\boldsymbol{w})=\lambda'\boldsymbol{w}$. Отже, $f(\lambda)=\lambda'$. **18.** a) Не зводиться; b) діагональний вигляд $\operatorname{diag}(1,1,-1,-1)$, матриця переходу до нової бази $\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$; c) не зводиться. **19.** *Вказ.* Покажіть, що власний підпростір $V_\varphi^{(\lambda)}$ інваріантний відносно ψ. **20.** $(1,1,\dots,1)$. **21.** Власні числа $1,a,a^2,\dots,a^n$; власні вектори $1,\ x+\frac{b}{a-1},\dots,\left(x+\frac{b}{a-1}\right)^n$. **22.** a) $\chi(\lambda)=f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\dots f(\varepsilon_n)$, де $f(x)=(a_1-\lambda)+a_2x+a_3x^2+\dots+a_nx^{n-1}$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ — всі значення кореня n–го степеня з одиниці, власними числами (з урахуванням кратності) будуть $\lambda_k=a_1+a_2\varepsilon_k+a_3\varepsilon_k^2+\dots+a_n\varepsilon_k^{n-1}$, а відповідними власними векторами — $c(1,\varepsilon_k,\varepsilon_k^2,\dots,\varepsilon_k^{n-1})$ $(c\neq 0)$; b) $\chi(\lambda)=(-1)^n(\lambda^n-1)$, власному числу ε_k відповідають власні вектори $c(1,\varepsilon_k,\varepsilon_k^2,\dots,\varepsilon_k^{n-1})$ $(c\neq 0)$; c) $\chi(\lambda)=(-1)^n(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}a_{n-1}\lambda^{n-2}+\dots+a_1\lambda+a_0)$, власному числу λ_i відповідають власні вектори $c(\lambda_i^{n-1},\lambda_i^{n-2},\dots,\lambda_i^2,\lambda_i,1)$ $(c\neq 0)$. *Вказ.* a) Для знаходження $\chi(\lambda)$ помножте визначник $\det(A-\lambda E)$ на визначник Вандермонда $\begin{vmatrix}1&\varepsilon_1&\varepsilon_1^2&\cdots&\varepsilon_1^{n-1}\\1&\varepsilon_2&\varepsilon_2^2&\cdots&\varepsilon_2^{n-1}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&\varepsilon_n&\varepsilon_n^2&\cdots&\varepsilon_n^{n-1}\end{vmatrix}$. **23.** $\chi(\lambda)=(-1)^n\frac{a(\lambda+b)^n-b(\lambda+a)^n}{a-b}$, власні числа $\lambda_k=a\frac{\gamma\varepsilon_k-\gamma^n}{1-\gamma\varepsilon_k}$, де $\frac{b}{a}=\gamma^n$, $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k=1,\dots,n$. **24.** *Вказ.* Власними числами матриці є λ_1 (кратності k_1), …, λ_m (кратності k_m), кратність власного числа λ_j дорівнює дефекту матриці $A-\lambda_jE$. **25.** *Вказ.* a) Якщо простір n–вимірний, то ця множина містить $\leq n^2$ лінійно незалежних перетворень. Далі використати зад. 6.19 і індукцію за кількістю лінійно незалежних перетворень. b) З a) або зад. 6.19 випливає, що коли φ та ψ — перестановочні лінійні перетворення, то вони мають спільний власний вектор $\boldsymbol{v}$. Покажіть, що φ і ψ індукують на факторпросторі $V/\mathcal{L}(\boldsymbol{v})$ лінійні перетворення φ' і ψ', які також перестановочні, і застосуйте індукцію. **26.** *Вказ.* Якщо φ комутує з ψ, то із зад. 6.19 випливає, що φ та ψ мають спільну власну базу, в якій $[\varphi] = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $[\psi] = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Тоді існування такого многочлена f, що $f([\varphi]) = [\psi]$, випливає з існування інтерполяційного многочлена. **28.** a) $\lambda_i\lambda_j$ $(1 \le i, j \le n)$; b) λ_i/λ_j $(1 \le i, j \le n)$. **29.** Ненульові симетричні матриці — власні вектори з власним числом 1, ненульові кососиметричні матриці — власні вектори з власним числом -1. **30.** *Вказ.* Використайте зад. 6.19. **31.** a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, власні вектори $c(1, 1, -1)$ $(c \ne 0)$; b) $\lambda_1 = -1$, власні вектори $c(3, 5, 6)$ $(c \ne 0)$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, власні вектори $c_1(2, 1, 0) + c_2(1, 0, -1)$ (c_1 і c_2 не дорівнюють 0 одночасно); c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$, власні вектори $c_1(1, 1, -1, 0) + c_2(1, 1, 0, 1)$ (c_1 і c_2 не дорівнюють 0 одночасно). **32.** $\lambda_1 = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$, власні вектори — $c(a_1, \ldots, a_n)$ $(c \ne 0)$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, власні вектори — $(x_1, \ldots, x_n) \ne \mathbf{0}$, де $b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0$. **33.** Власні числа 1, 2, 3, 4, власні вектори — відповідно $c \cdot 1$, $c \cdot (x+3)$, $c \cdot (x+3)^2$, $c \cdot (x+3)^3$ $(c \ne 0)$. **34.** Діагональний вигляд містить спочатку $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ чисел $+1$, решта -1; матриця переходу до нової бази містить ненульові елементи лише на побічній діагоналі, з них перші $\left[\frac{n}{2}\right]$ елементів — це -1, решта $+1$. **35.** a) Діагональний вигляд — $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, матриця переходу до нової бази — $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$; b) не зводиться ні над $\mathbb{R}$, ні над $\mathbb{C}$; c) діагональний вигляд — $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, матриця переходу до нової бази — $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Заняття 7. **6.** Ні. *Вказ.* Розгляньте матриці $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ і $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. **7.** *Вказ.* Матриці AB і BA мають однаковий слід. **8.** a) A — невироджена, тому $B = A$, $C = E$; b) $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$;

c) $B = E,\ C = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -6 & -17 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -3 & -9 \end{pmatrix}$. **9.** a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **10.** a) $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; c) $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; f) $J(A) =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; g) $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$T = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; h) $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

i) $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; j) $J(A) =$ $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **11.** *Вказ.* Перетворення a), b), c) рівносильні переходу до матриць $E_i(k)AE_i^{-1}(k)$, $E_{ij}(k)AE_{ij}^{-1}(k)$, $P_{ij}AP_{ij}^{-1}$ відповідно. **13.** *Вказ.* Якщо розглядати матрицю як матрицю лінійного перетворення, то центральна симетрія відносно центра відповідає запису векторів бази у зворотному порядку. **14.** Ні. *Вказ.* Розгляньте матриці $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ і $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. **15.** *Вказ.* Власні числа нільпотентної матриці дорівнюють нулю. **16.** *Вказ.* Якщо $\psi = \varphi|_U$, $\nu = \varphi|_W$, то $\chi_\varphi(\lambda) = \chi_\psi(\lambda) \cdot \chi_\nu(\lambda)$. **17.** *Вказ.* Якщо $X^{-1}AX = A$, $Y^{-1}AY = A$, то $(XY)^{-1}A(XY) = Y^{-1}(X^{-1}AX)Y = Y^{-1}AY = A$, $(X^{-1})^{-1}AX^{-1} = (X^{-1})^{-1}X^{-1}AXX^{-1} = A$. **18.** *Вказ.* Якщо $A_1(T + iS) = (T + iS)A_2$, то $B_1T - C_1S = TB_2 - SC_2$, $B_1T - TB_2 = C_1S - SC_2$. Тоді $D_1\left(\begin{smallmatrix} T & -S \\ S & T \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} T & -S \\ S & T \end{smallmatrix}\right)D_2$. **19.** *Вказ.* Обчисліть добуток $(\varepsilon - \varphi)(\varepsilon + \varphi + \varphi^2 + \dots + \varphi^{k-1})$, де k — клас нільпотентності φ. **20.** *Вказ.* Покажіть, що існує таке $k \in \mathbb{N}$, що $V = \operatorname{Im} \mathcal{A}^k \oplus \operatorname{Ker} \mathcal{A}^k$. Тоді $\operatorname{Im} \mathcal{A}^k$ та $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^k$ будуть інваріантними підпросторами, причому обмеження $\mathcal{A}|_{\operatorname{Im} \mathcal{A}^k}$ буде невиродженим, а обмеження $\mathcal{A}|_{\operatorname{Ker} \mathcal{A}^k}$ — нільпотентним. Якщо $V = U \oplus W$ — інший розклад, для якого перетворення $\mathcal{A}|_U$ — невироджене, а $\mathcal{A}|_W$ нільпотентне, то покажіть, що $U \subseteq \operatorname{Im} \mathcal{A}^k$, $W \subseteq \operatorname{Ker} \mathcal{A}^k$. **21.** *Вказ.* Якщо B — не нільпотентна, то її ЖНФ містить клітинку $J_k(\lambda)$ з $\lambda \neq 0$. Нехай T — матриця переходу до такої бази, в якій у ЖНФ матриці B клітинка $J_k(\lambda)$ є першою. Покажіть, що сума перших k діагональних елементів матриці $T^{-1}AT \cdot T^{-1}BT - T^{-1}BT \cdot T^{-1}AT$ дорівнює 0, у той час, як для матриці $T^{-1}BT$ вона дорівнює $k\lambda$. **22.** a) $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
23. a) ЖНФ складається з двох клітинок $J_k(0)$, жордановою базою є, наприклад, $1, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^4}{4!}, \ldots, \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}, x, \frac{x^3}{3!}, \frac{x^5}{5!}, \ldots, \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$; b) ЖНФ складається з клітинок $J_{k+1}(0)$ і $J_k(0)$, жордановою базою є, наприклад, $1, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^4}{4!}, \ldots, \frac{x^{2k}}{(2k)!}, x, \frac{x^3}{3!}, \frac{x^5}{5!}, \ldots, \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$. **24.** ЖНФ складається з трьох клітинок $J_3(0)$. **25.** $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
26. $J_n(0)$.

Заняття 8. **5.** *Вказ.* Якщо T — матриця переходу до жорданової бази матриці A, то $T^{-1}(A+\alpha E)T = T^{-1}AT + T^{-1}(\alpha E)T = J_A + \alpha E$. **6.** $J_n(a^2)$ при $a \neq 0$, пара клітинок $J_{[n/2]}(0)$ і $J_{[(n+1)/2]}(0)$ при $a = 0$. **7.** $J_n(a^k)$. **8.** a) Діагональні елементи заміняються квадратами, при цьому кожна клітинка з власним числом 0 і порядку > 1 розпадається на дві; b) діагональні елементи заміняються оберненими. *Вказ.* a) Використайте зад. 8.6. **9.** Для довільних $\lambda \neq 0$ і k ЖНФ містить однакову кількість клітинок $J_k(\lambda)$ і $J_k(\lambda^{-1})$. **10.** a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
f) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
11. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. **12.** a) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **13.** a) $J(A) = \begin{pmatrix} 99 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 99 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 47 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 47 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $J(A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; c) $J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; d) $J(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 1 & 0 \\ 12 & -18 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; e) $J(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; f) $J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; g) $J(A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; h) $J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; i) $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$T=\begin{pmatrix}0&0&-1&-4\\0&0&2&9\\2&1&-2&0\\3&1&0&5\end{pmatrix}$; j) $J(A)=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}3&1&3&-1\\3&0&3&0\\-3&-1&3&-1\\-3&0&3&0\end{pmatrix}$; k) $J(A)=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}2&-21&0&8\\1&-10&0&3\\0&0&3&-1\\0&0&-2&1\end{pmatrix}$; l) $J(A)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&-2&1&0\\0&3&0&1\end{pmatrix}$. **14.** a) $J(A)=\begin{pmatrix}-2&1&0&0&0\\0&-2&1&0&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}0&0&1&0&7\\0&0&0&0&-5\\0&3&0&0&0\\0&4&0&28&0\\24&5&0&0&0\end{pmatrix}$; b) $J(A)=\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&-1&1&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&1&-1&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}$; c) $J(A)=\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&1&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&2&1\\0&0&0&0&0&2\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&7&0&0&0\\5&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&9&0\end{pmatrix}$.
15. a) A і C подібні між собою і не подібні B; b) A і B подібні між собою і не подібні C; c) подібних нема. *Вказ.* c) Обчисліть ранги матриць. **16.** Дві клітинки $J_{[n/2]}(a)$ і $J_{[(n+1)/2]}(a)$. **17.** *Вказ.* Розгляньте ЖНФ перетворення φ. **18.** a) Жорданові клітинки $J_1(1)$, $J_2(1)$ і $J_3(1)$; b) жорданові клітинки $J_1(1)$, $J_3(1)$ і $J_5(1)$. **19.** Якщо $a=1$, то одна жорданова клітинка з власним числом 1; якщо $a=-1$, то діагональна матриця, причому число 1 зустрічається $[(n+2)/2]$ разів, а число -1 — $[(n+1)/2]$ разів; якщо $a\neq\pm1$, то $\operatorname{diag}(1,a,a^2,\dots,a^n)$. **20.** a) Жорданові клітинки $J_1(0)$, $J_2(0)$, …, $J_{n+1}(0)$; b) жорданові клітинки $J_1(0)$, $J_3(0)$, …, $J_{2n+1}(0)$. **21.** *Вказ.* Використайте ЖНФ матриць перетворень. **22.** *Вказ.* Нехай $A=J_{k_1}(\lambda_1)\oplus\dots\oplus J_{k_m}(\lambda_m)$ — матриця перетворення φ у жордановій базі. Досить показати, що матриця, яка комутує з кожною матрицею, що комутує з A, є многочленом від A. Зокрема, A комутує з матрицею $B=J_{k_1}(\mu_1)\oplus\dots\oplus J_{k_m}(\mu_m)$, де $\mu_1,\dots,\mu_m$ — попарно різні. Кожна матриця, яка комутує з B, має вигляд $C=C_{k_1}\oplus\dots\oplus C_{k_m}$,

де $C_{k_i} \in M_{k_i}(\mathbb{C})$ і $C_{k_i}J_{k_i}(\mu_i) = J_{k_i}(\mu_i)C_{k_i}$. Звідси випливає, що для кожного i існує такий многочлен f_i, що $C_{k_i} = f_i(J_{k_i}(\lambda_i))$. Далі покажіть, що коли $\lambda_i = \lambda_j$ і $k_i \le k_j$, то $f_i(x) \equiv f_j(x) \pmod{(x-\lambda_i)^{k_i}}$. Тоді $C = f(A)$, де $f(x)$ — розв'язок системи $f(x) \equiv f_i(x) \pmod{(x-\lambda_i)^{k_i}}$, $i = 1,\dots,m$. **23.** *Вказ.* a) Нехай $A = T_1JT_1^{-1}$, де $J = J_{k_1}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus J_{k_s}(\lambda_s)$ — ЖНФ матриці A, T_1 — матриця переходу до жорданової бази. Тоді $A^\top = (T_1^\top)^{-1}J^\top T_1^\top$, де ЖНФ матриці $J^\top$ збігається з J, а матриця переходу до жорданової бази $T_2 = \tilde{E}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \tilde{E}_{k_s}$, де $\tilde{E}_{k_i}$ є матрицею порядку k_i і складається з одиниць на побічній діагоналі та нулів на інших місцях. Тоді $J^\top = T_2JT_2^{-1}$ і $A^\top = (T_2^{-1}T_1^\top)^{-1}J(T_2^{-1}T_1^\top) = (T_1T_2^{-1}T_1^\top)^{-1}A(T_1T_2^{-1}T_1^\top)$. b) Враховуючи вказівку до a) досить показати, що матриця $T = T_1T_2^{-1}T_1^\top$ — симетрична. Це справді так, бо $T^\top = T_1(T_2^\top)^{-1}T_1^\top$, а $T_2^\top = (\tilde{E}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \tilde{E}_{k_s})^\top = \tilde{E}_{k_1}^\top \oplus \cdots \oplus \tilde{E}_{k_s}^\top = \tilde{E}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \tilde{E}_{k_s} = T_2$. **24.** *Вказ.* Нехай $A = TJT^{-1}$, $J = J_{k_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{k_s}(\lambda_s)$ — ЖНФ матриці A, T — матриця переходу до жорданової бази. Тоді $A^\top = (T^\top)^{-1}J^\top T^\top$. Нехай $\tilde{E}_{k_i}$ — матриця порядку k_i з одиницями на побічній діагоналі та нулями на інших місцях, а $H = \tilde{E}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \tilde{E}_{k_s}$. Безпосередньо отримуємо, що $J_{k_i}(\lambda_i)^\top = \tilde{E}_{k_i}^{-1}J_{k_i}(\lambda_i)\tilde{E}_{k_i}$, звідки $J^\top = H^{-1}JH$. Тому $A^\top = (T^\top)^{-1}H^{-1}JHT^\top = (T^\top)^{-1}H^{-1}T^{-1}ATHT^\top = C^{-1}AC$, де $C = THT^\top$ — симетрична невироджена матриця. Нехай $D = C^{-1}A$. Тоді $D^\top = A^\top(C^\top)^{-1} = C^{-1}ACC^{-1} = D$. Тому матриця D також симетрична і $A = CD$. **25.** *Вказ.* Характеристичний многочлен супроводжуючої матриці також дорівнює $(-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0)$, і оскільки його всі корені різні, то для обох матриць ЖНФ є діагональною матрицею з власними числами на діагоналі. **26.** $\operatorname{diag}(1+a_1, 1+a_2, \dots, 1+a_n)$, де $a_1, a_2, \dots, a_n$ — всі корені степеня n з a. *Вказ.* Характеристичний многочлен дорівнює $(1-\lambda)^n + (-1)^{n+1}a$. **27.** *Вказ.* Знайдіть ЖНФ нової матриці. **28.** a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $J_n(1)$; e) $J_n(1)$; f) $\operatorname{diag}(1, 2, \dots, n)$; g) $\operatorname{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1})$, де ε — первісний корінь степеня n з 1. **29.** a) $J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $J(A)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\1&0&1&0\\1&0&0&-1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$; c) $J(A)=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}-1&2&1&3\\-1&1&0&6\\-1&0&0&7\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$. **30.** ЖНФ містить лише клітинки розмірності один чи два з власним числом нуль та клітинки розмірності один з власним числом один.

Заняття 9. **5.** Наприклад, $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.
6. Для кожного власного числа λ дефект матриці $A-\lambda E$ дорівнює 1. **7.** a) $\lambda-1$, b) λ, c) $\lambda(\lambda-1)$; d) λ^2-1. *Вказ.* Використайте ЖНФ. **8.** $\pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix}12&2\\3&13\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}$. **10.** *Вказ.* ЖНФ такої матриці має вигляд $J_1(a)\oplus J_1(0)\oplus\cdots\oplus J_1(0)$, де $a\neq 0$. **11.** $0\le p<1$. *Вказ.* Зробіть заміну $p=\frac{1}{2}-a$ і покажіть, що $\begin{pmatrix}1/2+a&1/2-a\\1/2-a&1/2+a\end{pmatrix}^n=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1+2^na^n&1-2^na^n\\1-2^na^n&1+2^na^n\end{pmatrix}$. **12.** a) $\begin{pmatrix}4e-3&2-2e\\6e-6&4-3e\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}3&-15&6\\1&-5&2\\1&-5&2\end{pmatrix}$. **13.** Наприклад, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. **15.** *Вказ.* Нехай J — жорданова форма для A, C — матриця переходу до жорданової бази. Тоді $e^A=Ce^Jc^{-1}$. Звідси $|e^A|=|C|\cdot|e^J|\cdot|C^{-1}|=|e^J|=e^{\operatorname{tr}A}$, бо сліди подібних матриць однакові (див. тверджж. 6.2). **16.** *Вказ.* Якщо $a\neq 0$, то ЖНФ матриці $\big(J_n(a)\big)^k$ має вигляд $J_n(a^k)$. **17.** $a_0E+a_1J_n(0)+\cdots+a_{n-1}J_n^{n-1}(0)$, де a_0, a_1, …, a_{n-1} — довільні числа. *Вказ.* A комутує з $J_n(\lambda)$ тоді й лише тоді, коли A комутує з $J_n(0)$. **18.** $\mathcal{O}_{k\times m}$. **19.** *Вказ.* Розмірність простору многочленів від φ дорівнює степеню мінімального многочлена. У нашому випадку це розмірність n простору. З іншого боку, якщо ЖНФ перетворення φ для кожного власного числа містить лише одну клітинку з цим числом, то із зад. 9.17 і 9.18 випливає, що розмірність простору тих матриць, які комутують з $[\varphi]$, також дорівнює n. **20.** *Вказ.* a) Якщо $\dim V=n$, то вектори $\boldsymbol{v}$, $\varphi(\boldsymbol{v})$, …, $\varphi^n(\boldsymbol{v})$ лінійно залежні. **21.** *Вказ.* b) Враховуючи a), маємо: $\big(m_{\varphi,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}}(\varphi)m_{\varphi,\boldsymbol{v}}(\varphi)\big)(\boldsymbol{u})=m_{\varphi,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}}(\varphi)m_{\varphi,\boldsymbol{v}}(\varphi)(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$.

Тому $m_{\varphi,\boldsymbol{u}}(x) \mid (m_{\varphi,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}}(x) \cdot m_{\varphi,\boldsymbol{v}}(x))$, звідки $m_{\varphi,\boldsymbol{u}}(x) \mid m_{\varphi,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}}(x)$. Аналогічно $m_{\varphi,\boldsymbol{v}}(x) \mid m_{\varphi,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}}(x)$. Тому $m_{\varphi,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}}(x)$ ділиться на $m_{\varphi,\boldsymbol{v}}(x) \cdot m_{\varphi,\boldsymbol{u}}(x)$. **23.** *Вказ.* Враховуючи зад. 9.22, досить показати, що для довільних $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ існує такий $\boldsymbol{u}$, що $m_{\varphi,\boldsymbol{u}}(x) = \text{НСК}\,(m_{\varphi,\boldsymbol{v}_1}(x), m_{\varphi,\boldsymbol{v}_2}(x))$. Нехай $\text{НСД}\,(m_{\varphi,\boldsymbol{v}_1}(x), m_{\varphi,\boldsymbol{v}_2}(x)) = d(x)$ та $m_{\varphi,\boldsymbol{v}_2}(x) = d(x)g(x)$. Тоді $m_{\varphi,d(\varphi)(\boldsymbol{v}_2)}(x) = g(x)$. Позаяк $m_{\varphi,\boldsymbol{v}_1}(x)$ та $g(x)$ взаємно прості, то на підставі зад. 9.21 можна взяти $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 + d(\varphi)(\boldsymbol{v}_2)$. **24.** *Вказ.* Якщо $f(x) = b_0(x-b_1)\cdots(x-b_m)$, то $\det f(A) = b_0^n \det(A-b_1E)\cdots\det(A-b_mE) = b_0^n \chi_A(b_1)\cdots\chi_A(b_m)$. А це і є результант $f(x)$ та $\chi_A(x)$. **25.** *Вказ.* Нехай $A = [\varphi]_{(e)}$, де $\varphi : V \to V$, C — матриця переходу від (e) до (f). Тоді $C^{-1}AC = [\varphi]_{(f)}$, $[e^{\varphi}]_{(f)} = e^{C^{-1}AC}$. З іншого боку, $[e^{\varphi}]_{(e)} = e^A$ та $[e^{\varphi}]_{(f)} = C^{-1}e^AC$. **26.** $(\lambda-a_1)\cdots(\lambda-a_n)$. **28.** a) $\lambda^2-4\lambda+4$; b) $\lambda^2-5\lambda+6$. **29.** a) $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Заняття 10. **11.** *Вказ.* Доповніть базу підпростору U до бази всього простору і розгляньте матрицю перетворення φ в цій базі. **12.** *Вказ.* Мінімальний многочлен $m_\varphi(\lambda)$ є анулюючим для $\varphi|_U$. **13.** *Вказ.* Власна база існує тоді й лише тоді, коли мінімальний многочлен не має кратних коренів. Далі використайте зад. 10.12. **14.** b) Ні. *Вказ.* a) Обмеження $\varphi\big|_U$ на інваріантний підпростір U має власні вектори. b) Розгляньте поворот площини. **15.** *Вказ.* Кожний інваріантний підпростір містить одновимірний інваріантний підпростір. **17.** Кратні ε. *Вказ.* Див. зад. 6.9. **18.** *Вказ.* Якщо $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ — власні вектори з попарно різними власними числами і лінійна комбінація $a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$ належить інваріантному підпростору U, то $\boldsymbol{v}_i \in U$ для кожного $a_i \neq 0$. **19.** a) Єдине власне число $\lambda = -1$, кореневий підпростір збігається з усім простором; b) $\big\langle(1,1,1)\big\rangle$ — кореневий підпростір для $\lambda = 1$, $\big\langle(1,1,0),(1,0,-3)\big\rangle$ — кореневий підпростір для $\lambda = 0$; c) $\big\langle(0,1,0)\big\rangle$ — кореневий підпростір для $\lambda = 2$, $\big\langle(1,0,0),(0,1,-1)\big\rangle$ — кореневий підпростір для $\lambda = 1$. **20.** Одновимірні — пряма $l = \langle(2,2,-1)\rangle$ і будь–яка пряма, що лежить у площині $L = \langle(1,1,0),(-1,0,1)\rangle$; двовимірні — площина L і будь–яка площина, що містить пряму l. **23.** *Вказ.* Із зад. 10.8 і розв'язання зад. 10.6 випливає, що a_k дорівнює кількості розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = k$, де x_i — ціле число з проміжку $[0, n_i]$, $i = 1, \ldots, m$. **24.** *Вказ.* Якщо вектори $\boldsymbol{v}$, $\varphi(\boldsymbol{v})$, …, $\varphi^{k-1}(\boldsymbol{v})$ — лінійно залежні, то анулюючий многочлен вектора $\boldsymbol{v}$ має степінь $\leq k-1$ і є дільником мінімального многочлена перетворення φ. **25.** *Вказ.* Якщо існує нетривіальний інваріантний підпростір, то існує база, в якій матриця перетворення буде клітинно–

трикутною. Характеристичний многочлен такої матриці є добутком характеристичних многочленів діагональних клітинок. **26.** *Вказ.* Доведіть за індукцією, що характеристичним многочленом перетворення φ є $(-1)^n f(\lambda)$, і використайте зад. 10.25. **27.** Кратні ε. *Вказ.* Кожен одновимірний підпростір можна одержати як перетин підпросторів розмірності k. Далі використайте зад. 6.9. **29.** *Вказ.* b) Використайте зад. 10.28. **31.** *Вказ.* Візьміть власний вектор $\boldsymbol{e}_1$ з власним числом λ_1 і доповніть його до бази $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ всього простору. Далі розгляньте матрицю $[\varphi]$ в цій базі, перейдіть до факторпростору $V/\langle \boldsymbol{e}_1 \rangle$ і застосуйте індукцію. **32.** *Вказ.* Використовуючи зад. 5.18 і 4.8, перейдіть до розкладів $V = V_\varphi(1) \oplus V_\varphi(-1)$ і $V = V_\psi(1) \oplus V_\psi(-1)$ у пряму суму кореневих підпросторів. Якщо всі перетини $V_\varphi(i) \cap V_\psi(j)$ нульові, то доведіть існування таких векторів $\boldsymbol{x} \in V_\varphi(1)$, $\boldsymbol{y} \in V_\varphi(-1)$ і скаляра α, що $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V_\psi(1)$, $\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y} \in V_\psi(-1)$. **33.** *Вказ.* $\operatorname{Ker} \varphi^k \subseteq \operatorname{Ker} \varphi^{k+1}$. Візьміть найменше k, для якого $\operatorname{Ker} \varphi^k = \operatorname{Ker} \varphi^{k+1}$. **34.** *Вказ.* Використайте зад. 10.6. **35.** Кожне дійсне число a є власним, відповідні власні вектори мають вигляд ce^{ax} $(c \neq 0)$; $V_\varphi(a) = e^{ax}\mathbb{R}[x]$. **36.** *Вказ.* Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ та $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — усі власні числа (з урахуванням їх кратності) матриць A і B відповідно. Покажіть, що власними числами (з урахуванням їх кратності) лінійного перетворення $\varphi : M_{m \times n}(\mathbb{C}) \to M_{m \times n}(\mathbb{C})$, $X \mapsto AX + XB$, будуть $\lambda_i + \mu_j$. Оскільки жодне з цих чисел не дорівнює 0, то перетворення φ буде бієкцією. **37.** *Вказ.* Нехай $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — база U, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ — база W. Тоді в базі $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ матриця перетворення φ буде клітинно–діагональною: $[\varphi] = \left(\begin{smallmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{smallmatrix}\right)$. Розіб'ємо на відповідні клітини матрицю перетворення ψ: $[\psi] = \left(\begin{smallmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{smallmatrix}\right)$. З перестановочності φ і ψ випливає, що $A_1B_2 - B_2A_2 = \mathcal{O}$, $A_2B_3 - B_3A_1 = \mathcal{O}$. Тоді із зад. 10.36 випливає, що $B_2 = \mathcal{O}$, $B_3 = \mathcal{O}$. **40.** *Вказ.* Застосуйте зад. 10.39 до образу лінійного перетворення $\varphi - \lambda \cdot \varepsilon$, де λ — власне число. **41.** a) Єдине власне число $\lambda = -1$, кореневий підпростір збігається з усім простором; b) $V_A(0) = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,1) \rangle$, $V_A(2) = \langle (1,0,1,0), (1,0,0,1) \rangle$. **42.** a) $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $\langle \alpha \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\langle \boldsymbol{v}_2 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \oplus \langle \alpha \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\{\boldsymbol{0}\}$ та $\mathbb{C}^3$, де $\boldsymbol{v}_1 = (-2,-2,1)$ — власний вектор, що відповідає $\lambda_1 = 1$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,1)$ — власні вектори, що відповідають $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$; b) $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_2 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$, $\{\boldsymbol{0}\}$ та $\mathbb{C}^3$, де $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-9,6,2)$ — власні вектори, що відповідають $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ відповідно; c) $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$, $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $\{\boldsymbol{0}\}$ та $\mathbb{C}^3$, де $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2,1,1)$ — власні вектори, що відповідають $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ та $\lambda_3 = 2$ відповідно, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,0)$. **43.** Одновимірний — $\langle (1,-2,1) \rangle$; двовимірний — $\langle (1,1,1), (1,2,3) \rangle$. **44.** $\left(\begin{smallmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{smallmatrix}\right)$.

45. *Вказ.* Використайте ЖНФ і розв'язання зад. 10.6.

Заняття 11. **8.** Ні. **9.** a) Так, ядро — двовимірний підпростір векторів, перпендикулярних до $\boldsymbol{a}$; b) ні. **10.** a) $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $\boldsymbol{v}_{n-1} = (-1, 0, \ldots, 0, 1)$; b) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $\boldsymbol{v}_{n-1} = ((-1)^{n-2}, 0, \ldots, 0, 1)$. **13.** Ні. *Вказ.* Функція φ_a на многочлені 1 набуває значення 1. **14.** Максимальна лінійно незалежна підсистема φ_1, φ_2; тоді $\varphi_3 = 2\varphi_1 - 3\varphi_2$, $\varphi_4 = -\varphi_1 + 3\varphi_2$. **16.** *Вказ.* Зведіть задачу до системи лінійних рівнянь. **17.** *Вказ.* Зафіксуйте в просторі базу і зведіть задачу до однорідної системи лінійних рівнянь. **18.** *Вказ.* Використайте зад. 11.6. **19.** b) $f_k(x) = \frac{(x-a_0)\cdots(x-a_{k-1})(x-a_{k+1})\cdots(x-a_n)}{(a_k-a_0)\cdots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\cdots(a_k-a_n)}$; c) стає інтерполяційним многочленом Лагранжа. **21.** *Вказ.* Якщо система векторів $\boldsymbol{v}_1$, ..., $\boldsymbol{v}_k$ лінійно незалежна, то доповніть її до бази простору V і розгляньте спряжену базу простору V^*. Якщо лінійна комбінація векторів $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ дорівнює $\mathbf{0}$, то така ж лінійна комбінація стовпчиків матриці $(\varphi^i(\boldsymbol{v}_j))$ теж дорівнює $\mathbf{0}$. **22.** *Вказ.* Простір $\mathbb{Q}[x]$ є зліченним, а $(\mathbb{Q}[x])^*$ — незліченний. Наприклад, для кожної підмножини $M \subseteq \mathbb{N}_0$ функція φ_M, яка кожному $f \in \mathbb{Q}[x]$ ставить у відповідність суму тих коефіцієнтів f, індекси яких належать підмножині M, є лінійною формою на $\mathbb{Q}[x]$. **25.** *Вказ.* Якщо $l_1(\boldsymbol{u}) \neq 0$ і $l_2(\boldsymbol{v}) \neq 0$, то розгляньте значення добутку $l_1 l_2$ на векторі $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. **26.** *Вказ.* $a_{ij} = f(E_{ij})$, де E_{ij} — матрична одиниця. **30.** a), b) Ні. **28.** $\boldsymbol{v}_k = (0, -\frac{1+(-1)^k}{2}, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ (одиниця стоїть на k-му місці), $k = 2, 3, 4, 5, \ldots, n$. **29.** a), c) Так; b) ні. **30.** Максимальна лінійно незалежна підсистема φ_1, φ_2; тоді $\varphi_3 = \varphi_1 - 2\varphi_2$, $\varphi_4 = -\varphi_1 + 3\varphi_2$, $\varphi_5 = 3\varphi_1 - 8\varphi_2$.

Заняття 12. **9.** Білінійними, причому симетричними, будуть: a), b), e). Матриця має вигляд: a) $\varphi(E_{ij}, E_{kl}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j,\ k = l, \\ 0, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$ b) $[\varphi] = \mathcal{O}$; e) $\varphi(E_{ij}, E_{kl}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = k,\ j = l, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$ **10.** -43. **11.** a) $n(n+1)/2$; b) $n(n-1)/2$. **13.** Ні. *Вказ.* a) φ_1 — кососиметрична, φ_2 — ні; b) функції мають різні ранги; c) φ_2 — симетрична, φ_1 — ні. **14.** a) $\varphi = 2u_1v_1 - \frac{1}{2}u_2v_2 + 3u_3v_3$, $x_1 = u_1 + \frac{1}{2}u_2$, $x_2 = u_2 + u_3$, $x_3 = u_3$; b) $\varphi = u_1v_1 - 3u_2v_2 + 3u_3v_3$, $x_1 = u_3$, $x_2 = u_2 - u_3$, $x_3 = u_1 - 2u_2 + u_3$. *Вказ.* b) Змініть нумерацію координат. **15.** Так. **16.** a) $u_1v_2 - u_2v_1$, де $u_1 = x_1 - 2x_3$, $u_2 = x_2 - x_3$, $u_3 = x_3$; b) $u_1v_2 - u_2v_1$, де $u_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_3$, $u_2 = 2x_2 + x_3$, $u_3 = x_3$; c) $u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_4 - u_4v_3$, де $u_1 = x_1 - 4x_4$, $u_2 = x_2 + 2x_3$, $u_3 = -8x_3$, $u_4 = x_4$. **17.** $U_l^{\perp} = \langle(-1, 1, 1)\rangle$; $U_r^{\perp} =$

$\langle(9,9,0),(0,4,7)\rangle$. **18.** $[\psi_l] = A^\top F$, $[\psi_r] = FA$, $[\psi] = A^\top FA$. **19.** $[\psi_r] = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -4 & 6 & 8 \\ -7 & -26 & -7 \end{pmatrix}$, $[\psi_l] = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 11 \\ -7 & -9 & -2 \\ 5 & -13 & -19 \end{pmatrix}$. **20.** *Вказ.* При фіксованій базі $\varphi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = [\boldsymbol{x}]^\top B_1[\boldsymbol{y}]$, $\varphi_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = [\boldsymbol{x}]^\top B_2[\boldsymbol{y}] = [\boldsymbol{x}]^\top B_2B_1^{-1}B_1[\boldsymbol{y}]$. Із зад. 12.18 випливає, що $\varphi_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \varphi_1(\psi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y})$, де ψ — лінійне перетворення з матрицею $(B_2B_1^{-1})^\top$. **21.** *Вказ.* Додатно визначена симетрична білінійна функція лишається такою ж на кожному підпросторі. **22.** *Вказ.* Для білінійної функції x_2y_2 на просторі P^2 $\langle\boldsymbol{e}_2\rangle^\perp = \langle\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\rangle^\perp = \langle\boldsymbol{e}_1\rangle$ та $(\langle\boldsymbol{e}_2\rangle\cap\langle\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\rangle)^\perp = \{\boldsymbol{0}\}^\perp = P^2$. У той же час $\langle\boldsymbol{e}_2\rangle^\perp + \langle\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\rangle^\perp = \langle\boldsymbol{e}_1\rangle + \langle\boldsymbol{e}_1\rangle = \langle\boldsymbol{e}_1\rangle$. **23.** Ні. **24.** *Вказ.* У базі з матричних одиниць матриця функції $\mathrm{tr}\,(AB)$ у кожному рядку і кожному стовпчику буде містити одну одиницю, а решта елементів — нулі. **26.** *Вказ.* Використайте зад. 12.25. **27.** *Вказ.* Використайте зад. 12.25 і те, що кососиметрична функція має парний ранг. **28.** b) Ні. *Вказ.* a) Якщо $\boldsymbol{v}$ — власний вектор з ненульовим власним числом λ, то $\varphi(\mathcal{A}(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v}) \neq 0$. Якщо ж $\mathcal{A}$ — ненульове нільпотентне перетворення, то розгляньте обмеження φ та $\mathcal{A}$ на підпростір $\mathcal{L}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$, де $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_2$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{0}$. b) Розгляньте на евклідовій площині звичайний скалярний добуток і поворот на $\pi/2$. **29.** *Вказ.* Якщо ранг φ дорівнює 1, то згідно зад. 12.25 її можна подати у вигляді $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum a_i'x_i \cdot \sum a_i''y_i$, де всі коефіцієнти $a_1',\ldots,a_n',a_1'',\ldots,a_n''$ — невід'ємні. Крім того, $a_{ij} = a_i'a_j''$. Аналогічно функція ψ рангу 1 зображується у вигляді $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum b_i'x_i \cdot \sum b_i''y_i$. Тоді $\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum a_i'b_i'x_i \cdot \sum a_i''b_i''y_i \geq 0$. Загальний випадок зводиться до функцій рангу 1, бо кожну невід'ємно визначену білінійну функцію рангу k можна подати у вигляді суми k невід'ємно визначених білінійних функцій рангу 1. **32.** *Вказ.* $4\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + if(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}) - if(\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y})$. **34.** Білінійними будуть a), b), d). Симетричними — a), b). Матриця має вигляд: a) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$; b) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; d) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. **35.** При множенні рядка (стовпчика) на ± 1 і при перестановці двох рядків (стовпчиків). **36.** $1-19i$. **37.** $\begin{pmatrix} 11 & 8 & 15 \\ 6 & 5 & 12 \\ 11 & 10 & 29 \end{pmatrix}$.

38. a) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -5 & -10 & 15 \\ 29 & -26 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -17 & 14 \\ 6 & 8 & -11 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$. **39.** $u_1v_1 - u_2v_2 + 16u_3v_3$.

40. a) $u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_4 - u_4v_3$, де $u_1 = x_1 - 2x_3$, $u_2 = x_2 - x_4$, $u_3 = x_3$, $u_4 = x_4$; b) $u_1v_2 - u_2v_1$, де $u_1 = x_1 + x_3$, $u_2 = x_2 + x_3 + x_4$, $u_3 = x_3$, $u_4 = x_4$. **41.** $\langle(2,1,0)\rangle$.

Заняття 13. **8.** a) $x_1y_1 + x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 - 3x_3y_1 + 2x_3y_2 - x_3y_3$; b) $\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2)$. **9.** a) $n+1$; b) $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. **10.** a) $y_1^2 - 3y_2^2 + \frac{7}{3}y_3^2$; b) $y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{8}{3}y_3^2$; c) $y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$; d) $y_1^2 - y_2^2$. **11.** a) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; b) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; c) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; d) $y_1^2 - y_2^2$. **12.** a) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{6}y_3$, $x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{6}y_3$, $x_3 = \frac{1}{3}y_3$; b) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}y_1 - \frac{5}{3}\sqrt{3}y_2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}y_3$, $x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}y_2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}y_3$, $x_3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}y_2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}y_3$. **13.** $x_1 = 2\sqrt{2}y_1 + \sqrt{2}y_2 + 5y_3$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + y_3$, $x_3 = y_3$. **14.** a) Еквівалентні над $\mathbb{C}$ і над $\mathbb{R}$; b) не еквівалентні ні над $\mathbb{C}$, ні над $\mathbb{R}$. **15.** a) f_1 та f_3; b) f_2 та f_3. **16.** a) $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \cdots + y_{2k-1}^2 - y_{2k}^2$, де $k = [n/2]$; b) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \cdots - y_n^2$. *Вказ.* a) Застосуйте метод Лагранжа й індукцію. b) Заміною $x_1 = y_1 + y_2 - (y_3 + \cdots + y_n)$, $x_2 = y_1 - y_2 - (y_3 + \cdots + y_n)$, $x_3 = y_3$, $\ldots$, $x_n = y_n$ зводиться до вигляду $y_1^2 - y_2^2 - f(y_3, \ldots, y_n)$, де $f(y_3, \ldots, y_n)$ — квадратична функція із зад. 13.5. **17.** Ні. *Вказ.* Розгляньте форму $x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2$. **18.** Так. **19.** a) При жодних λ; b) $|\lambda| < \sqrt{\frac{5}{3}}$. **21.** a) $\lambda < -20$; b) $\lambda < -0{,}6$. **22.** *Вказ.* Відповідна квадратична функція є додатно визначеною. Далі скористайтеся зад. 13.17. **23.** *Вказ.* Нехай у деякій базі $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ функція f має канонічний вигляд $y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_{k+m}^2$ та $k > p$. Тоді для підпросторів $U = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k \rangle$ та $W = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} l_i$ маємо $\dim U = k$, $\dim W \geq n - p$, звідки $\dim(U \cap W) \geq k - p > 0$. Далі розгляньте $f(\boldsymbol{v})$ для ненульового $\boldsymbol{v} \in U \cap W$. **24.** $y_i = \frac{\sqrt{2}}{2}x_i + \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{2}n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Вказ.* Із зад. 13.5 випливає, що нормальним виглядом функції є $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$. Використовуючи симетрію умови задачі, перетворення змінних можна шукати у вигляді $y_i = \alpha x_i + \beta(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$, що приводить до системи $2\alpha\beta + n\beta^2 = 1/2$, $2\alpha\beta + n\beta^2 + \alpha^2 = 1$. **25.** $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \cdots - y_n^2$. *Вказ.* Застосуйте трикутне перетворення змінних $z_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, $z_2 = x_2 + \cdots + x_n$, $\ldots$, $z_n = x_n$. **26.** $n(n+1)/2$ та $n(n-1)/2$. *Вказ.* Розгляньте обмеження функції на підпростори симетричних і кососиметричних матриць. **27.** $(2, 2)$. **28.** *Вказ.* Якщо $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, то $f(\boldsymbol{x}) = \sum_i a_{ii}x_i^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}x_ix_j \geq \sum_i a_{ii}x_i^2 - \sum_{i \neq j} |a_{ij}||x_i||x_j| \geq \sum_i a_{ii}x_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} |a_{ij}|(x_i^2 + x_j^2) = \sum_i x_i^2\bigl(a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\bigr) > 0$. **29.** *Вказ.* Достатність умови очевидна. Для доведення необхідності скористайтеся тим, що матрицю переходу до канонічної бази можна вибрати трикутною і що діагональна матриця з невід'ємними коефіцієнтами є квадратом діагональної. **31.** Якщо $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, то $\boldsymbol{y} = k\boldsymbol{x}$, де $k > 0$. *Вказ.* Це — нерівність трикутника. **33.** *Вказ.* Перейдіть спочатку до бази, в якій функція має канонічний вигляд. **34.** $n - r$, де n — розмірність всього простору, а r — ранг функції. **36.** a), b) Ні. *Вказ.* a) Над $\mathbb{Z}$ еквівалентні функції повинні мати однаковий дискримінант. b) Відношення дискримінантів еквівалентних має бути квадратом. **37.** *Вказ.* Нехай $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ та $f(\boldsymbol{v}) = 0$. Виберіть такий вектор $\boldsymbol{u}$, що $\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \neq 0$ для асоційованої з f симетричної білінійної функції φ, і розгляньте значення f в точках $a\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$, $a \in P$. **38.** *Вказ.* Доведіть спочатку, що коли в симетричній матриці головні кутові мінори Δ_{k-1} і Δ_{k+1} ненульові, а $\Delta_k = 0$, то $\Delta_{k-1}\Delta_{k+1} < 0$. **39.** $x^2y - y^3$, $x^2y + y^3$, x^2y, x^3, 0. **40.** $-x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 - \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_2y_1 - 2x_2y_2 + \frac{3}{2}x_2y_3 - \frac{1}{2}x_3y_1 + \frac{3}{2}x_3y_2 + 2x_3y_3$. **41.** Додатний і від'ємний індекси інерції однакові. **42.** a) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; b) $y_1^2 + 4y_2^2 + 9y_3^2 + 16y_4^2$. **43.** a) $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$; b) $y_1^2 - y_2^2 - 2y_3^2 - \frac{3}{2}y_4^2$. **44.** $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = \frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}y_3$, $x_2 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$, $x_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$. **45.** Над $\mathbb{C}$ — еквівалентні, над $\mathbb{R}$ — ні. **46.** a) При жодних λ; b) $-0{,}8 < \lambda < 0$.

Заняття 14. **9.** Тільки φ_3. *Вказ.* a) Порушується лінійність за кожним аргументом, наприклад, $\varphi_1(-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq -\varphi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$; b) порушується лінійність за кожним аргументом, наприклад, $\varphi_2(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}) + \varphi_2(-\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) \neq \varphi_2(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i})$; c) множення скалярного добутку на число рівносильне зміні масштабу. **10.** a) $|AB| = |BC| = |AC| = 6$, $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$; b) $|AB| = 5$, $|BC| = 10$, $|AC| = 5\sqrt{3}$, $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 30°$. **11.** a) Гострокутний; b) тупокутний. **13.** $60°$. **14.** $R = \sqrt{n}/2$; $R < 1$ при $n \leq 3$. **16.** *Вказ.* Покажіть, що вершину куба можна з'єднати з протилежною ланцюжком з n ребер, причому цей ланцюжок буде проходити через наперед задану третю вершину. Потім використайте зад. 14.15. **17.** 0 при $n = 2k + 1$ та $\frac{1}{2}\binom{2k}{k} = \binom{2k-1}{k}$ при $n = 2k$. **18.** *Вказ.* Нормуйте базу і знайдіть координати вектора $\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ в цій базі. **19.** Гіперплощина, перпендикуляра до вектора $\boldsymbol{a}$. **20.** Ні. *Вказ.* З рівності $|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2$ випливає лише, що скалярний добуток $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ є чисто уявним. **23.** a) Підпростір скалярних матриць; b) підпростір нижніх трикутних матриць; c) підпростір кососиметричних матриць. **24.** a) $\boldsymbol{e}_1 = (-1, -1, 0, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (-2, 2, 1, 0)$; b) $\boldsymbol{e}_1 = (0, 1, -1, 0)$. **25.** $x_2 + x_4 = 0$, $-6x_1 + 9x_2 + x_3 = 0$. **26.** $\langle(-1, 1, 1)\rangle$, $\langle(17, 13, 7)\rangle$. **29.** $R = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$. **30.** *Вказ.* $\dim U^{\perp} + \dim V > \dim E$. **31.** $\{\mathcal{O}\}$. *Вказ.* Лінійна оболонка множини ермітових матриць збігається з усім простором. **32.** *Вказ.* Якщо $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, то $\sum\limits_i a_{ii}x_i^2 > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|x_i^2 \geq \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}||x_i||x_j|$, бо $x_i^2 + x_j^2 \geq 2|x_i||x_j|$. **35.** $\sqrt{\frac{2}{2k+1}}$. **36.** $P_k(1) = 1$. **37.** *Вказ.* Нехай $B = (b_{ij})$ — матриця порядку n, де $b_{ii} = a_{1,i+1}$ та $b_{ij} = \frac{a_{1,i+1} + a_{1,j+1} - a_{i+1,j+1}}{2}$ при $i \neq j$. Необхідно й достатньо, щоб усі головні мінори матриці B були невід'ємними. **38.** Правильний октаедр. **39.** $\dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\bigl(1+\frac{n}{2}\bigr)}$. *Вказ.* Застосуйте індукцію і принцип Кавальєрі. **40.** a), c) Не зміниться; b) зміниться на доповняльний до π. **41.** $\sqrt{18}$, 6, $\sqrt{18}$; 90°, 45°, 45°. **42.** $f_0(x) = x^2+3x+3$; 3. **43.** Паралелограм буде ромбом тоді й лише тоді, коли його діагоналі перпендикулярні. **44.** $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,-1,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,-1)$. **45.** $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$, $29x_1+10x_2-7x_3 = 0$. **46.** $\langle(2,-3,1)\rangle$, $\langle(4,5,-1)\rangle$.

Заняття 15. **11.** $(\sum_{k=0}^n a_k x^k, \sum_{k=0}^n b_k x^k) = \sum_{k=0}^n a_k b_k (k!)^2$. **12.** a) $(1,1,-1,-2)$, $(2,5,1,3)$; b) $(1,1,-1,-2)$, $(2,5,1,3)$, $(2,-1,1,0)$; c) $(1,2,1,3)$, $(10,-1,1,-3)$, $(19,-87,-61,72)$; d) $(0,1+2i,-i)$, $\frac{1}{3}(3,1-2i,4-3i)$, $\frac{1}{13}(16+2i,-2+3i,-7+4i)$. **13.** Напр., $\boldsymbol{e}_3 = (2,3,1,0)$, $\boldsymbol{e}_4 = (1,-1,1,1)$. **14.** $\boldsymbol{e}_3 = (\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. **15.** a) $\boldsymbol{v}' = (1,7,3,3)$, $\boldsymbol{v}'' = (-4,-2,6,0)$; b) $\boldsymbol{v}' = (1,-1,-1,5)$, $\boldsymbol{v}'' = (3,0,-2,-1)$. **16.** a) $2\sqrt{21}$; b) $\sqrt{3/5}$; c) $\sqrt{1763}/43$. **18.** a) $\sqrt{2/3}$; b) $\sqrt{7}$. *Вказ.* Віддаль від точки, заданої вектором $\boldsymbol{v}$, до лінійного многовиду $\boldsymbol{v}_0+U$ дорівнює довжині ортогональної складової вектора $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0$ відносно підпростору U. **20.** a) $\pi/3$; b) $\pi/6$. **21.** $\varphi = \arccos\sqrt{k/n}$. **22.** 3. **23.** 1, x, $x^2-\frac{1}{3}$, $x^3-\frac{3}{5}x$, $x^4-\frac{6}{7}x^2+\frac{3}{35}$. **25.** 2^n. **27.** $g(1)/\sqrt{n+1}$. **29.** $\bigl(\binom{2n}{n}\sqrt{2n+1}\bigr)^{-1}$. *Вказ.* Шукана віддаль дорівнює віддалі від многочлена x^n до підпростору $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. **30.** $\sqrt{\frac{n+1}{2(n-k)(k+1)}}$. **32.** *Вказ.* Якщо в усіх векторів такої бази поміняти на протилежний знак i–ї координати або переставити i–ту та j–ту координати, то знову отримаємо базу з потрібною властивістю. Тому можна вважати, що перший вектор бази має вигляд $(1,1,\dots,1)$, а другий — вигляд $(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$. **35.** *Вказ.* $P\boldsymbol{v} \in U$. Позаяк кожен вектор $\boldsymbol{u} \in U$ можна подати у вигляді $\boldsymbol{u} = P\boldsymbol{w}$, то $(\boldsymbol{v}-P\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{v}-P\boldsymbol{v})^\top \cdot P\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}^\top P\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}^\top P^\top P\boldsymbol{w} = 0$. **36.** *Вказ.* Ортонормуйте жорданову базу. **37.** $\pi/4$. *Вказ.* Знайдіть мінімум кутів векторів другої площини з їх ортогональними проекціями на першу площину. **38.** $\arccos(2/3)$. **39.** *Вказ.* Покажіть, що при ортогоналізації ні об'єм паралелепіпеда, ні визначник Ґрама не змінюються. **40.** *Вказ.* Використайте зад. 15.39. **41.** a) $(1,1,1,1)$, $(2,2,-2,-2)$, $(-1,1,-1,1)$; b) $(2,1,3,-1)$, $(3,2,-3,-1)$, $(1,5,1,10)$; c) $(2,1,i)$, $\frac{1}{3}(-1-i,4+i,-1-2i)$, $\frac{1}{4}(1+i,-i,1+2i)$. **42.** Напр., $(1,1,1,0)$, $(-1,1,0,1)$. **43.** a) $(1,-2,1,-4)$, $(15,14,37,6)$; b) $\frac{1}{\sqrt{43}}(4,i,1-5i)$. **44.** a) $\boldsymbol{v}' = 2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2 = (3,1,-1,-2)$, $\boldsymbol{v}'' = (2,1,-1,4)$; b) $\boldsymbol{v}' = \frac{1}{4}\boldsymbol{a}_1-\frac{5}{8}\boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{8}(-3,-9,31,25)$, $\boldsymbol{v}'' = \frac{1}{8}(19,-31,-7,7)$. **45.** a) $\sqrt{14}$; b) 2; c) 7/5. **46.** a) 2; b) $\sqrt{5/7}$. **47.** a) $\pi/4$; b) $\pi/2$.

Заняття 16. **8.** Ні. *Вказ.* Перетворення є виродженим. **10.** a) Так; b) ні. *Вказ.* b) Порівняйте довжини векторів 1 та $\varphi(1)$.

11. a) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,-1)$, $\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{2}(1,1,-1,1)$, $\boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{2}(1,-1,1,1)$, $\boldsymbol{f}_4 = \frac{1}{2}(-1,1,1,1)$; b) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0,0)$, $\boldsymbol{f}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,0,1,-1)$, $\boldsymbol{f}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0,0)$, $\boldsymbol{f}_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,0,1,1)$. **12.** Поворот на кут $-\alpha$. **13.** Проектування на бісектрису другого й четвертого координатних кутів паралельно осі ординат. **16.** *Вказ.* Нехай φ — перетворення простору V, $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker}\varphi$ та $\boldsymbol{y} \in V$. Тоді $0 = (\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \varphi^*(\boldsymbol{y}))$, звідки $\operatorname{Im}\varphi^* \subseteq (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$. Нехай $\boldsymbol{x} \in (\operatorname{Im}\varphi^*)^\perp$ та $\boldsymbol{y} \in V$. Тоді $0 = (\boldsymbol{x}, \varphi^*(\boldsymbol{y})) = (\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$, звідки $(\operatorname{Im}\varphi^*)^\perp \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$ та $\operatorname{Im}\varphi^* \supseteq (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$. Отже, $\operatorname{Im}\varphi^* = (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$. **17.** $\begin{pmatrix}4&-2&2\\2&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$. **18.** $\begin{pmatrix}-36&-37&-15\\30&30&14\\26&27&9\end{pmatrix}$. **19.** $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}17&5&-1\\5&-7&5\\-1&5&17\end{pmatrix}$. **20.** $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-5&0\\6&0&2\\0&15&0\end{pmatrix}$. **21.** a) $\begin{pmatrix}2&3&-1\\5&2&-1\\3&4&0\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}128&413&514\\36&117&145\\-61&-197&-245\end{pmatrix}$.
22. a) $\begin{pmatrix}9&0&0\\0&18&0\\0&0&-9\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)$, $\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{3}(2,-1,-2)$, $\boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{3}(1,-2,2)$; b) $\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&27\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)$, $\boldsymbol{f}_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}(1,-1,-4)$, $\boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{3}(2,-2,1)$; c) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,0,1)$, $\boldsymbol{f}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,1,0)$, $\boldsymbol{f}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,0,-1)$, $\boldsymbol{f}_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,-1,0)$; d) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-i,0)$, $\boldsymbol{f}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,i,0)$, $\boldsymbol{f}_3 = (0,0,1)$. **23.** *Вказ.* З процесу ортогоналізації випливає, що для ланцюга $\{\mathbf{0}\} \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \cdots \subset U_n = V$ існує така ортонормована база простору V, яка включає базу кожного з підпросторів U_k. **24.** *Вказ.* Використайте зв'язок між оберненою і приєднаною матрицями. **25.** *Вказ.* Нехай λ_1, …, λ_r — усі попарно різні власні чи-

сла перетворення φ. Для кожного $1 \le i \le r$ виберемо в полі $\mathbb{C}$ таке μ_i, що $\mu_i^k = \lambda_i$. Нехай $f(x)$ — такий інтерполяційний многочлен, що $f(\lambda_i) = \mu_i$ для всіх i. Тоді перетворення $\psi = f(\varphi)$ — унітарне і задовольняє рівність $\psi^k = \varphi$. **27.** *Вказ.* Оскільки хоча б одна з властивостей a) та b) має виконуватись, то можна перейти до канонічної бази. **28.** a) $X \mapsto A^\top X B^\top$; b) $X \mapsto A^\top X + X B^\top$. **29.** *Вказ.* Розгляньте дію φ на вектори власної бази. **33.** *Вказ.* Перетворення $\varphi^*\varphi$ — самоспряжене, тому для нього існує власна ортонормована база $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$. Але тоді $\big(\varphi(\boldsymbol{v}_i), \varphi(\boldsymbol{v}_j)\big) = \big((\varphi^*\varphi)(\boldsymbol{v}_i), \boldsymbol{v}_j\big) = (\lambda_i \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \lambda_i(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)$. **34.** $2^n \cdot n!$. *Вказ.* Бази можуть розрізнятися лише порядком і знаками векторів. **35.** ЖНФ перетворення φ^* отримується з ЖНФ перетворення φ заміною діагональних елементів спряженими комплексними числами. *Вказ.* Перейдіть до ортонормованої бази і скористайтеся тим, що ЖНФ матриць A та $A^\top$ однакові. **37.** *Вказ.* Перейдіть до власної ортонормованої бази. **38.** a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0,0,1)$, $\boldsymbol{f}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)$; b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)$, $\boldsymbol{f}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)$, $\boldsymbol{f}_3 = (0,0,-1)$. **39.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. **40.** $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & -8 & 7 \\ -7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. **42.** a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-i)$, $\boldsymbol{f}_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}(1,i)$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{f}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1)$.

Заняття 17. **10.** *Вказ.* Покажіть, що $\varphi^* = -\varphi$. **11.** a) Ні; b) ні при $a \ne 0$. *Вказ.* Перетворення не має власної бази. **12.** *Вказ.* Розгляньте матрицю перетворення в канонічній базі. **13.** *Вказ.* Перейдіть до канонічної бази перетворення φ. **14.** a) $\boldsymbol{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1)$; b) $\boldsymbol{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,0,1,-1)$, $\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2}(1,-1,i,i)$, $\boldsymbol{e}_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-i,-i)$. **15.** $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2,-1+i\sqrt{3},-1-i\sqrt{3})$, $\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2,-1-i\sqrt{3},-1+i\sqrt{3})$. **16.** a) $4y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$; b) $y_1^2+\sqrt{3}y_2^2-\sqrt{3}y_3^2$; c) $2y_1^2-4y_2^2$; d) $10y_1^2$; e) $5y_1^2+5y_2^2+5y_3^2-8y_4^2$; f) $5y_1^2+5y_2^2+5y_3^2-5y_4^2-5y_5^2$. **17.** a) $3y_1^2+$

$6y_2^2-2y_3^2$, $\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}\sqrt2 & 1 & \sqrt3\\ -\sqrt2 & -1 & \sqrt3\\ \sqrt2 & -2 & 0\end{pmatrix}$; b) $y_1^2+y_2^2+7y_3^2$, $\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}\sqrt3 & \sqrt2 & 1\\ 0 & \sqrt2 & -2\\ \sqrt3 & -\sqrt2 & -1\end{pmatrix}$;

c) $3y_1^2+6y_2^2+9y_3^2$, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$; d) $9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2$, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

e) $y_1^2+3y_2^2-3y_3^2-y_4^2$, $\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$; f) $4y_1^2+8y_2^2+12y_3^2-4y_4^2$,

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$. **18.** *Вказ.* Матриця нормального вигляду функції f буде ортогональною. **19.** *Вказ.* Зведіть квадратичну функцію з матрицею A до головних осей. **20.** $Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$.

21. a) Перетворення $x_1=-2\sqrt2y_1+3\sqrt2y_2$, $x_2=\frac{\sqrt2}{2}y_1-\frac{\sqrt2}{2}y_2$ зводить f до нормального вигляду $y_1^2+y_2^2$, а g — до канонічного вигляду $4y_1^2-2y_2^2$; b) перетворення $x_1=y_1-y_2$, $x_2=-y_2+y_3$, $x_3=-3y_2+2y_3$ зводить f до канонічного вигляду $y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$, а g — до нормального вигляду $y_1^2+y_2^2+y_3^2$; c) перетворення $x_1=y_1+y_2+y_3+y_4$, $x_2=y_2+y_3+y_4$, $x_3=y_3+y_4$, $x_4=y_4$ зводить f до канонічного вигляду $y_1^2+2y_2^2-y_3^2$, а g — до нормального вигляду $y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$. **22.** Ортогональне перетворення $x_1=\frac12\big(y_1+y_2+\sqrt2y_3\big)$, $x_2=\frac12\big(y_1-y_2+\sqrt2y_4\big)$, $x_3=\frac12\big(y_1+y_2-\sqrt2y_3\big)$, $x_4=\frac12\big(y_1-y_2-\sqrt2y_4\big)$ зводить f до вигляду $5y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$, а g — до вигляду $y_1^2+5y_2^2+y_3^2+y_4^2$. *Вказ.* Матриці функцій f та g комутують. **23.** *Вказ.* Рівність $|\varphi(\boldsymbol{x})|=|\varphi^*(\boldsymbol{x})|$ рівносильна рівності $(\varphi\varphi^*(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})=(\varphi^*\varphi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})$. Тому досить показати, що остання рівність рівносильна $\varphi\varphi^*=\varphi^*\varphi$. З того, що $(\varphi\varphi^*(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}),\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\varphi^*\varphi(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}),\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ та самоспряженості $\varphi\varphi^*$ і $\varphi^*\varphi$ (зад. 16.15) випливає, що $2(\varphi\varphi^*(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{w})=2(\varphi^*\varphi(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{w})$ для всіх $\boldsymbol{v}$ та $\boldsymbol{w}$. Отже, для всіх $\boldsymbol{v}$ маємо $(\varphi\varphi^*-\varphi^*\varphi)(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$, тобто $\varphi\varphi^*=\varphi^*\varphi$. **24.** Скалярний добуток можна задати формою $x_1y_1+x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+2x_2y_2+2x_2y_3+x_3y_1+2x_3y_2+3x_3y_3$. **25.** *Вказ.* Спряженими до даних перетворень будуть відповідно $X\mapsto A^\top XB^\top$ та $X\mapsto A^\top X+XB^\top$. **26.** *Вказ.* Позаяк φ та ψ — нормальні, то $(\operatorname{Ker}\varphi)^\perp=\operatorname{Im}\varphi$, $(\operatorname{Ker}\psi)^\perp=\operatorname{Im}\psi$. З рівності $\varphi\psi=\mathcal{O}$ випливає,

що $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$. Але тоді $\operatorname{Ker}\varphi = (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp} \supseteq (\operatorname{Ker}\psi)^{\perp} = \operatorname{Im}\psi$, звідки $\psi\varphi = \mathcal{O}$. **27.** k^r, де r — ранг перетворення φ. **28.** *Вказ.* Достатність очевидна. Для доведення необхідності побудуйте такий інтерполяційний многочлен $f(x)$, щоб для кожного власного числа λ_i перетворення φ виконувалася рівність $f(\lambda_i) = \overline{\lambda}_i$. **31.** *Вказ.* Транспонованою до $A \times B$ є матриця $A^\top \times B^\top$. **32.** a) $\sum_{i=0}^{n} \cos\frac{\pi i}{n+1} \cdot y_i^2$; b) $\frac{1}{2}\big((n+1)y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\big)$; c) $\frac{1}{2}\big((n-1)y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2\big)$. *Вказ.* Перейдіть до подвоєної форми. **33.** *Вказ.* Доведіть, що корені рівняння $\det(B - \mu A) = 0$ не змінюються при невиродженому лінійному перетворенні обох функцій. **35.** Ні. *Вказ.* З вказ. до зад. 17.33 випливає, що якби ці функції одночасно зводилися до канонічного вигляду, то корені рівняння $\det([f] - \mu[g]) = 0$ були б дійсними. А в даному випадку це не так. **37.** $\boldsymbol{e}_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}(1, -2, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, -1)$, $\boldsymbol{e}_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$. **38.** $6x_1^2 + 6x_2^2 + 9x_3^2$. **39.** a) $3y_1^2 - 6y_2^2$, $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 2 & -4\sqrt{2} & 0 \\ 4 & 1 & -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$; b) $2y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2 - 4y_4^2$, $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
40. a) $3y_1^2 - y_2^2 - 5y_3^2$; b) $5y_1^2 - y_2^2 - 2y_3^2$. **41.** a) $x_1 = \frac{1}{3}(3y_1 + \sqrt{3}y_2)$, $x_2 = \frac{1}{6}(3y_1 - \sqrt{3}y_2)$, $f = -2y_1^2 + \frac{2}{3}y_2^2$, $g = y_1^2 + y_2^2$; b) $x_1 = \frac{1}{3}(11y_1 - 14y_2 + 13y_3)$, $x_2 = \frac{1}{3}(2y_1 - 5y_2 + 4y_3)$, $x_3 = \frac{1}{3}(2y_1 - 2y_2 + y_3)$, $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $g = 5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$.

Література

1. *Андрійчук В.І., Забавський Б.В.* Лінійна алгебра. — Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2008.

2. *Винберг Э.Б.* Курс алгебры. 3-е изд. — М.: Факториал Пресс, 2002.

3. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. 3-е изд. — М.: Наука, 1966.

4. *Головина Л.И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. 3-е изд. — М.: Наука, 1979.

5. *Завало С.Т.* Курс алгебри. — К.: Вища школа, 1985.

6. *Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І.* Алгебра і теорія чисел. Ч.1. — К.: Вища школа, 1976.

7. *Калужнін Л.А., Вишенський В.А., Шуб Ц.О.* Лінійні простори. — К.: Вища школа, 1971.

8. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч. II: Линейная алгебра. 3-е изд. — М.: Физматлит, 2004.

9. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. 9-е изд. — М.: Наука, 1968.

10. *Чарин В.С.* Линейные преобразования и выпуклые множества. — К.: Вища школа, 1978.

11. *Чарін В.С.* Лінійна алгебра. — К.: Техніка, 2004.

12. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. — М.: Наука, 1984.

13. *Шилов Г.Е.* Математический анализ (конечномерные линейные пространства). — М.: Наука, 1969.