МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

За редакцією І. І. Юртина

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів*

Київ 2003

ББК 22.1я73
П69

Автори: *І. І. Юртин* (розд. 1–3), *О. Ю. Дюженкова* (розд. 4, 5),
О. Б. Жильцов (розд. 6), *А. В. Кузьмін* (розд. 7, 9),
Г. М. Торбін (розд. 8)

Рецензенти: *М. В. Працьовитий*, д-р фіз.-мат. наук, проф.
С. М. Коваленко, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом (протокол № 9 від 26.12.02)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (лист № 14/18.2-2479 від 27.12.02)

П69 **Практикум з вищої математики**: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / І. І. Юртин, О. Ю. Дюженкова, О. Б. Жильцов та ін.; За ред. І. І. Юртина. — К.: МАУП, 2003. — 248 с.: іл. — Бібліогр.: с. 242–243.

ISBN 966-608-335-3

У практикумі містяться основні означення, формули і алгоритми розв'язання типових прикладів і задач, а також завдання для самостійного розв'язування з таких розділів вищої математики: лінійна алгебра, векторний аналіз, аналітична геометрія, диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної, основи функції багатьох змінних, диференціальні рівняння, ряди.

Призначений для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

ББК 22.1я73

ISBN 966-608-335-3

Розділ 1

МАТРИЦІ, ВИЗНАЧНИКИ, СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

§ 1.1. МАТРИЦІ Й ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

Матриця — це прямокутна таблиця чисел, що містить m рядків та n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

де a_{ij} — елементи матриці; i, j — індекси, що визначають номер рядка та номер стовпця, на яких розміщується зазначений елемент, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Кількість рядків m та стовпців n матриці визначають її розмірність $m \times n$. Застосовують також скорочену форму запису матриці:

$$A = \|a_{ij}\|, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, \text{ або } \underset{m\times n}{A} = \|a_{ij}\|.$$

Квадратною матрицею n-го порядку називають матрицю розмірності $n \times n$. Елементи квадратної матриці з однаковими індексами утворюють *головну діагональ* матриці. Іншу *діагональ* називають *побічною.* Квадратну матрицю називають *діагональною*, якщо всі її елементи, які не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю: $a_{ij} = 0,\ i \neq j$. *Одиничною* називають діагональну матрицю з одиницями на головній діагоналі (позначають E), *нульовою* — матрицю, усі елементи якої дорівнюють нулю.

Операції над матрицями

Порівняння двох матриць. Дві матриці однакової розмірності називають *рівними*, якщо у них рівні відповідні елементи: $A = B$, якщо $a_{ij} = b_{ij},\ \forall i, j$.

Транспонування матриці — це заміна рядків на стовпці і навпаки. Матрицю, транспоновану до матриці $\underset{m\times n}{A} = \|a_{ij}\|$, позначають $\underset{n\times m}{A^T} = \left\|a_{ij}^T\right\|$.

Додавання двох матриць. *Сумою* двох матриць однакової розмірності є матриця тієї ж розмірності, кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів заданих матриць:

$$\underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B} = \underset{m\times n}{C} = \|c_{ij}\| = \|a_{ij} + b_{ij}\|\,.$$

Множення матриці на число. Для того щоб помножити матрицю на число, потрібно кожний її елемент помножити на це число: якщо $C = \alpha A$, то $c_{ij} = \alpha a_{ij},\ \forall i, j$.

Множення двох матриць. Для того щоб матрицю A помножити на матрицю B, потрібно, щоб вони були узгоджені для множення: кількість стовпців матриці A повинна дорівнювати кількості рядків B. У результаті множення дістаємо матрицю C, кількість рядків якої збігається з кількістю рядків матриці A, а кількість стовпців — з кількістю стовпців матриці B, тобто $\underset{n\times m}{A}\,\underset{m\times k}{B} = \underset{n\times k}{C}$. При цьому кожний елемент c_{ij} матриці C дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A та j-го стовпця матриці B, тобто $c_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{m} a_{ip}b_{pj}, \forall i, j$.

У загальному випадку $AB \neq BA$.

Для квадратних матриць $A^n = \underbrace{AA\ldots A}_{n}$.

Зразки розв'язування вправ

1. Знайти матрицю A^T, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Матриця A має два рядка та три стовпця. Тому матриця A^T матиме три рядка та два стовпця. Записавши в матриці A перший і другий рядок у перший і другий стовпець матриці A^T, отримаємо $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Знайти $A + B$, $A - B$ та $3A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -3+5 & 2+1 & 4+0 \\ 1-6 & 0+2 & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -3-5 & 2-1 & 4-0 \\ 1-(-6) & 0-2 & -1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3A = 3\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-3) & 3\cdot 2 & 3\cdot 4 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 0 & 3\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -9 & 6 & 12 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти добутки AB та BA, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо добуток $C = AB$. Узгодженість для множення матриці A на B виконується: кількість стовпців матриці A і кількість рядків матриці B однакова і дорівнює трьом. Для обчислення елемента c_{11} помножимо елементи першого рядка матриці A на відповідні елементи першого стовпця матриці B і добутки додамо: $c_{11} = (-3)\cdot 1 + 2\cdot 0 + 4\cdot 2$. Аналогічно обчислимо інші елементи:

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-3)\cdot 1 + 2\cdot 0 + 4\cdot 2 & -3\cdot 5 + 2\cdot(-7) + 4\cdot(-2) \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 2 & 1\cdot 5 + 0\cdot(-7) + (-1)\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -37 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Отже, добутком AB є матриця розмірності 2×2.

Обчислимо добуток BA:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot(-3)+5\cdot 1 & 1\cdot 2+5\cdot 0 & 1\cdot 4+5\cdot 1 \\ 0\cdot(-3)+(-7)\cdot 1 & 0\cdot 2+(-7)\cdot 0 & 0\cdot 4+(-7)\cdot 1 \\ 2\cdot(-3)+(-2)\cdot 1 & 2\cdot 2+(-2)\cdot 0 & 2\cdot 4+(-2)\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ -7 & 0 & -7 \\ -8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Отже, добутком BA є матриця розмірності 3×3.
4. Знайти матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо добуток двох матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 0 & 1\cdot(-3) \\ 1\cdot 2 & 1\cdot 0 & 1\cdot(-3) \\ -3\cdot 2 & -3\cdot 0 & -3\cdot(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \\ -6 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця X визначиться з рівності

$$X = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} - A\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2-2 & 3-0 & 5-(-3) \\ 0-2 & 1-0 & -4-(-3) \\ 3-(-6) & 2-0 & 0-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 & 4 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 9/2 & 1 & -9/2 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти A^3, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. За означенням

$$A^3 = AAA \Rightarrow A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -20 \\ 10 & -23 \end{pmatrix}.$$

Отже, $A^3 = \begin{pmatrix} -23 & -20 \\ 10 & -23 \end{pmatrix}$.

6. Знайти значення матричного многочлена $f(A)$, якщо

$$f(x) = -2x^2 + 5x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Значення матричного многочлена $f(A)$ визначається рівністю $f(A) = -2A^2 + 5A - 3E$. Обчислимо A^2:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$f(A) = -2 \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 3E =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Отже, $f(A) = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Транспонувати матрицю A, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти $A - 2B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти $2A + 3B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -6 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю X з рівняння:

а) $2\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 8 & 1 & 4 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $3X + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 10 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}$.

5. Знайти добуток матриць AB та BA (якщо це можливо):

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Знайти добуток матриць AB та BA і показати, що $AB \neq BA$, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 4 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

7. Показати, що $AB = BA$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Показати, що $AX = BX$, хоча $A \neq B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

9. Знайти значення матричного многочлена $f(A)$, якщо:

а) $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $f(x) = 3x^2 - 3x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $f(x) = x^2 - 2x - 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

§ 1.2. ВИЗНАЧНИКИ

Кожна квадратна матриця n-го порядку характеризується числом, яке називають визначником $|A|$ (або детермінантом $\det A$) і позначають так:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

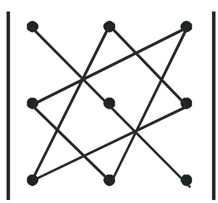
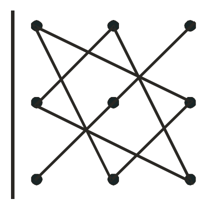
Визначник другого порядку задається рівністю

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \tag{1.2}$$

визначник третього порядку — рівністю

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.3}$$

Знаки, з якими доданки входять у формулу для обчислення визначника третього порядку, легко запам'ятати, скориставшись правилом трикутників (Саррюса):

для знаку “+”  для знаку “–” 

Матрицю A, визначник якої дорівнює нулю ($|A| = 0$), називають виродженою. У противному разі (якщо $|A| \neq 0$) матриця є невиродженою.

Основні властивості визначника:

1. При транспонуванні визначник не змінюється.

2. Якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) матриці помножити на число λ, то її визначник так само помножиться на це число.

3. Якщо у визначника поміняти місцями два рядки (стовпці), то визначник лише змінить знак.

4. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

5. Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

6. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то визначник можна подати у вигляді суми двох визначників, елементи відповідних рядків (стовпців) яких дорівнюють відповідним доданкам.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} + a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помноженого на довільний множник.

Для обчислення визначників матриць вищого порядку використовують *алгебраїчні доповнення елементів матриць*, які визначають через їх *мінори.*

Розглянемо матрицю $A = \|a_{ij}\|, i, j = \overline{1, n}$. *Мінором* M_{ij} елемента a_{ij} називають визначник, який дістають з визначника матриці A вилученням i-го рядка та j-го стовпця. Наприклад, для матриці третього порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

маємо

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \; \ldots, \; M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A визначають за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема Лапласа. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на їх алгебраїчні доповнення, тобто

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \\ |A| &= a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \ldots + a_{ni}A_{ni}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

а сума добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка або стовпця дорівнює нулю, тобто

$$\begin{aligned} &a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j, \\ &a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj}, \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Для обчислення визначника матриці n-го порядку необхідно вибрати рядок (стовпець) матриці, обчислити алгебраїчні доповнення всіх ненульових елементів вибраного рядка (стовпця) і скористатись формулою (1.4). Найзручніше обчислювати визначник, розклавши його за елементами рядка (стовпця), який містить найбільшу кількість нулів. Нулі у відповідних рядках (стовпцях) можна утворювати, застосовуючи властивість 7 визначника.

Зразки розв'язування вправ

1. Обчислити визначник матриці другого порядку:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. а) За формулою (1.2) визначаємо

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 8 + 3 = 11.$$

б) Аналогічно варіанту а) обчислюємо $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 6.$

2. Розв'язати рівняння: а) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$ б) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 \\ x & 1 \end{vmatrix} = -2.$

Розв'язання. а) Обчисливши визначник і прирівнявши його до нуля, отримаємо рівняння відносно x: $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x - 6 = 0$. Звідки $x = 6$.

б) У цьому разі відносно невідомої x отримуємо квадратне рівняння $\begin{vmatrix} x^2 & 3 \\ x & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow x^2 - 3x = -2$, розв'язками якого є $x_1 = 1, x_2 = 2$.

3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$, застосовуючи правило трикутників.

Розв'язання. Виконуємо обчислення:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2 -$$

$$-3 \cdot 0 \cdot 3 - (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -6 + 0 - 12 - 2 - 0 + 8 = -12.$$

4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами третього рядка.

Розв'язання. За формулою (1.4) визначаємо визначник:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2A_{31} + 0A_{32} + (-2)\,A_{33}.$$

Оскільки другий елемент вибраного рядка дорівнює нулю, то для визначника достатньо обчислити алгебраїчні доповнення A_{31}, A_{33}:

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot ((-2) \cdot 3 - 1 \cdot 1) = -7;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1.$$

Отже, $|A| = 2 \cdot (-7) + (-2) \cdot (-1) = -14 + 2 = -12.$

5. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$, утворивши нулі у третьому рядку.

Розв'язання. Додамо до третього стовпця перший. Отримаємо визначник $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, третій рядок якого містить лише один ненульовий елемент. Розкладемо цей визначник за елементами третього рядка:

$$|A| = 2A_{31} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2 - 4) = -12.$$

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & -6 \\ -3 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, утворивши нулі у третьому стовпці.

Розв'язання. Застосовуючи властивість 7 визначника, утворимо якомога більше нулів у третьому стовпці. Для цього помножимо перший рядок на -4 і додамо до третього, до четвертого рядка додамо перший:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & -6 \\ -3 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -4I+III \\ I+IV \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & -6 \\ -7 & -12 & 0 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

У третьому стовпці відмінний від нуля лише один елемент a_{13}. Тому цей визначник дорівнює $a_{13}A_{13} = 1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -5 & -3 & -6 \\ -7 & -12 & -1 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. Отже, одержано визначник третього порядку, який можна обчислити одним з перелічених способів. Знову застосуємо властивість 7 визначника, щоб утворити якомога більше нулів, наприклад, у третьому стовпці. Для цього до першого рядка додамо другий, помножений на -6, а до третього додамо другий, помножений на 3. Отримаємо визначник

$$\begin{vmatrix} 37 & 69 & 0 \\ -7 & -12 & -1 \\ -14 & -32 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 37 & 69 \\ -14 & -32 \end{vmatrix} =$$
$$= (37 \cdot (-32) - 69 \cdot (-14)) = -218.$$

7. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2.$

Розв'язання. Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= x^2 + 8x - 2 = -2.$$

Отримуємо рівняння $x^2 + 8x = 0$, розв'язком якого є $x_1 = 0$, $x_2 = -8$.

Завдання для самостійного розв'язування

10. Обчислити визначник матриці за правилом трикутника і розкладанням за рядками або стовпцями, якщо:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ -5 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

11. Обчислити визначник матриці розкладанням за рядками або стовпцями, утворивши в них якомога більше нулів:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & 6 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } A = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 & -8 \\ 0 & b & 0 & -9 \\ 3 & 9 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

12. Обчислити визначники, за допомогою їх властивостей:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} a+b & 1 & c \\ b+c & 1 & a \\ c+a & 1 & b \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} ax+bx_1 & x & x_1 \\ ay+by_1 & y & y_1 \\ az+bz_1 & z & z_1 \end{vmatrix}.$$

13. Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -7 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0; \text{ б) } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \text{ в) } \begin{vmatrix} 4 & x & x \\ x & 4 & x \\ x & x & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 1.3. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Оберненою матрицею до A є така матриця B, що $AB = BA = E$.

Обернену матрицю позначають A^{-1} і вона існує лише для невироджених матриць. За допомогою алгебраїчних доповнень A_{ij} її можна подати у вигляді

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{32} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

тобто алгебраїчні доповнення елементів i-го рядка записуються в i-й стовпець матриці A^{-1}.

Зразки розв'язування вправ

1. Знайти матрицю, обернену до $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо визначник $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$. Матриця є невиродженою, тому існує обернена їй матриця. Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів першого та другого рядка

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 0 = 0;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$$

і за формулою (1.6) для оберненої матриці дістаємо

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку:

$$A^{-1}A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, обернену матрицю знайдено правильно.

2. Знайти матрицю, обернену до A, якщо:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. а) У прикладі 5 § 1.2 обчислено визначник цієї матриці: $|A| = -12$. Матриця є невиродженою, і тому існує обернена до неї матриця. Для побудови цієї матриці треба обчислити дев'ять алгебраїчних доповнень:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-2; \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-7; \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=2;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-8; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=-11;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

Отже, за формулою (1.6) визначаємо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність знайденої оберненої матриці:

$$A^{-1}A=\frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}=$$

$$= \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Обчислимо визначник матриці

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 6 + 12 + 1 - 45 + 16 = 0.$$

Матриця вироджена, тому оберненої до неї не існує.

3. Розв'язати матричне рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. а) Введемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тоді задане матричне рівняння запишеться у вигляді $AX = B$.

Визначник матриці A $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1 \neq 0$. Тому матриця A є невиродженою і для неї існує обернена матриця $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Помножимо матричне рівняння зліва на A^{-1}. Одержимо

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 18 & 31 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}.$$

Отже, $X = \begin{pmatrix} 18 & 31 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}$.

б) Запишемо матричне рівняння у вигляді $AXB = C$, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Якщо матриці A і B невироджені, то, помноживши матричне рівняння на A^{-1} зліва і на B^{-1} справа, одержимо розв'язок:

$$A^{-1}AXB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Знайдемо визначники матриць A і B:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1; \quad |B| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1.$$

Ці матриці невироджені, тому до них існують обернені:

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного розв'язування

14. Знайти обернену матрицю:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ -5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

15. Обчислити матрицю $B = 11\left(A^{-1}\right)^T + A^T$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

16. Визначити, для яких значень a матриця A не має оберненої

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Розв'язати матричне рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; б) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $X \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

§ 1.4. РАНГ МАТРИЦІ

Мінором k-го порядку довільної матриці A називають визначник, що складається з елементів матриці, розміщених на перетині k рядків та k стовпців.

Наприклад, для матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ -5 & 8 & 9 & -7 \end{pmatrix}$ можна зазначити такі мінори:

першого порядку $|-1|$, $|9|$, $|4|$;

другого порядку $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$;

третього порядку $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ -5 & 9 & -7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 5 \\ 8 & 9 & -7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ -5 & 8 & -7 \end{vmatrix}$.

Рангом матриці A називають найбільший з порядків її відмінних від нуля мінорів та позначають $r(A), rang(A)$.

Елементарними перетвореннями матриці називають такі операції:

- перестановку місцями двох рядків (стовпців) матриці;
- множення рядка (стовпця) матриці на число, відмінне від нуля;
- додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця).

При елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється. Ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків.

Ранг матриці можна знайти за допомогою методу елементарних перетворень. Суть цього методу полягає в тому, що матрицю приводять до східчастого вигляду елементарними перетвореннями; кількість ненульових рядків отриманої східчастої матриці визначає ранг матриці.

Зразок розв'язування вправ

Знайти ранг матриці методом елементарних перетворень:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. а) Застосуємо елементарні перетворення для того, щоб привести матрицю до східчастого вигляду. Для цього помножимо другий рядок матриці на 2 і додамо до них перший:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{I+2II} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримана східчаста матриця має лише один ненульовий рядок, її ранг дорівнює одиниці. Отже, ранг початкової матриці так само дорівнює одиниці.

б) Додамо до другого рядка перший:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{I+II} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця містить два ненульових рядка. Отже, її ранг дорівнює двом.

в) Помножимо другий і третій рядки матриці на -2 і додамо до них перший:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2)\,II+I \\ (-2)\,III+I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix}_{III+3II}.$$

Потім помножимо другий рядок на 3 і додамо до третього рядка. Дістанемо

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримана східчаста матриця має два ненульових рядка, тому її ранг дорівнює двом. Отже, ранг початкової матриці так само дорівнює двом.

Завдання для самостійного розв'язування

18. Визначити ранг матриці:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; є) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 & -9 & 9 \end{pmatrix}$.

§ 1.5. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Означення. Систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.7}$$

називають системою лінійних алгебраїчних рівнянь, де a_{ij}, b_i ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$) — коефіцієнти при змінних і вільні члени, які є відомими числами; x_i ($i = \overline{1,n}$) — невідомі. Скорочений запис:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Розв'язком системи називають сукупність чисел $x_i = k_i$, $i = \overline{1,n}$, при підстановці яких у систему рівнянь замість відповідно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ кожне рівняння перетворюється на правильну рівність: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}k_j = b_i$, $i = \overline{1,m}$.

Кожній системі рівнянь відповідають такі матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

де A — матриця системи; B — матриця-стовпець системи; X — матриця-стовпець невідомих.

Якщо до A додати матрицю-стовпець B, то одержану матрицю $(A\,|B\,)$ називають розширеною.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна записати в матричній формі:

$$AX = B. \tag{1.8}$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь може не мати розв'язків (тоді її називають несумісною), мати лише один або багато розв'язків (тоді її називають сумісною).

Питання про сумісність системи рівнянь розглядається в наведеній далі теоремі.

Теорема Кронекера—Капеллі. Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці:

$$r\,(A) = r\,(A|\,B)\,.$$

Для сумісних систем справедливі такі твердження:

1. Якщо ранг матриці сумісної системи збігається з кількістю невідомих ($r\,(A) = n$), то система рівнянь має єдиний розв'язок.

2. Якщо ранг матриці сумісної системи менший від кількості невідомих ($r\,(A) = r < n$), то система рівнянь має безліч розв'язків. При цьому r змінних $x_1, x_2, \ldots, x_r$ називають основними (або базисними), якщо визначник матриці з коефіцієнтів при них (базисний

мінор) відмінний від нуля. Решту $n-r$ змінних $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ називають неосновними (або вільними).

Система лінійних рівнянь, кількість рівнянь і невідомих якої однакова ($m = n$), має єдиний розв'язок, якщо її матриця є невиродженою ($|A| \neq 0$).

Основні методи розв'язування системи рівнянь

Метод оберненої матриці. Якщо матриця системи є невиродженою, то її розв'язок задається формулою

$$A^{-1}AX = EX = X = A^{-1}B. \tag{1.9}$$

Формули Крамера. Позначимо $\Delta = |A|$. Це буде основний визначник системи. Обчислимо допоміжні визначники Δ_j, які відповідають матрицям, одержаним заміною j-го стовпця цієї матриці на стовпець B. Тоді розв'язок системи рівнянь можна подати у вигляді рівностей:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},\ j = \overline{1, n}. \tag{1.10}$$

Метод Гаусса. Це найпоширеніший метод розв'язування та дослідження системи лінійних рівнянь, який є методом послідовного виключення невідомих. За допомогою елементарних перетворень розширена матриця системи приводиться до сходинкового (трикутного) вигляду (прямий хід методу Гаусса):

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{1r} & a_{1r+1} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2r}^{(1)} & a_{2r+1}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & a_{rr}^{(r-1)} & a_{rr+1}^{(r-1)} & \ldots & a_{rn}^{(r-1)} & b_r^{(r-1)} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{r+1}^{(r-1)} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_m^{(r-1)}
\end{array}\right),$$

якій відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r+a_{1r+1}x_{r+1}+\ldots+a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2r}^{(1)}x_r+a_{2r+1}^{(1)}x_{r+1}+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r+a_{r+1r+1}^{(r-1)}x_{r+1}+\ldots+a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ \qquad\qquad 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad 0 = b_m^{(r-1)}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Якщо хоча б одне з чисел $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ відмінне від нуля, то система рівнянь буде несумісною. Якщо $b_{r+1}^{(r-1)} = \ldots = b_m^{(r-1)} = 0$, то система буде сумісною.

Якщо $r = n$, то матриця системи буде трикутною. Останнє рівняння міститиме лише одну невідому x_n. Знайшовши її та вилучивши з усіх попередніх з передостаннього рівняння, знайдемо невідому x_{n-1} і т. д. І нарешті, з першого рівняння знаходимо x_1.

Якщо $r < n$, то кількість рівнянь буде меншою від кількості невідомих. Перші r змінних x_1, x_2, …, x_r, які називають основними (або базисними), виражатимуться через решту $n - r$ змінних x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n, які називають неосновними (або вільними), за тією самою схемою, що й у першому випадку. З останнього рівняння виразимо змінну x_r через змінні $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, з передостаннього — змінну x_{r-1} через $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ і т. д., а з першого — змінну x_1 через $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. У результаті дістаємо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = c_{10} + c_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n, \\ x_2 = c_{20} + c_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = c_{r0} + c_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n. \end{cases}$$

Зразки розв'язування вправ

1. Знайти розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 - 2x_3 = 6. \end{cases}$

Розв'язання. Матрицями цієї системи є

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись оберненою матрицею, побудованою у прикладі 2 а) § 1.3, та формулою (1.9), дістаємо розв'язок системи:

$$X = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2\cdot 9 + (-4)\cdot(-3) + (-7)\cdot 6 \\ 2\cdot 9 + (-8)\cdot(-3) + (-11)\cdot 6 \\ -2\cdot 9 + (-4)\cdot(-3) + (-1)\cdot 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -48 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язком системи рівнянь є $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Використаємо формули Крамера для розв'язання цієї системи рівнянь. Визначник матриці системи вже обчислено: $\Delta = |A| = -12$. Обчислимо допоміжні визначники Δ_1, Δ_2, Δ_3. Для Δ_1 замінимо перший стовпець матриці A на її праву частину:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot (-7) + (-2) \cdot 3 = -48,$$

для Δ_2 — другий стовпець матриці A на її праву частину:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 9 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -36 + 18 - 6 = -24,$$

для Δ_3 — третій стовпець матриці A на її праву частину:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 9 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 - 6 = -12.$$

Скориставшись формулами (1.10), дістаємо такий самий розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 4, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

2. Дослідити систему рівнянь на сумісність. Якщо вона сумісна, знайти її розв'язок:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 4, \\ -2x_1 + x_2 = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 - 2x_3 = 6. \end{cases}$

Розв'язання. а) Запишемо розширену матрицю системи

$$\left(\begin{array}{rr|r} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

і здійснимо над нею елементарні перетворення прямого ходу методу Гаусса: для того щоб звести її до сходинкового вигляду, перший рядок перепишемо, а другий, застосовуючи елементарні перетворення, змінимо так, щоб її перший елемент перетворився на нуль. Для цього перший рядок помножимо на 2, а другий — на 3 і обидва рядка додамо:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ 2I + 3II \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r} 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Прямий хід методу Гаусса завершений. Ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи $r\,(A) = r\,(A\,|B\,) = 2$, отже, система сумісна. Ці ранги дорівнюють кількості невідомих $n = 2$. Отже, система має єдиний розв'язок. Щоб знайти цей розв'язок, запишемо систему рівнянь, яка відповідає одержаній розширеній матриці:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 4, \\ -x_2 = -1. \end{cases}$$

Друге рівняння містить лише невідому x_2, розв'язком якої є $x_2 = 1$. Підставивши значення x_2 у перше рівняння, дістаємо рівняння лише для невідомої x_1: $3x_1 - 2 = 4$. Його розв'язком є $x_1 = 2$. Отже, розв'язком заданої системи є $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

б) Запишемо розширену матрицю системи

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 9 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

і здійснимо над нею елементарні перетворення прямого ходу методу Гаусса: перший рядок перепишемо, а два інших, застосовуючи елементарні перетворення, змінимо так, щоб їх перші елементи стали нульовими. Для цього помножимо перший рядок на число 2, а другий — на 3 і обидва рядка додамо; перший рядок помножимо на -2, а третій — на 3 і обидва рядка додамо:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 9 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 2 \cdot I + 3 \cdot II \\ -2 \cdot I + 3 \cdot III \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 11 & 9 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right).$$

Перетворимо на нуль елемент, що розміщується нижче головної діагоналі у другому стовпці. Для цього другий рядок помножимо на 4 і додамо його до третього:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 11 & 9 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ 4 \cdot II + III \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 36 & 36 \end{array}\right).$$

Остаточна матриця вже є трикутною. Прямий хід методу Гаусса завершений. Ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи і ці ранги дорівнюють кількості невідомих. Тому система сумісна і має єдиний розв'язок.

Цій матриці відповідає система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ \quad -x_2 + 11x_3 = 9, \\ \qquad 36x_3 = 36. \end{cases}$$

З третього рівняння знаходимо $x_3 = 1$, з другого після виключення з нього змінної x_3 знаходимо $x_2 = 2$, з першого після виключення змінних x_3 та x_2 знаходимо $x_1 = 4$. Отже, розв'язком системи рівнянь є $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

3. Методом Гаусса розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Записавши розширену матрицю послідовно, дістаємо такі матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3 \cdot I + II \\ -I + II \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ II + (-5) \cdot III \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

У цьому разі ранги матриці й розширеної матриці системи однакові, тобто $r(A) = r(A|B) = 2$, але менші від кількості невідомих $n = 3$. Тому система рівнянь сумісна і має безліч розв'язків.

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає сходинковій матриці:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Вибравши змінну x_3 за вільну, усі інші змінні виразимо через неї. З другого рівняння знаходимо $x_2 = 1 - 2x_3$, з першого після виключення з нього змінної x_2 знаходимо $x_1 = 1 + x_3$. Загальним розв'язком системи є $x_1 = 1 + x_3$, $x_2 = 1 - 2x_3$, де x_3 — довільне число.

4. Дослідити систему на сумісність. Якщо вона сумісна, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Послідовно дістаємо такі матриці:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot I + II \\ -I + III \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ II + III \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Ранг матриці системи $r(A) = 2$, а ранг розширеної матриці системи $r(A|B) = 3$. Отже, система є несумісною. Такого ж висновку можна дійти, якщо записати рівняння, що відповідає третьому рядку $0 = -6$, яке є несумісним.

5. Дослідити систему на сумісність. Якщо вона сумісна, знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

Розв'язання. Послідовно отримуємо такі матриці:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2I+II \\ -I+III \\ -5I+IV \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2II+III \\ -3II+IV \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Останній матриці відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ \qquad\quad x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -1. \end{cases}$$

Система має безліч розв'язків. Основними змінними візьмемо змінні x_1, x_2 і виразимо їх через вільні змінні x_3, x_4. Знайшовши з другого рівняння $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$, а з першого — невідому x_1, після виключення з нього змінної x_2 одержимо загальний розв'язок системи $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$, $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$, де x_3, x_4 — довільні числа.

6. З деякого листового матеріалу потрібно викроїти 170 заготовок типу А, 170 заготовок типу Б і 80 заготовок типу В. При цьому застосовують три способи розкрою. Кількість заготовок, які можна отримати з кожного листа при кожному способі розкрою, зазначена в таблиці.

Тип розкрою	Кількість отримуваних заготовок за способами розкрою		
	I	II	III
А	4	2	3
Б	1	5	2
В	3	1	1

Знайти, скільки листів матеріалу необхідно для одержання заданої кількості заготовок кожного типу.

Розв'язання. Позначимо x_1, x_2 і x_3 кількість листів матеріалу, що розкроюють відповідно першим, другим та третім способом. Тоді заготовок типу А при першому способі розкрою вийде $4x_1$, при другому — $2x_2$, а при третьому — $3x_3$. Загальна кількість заготовок типу А $(4x_1 + 2x_2 + 3x_3)$ повинна дорівнювати 170. Маємо рівняння $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 170$.

Аналогічно, розраховуючи кількість заготовок типів Б і В, дістаємо такі рівняння: $x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 170$; $3x_1 + x_2 + x_3 = 80$. Для знаходження кількості листів матеріалу x_1, x_2 і x_3 маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 170, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 170, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 80. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему одним з методів, знаходимо $x_1 = 10$, $x_2 = 20$ і $x_3 = 30$.

Завдання для самостійного розв'язування

19. Використовуючи формули Крамера, методом оберненої матриці та методом Гаусса знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$$

20. Розв'язати систему рівнянь методом оберненої матриці та за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1, \\ x_1 - x_2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4, \\ 4x_1 - 5x_2 = 10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -4, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 7; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -10, \\ 4x_1 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases}$

21. Знайти розв'язок системи рівнянь методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 7, \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 - x_5 = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 + 4x_4 + 4x_5 = -2, \\ x_1 - x_3 + 5x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 7, \\ x_1 + 5x_2 + 11x_3 - x_5 = 4; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 9; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = -4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 12x_4 + 16x_5 = -1. \end{cases}$

22. Встановити, при яких значеннях λ система рівнянь має єдиний розв'язок і знайти його:

а) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$

23. Швейна фабрика виробляє дитячі, жіночі та чоловічі костюми, використовуючи тканини трьох типів. Норми витрат кожної тканини на один костюм і за один день подані в таблиці.

Вид тканини	Норми витрат тканини на один костюм, ум. од.			Обсяг витрат тканини за один день, ум. од.
	дитячий	жіночий	чоловічий	
I	1	3	4	1900
II	2	5	5	3100
III	1	2	5	1800

Знайти щоденний обсяг випуску костюмів кожного виду.

24. Із пункту А в пункт Б необхідно перевезти обладнання трьох типів: I типу — 150 одиниць, II типу — 310, III типу — 200. Для цього можна замовити три види транспорту. Кількість обладнання кожного типу, яке вміщується у певний вид транспорту, наведено в таблиці.

Тип обладнання	Кількість обладнання, що вміщується у вид транспорту		
	T_1	T_2	T_3
I	1	4	2
II	3	6	4
III	3	4	2

Визначити, скільки транспорту кожного виду необхідно замовити, щоб перевезти все обладнання.

Розділ 2

ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ

§ 2.1. ВЕКТОРИ. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

Вектором називають напрямлений відрізок, у якого зазначено точку його початку A та кінця B. Позначають вектор двома літерами зі стрілкою чи рискою вгорі $\overrightarrow{AB}$ або однією малою літерою зі стрілкою чи рискою вгорі $\vec{a}$, $\bar{b}$.

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називають *нуль-вектором* і позначають $\vec{0}$ $(\vec{0} = \overrightarrow{AA})$ або 0.

Два *вектори* називають *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Вектори називають *компланарними*, якщо вони лежать на одній площині або паралельних площинах.

Довжиною (модулем) вектора називають довжину відрізка, який зображує цей вектор, і позначають $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або AB. Аналогічно довжину вектора $\bar{a}$ позначають $|\bar{a}|$ або a. Якщо $|\bar{a}| = 1$, то вектор називають *одиничним*.

Операції над векторами

Порівняння двох векторів. Два вектори називають *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають однакову довжину.

Додавання двох векторів. *Сумою* $\bar{a}+\bar{b}$ векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають вектор $\bar{c}$, напрямлений з початку вектора $\bar{a}$ у кінець вектора $\bar{b}$ за умови, що початок вектора $\bar{b}$ збігається з кінцем вектора $\bar{a}$.

Множення вектора на число. *Добутком* вектора $\bar{a}$ на число λ називають вектор $\bar{b}$, що колінеарний вектору $\bar{a}$, при $\lambda \geq 0$ однаково напрямлений з вектором $\bar{a}$, при $\lambda < 0$ протилежно напрямлений і $\left|\bar{b}\right| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$.

Віднімання двох векторів. *Різницею* $\bar{a}-\bar{b}$ векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають вектор $\bar{c}$, який дорівнює сумі векторів $\bar{a}$ і $-\bar{b}$: $\bar{c} = \bar{a}-\bar{b} = \bar{a}+\left(-\bar{b}\right)$.

Систему векторів $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$ називають *лінійно незалежною*, якщо рівність

$$k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \ldots + k_n\bar{a}_n = 0 \tag{2.1}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $k_i = 0$ при всіх $i = 1, 2, \ldots, n$. Якщо ж ця рівність виконується хоча б при одному значенні $k_j \neq 0$, то систему векторів називають *лінійно залежною*. У цьому разі вектор $\bar{a}_j$ лінійно виражається через інші вектори системи:

$$\bar{a}_j = \frac{k_1}{k_j}\bar{a}_1 + \ldots + \frac{k_{j-1}}{k_j}\bar{a}_{j-1} + \frac{k_{j+1}}{k_j}\bar{a}_{j+1} + \ldots + \frac{k_n}{k_j}\bar{a}_n.$$

Два колінеарних вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ лінійно залежні й один з них виражається через інший, наприклад: $\bar{b} = \lambda\bar{a}$, $\lambda \neq 0$. Два неколінеарних вектори лінійно незалежні.

Три компланарних вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ лінійно залежні, а три некомпланарних — лінійно незалежні.

Базисом системи векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ називають таку її підсистему, вектори якої лінійно незалежні, а будь-який вектор системи лінійно виражається через вектори підсистеми.

На площині V_2 базисом є два неколінеарних вектори $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$. Довільний вектор $\bar{a}$, що компланарний цим векторам, лінійно виражається через них: $\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2$, де a_1, a_2 — числа, які називають координатами вектора $\bar{a}$ у базисі $\bar{e}_1$ $\bar{e}_2$ і записують так: $\bar{a} = (a_1, a_2)$.

У просторі V_3 базисом є три некомпланарних вектори $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ і $\bar{e}_3$. Довільний вектор простору $\bar{a}$ лінійно виражається через них: $\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3$, де a_1, a_2, a_3 — числа, які називають координатами вектора $\bar{a}$ у базисі $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ і $\bar{e}_3$ і записують так: $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Базис називають *ортонормованим*, якщо його базисні вектори попарно перпендикулярні та мають одиничну довжину. У просторі V_3 їх позначають векторами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, а на площині V_2 — векторами $\bar{i}$, $\bar{j}$.

Нехай маємо ортонормований базис, вектори базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ якого є ортами координатних осей прямокутної системи координат $Oxyz$. Тоді довільний вектор $\bar{a}$ в цій системі координат однозначно розкладається, тобто $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, і має координати $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Вектор $\overline{OA}$, початок якого розміщується на початку координат, а кінець — у точці $A\,(x_0, y_0, z_0)$, називають *радіусом-вектором* точки A, його координати збігаються з координатами цієї точки: $\overline{OA} = (x_0, y_0, z_0)$. Якщо вектор $\overline{AB} = (a_x; a_y; a_z)$ задається двома точками простору з координатами $A\,(x_1; y_1; z_1)$ і $B\,(x_2; y_2; z_2)$, то його координати визначають за формулами

$$a_x = x_2 - x_1; \quad a_y = y_2 - y_1; \quad a_z = z_2 - z_1. \tag{2.2}$$

Довжину вектора $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ визначають за формулою

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{2.3}$$

Якщо вектор $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ утворює кути α, β, γ з осями координат Ox, Oy, Oz, то косинуси цих кутів називають *напрямними* і визначають за формулами

$$\begin{aligned} &\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \ \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ &\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

звідки $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Нехай задано два вектори $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тоді вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ рівні, якщо $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$, і колінеарні, якщо $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$.

Суму, різницю та добуток вектора на число визначають відповідними арифметичними операціями над їх координатами:

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)\,, \ \lambda\bar{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)\,. \tag{2.5}$$

Три вектори $\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $\bar{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ і $\bar{a}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$ лінійно незалежні, якщо визначник, що складений з координат цих векторів, відмінний від нуля:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

У противному разі вектори лінійно залежні.

Будь-який вектор $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ однозначно розкладається за базисом $\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $\bar{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ і $\bar{a}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$: $\bar{b} = k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + k_3\bar{a}_3$. Коефіцієнти розкладання визначають із системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = b_1, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3 = b_2, \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3 = b_3. \end{cases}$$

Для векторів $\bar{a} = (a_x, a_y)$ і $\bar{b} = (b_x, b_y)$ площини формули (2.3)–(2.5) замінюють на аналогічні, наприклад $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y)$.

Зразки розв'язування вправ

1. У трапеції $ABCD$ сторони BC і AD паралельні, $AD = 3BC$ (рис. 2.1). Розкласти вектор $\overline{AD}$ за векторами $\bar{b} = \overline{AB}$, $\bar{c} = \overline{AC}$.

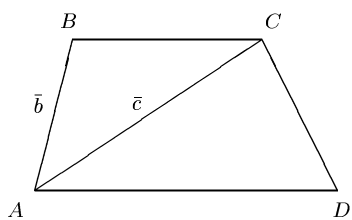


Рис. 2.1

Розв'язання. Із трикутника ABC знаходимо, що $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. Тому $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \bar{c} - \bar{b}$. Оскільки вектори $\overline{BC}$ і $\overline{AD}$ колінеарні та $AD = 3BC$, то $\overline{AD} = 3\overline{BC} = 3\left(\bar{c} - \bar{b}\right)$.

2. У паралелограмі $ABCD$ сторони $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AD} = \bar{c}$; M — точка перетину діагоналей (рис. 2.2). Виразити вектори $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$ через вектори $\bar{b}$ і $\bar{c}$.

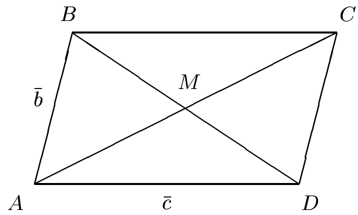


Рис. 2.2

Розв'язання. Оскільки у паралелограма $ABCD$ протилежні сторони паралельні й рівні, то $\overline{BC} = \overline{AD} = \bar{c}$. Із трикутника ABC знаходимо, що $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \bar{b} + \bar{c}$, а з трикутника ABD знаходимо $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = \bar{c} - \bar{b}$. Діагоналі паралелограма точкою перетину M діляться навпіл, вектори $\overline{MA}$ і $\overline{AC}$ протилежно напрямлені, тому $\overline{MA} = -\dfrac{1}{2}\overline{AC}$; вектори $\overline{MC}$ і $\overline{AC}$ однаково напрямлені, тому $\overline{MC} = \dfrac{1}{2}\overline{AC}$. Аналогічно $\overline{MB} = -\dfrac{1}{2}\overline{BD}$, $\overline{MD} = \dfrac{1}{2}\overline{BD}$. Отже, $\overline{MA} = -\dfrac{1}{2}\left(\bar{b} + \bar{c}\right)$, $\overline{MC} = \dfrac{1}{2}\left(\bar{b} + \bar{c}\right)$, $\overline{MB} = -\dfrac{1}{2}\left(\bar{c} - \bar{b}\right)$, $\overline{MD} = \dfrac{1}{2}\left(\bar{c} - \bar{b}\right)$.

3. У чотирикутнику $ABCD$ сторони $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{BC} = \bar{c}$, $\overline{CD} = \bar{d}$ (рис. 2.3). Виразити вектор $\overline{MN}$ через задані вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, якщо точки M і N — середини діагоналей AC і BD.

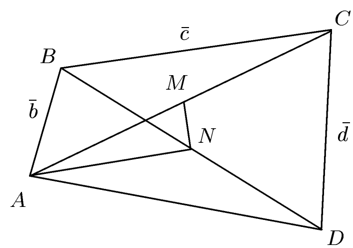


Рис. 2.3

Розв'язання. Виразимо діагоналі AC і BD через задані вектори. Із трикутника ABC маємо $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \bar{b} + \bar{c}$, із трикутника BCD маємо $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = \bar{c} + \bar{d}$. З'єднаємо точку A з точкою N. Тоді з трикутника AMN маємо рівність $\overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM}$. Оскільки точка M є серединою діагоналі AC, то $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\left(\bar{b} + \bar{c}\right)$. Вектор $\overline{AN}$ виразимо з трикутника ABN: $\overline{AN} = \overline{AB} - \overline{BN}$. Точка N є серединою діагоналі BD, тому $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2}\left(\bar{c} + \bar{d}\right)$; $\overline{AN} = \bar{b} + \frac{1}{2}\left(\bar{c} + \bar{d}\right)$. Отже, $\overline{MN} = \bar{b} + \frac{1}{2}\left(\bar{c} + \bar{d}\right) - \frac{1}{2}\left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{b} + \bar{d}\right)$.

4. Нехай задано точки $A(-1; 1; 3)$, $B(2; -3; -1)$. Знайти координати вектора $\overline{AB}$, його довжину і напрямні косинуси.

Розв'язання. Координати вектора $\overline{AB}$ знаходимо за формулами (2.2): $x_1 = -1$, $y_1 = 1$, $z_1 = 3$; $x_2 = 2$, $y_2 = -3$, $z_2 = -1$. Тому $a_x = 2 - (-1) = 3$, $a_y = -3 - 1 = -4$, $a_z = -1 - 3 = -4$. Отже, $\overline{AB} = (3; -4; -4)$. Модуль вектора обчислимо за формулою (2.3): $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16 + 16} = \sqrt{41}$, а напрямні косинуси — за формулами (2.4): $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{41}}$, $\cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{41}}$, $\cos\gamma = \frac{-4}{\sqrt{41}}$.

5. Знайти координати точки A, яка є початком вектора $\bar{a} = (2; 0; 3)$, якщо його кінець розміщується в точці $B(4; 1; 2)$.

Розв'язання. Нехай точка A має координати $(x_0; y_0; z_0)$. Тоді вектор $\overline{AB}$ має координати $(4 - x_0; 1 - y_0; 2 - z_0)$. Із рівності векторів $\overline{AB}$ та $\bar{a}$ маємо рівняння $4 - x_0 = 2$; $1 - y_0 = 0$; $2 - z_0 = 3$. Розв'язавши їх, знаходимо $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $z_0 = -1$. Отже, точка A має координати $(2; 1; -1)$.

6. Знайти лінійну комбінацію $3a_1 - 5a_2 - a_3$ векторів $a_1 = (4, -2, 1)$, $a_2 = (-2, 3, -4)$, $a_3 = (0, -6, 7)$.

Розв'язання. Якщо вектори визначаються своїми координатами, то лінійні операції над ними визначаються тими ж лінійними операціями над їх координатами. Тому

$$\begin{aligned} 3a_1 - 5a_2 - a_3 &= 3(4, -2, 1) - 5(-2, 3, -4) - (0, -6, 7) = \\ &= (12 + 10, -6 - 15 + 6, 3 + 20 - 7) = (22, -15, 16). \end{aligned}$$

7. У паралелограма $ABCD$ задано координати трьох вершин $A(1;-3;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Знайти координати четвертої вершини D.

Розв'язання. У паралелограма сторони BC і AD рівні й паралельні. Тому вектори $\overline{BC}$ і $\overline{AD}$ рівні. Знайдемо координати вектора $\overline{BC}$:

$$\overline{BC} = (C_x - B_x, C_y - B_y, C_z - B_z) = (6-3, 4-2, 4-1) = (3, 2, 3).$$

Якщо координати вершини D позначити (x, y, z), вектор $\overline{AD}$ матиме такі координати: $\overline{AD} = (x-1, y+3, z-3)$. Із рівності $\overline{BC} = \overline{AD}$ відносно невідомих (x, y, z) маємо $x-1=3$, $y+3=2$, $z-3=3$. З цих рівностей знаходимо $x=4, y=-1, z=6$. Отже, вершина D має координати $D(4;-1;6)$.

8. Показати, що три вектори $\bar{a}_1 = (3,1,1)$, $\bar{a}_2 = (1,1,1)$, $\bar{a}_3 = (1,-1,1)$ утворюють базис, і розкласти вектор $\bar{b} = (4,2,2)$ за цим базисом.

Розв'язання. Обчислимо визначник матриці, елементами якої є координати цих векторів:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 + 1 - 1 + 3 - 1 = 4 \neq 0.$$

Отже, ці три вектори лінійно незалежні й тому утворюють базис. Коефіцієнти розкладання k_i вектора $\bar{b} = k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + k_3\bar{a}_3$ визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} 3k_1 + k_2 + k_3 = 4, \\ k_1 + k_2 - k_3 = 2, \\ k_1 + k_2 + k_3 = 2. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок цієї системи рівнянь, застосовуючи формули Крамера:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, $k_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{4}{4} = 1$, $k_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{4}{4} = 1$, $k_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{0}{4} = 0$. Розкладання вектора $\bar{b}$ за базисом $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ таке: $\bar{b} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. За заданими векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ побудувати вектори $2(\bar{a} + \bar{b})$, $2\bar{b} - \bar{a}$, $-\bar{b} - \bar{a}$.

2. У трикутнику ABC проведено медіани AD, BM, CN. Виразити вектори $\overline{AD}$, $\overline{BM}$, $\overline{CN}$ через вектори $\bar{a} = \overline{AB}$ і $\bar{b} = \overline{AC}$. Показати, що $\overline{AD} + \overline{BM} + \overline{CN} = 0$.

3. Точки M і K — середини сторін AB і CD чотирикутника $ABCD$. Показати, що $\overline{MK} = \dfrac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD})$.

4. У трикутнику ABC сторона AB поділена точками M і N на три рівні відрізки: $AM = MN = NB$. Виразити вектори $\overline{CM}$ і $\overline{CN}$ через вектори $\bar{a} = \overline{CA}$, $\bar{b} = \overline{CB}$.

5. На трьох некомпланарних векторах $\overline{AA_1} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AD} = \bar{c}$ побудовано паралелепіпед $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$. Виразити вектори-діагоналі через задані вектори.

6. Знайти координати вектора $\overline{AB}$, їх довжину та напрямні косинуси, якщо:

а) $A(3;1;-2)$, $B(1;0;1)$; б) $A(0;-1;2)$, $B(1;-1;4)$;

в) $A(7;1;-3)$, $B(4;0;2)$; г) $A(3;-2;2)$, $B(-1;3;2)$.

7. Знайти координати вектора $\bar{a}$, якщо відомі кути α, β, γ, які він утворює з осями координат Ox, Oy, Oz, і його довжину $|\bar{a}|$:

а) $|\bar{a}| = 2, \alpha = 45°, \beta = 60°, \gamma = 120°$;

б) $|\bar{a}| = 3, \alpha = 60°, \beta = 45°, \gamma = 60°$;

в) $|\bar{a}| = 5, \alpha = 135°, \beta = 60°, \gamma = 60°$.

8. Перевірити, чи колінеарні вектори $\bar{a} = (3;2;-1)$ і $\bar{b} = (-6;-4;2)$, і встановити, який з них довший і наскільки.

9. Визначити модуль вектора $2\bar{a}-\bar{b}$, якщо:

а) $\bar{a}=(1;-1)\,,\bar{b}=(2;0)$;

б) $\bar{a}=(3;1)\,,\bar{b}=(-2;3)$;

в) $\bar{a}=(1;0;3)\,,\bar{b}=(4;4;-1)$;

г) $\bar{a}=(-1;3;2)\,,\bar{b}=(-4;6;-1)$.

10. Задано вектори $\bar{a}=(2;3)$, $\bar{b}=(1;-3)$, $\bar{c}=(-1;3)$. При якому значенні коефіцієнта λ вектори $\bar{p}=\bar{a}+\lambda\bar{b}$ та $\bar{q}=\bar{a}+2\bar{c}$ колінеарні?

11. Задано три послідовні вершини паралелограма A, B, C. Знайти його четверту вершину D, якщо:

а) $A\,(1;0;-3)$, $B\,(-1;2;1)$, $C\,(2;-3;-2)$;

б) $A\,(-1;2;3)$, $B\,(-3;4;-1)$, $C\,(-2;3;5)$;

в) $A\,(3;3;-5)$, $B\,(-5;6;2)$, $C\,(4;-7;2)$;

г) $A\,(2;-5;3)$, $B\,(1;-2;4)$, $C\,(4;-4;2)$.

12. Показати, що три вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ утворюють базис, і розкласти вектор $\bar{b}$ за цим базисом, якщо:

а) $\bar{a}_1=(3,-1,-5)$, $\bar{a}_2=(3,-2,-8)$, $\bar{a}_3=(0,1,2)$, $\bar{b}=(0,3,7)$;

б) $\bar{a}_1=(1,-5,2)$, $\bar{a}_2=(2,3,0)$, $\bar{a}_3=(1,-1,1)$, $\bar{b}=(3,5,1)$;

в) $\bar{a}_1=(3,0,1)$, $\bar{a}_2=(-2,5,2)$, $\bar{a}_3=(-8,-2,3)$, $\bar{b}=(-7,3,6)$;

г) $\bar{a}_1=(2,1,1)$, $\bar{a}_2=(1,-1,1)$, $\bar{a}_3=(1,3,1)$, $\bar{b}=(3,-4,2)$.

§ 2.2. СКАЛЯРНИЙ, ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Скалярним добутком двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними (позначають $\bar{a}\cdot\bar{b}$):

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot\left|\bar{b}\right|\cos\varphi.$$

Властивості скалярного добутку:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$;

2) $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot\left(\lambda\bar{b}\right)=\lambda\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)$;

3) $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$;

4) $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2$;

5) $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ тоді і тільки тоді, коли $\bar{a}\perp\bar{b}$.

Якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задані координатами $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\bar{b}= (b_x;b_y;b_z)$, то

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}},$$

де φ — кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Векторний добуток. Упорядковану трійку некомпланарних векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ називають *правою*, якщо при зведенні їх до спільного початку з кінця третього вектора $\bar{c}$ найкоротший поворот від першого $\bar{a}$ до другого $\bar{b}$ здійснюється проти годинникової стрілки. У противному разі трійку векторів називають лівою.

Векторним добутком неколінеарних векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (позначають $\bar{a}\times\bar{b}$) називають вектор $\bar{c}$, який має такі властивості:

1) $\bar{c}\perp\bar{a},\bar{c}\perp\bar{b}$;

2) $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\varphi$, де φ — кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$;

3) трійка векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ права.

Властивості векторного добутку векторів $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ і $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$:

1) $\bar{a}\times\bar{b}=0$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні;

2) $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$;

3) $\lambda\bar{a}\times\bar{b}=\bar{a}\times\lambda\bar{b}=\lambda(\bar{a}\times\bar{b})$;

4) $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$;

5) довжина векторного добутку неколінеарних векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах;

6) $\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=0$, $\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}$, $\bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}$, $\bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}$, де $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — вектори ортонормованого базису;

7) вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ має координати

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \bar{j} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right). \tag{2.6}$$

Мішаним добутком трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ називають число, яке дорівнює скалярному добутку векторів $\bar{a} \times \bar{b}$ і $\bar{c}$.

Позначають мішаний добуток так: $\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = \left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$.

Властивості мішаного добутку:

1) $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = \left(\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}\right) = \left(\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}\right) = -\left(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}\right) = -\left(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}\right) = -\left(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}\right)$;

2) $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = 0$, якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ компланарні;

3) $\left(\lambda\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = \left(\bar{a}, \lambda\bar{b}, \bar{c}\right) = \left(\bar{a}, \bar{b}, \lambda\bar{c}\right) = \lambda\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$;

4) модуль мішаного добутку $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ як суміжних ребрах;

5) мішаний добуток векторів $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ і $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$ дорівнює визначнику

$$\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Зразки розв'язування вправ

1. Знайти кут між векторами $\bar{a} = (2, 5, -3)$; $\bar{b} = (-4, 2, 3)$.

Розв'язання. Знайдемо скалярний добуток і модулі цих векторів:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot (-4) + 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 = -8 + 10 + (-9) = -7,$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 25 + 9} = \sqrt{38},$$

$$\left|\bar{b}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 4 + 9} = \sqrt{29}.$$

Отже, косинус кута між векторами $\cos\alpha = \dfrac{-7}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{30}}$.

2. Задано $|\bar{a}| = 3$, $\left|\bar{b}\right| = 2$ і кут між ними $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Знайти модуль вектора $\bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$.

Розв'язання. З означення і властивостей скалярного добутку справедливі рівності

$$|\bar{c}|^2 = \bar{c}\cdot\bar{c} = \left(2\bar{a} + 3\bar{b}\right)\cdot\left(2\bar{a} + 3\bar{b}\right) = 4\,|\bar{a}|^2 + 12\bar{a}\cdot\bar{b} + 9\left|\bar{b}\right|^2,$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 3,\ \ |\bar{c}|^2 = 4\cdot 3 + 12\cdot 3 + 9\cdot 2 = 66.$$

Отже, $|\bar{c}| = \sqrt{66}$.

3. Знайти вектор $\bar{b}$, що колінеарний вектору $\bar{a} = (3, -2, 1)$, і скалярний добуток $\left(\bar{b}\cdot(2, 1, -1)\right) = 9$.

Розв'язання. Оскільки вектор $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ колінеарний вектору $\bar{a}$, то їх координати пропорційні: $b_x = 3t$, $b_y = -2t$, $b_z = t$. Тому $\bar{b}\cdot(2, 1, -1) = 6t - 2t - t = 9$, звідки $t = 3$. Отже, вектор $\bar{b} = (9, -6, 3)$.

4. Знайти координати векторного добутку векторів $\bar{a} = (1; 0; 3)$; $\bar{b} = (2; 1; -1)$ і площу паралелограма s, побудованого на цих векторах.

Розв'язання. За формулою (2.6) знаходимо координати:

$$\bar{c} = \bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-3; 7; 1).$$

Площа s дорівнює модулю вектора $\bar{c}$: $s = |\bar{c}| = \sqrt{9 + 49 + 1} = \sqrt{59}$.

5. Обчислити площу s паралелограма, побудованого на векторах $3\bar{a} - \bar{b}$ і $\bar{a} + \bar{b}$, якщо $|\bar{a}| = \left|\bar{b}\right| = 2$ і кут між ними 60°.

Розв'язання. Згідно з означенням і властивостями векторного добутку справедливі такі рівності:

$$\bar{c} = \left(3\bar{a} - \bar{b}\right)\times\left(\bar{a} + \bar{b}\right) = 3\left(\bar{a}\times\bar{a}\right) + 3\left(\bar{a}\times\bar{b}\right) - \bar{b}\times\bar{a} - \bar{b}\times\bar{b}.$$

Оскільки $\bar{a}\times\bar{a}=0$, $\bar{b}\times\bar{b}=0$, $\bar{b}\times\bar{a}=-\bar{a}\times\bar{b}$, то

$$\bar{c}=3\cdot 0+3\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)-0=4\left(\bar{a}\times\bar{b}\right),$$

$$|\bar{c}|=4\,|\bar{a}|\cdot\left|\bar{b}\right|\sin 60^\circ=4\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}.$$

6. Знайти площу трикутника з вершинами $A\,(3;-3;1)$, $B\,(5;1;0)$, $C\,(4;1;2)$.

Розв'язання. Площа трикутника дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, тобто $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$. Знайдемо координати цих векторів:

$$\overline{AB}=(5-3,1-(-3)\,,0-1)=(2,4,-1)\,,$$

$$\overline{AC}=(4-3,1-(-3)\,,2-1)=(1,4,1)\,.$$

Тоді

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\2&4&-1\\1&4&1\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}4&-1\\4&1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-1&2\\1&1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2&4\\1&4\end{vmatrix}\right)=(8,-3,4)\,.$$

Отже, $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{64+9+16}=\dfrac{\sqrt{89}}{2}$.

7. Знайти мішаний добуток векторів $\bar{a}=(2,0,1)$, $\bar{b}=(1,-1,0)$ і $\bar{c}=(1,2,-2)$.

Розв'язання. За властивістю 5 знаходимо

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-1&0\\1&2&-2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}-1&0\\2&-2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot 2+1\cdot 3=7.$$

8. Знайти об'єм V трикутної піраміди з вершинами $A\,(2;2;2)$, $B\,(4;3;3)$, $C\,(4;0;2)$ і $D\,(2;0;4)$.

Розв'язання. Об'єм заданої піраміди дорівнює $\dfrac{1}{6}$ об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, який дорівнює модулю мішаного добутку цих векторів. Знайдемо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$: $\overline{AB} = (B_x - A_x; B_y - A_y; B_z - A_z) = (2;1;1)$. Аналогічно $\overline{AC} = (2;-2;0)$; $\overline{AD} = (0;-2;2)$. За властивістю 5 мішаний добуток

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 + 2 \cdot (-6) = -15.$$

Отже, об'єм трикутної піраміди $V = \dfrac{|-15|}{6} = \dfrac{5}{2} = 2,5$ куб. од.

9. Показати, що чотири точки $A\,(3;4;2)$, $B\,(2;3;8)$, $C\,(1;4;4)$ і $D\,(4;3;6)$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Для цього достатньо показати, що три вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ компланарні, тобто їх мішаний добуток дорівнює нулю. Знайдемо ці вектори

$$\overline{AB} = (-1,-1,6)\,,\ \overline{AC} = (-2,0,2)\,,\ \overline{AD} = (1,-1,4)$$

і їх мішаний добуток

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\,(-5+5) = 0.$$

При знаходженні визначника перетворено на нуль ще один елемент у другому рядку і визначник розкладено за елементами цього рядка. Мішаний добуток дорівнює нулю, вектори компланарні. Отже, ці чотири точки лежать в одній площині.

Завдання для самостійного розв'язування

13. Знайти косинуси кута між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо:

а) $\bar{a} = (2, 5, -3)$, $\bar{b} = (-4, 2, 0)$; б) $\bar{a} = (1, -2, 3)$, $\bar{b} = (-1, -3, 0)$.

14. Обчислити кути трикутника ABC, якщо:

а) $A\,(2; 3; 1)$, $B\,(4; 0; 7)$, $C\,(8; 5; -2)$;

б) $A\,(-1; 2; 0)$, $B\,(3; 2; 5)$, $C\,(5; -3; 2)$.

15. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = (-1, 3, -3)$; $\bar{b} = (4, -2, 1)$.

16. Задано вершини чотирикутника $A\,(2; -1; 2)$, $B\,(2; 5; 0)$, $C\,(-3; 2; 1)$, $D\,(m; -4; 3)$. Визначити, при якому значенні m діагоналі чотирикутника AC і BD перпендикулярні.

17. Знайти координати векторного добутку $\bar{a} \times \bar{b}$, якщо:

а) $\bar{a} = (2; 4; 5)$, $\bar{b} = (0; 1; -2)$; б) $\bar{a} = (0; -2; 5)$, $\bar{b} = (1; 1; 3)$;

в) $\bar{a} = (3; -1; 2)$, $\bar{b} = (-2; 1; 2)$; г) $\bar{a} = (1; -1; 0)$, $\bar{b} = (0; -1; -2)$.

18. Обчислити площу трикутника з вершинами $A\,(7; 3; 0)$, $B\,(2; 0; 5)$ і $C\,(3; 3; -1)$.

19. Для векторів $\bar{a} = (2; 0; -1)$ і $\bar{b} = (1; 2; -1)$ знайти координати векторних добутків, якщо:

а) $\bar{a} \times \bar{b}$; б) $\left(2\bar{a} - \bar{b}\right) \times \bar{b}$; в) $\left(2\bar{a} - \bar{b}\right) \times \left(2\bar{a} + \bar{b}\right)$.

20. Задано такі координати вершин трикутної піраміди $ABCD$:

а) $A\,(3; 1; 4)$, $B\,(-1; 6; 1)$, $C\,(-1; 1; 6)$, $D\,(0; 4; -1)$;

б) $A\,(3; 3; 9)$, $B\,(5; 9; 0)$, $C\,(3; 1; 6)$, $D\,(1; 3; 5)$;

в) $A\,(3; 5; 4)$, $B\,(1; 5; 1)$, $C\,(-1; 6; 5)$, $D\,(1; 7; 4)$;

г) $A\,(1; 0; 5)$, $B\,(-1; 1; 4)$, $C\,(1; 1; 7)$, $D\,(3; 4; 5)$.

Знайти довжину ребра AB, косинус кута між ребрами AB, AD і об'єм піраміди.

Розділ 3

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

§ 3.1. ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Аналітична геометрія — це галузь математики, яка вивчає геометричні образи алгебраїчними методами. Для цього ці геометричні образи розглядаються в деякій системі координат, яка визначає лінійний векторний простір. Однією з найпростіших систем є декартова прямокутна система координат. На площині така система координат задається двома взаємно перпендикулярними осями Ox та Oy, що мають спільний початок і однакову масштабну одиницю. Вісь Ox називають віссю абсцис, вісь Oy — віссю ординат, точку O перетину осей — початком координат.

Будь-яка точка на площині характеризується єдиною парою чисел (вектором) (x, y). І навпаки, будь-яка пара чисел (будь-який вектор) визначає на площині єдину точку. Таку пару чисел називають координатами точки $M\,(x;y)$. Перше число цієї пари називають абсцисою точки, друге — ординатою. Початок координат має координати $(0;0)$.

Відстань d між точками $M_1\,(x_1;y_1)$, $M_2\,(x_2;y_2)$ визначається рівністю

$$d\,(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (3.1)$$

Площу трикутника, вершинами якого є три точки $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_3(x_3;y_3)$, обчислюють так:

$$S = \frac{1}{2}\,\mathrm{mod}\left(\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|. \qquad (3.2)$$

Поділ відрізка у пропорційному відношенні. Нехай координатами кінців відрізка є $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Тоді координати точки $M(x, y)$, для якої справедливе співвідношення $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \lambda$, визначаються рівностями

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (3.3)$$

Якщо ж точка $M(x, y)$ ділить відрізок навпіл, то $\lambda = 1$ і координати точки, що є серединою відрізка, матимуть такий вигляд: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Зразки розв'язування вправ

1. Знайти площу трикутника, вершини якого мають такі координати: $A(2;0)$, $B(6;5)$, $C(4;2)$.

Розв'язання. За формулою (3.2) визначаємо

$$S = \frac{1}{2}\left|(6-2)(2-0) - (4-2)(5-0)\right| = \frac{1}{2}\left|8 - 10\right| = 1.$$

2. Знайти точку $M(x, y)$, яка у два рази ближче до точки $M_1(2;2)$, ніж до точки $M_2(8;14)$.

Розв'язання. Точка $M(x, y)$ ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = 0,5$. За формулою (3.3) знаходимо

$$x = \frac{2 + 0,5 \cdot 8}{1,5} = 4, \quad y = \frac{2 + 0,5 \cdot 14}{1,5} = 6.$$

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайти координати точок, симетричних відносно початку координат осей Ox, Oy таким точкам:

а) $A\,(1;1)$; б) $B\,(2;-4)$; в) $C\,(-4;3)$; г) $D\,(-2;-5)$.

2. Точка M є серединою відрізка OA, що з'єднує початок координат з точкою $A\,(-6;4)$. Знайти координати точки M.

3. Записати площу трикутника ABC, якщо відомо координати його вершин:

а) $A\,(2;2)$, $B\,(-3;2)$, $C\,(1;-1)$; б) $A\,(-1;1)$, $B\,(0;2)$, $C\,(3;-1)$;
в) $A\,(3;1)$, $B\,(0;0)$, $C\,(0;2)$; г) $A\,(-2;-2)$, $B\,(1;2)$, $C\,(-3;-1)$;
д) $A\,(2;0)$, $B\,(-3;2)$, $C\,(1;-1)$; е) $A\,(2;0)$, $B\,(3;2)$, $C\,(0;-1)$.

§ 3.2. РІВНЯННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

Запишемо найпоширеніші види рівнянь прямої на площині.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b, \tag{3.4}$$

де k — коефіцієнт, що дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до осі Ox і називається кутовим коефіцієнтом; b — ордината точки перетину прямої з віссю Oy.

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M\,(x_1;y_1)$ із заданим кутовим коефіцієнтом:

$$y - y_1 = k\,(x - x_1)\,. \tag{3.5}$$

При довільному значенні коефіцієнта k це рівняння визначає пучок прямих, що проходять через точку $M\,(x_1;y_1)$, крім прямої, паралельної осі Oy, яка не має кутового коефіцієнта.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1\,(x_1;y_1)$ та $M_2\,(x_2;y_2)$ $(x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{3.6}$$

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M\,(x_0; y_0)$ і має відомий вектор напряму $\vec{p} = (m, n)$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{3.7}$$

Рівняння прямої у відрізках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{3.8}$$

де $a \neq 0$ — абсциса точки перетину прямої з віссю Ox; $b \neq 0$ — ордината точки перетину прямої з віссю Oy.

Загальне рівняння прямої:

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.9}$$

де A, B, C — довільні коефіцієнти (A і B одночасно не дорівнюють нулю). Коефіцієнти A і B є також координатами вектора $\bar{n} = (A, B)$, перпендикулярного до прямої (вектора нормалі прямої).

Загальне рівняння прямої, що проходить через задану точку $M\,(x_0; y_0)$:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) = 0. \tag{3.10}$$

Частинні випадки загального рівняння.

1. При $C = 0$, $B \neq 0$, $y = -\dfrac{A}{B}x$ пряма проходить через початок координат.

2. При $B = 0$, $A \neq 0$, $x = -\dfrac{C}{A} = a$ пряма паралельна осі Oy.

3. При $A = 0$, $B \neq 0$, $y = -\dfrac{C}{B} = b$ пряма паралельна осі Ox.

4. При $B = C = 0$, $x = 0$ пряма є віссю Oy.

5. При $A = C = 0$, $y = 0$ пряма є віссю Ox.

Якщо відомі кутові коефіцієнти двох прямих k_1 і k_2, то один з кутів між ними α визначається рівністю

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{3.11}$$

Другий кут між прямими дорівнює $\pi - \alpha$.

Умова паралельності двох прямих: $k_1 = k_2$.

Умова перпендикулярності двох прямих: $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Якщо дві прямі задаються рівнянням у загальній формі $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то один з кутів між цими прямими визначається кутом між двома нормалями до них — $\bar{n}_1 = (A_1, B_1)$ та $\bar{n}_2 = (A_2, B_2)$:

$$\cos\alpha = \frac{(\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{3.12}$$

Умова паралельності двох прямих визначається умовою паралельності їх нормалей $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$, а умова перпендикулярності — умовою перпендикулярності їх нормалей $A_1A_1 + B_1B_2 = 0$.

Відстань d від точки $M\,(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.13}$$

Зразки розв'язування вправ

1. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1\,(3;1)$ та $M_2\,(5;4)$. Записати це рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Розв'язання. Маємо $x_1 = 3$, $y_1 = 1$, $x_2 = 5$, $y_2 = 4$. Підставивши їх у рівність (3.6), отримаємо

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3}, \text{ або } 3x - 2y - 7 = 0.$$

Виразимо з останнього рівняння змінну y через x. Отримаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y = \dfrac{3}{2}x - 7$.

2. Через точку $M\,(1;-2)$ провести пряму, яка:

1) паралельна осі Ox;

2) паралельна осі Oy;

3) проходить через початок координат;

4) паралельна прямій $2x + 3y - 5 = 0$;

5) перпендикулярна до прямої $2x + 3y - 5 = 0$.

Розв'язання. 1) Рівняння прямої, що паралельна осі Ox, має вигляд $y = a$. Оскільки точка $M\,(1; -2)$ лежить на ній, то рівняння прямої має вигляд $y = -2$.

2) Аналогічно попередньому випадку одержуємо рівняння прямої $x = 1$, яка проходить через точку $M\,(1; -2)$ і паралельна осі Oy.

3) Рівняння прямої, що проходить через початок координат, має такий вигляд: $y = kx$. З умови, що точка $M\,(1; -2)$ лежить на ній, отримуємо $k = -2$. Отже, рівняння прямої $y = -2x$.

4) Рівняння прямої шукатимемо у вигляді $A\,(x-1)+B\,(y+2)=0$. З умови паралельності цієї прямої прямій $2x + 3y - 5 = 0$ випливає, що $\dfrac{A}{2} = \dfrac{B}{3}$. Для виконання цієї пропорції достатньо взяти $A = 2$, $B = 3$. Отже, рівняння прямої

$$2\,(x-1) + 3\,(y+2) = 0 \Rightarrow 2x + 3y + 4 = 0.$$

5) Рівняння прямої шукатимемо у вигляді $A\,(x-1)+B\,(y+2)=0$, нормаллю якої є вектор $n_1 = (A; B)$. З умови перпендикулярності цієї прямої до прямої $2x + 3y - 5 = 0$, нормаллю якої є $n_2 = (2; 3)$, випливає, що $2A + 3B = 0$. Будь-який ненульовий розв'язок цього рівняння і визначає рівняння шуканої прямої: $A = 2$, $B = -3$. Отже, рівняння прямої

$$2\,(x-1) - 3\,(y+2) = 0 \Rightarrow 2x - 3y - 8 = 0.$$

3. Через точку $M\,(-1; 2)$ провести пряму під кутом 45° до прямої $y = 3x + 1$. Знайти відстань від цієї точки до заданої прямої.

Розв'язання. Рівняння прямої, що проходить через точку $M\,(-1; 2)$, шукатимемо у вигляді $y - 2 = k\,(x+1)$ з кутовим коефіцієнтом $k_1 = k$. Цей коефіцієнт знайдемо з умови, що пряму проведено під кутом 45° до заданої з кутовим коефіцієнтом $k_2 = 3$. Скориставшись формулою (3.11), отримаємо рівняння відносно невідомого кутового коефіцієнта k_1: $tg45^\circ = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \dfrac{3 - k_1}{1 + 3k_1} = 1$, або $4k_1 = 2$.

Підставивши розв'язок $k_1 = \dfrac{1}{2}$ у рівняння шуканої прямої, одержимо $y - 2 = \dfrac{1}{2}(x+1)$ або $x - 2y + 5 = 0$.

Якщо позначити $k_1 = 3$, $k_2 = k$, то з формули (3.11) відносно невідомого кутового коефіцієнта $k_2 = k$ отримаємо рівняння $\dfrac{k_2 - 3}{1 + 3k_2} = 1$, або $2k_2 = -4$. Розв'язком цього рівняння є $k_2 = -2$. Підставивши знайдений кутовий коефіцієнт у рівняння прямої, одержимо $y - 2 = -2(x+1)$, або $2x + y = 0$.

Отже, через точку $M(-1;2)$ до прямої $y = 3x + 1$ під кутом 45° можна провести дві прямі: $x - 2y + 5 = 0$ та $2x + y = 0$.

4. Задано вершини трикутника $A(6;0)$, $B(2;-3)$, $C(8;-1)$. Скласти рівняння сторін трикутника, висоти BD, опущеної на сторону AC, і знайти координати її основи D.

Розв'язання. Скористаємось формулою (3.6) для знаходження рівняння сторін AB, AC, BC.

Для AB

$$\frac{x-6}{2-6} = \frac{y}{-3-0} \Rightarrow 3x - 4y - 18 = 0.$$

Для AC

$$\frac{x-6}{8-6} = \frac{y}{-1-0} \Rightarrow x + 2y - 6 = 0.$$

Для BC

$$\frac{x-2}{8-2} = \frac{y+3}{-1+3} \Rightarrow x - 3y - 11 = 0.$$

Рівняння висоти трикутника, опущеної з вершини B, шукатимемо у вигляді рівняння (3.10): $A(x-2) + B(y+3) = 0$. Коефіцієнти A, B знайдемо з умови перпендикулярності висоти до прямої AC. Нормаллю прямої AC є вектор $\bar{n}_1 = (1,2)$, а шуканої висоти — вектор $\bar{n}_2 = (A,B)$. З умови перпендикулярності отримуємо рівняння $A + 2B = 0$, ненульовим розв'язком якого є $A = 2, B = -1$. Отже, рівняння висоти $2x - y - 7 = 0$.

Основа висоти D лежить одночасно на висоті BD і на стороні AC. Тому для знаходження її координат потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 2x - y = 7. \end{cases}$$

Знайшовши розв'язок цієї системи $x = 4$, $y = 1$, отримаємо координати $D\,(4;1)$.

Завдання для самостійного розв'язування

4. Звести до рівнянь з кутовим коефіцієнтом та у відрізках задані рівняння прямих і побудувати їх:

а) $6x + 4y - 12 = 0$; б) $5x - 2y + 10 = 0$; в) $2x + 3y - 1 = 0$.

5. Знайти точку перетину висот трикутника, якщо його вершинами є точки $A\,(0;1)$, $B\,(-3;2)$, $C\,(-3;-1)$.

6. Знайти точку перетину медіан трикутника, якщо його вершинами є точки $A\,(2;1)$, $B\,(0;3)$, $C\,(-2;1)$.

7. Записати рівняння сторін трикутника і знайти його внутрішній кут A, якщо його вершини задаються такими координатами:

а) $A\,(2;2)$, $B\,(-3;2)$, $C\,(1;-1)$; б) $A\,(-1;1)$, $B\,(0;2)$, $C\,(3;-1)$;
в) $A\,(3;1)$, $B\,(0;0)$, $C\,(1;2)$; г) $A\,(-2;0)$, $B\,(1;2)$, $C\,(-3;-1)$;
д) $A\,(4;1)$, $B\,(2;2)$, $C\,(1;-1)$; е) $A\,(2;0)$, $B\,(3;2)$, $C\,(0;-1)$.

8. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M\,(2;3)$, і вона:
а) паралельна осі Ox, осі OY;
б) проходить через початок координат;
в) відтинає на координатних осях відрізки однакової довжини;
г) перпендикулярна до прямої $y = 2x - 5$;
д) паралельна прямій $2x - y - 5 = 0$.

9. Через точку $M\,(3;5)$ провести пряму так, щоб розміщений між осями координат її відрізок ділився в цій точці навпіл.

10. На прямій $3x - y + 4 = 0$ знайти точку, рівновіддалену від точок $A\,(3;3)$ і $B\,(7;5)$.

11. Точка $(3;2)$ є вершиною прямого кута прямокутного рівнобедреного трикутника, а гіпотенуза лежить на прямій $2x+y-1=0$. Записати рівняння катетів.

12. Записати рівняння висоти, медіани та бісектриси, проведених з вершини A трикутника ABC, якщо $A\,(4;4)$, $B\,(0;1)$, $C\,(-2;-4)$.

13. Сторони AB, BC, та AC трикутника ABC задаються рівняннями відповідно $2x-y-1=0$, $7x-3y-6=0$, $3x-y-2=0$. Знайти координати вершин трикутника і довжину висоти, опущеної з кута A на сторону BC.

§ 3.3. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Коло. *Колом* називають геометричне місце точок площини, рівновіддалених від заданої точки $C\,(x_0, y_0)$ на величину R. Точку $C\,(x_0, y_0)$ називають *центром кола*, а величину R — його *радіусом*.

Рівняння кола $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Еліпс. *Еліпсом* називають геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох заданих точок площини є величиною сталою, що перевищує відстань між цими точками.

Дві задані точки F_1 і F_2 називають *фокусами еліпса*, відстань F_1F_2 — *фокусною відстанню*; сталу позначають $2a$.

Для фокусів $F_1\,(-c;0)$, $F_2\,(c;0)$ за умови $2c<2a$ канонічне (найпростіше) рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3.14}$$

де $b=\sqrt{a^2-c^2}$. Числа a і b називають відповідно *півосями еліпса великою* і *малою*, початок координат — його *центром*. Відношення $\varepsilon=\dfrac{c}{a}<1$ називають *ексцентриситетом еліпса*, прямі $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ — її *директрисами*.

Еліпс із центром у точці $C(x_0;y_0)$ і півосями a і b $(a>b)$, що паралельні осям координат, має рівняння

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \tag{3.15}$$

Гіпербола. *Гіперболою* називають геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней від яких до двох заданих точок є величиною сталою, що менша від відстані між цими точками.

Дві задані точки F_1 і F_2 називають фокусами гіперболи, відстань F_1F_2 — фокусною відстанню; сталу позначають $2a$.

Для фокусів $F_1\,(-c;0)$, $F_2\,(c;0)$ за умови $2c > 2a$ канонічне (найпростіше) рівняння гіперболи має такий вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.16}$$

де $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Числа a і b називають півосями гіперболи відповідно дійсною і уявною, початок координат — його центром. Відношення $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ називають ексцентриситетом гіперболи, прямі $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ — її асимптотами, а прямі $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ — її директрисами.

Гіпербола із центром у точці $C(x_0;y_0)$ і півосями a і b $(a > b)$, що паралельні осям координат, має рівняння

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{3.17}$$

Парабола. *Параболою* називають геометричне місце точок площини, відстань від яких до заданої точки дорівнює відстані до заданої прямої, що не проходить через задану точку.

Задану точку F називають фокусом параболи, задану пряму — її директрисою. Відстань від фокуса до директриси називають *фокальним параметром параболи* і позначають p.

Для фокуса $F_1\left(\dfrac{p}{2};0\right)$ і директриси $x = -\dfrac{p}{2}$ канонічне (найпростіше) рівняння параболи має вигляд

$$y^2 = 2px. \tag{3.18}$$

Парабола симетрична відносно осі Ox, точку її перетину з цією віссю називають *вершиною*. Отже, вершина параболи розміщується на початку координат.

Якщо вершина параболи розміщується на початку координат і парабола симетрична відносно осі Oy, то канонічне рівняння параболи має вигляд $x^2 = 2py$. У цьому разі точка $F\,(0;p/2)$ є фокусом параболи, пряма $y = -p/2$ — її директрисою.

Якщо вершина параболи розміщується в точці $C\,(x_0, y_0)$ і її вісь симетрії паралельна осі Ox, то рівняння параболи матиме такий вигляд:

$$(y - y_0)^2 = 2p\,(x - x_0)\,. \tag{3.19}$$

Зразки розв'язування вправ

1. Скласти рівняння кола, якщо:

а) його центр розміщується в точці $C\,(3;1)$ і точка $M\,(5;2)$ лежить на колі;

б) його центр збігається з початком координат, а пряма $3x - 4y - -20 = 0$ є дотичною до кола.

Розв'язання. а) Координатами центра кола є координати точки C, а радіусом кола — відстань між точками C і M:

$$R^2 = (5-3)^2 + (2-1)^2 = 5.$$

Отже, рівняння кола має вигляд $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 5$.

б) Координатами центра кола є точка $(0;0)$, а радіусом кола — відстань від цієї точки до заданої прямої:

$$R = \frac{|3\cdot 0 - 4\cdot 0 - 20|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{20}{5} = 4.$$

Отже, рівняння кола має вигляд $x^2 + y^2 = 16$.

2. Визначити півосі, фокуси, ексцентриситет і директрису еліпса

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Розв'язання. Із рівняння еліпса випливає: $a = 4$, $b = 3$. Тоді $c = =\sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{7}$; $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Отже, велика піввісь дорівнює 4, мала — 3; $F_1 = \left(-\sqrt{7};0\right)$, $F_2 = \left(\sqrt{7};0\right)$; $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Директрисами еліпса є прямі $x = \pm\dfrac{16}{\sqrt{7}}$.

3. Показати, що рівняння $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$ задає рівняння еліпса. Знайти центр, осі, фокуси та ексцентриситет цього еліпса.

Розв'язання. Виділимо повні квадрати у рівнянні

$$5\left(x^2-6x+9\right)-45+9\left(y^2+2y+1\right)-9+9=$$
$$=5\left(x-3\right)^2+9\left(y+1\right)^2-45=0.$$

Звідси

$$\frac{\left(x-3\right)^2}{9}+\frac{\left(y+1\right)^2}{5}=1.$$

Центром еліпса є точка $C\left(3;-1\right)$, велика піввісь $a=3$, мала піввісь $b=\sqrt{5}$. Фокуси еліпса лежать на прямій $y=-1$ і віддалені від центра еліпса на відстань $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-5}=2$. Тому $F_1\left(1;-1\right)$; $F_2\left(5;-1\right)$. Ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$.

4. Визначити півосі, координати фокусів і асимптоти гіперболи, що визначається рівнянням $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

Розв'язання. Із рівняння гіперболи випливає: $a^2=16$, $b^2=9$, або $a=4$, $b=3$. Параметр c, який визначає координати фокуса, знайдемо з рівності $b^2=c^2-a^2 \Rightarrow -9=c^2-16 \Rightarrow c=5$. Отже, дійсна піввісь гіперболи $a=4$, уявна піввісь $b=3$; координати фокусів $F_1\left(-5;0\right)$, $F_2\left(5;0\right)$ та її асимптоти $y=\pm\dfrac{3}{4}x$.

5. Записати рівняння гіперболи, якщо її фокусна відстань дорівнює 10, а асимптоти задаються рівняннями $y=\pm 2x$.

Розв'язання. Із рівняння асимптот гіперболи випливає: $\dfrac{b}{a}=2$, або $b=2a$. За умовою фокусна відстань $2c=10$. Тому $c=5$. З рівностей $b^2=c^2-a^2$ та $b=2a$ відносно параметра a отримуємо рівняння $4a^2=25-a^2$, додатним розв'язком якого є $a=\sqrt{5}$. Тоді $b=2\sqrt{5}$. Отже, рівняння гіперболи має такий вигляд: $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$.

6. Знайти координати фокуса і записати рівняння директриси параболи, заданої рівнянням: а) $y^2=12x$; б) $x^2=8y$.

Розв'язання. а) Віссю симетрії параболи $y^2 = 12x$ є Ox; $2p = 12$, $\frac{p}{2} = 4$. Отже, фокус $F\,(4, 0)$; директриса $x = -4$.

б) Віссю симетрії параболи $x^2 = 8y$ є Oy; $2p = 8$, $\frac{p}{2} = 2$. Отже, фокус $F\,(0, 2)$, директриса $y = -2$.

Завдання для самостійного розв'язування

14. Встановити, чи лежить точка а) $M\,(3; 4)$; б) $M\,(4; 4)$ на колі радіуса 5 з центром $C\,(0; 0)$.

15. Встановити, чи перетинає коло $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$ пряма:
а) $2x - 3y - 3 = 0$; б) $2x - 3y + 3 = 0$.

16. Скласти рівняння кола, діаметром якого є відрізок прямої $2x + 3y - 12 = 0$, кінці якого лежать на осях координат.

17. Побудувати еліпс а) $4x^2 + 9y^2 = 36$; б) $3x^2 + 12y^2 = 192$ і знайти півосі, координати фокусів, ексцентриситет та директриси еліпса.

18. Записати канонічне рівняння еліпса, якщо відомо таке:
а) відстань між фокусами дорівнює 8, мала піввісь $b = 3$;
б) велика піввісь $a = 6$, ексцентриситет $\varepsilon = 0,5$;
в) відстань між фокусами дорівнює 6, ексцентриситет $\varepsilon = 0,6$;
г) відстань між фокусами дорівнює 6, $a + b = 9$.

19. Записати канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M_1\,(2; 0)$ і $M_2\,(1; 2)$.

20. Знайти центр, півосі та фокуси еліпсів, якщо вони задаються рівнянням:
а) $x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 2 = 0$;
б) $3x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 5 = 0$.

21. Побудувати гіперболу а) $4x^2 - 9y^2 = 36$; б) $16x^2 - 9y^2 = 144$ і знайти півосі, координати фокусів, ексцентриситет, асимптоти і директриси гіперболи.

22. Записати канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо таке:
а) відстань між фокусами дорівнює 10, дійсна піввісь $a = 4$;
б) дійсна піввісь $a = 4$, ексцентриситет $\varepsilon = 1,2$;
в) відстань між фокусами дорівнює 6, ексцентриситет $\varepsilon = 1,5$;

г) відстань між фокусами дорівнює 20, рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$.

23. Фокуси гіперболи збігаються з фокусами еліпса: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Записати рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет $\varepsilon = 2$.

24. Знайти центр, фокуси та ексцентриситет гіпербол, якщо вони задаються рівнянням:

а) $x^2 - 2y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$;

б) $3x^2 - 4y^2 + 6x - 8y - 13 = 0$.

25. Написати рівняння параболи з вершиною на початку координат, якщо парабола симетрична:

а) відносно осі Ox і проходить через точку (4; 1);

б) відносно осі Oy і проходить через точку (1; 1);

в) відносно осі Ox і проходить через точку перетину двох прямих $y = x$ та $x + y = 2$.

26. Знайти координати фокуса і рівняння директриси параболи, що задається рівнянням:

а) $y^2 = 24x$; б) $x^2 = -8y$; в) $2y^2 = -32x$.

27. Знайти вершину, фокус та директрису параболи, що задається рівнянням:

а) $x^2+4x-y+5 = 0$; б) $2y^2+4x-12y+2 = 0$; в) $x^2+2x+3y+4 = 0$.

28. Вершина параболи, що проходить через точку $(3; 5)$, збігається з центром кола $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$. Записати рівняння параболи, якщо її вісь паралельна осі Ox.

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

§ 3.4. ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ

Прямокутна система координат $Oxyz$ у просторі визначається трьома взаємно перпендикулярними осями Ox, Oy, Oz, що перетинаються в одній точці O і мають одну масштабну одиницю. Точку O називають *початком координат*, Ox — *віссю абсцис*, Oy — *віссю ординат*, Oz — *віссю аплікат*.

Будь-яка точка простору характеризується єдиним вектором (x, y, z). І навпаки, будь-яка трійка чисел (будь-який вектор) визначає на площині єдину точку. Таку трійку чисел називають координатами точки $M\,(x; y; z)$. Перше число називають абсцисою, друге — ординатою, третє — аплікатою точки. Початок координат має координати $(0; 0; 0)$.

§ 3.5. ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ

Запишемо найпоширеніші види рівнянь площини у просторі.

Рівняння площини, що проходить через задану точку $M\,(x_0; y_0; z_0)$ **і перпендикулярна до вектора** $\bar{n}\,(A; B; C)$:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0. \tag{3.20}$$

Рівняння площини, що проходить через задану точку $M\,(x_0; y_0; z_0)$ **і паралельна двом неколінеарним векторам** $\bar{a}\,(a_1; a_2; a_3)$ **і** $\bar{b}\,(b_1; b_2; b_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.21}$$

Рівняння площини, що проходить через три точки $M_1\,(x_1; y_1; z_1)$, $M_2\,(x_2; y_2; z_2)$, $M_3\,(x_3; y_3; z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.22}$$

Рівняння площини “у відрізках на осях”:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{3.23}$$

Загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.24}$$

де $A,\ B,\ C,\ D$ — коефіцієнти, що є довільними числами, такими що $A,\ B,\ C$ одночасно не дорівнюють нулю.

Вектор $\bar{n}\,(A;B;C)$ перпендикулярний до площини і називається нормальним вектором цієї площини.

Неповні рівняння площини:

1. Площина $Ax+By+Cz=0$ проходить через початок координат.
2. Площина $By+Cz+D=0$ паралельна осі Ox.
3. Площина $Ax+Cz+D=0$ паралельна осі Oy.
4. Площина $Ax+By+D=0$ паралельна осі Oz.
5. Площина $Ax+D=0$ паралельна осям Oy та Oz або перпендикулярна до осі Ox і перетинає її в точці $x=-\dfrac{D}{A}$.
6. Площина $By+D=0$ паралельна осям Ox та Oz або перпендикулярна до осі Oy і перетинає її в точці $y=-\dfrac{D}{B}$.
7. Площина $Cz+D=0$ паралельна осям Ox та Oy або перпендикулярна до осі Oz і перетинає її в точці $z=-\dfrac{D}{C}$.

Взаємне розміщення двох площин

Нехай площини π_1, π_2 задані загальними рівняннями відповідно

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;\ \bar{n}_{\pi_1}\,(A_1;B_1;C_1)\,;$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0;\ \bar{n}_{\pi_2}\,(A_2;B_2;C_2)\,.$$

Якщо $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$, то дві площини збігаються.

Умови паралельності двох площин:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}. \tag{3.25}$$

Умови перпендикулярності двох площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{3.26}$$

Кут між площинами визначається кутом між нормалями:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (3.27)$$

Відстань від точки $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (3.28)$$

Зразки розв'язування вправ

1. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M\,(1;2;0)$ перпендикулярно до вектора $\bar{n}\,(2;1;1)$, і знайти кут між нею та площиною $3x - y + 2z + 1 = 0$.

Розв'язання. За формулою (3.20) рівняння площини має вигляд

$$2\,(x-1) + (y-2) + z = 0 \Rightarrow 2x + y + z - 4 = 0.$$

Вектор нормалі цієї площини $\bar{n}_1 = (2;1;1)$. Вектор нормалі заданої площини $\bar{n}_2 = (3;-1;2)$. За формулою (3.27) косинус кута між цими двома площинами

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 3 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 2}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{9+1+4}} = \frac{7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}.$$

2. Записати рівняння площини, що проходить через три точки $M_1\,(2;2;1)$, $M_2\,(0;1;3)$, $M_3\,(4;1;1)$, і знайти відстань від точки $M_4\,(1;1;1)$ до цієї площини.

Розв'язання. Скористаємось формулою (3.22)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y + 2z - 8 = 0.$$

За формулою (3.28) відстань від точки до площини

$$d = \frac{|1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2 - 8|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{3}{3} = 1.$$

3. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M\,(1;-2;3)$ і а) перпендикулярна до осей Ox, Oy, Oz; б) паралельна осі Oz і проходить через початок координат.

Розв'язання. а) Скористаємось неповними рівняннями площин. Якщо площина перпендикулярна до осі Ox, то її рівняння має вигляд $x = a$. Ураховуючи, що пряма проходить через точку $M\,(1;-2;3)$, остаточно отримаємо $x = 1$. Аналогічно рівняння $y + 2 = 0$ визначає площину, яка проходить через точку $M\,(1;-2;3)$ перпендикулярно до осі Oy, а рівняння $z - 3 = 0$ — площину, яка проходить через точку $M\,(1;-2;3)$ перпендикулярно до осі Oz.

б) Рівняння площини, що паралельна осі Oz, має такий вигляд: $Ax + By + D = 0$. Оскільки ця пряма проходить ще й через початок координат і точку $M\,(1;-2;3)$, то $D = 0$ і $A - 2B = 0$. Розв'язком цього рівняння може бути $B = 1$, $A = 2$. Отже, рівняння площини, що задовольняє умовам задачі, має вигляд $2x + y = 0$.

Завдання для самостійного розв'язування

29. Записати рівняння площини "у відрізках на осях", що проходить через точку M і має нормальний вектор $\bar{n}$:

а) $M\,(3;-1;-1)$, $\bar{n} = (2;1;-5)$; б) $M\,(0;0;0)$, $\bar{n} = (-2;5;3)$;

в) $M\,(5;6;-2)$, $\bar{n} = (3;-2;5)$; г) $M\,(1;1;2)$, $\bar{n} = (0;4;-3)$.

30. Записати рівняння площини, що проходить через початок координат і дві точки $M_1\,(4;-2;1)$ та $M_2\,(2;4;-3)$.

31. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M\,(1;1;1)$ та:

а) через початок координат і перпендикулярна до площини $2x + 4y + z - 5 = 0$;

б) паралельна площині $2x + 4y + z - 5 = 0$.

32. Знайти кут між площинами:

а) $2x - 3y + z - 1 = 0, \quad 2x + y + 2 = 0$;

б) $3x + y - z - 3 = 0, \quad 2x - 3y + 5z + 4 = 0$;

в) $2x + 3y - z + 4 = 0, \quad x + 4y + 2z - 1 = 0$.

33. Серед трьох пар площин знайти пару паралельних площин і відстань між ними:

а) $2x - 3y + 5z - 1 = 0, \quad 4x - 6y + 10z + 2 = 0$;

б) $3x+y-z-3=0, \quad 6x+2y-2z-6=0;$

в) $2x-y+z+4=0, \quad x+y-z-1=0.$

§ 3.6. ПРЯМА У ПРОСТОРІ

Загальне рівняння прямої визначається як перетин двох площин

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \tag{3.29}$$

за умови, що ці площини не паралельні і не збігаються, тобто їх нормальні вектори $\bar{n}_1\,(A_1;B_1;C_1)$ і $\bar{n}_2\,(A_2;B_2;C_2)$ не колінеарні.

Канонічне рівняння прямої, що проходить через задану точку $M\,(x_0;y_0;z_0)$ і паралельна напрямному вектору $\bar{p}\,(l;m;n)$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{3.30}$$

Параметричне рівняння прямої:

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt. \tag{3.31}$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1\,(x_1;y_1;z_1)$ **і** $M_2\,(x_2;y_2;z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{3.32}$$

Кут між двома прямими L_1 та L_2, які задані рівняннями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{та} \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

визначається за формулою

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \tag{3.33}$$

Умова паралельності двох прямих:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{3.34}$$

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \tag{3.35}$$

Дві прямі перетинаються у просторі, якщо виконується умова

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.36}$$

Якщо ця умова не виконується, то прямі мимобіжні.

Зразки розв'язування вправ

1. Знайти канонічне рівняння прямої, задане загальним рівнянням

$$\begin{cases} 3x + 2y + z - 11 = 0, \\ 2x + y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Для канонічного рівняння прямої необхідно знати точку $M\,(x_0; y_0; z_0)$, через яку проходить пряма, і її напрямний вектор $\bar{p}\,(l; m; n)$. Координати точки $M\,(x_0; y_0; z_0)$ задовольняють систему рівнянь, яка визначає пряму. Узявши, наприклад, $x_0 = 0$, із системи

$$\begin{cases} 2y + z = 11, \\ y - z = 1 \end{cases}$$

знаходимо $y_0 = 4, z_0 = 3$. Точку $M_0\,(0; 4; 3)$ прямої знайдено. Дві задані площини мають нормалі $\bar{n}_1\,(3; 2; 1)$ та $\bar{n}_2\,(2; 1; -1)$, кожна з яких перпендикулярна до прямої перетину цих площин. Тому як напрямний вектор $\bar{p}\,(l; m; n)$ можна взяти векторний добуток $\bar{p} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = (-3; 5; -1)$, тобто $l = -3$, $m = 5$, $n = -1$. Підставивши знайдені значення x_0, y_0, z_0 та l, m, n у канонічне рівняння прямої (3.30), одержимо

$$\frac{x}{-3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-3}{-1}.$$

2. Знайти кут між прямими:

а) $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{2}$ та $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-1}{-5} = \dfrac{z+4}{7}$;

б) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-5}{4} = \dfrac{z-1}{2}$ та $x = -2+3t$, $y = 1-5t$, $z = 3+4t$.

Розв'язання. а) Рівняння подані в канонічній формі. Перша пряма має напрямний вектор $\bar{p}_1 = (-2;3;2)$, друга — вектор $\bar{p}_2 = (4;-5;7)$. Кут між прямими визначається кутом між цими векторами:

$$\cos\varphi = \frac{-8-15+14}{\sqrt{4+9+4}\cdot\sqrt{16+25+49}} = \frac{-9}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{90}}.$$

б) Перше рівняння прямої подано в канонічній формі. Її напрямний вектор $\bar{p}_1 = (1;4;2)$. Друге рівняння прямої подано в параметричній формі. Її напрямний вектор визначається коефіцієнтами при параметрі t: $\bar{p}_2 = (3;-5;4)$. Кут між прямими визначається кутом між цими векторами:

$$\cos\varphi = \frac{3-20+8}{\sqrt{1+16+4}\cdot\sqrt{9+25+16}} = \frac{-9}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{50}}.$$

3. Визначити, чи перетинаються прямі у просторі:

а) $\dfrac{x+5}{5} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{4}$, $\quad \dfrac{x+6}{4} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$;

б) $\dfrac{x-6}{-2} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$, $\quad \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z+4}{1}$.

Розв'язання. а) Перевіримо умову (3.36), яка визначає, чи перетинаються дві прямі у просторі. У цьому разі маємо $x_1 = -5$,

$y_1 = 2$, $z_1 = 1$; $x_2 = -6$, $y_2 = 2$, $z_2 = -1$; $l_1 = 5$, $m_1 = 1$, $n_1 = 4$; $l_2 = 4$, $m_2 = 1$, $n_2 = 2$ та $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Отже, дві прямі у просторі перетинаються.

б) Задані прямі мають відповідні напрямні вектори $\bar{p}_1 = (-2; 2; 3)$, $\bar{p}_1 = (3; -3; 1)$ і проходять через відповідні точки $M_1\,(6; -3; 1)$ і $M_2\,(3; 3; -4)$. Перевіримо умову (3.36) для цих прямих:
$\begin{vmatrix} -3 & 6 & -5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 33$. Отже, прямі у просторі мимобіжні.

Завдання для самостійного розв'язування

34. Звести до канонічного вигляду рівняння таких прямих:

а) $\begin{cases} x - y + 3z - 6 = 0, \\ 2x + y + z - 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - y + z = 0, \\ 3x + y + z - 2 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0, \\ 2x + 2y + z - 2 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0, \\ 3x + y + 2z + 5 = 0. \end{cases}$

35. Записати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0\,(2; 0; 3)$ і паралельна:

а) вектору $\bar{p}\,(1; 3; -2)$; б) прямій $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{3}$.

36. Визначити, чи перетинаються прямі у просторі, і знайти кут між ними:

а) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{2}$, $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z+1}{2}$;

б) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{4}$, $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{1}$;

в) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z}{4}$, $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$.

37. Довести перпендикулярність прямих:

а) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ та $x=4t+1,\ y=-2t+5,\ z=5t-1$;

б) $\dfrac{2x+5}{2}=\dfrac{4y+3}{-4}=\dfrac{z-1}{-1}$ та $\dfrac{x+6}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+7}{8}$.

38. Записати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $M\,(1;1;6)$ на пряму $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$.

§ 3.7. ПРЯМА І ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ

Кут між прямою $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$ визначають за формулою

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad (3.37)$$

Умова паралельності прямої і площини:

$$Al+Bm+Cn=0. \qquad (3.38)$$

Умова перпендикулярності прямої і площини:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}. \qquad (3.39)$$

Точка перетину прямої і площини. Для того щоб знайти точку перетину прямої і площини, потрібно скористатись параметричним рівнянням прямої $x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt$, підставити у рівняння площини $Ax+By+Cz+D=0$ замість $x,\ y,\ z$ і розв'язати лінійне рівняння відносно параметра t. Підставивши знайдене значення t у параметричне рівняння прямої, знайдемо координати точки перетину прямої і площини.

Зразки розв'язування вправ

1. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{-3}$ та площини $3x+y+2z-4=0$ і визначити кут між ними.

Розв'язання. Параметричне рівняння прямої має вигляд $x = 2 + 2t$, $y = -3 + t$, $z = -3t$. Підставивши вирази для x, y, z у рівняння площини, дістанемо

$$3\,(2 + 2t) - 3 + t - 6t - 4 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Отже, координати точки перетину $x = 4$, $y = -2$, $z = -3$. Для того щоб визначити кут, запишемо напрямний вектор прямої $\bar{p}\,(2; 1; -3)$ і нормальний вектор площини $\bar{n}\,(3; 1; 2)$. За формулою (3.37) дістанемо

$$\sin\varphi = \frac{\bar{p}\cdot\bar{n}}{|\bar{p}|\cdot|\bar{n}|} = \frac{6 + 1 - 6}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{14}.$$

2. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M\,(-5; 2; -1)$ перпендикулярно до площини $x - 4y - 2z + 3 = 0$.

Розв'язання. Рівняння прямої шукатимемо в канонічній формі (3.30), де x_0, y_0, z_0 — координати точки, через яку проходить пряма; l, m, n — координати напрямного вектора прямої. У розглядуваному випадку $x_0 = -5$, $y_0 = 2$, $z_0 = -1$. Оскільки пряма перпендикулярна до заданої площини, то згідно з (3.39) її напрямний вектор $\bar{p} = (l; m; n)$ колінеарний нормальному вектору площини $\bar{n} = (1; -4; -2)$. Тому як вектор $\bar{p}$ для прямої можна взяти нормальний вектор $\bar{n}$ площини: $l = 1$, $m = -4$, $n = -2$. Отже, рівняння прямої запишеться у вигляді $\dfrac{x + 5}{1} = \dfrac{y - 2}{-4} = \dfrac{z + 1}{-2}$.

Завдання для самостійного розв'язування

39. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M\,(1; -3; 2)$ перпендикулярно до прямої:

а) $\dfrac{x + 1}{2} = \dfrac{y - 4}{-2} = \dfrac{z}{3}$; б) $\begin{cases} x + 3y + z + 1 = 0, \\ 2x - y - z + 2 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 1 - 4t, \\ z = 2t. \end{cases}$

40. Записати рівняння площини, що проходить через пряму та точку M:

а) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{3}$, $\quad M\,(0;-1;2)$;

б) $\dfrac{x+5}{-3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+1}{1}$, $\quad M\,(2;3;-2)$;

в) $\begin{cases} x+y-2z+1=0, \\ 2x+5y+z+2=0, \end{cases}$ $\quad M\,(4;0;1)$;

г) $\begin{cases} x=-2+3t, \\ y=1-4t, \\ z=2t, \end{cases}$ $\quad M\,(-3;3;0)$.

41. Знайти точку перетину прямої та площини і визначити кут між ними, якщо:

а) $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$, $\quad 4x-y-2z+2=0$;

б) $\begin{cases} x=2-3t, \\ y=1+t, \\ z=-3+2t, \end{cases}$ $\quad x+y-2z+3=0$;

в) $\begin{cases} x-y+4z-2=0, \\ 3x+y-z-1=0, \end{cases}$ $\quad x-2y+4z+13=0$.

42. Знайти координати точки N, симетричної точці M відносно площини:

а) $M\,(1;1;3)$, $\quad 2x-3y+z+3=0$;

б) $M\,(0;0;0)$, $\quad 3x+y-5z+1=0$;

в) $M\,(3;-2;1)$, $\quad 4x-5y+2z+3=0$;

г) $M\,(2;-1;0)$, $\quad x-5y+2z+4=0$.

43. Знайти координати проекції точки M на площину:

а) $M\,(2;-3;0)$, $\quad x-3y+2z+1=0$;

б) $M\,(3;-4;0)$, $\quad 4x+3y-z+2=0$;

в) $M\,(-1;-2;3)$, $\quad x-y+z+-2=0$;

г) $M\,(-1;0;0)$, $\quad -3x-y+2z-4=0$.

44. Визначити, при яких значеннях A і D пряма

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{2}$$

лежить на площині $Ax+4y-3z+D=0$.

45. Записати рівняння площини, яка проходить через паралельні прямі:

а) $\dfrac{x+3}{-6}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-2}{-2}, \quad \dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z}{-2};$

б) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{-2}, \quad \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{-2};$

в) $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{-2}, \quad \dfrac{x}{3}=\dfrac{y+6}{1}=\dfrac{z-3}{-2}.$

Розділ 4

ФУНКЦІЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

§ 4.1. ФУНКЦІЇ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

Нехай задано дві непорожні множини X і Y. Якщо кожному елементу $x \in X$ за певним правилом ставиться у відповідність єдиний елемент $y \in Y$, то кажуть, що на множині X задано *функцію* f (відображення f множини X у множину Y). При цьому записують $y = f(x)$ $(x \in X,\ y \in Y)$ або $f : X \longrightarrow Y$. Елемент $x \in X$ називають *аргументом* (незалежною змінною) функції f, елемент $y \in Y$ — *значенням функції* в точці x, або *залежною змінною*. Зазвичай функцію позначають f.

Множину X називають *областю визначення функції* f і позначають $D(f)$, а множину всіх елементів $y \in Y$, для яких $y = f(x)$, $x \in X$, — *множиною значень функції* f і позначають $E(f)$.

Якщо $D(f)$ та $E(f)$ належать до множини R дійсних чисел, то функцію f називають *функцією однієї змінної*. Розглянемо саме такі функції.

Прикладом такої функції можна вважати *абсолютну величину (модуль)* дійсного числа x:

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Геометрично $|x|$ — це відстань від точки x числової прямої до точки 0.

У найпростіших випадках областю визначення функції $y = f(x)$ вважається:

відрізок $[a;\, b]$ (тобто $a \le x \le b$);

інтервал скінченний $(a;\, b)$ (тобто $a < x < b$) або нескінченні $(-\infty;\, b)$ (тобто $-\infty < x < b$) та $(a;\, +\infty)$ (тобто $a < x < +\infty$);

півінтервал скінченний $(a;\, b]$ (тобто $a < x \le b$) або нескінченний $(-\infty;\, b]$ (тобто $-\infty < x \le b$);

піввідрізок скінченний $[a;\, b)$ (тобто $a \le x < b$) або нескінченний $[a;\, +\infty)$ (тобто $a \le x < +\infty$);

сукупність зазначених проміжків.

Основні способи задання функції:

1) *аналітичний* (за допомогою однієї або кількох формул);

2) *графічний* (за допомогою кривої, що є графіком функції);

3) *табличний* (за допомогою таблиці, де наведено певні значення аргументу та відповідні значення функції).

Якщо функцію $y = f(x)$ задано аналітично (за допомогою формули) і нічого не сказано про її область визначення, то вважають, що $D(f)$ — це така множина точок x, при яких задана формула має зміст.

Графіком функції $y = f(x)$ називають множину точок $(x;\, f(x))$ площини XOY, де $x \in D(f)$.

Обернена функція. Якщо кожному значенню $y \in E(f)$ заданої функції f поставити у відповідність єдине значення $x \in D(f)$, при якому $y = f(x)$, то дістанемо функцію $x = f^{-1}(y)$, $y \in E(f)$, $x \in D(f)$, яку називають *оберненою* до функції f. Для зручності обернену функцію записують у вигляді $y = f^{-1}(x)$.

Отже, для знаходження оберненої функції достатньо розв'язати рівняння $y = f(x)$ відносно невідомого x та поміняти місцями змінні x і y.

Складна функція. Нехай функція $z = \varphi(x)$ має множину значень $E(\varphi)$, а функція $y = f(z)$ — область визначення $D(f)$, причому $E(\varphi) \subset D(f)$. Тоді функцію $y = f(\varphi(x))$ називають *складною функцією* від змінної x, або суперпозицією (композицією) функцій f і φ. При цьому функцію f називають *зовнішньою* функцією складної функції $y = f(\varphi(x))$, а φ — її *внутрішньою* функцією.

Основні елементарні функції:

1) *стала* $y = C$, $C = \mathrm{const}$; $D(C) = R$;

2) *степенева* $y = x^{\alpha}$, де α — фіксоване число; $D(x^n) = R$, якщо $\alpha = n \in N$;

3) *показникова* $y = a^x$, $0 < a \neq 1$, де a — фіксоване число; $D(a^x) = R$;

4) *логарифмічна* $y = \log_a x$, $0 < a \neq 1$, де a — фіксоване; ця функція є оберненою до показникової; $D(\log_a x) = (0; +\infty)$;

5) *тригонометричні* $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

$D(\cos) = D(\sin) = R$,

$D(\operatorname{tg}) = \left\{x : x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in Z\right\}$,

$D(\operatorname{ctg}) = \{x : x \in (k\pi;\ (k+1)\pi),\ k \in Z\}$;

6) *обернені тригонометричні* $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$; $D(\arccos) = D(\arcsin) = [-1; 1]$, $D(\operatorname{arctg}) = D(\operatorname{arcctg}) = R$.

З основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій та операцій суперпозиції утворюють функції, які називають *елементарними.*

Серед елементарних функцій розрізняють такі класи:

- *многочлени* (*цілі раціональні функції*) — це функції вигляду

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — фіксовані числа (*коефіцієнти многочлена* $P(x)$),

$P(x)$ є *многочленом степеня* n, якщо $a_n \neq 0$;

- *раціональні* (*дробово-раціональні) функції* — це функції вигляду

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

де $P(x)$, $Q(x)$ — многочлени, причому $Q(x) \not\equiv 0$;

- *ірраціональні функції* — це функції, що не є раціональними;
- *алгебраїчні функції* $y = f(x)$, що є розв'язками рівняння

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + ... + a_n y^n = 0,$$

коефіцієнти якого є цілими раціональними функціями;

- *трансцендентні функції* — це функції, які не є алгебраїчними.

Зауважимо, що всі тригонометричні, обернені тригонометричні, показникова і логарифмічна функції є трансцендентними.

Прикладом неелементарної функції можна вважати

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x+1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Обмежені функції. Функцію $y = f(x)$ називають обмеженою, якщо існує таке число $M > 0$, що для будь-якого $x \in D(f)$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$. Функцію називають *обмеженою зверху (знизу)*, якщо існує таке число M (m), що для будь-якого $x \in D(f)$ виконується нерівність $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq m)$.

Наприклад, функція $y = x^2$ є обмеженою знизу, функція $y = \cos x$ — обмеженою, а функція $y = \operatorname{tg} x$ — необмеженою.

Монотонні функції. Функція $y = f(x)$ є *монотонною*, тобто: 1) *зростаючою*; 2) *спадною*; 3) *незростаючою*; 4) *неспадною*, якщо для всіх $x_1, x_2 \in D(f)$ з нерівності $x_1 < x_2$ випливають нерівності відповідно 1) $f(x_1) < f(x_2)$; 2) $f(x_1) > f(x_2)$; 3) $f(x_1) \geq f(x_2)$; 4) $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Зростаючу та спадну функції називають ще *строго монотонними*.

Парні (непарні) функції. Функцію $y = f(x)$ називають *парною (непарною)*, якщо для будь-якого $x \in D(f)$ виконуються умови: 1) $(-x) \in D(f)$; 2) $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат, а графік парної — відносно осі OY.

Періодичні функції. Функцію $y = f(x)$ називають *періодичною*, якщо існує число $T \neq 0$ (період) таке, що для будь-якого $x \in D(f)$: $x + T \in D(f)$ і $f(x+T) = f(x)$.

Найчастіше під періодом функції f розуміють її найменший додатний період (*основний*).

Зразки розв'язування вправ

1. Знайти область визначення функції:

а) $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$; б) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$;

в) $y = \ln(9 - x^2)$; г) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}} + \arcsin \dfrac{x-2}{x}$.

Розв'язання. а) Функція визначена на всій множині дійсних чисел, крім тих значень x, коли $x^2 - 5x + 6 = 0$. Розв'язуючи останнє рівняння, дістаємо $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Отже, областю визначення заданої функції є множина $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

б) Підкореневий вираз має бути невід'ємним, тобто $x^2 - 2x + 3 \geq$ ≥ 0. Ця нерівність виконується для всіх дійсних чисел, оскільки для рівняння $x^2 - 2x + 3 = 0$ дискримінант $D > 0$. Отже, $D(f) =$ $= (-\infty; +\infty)$.

в) Вираз під знаком логарифма має бути додатним, тобто $9 - x^2 > 0$. Розв'язуючи цю нерівність, дістаємо $|x| < 3$, тобто $D(f) = (-3; 3)$.

г) Маємо суму двох функцій $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x}}$ і $f_2(x) =$ $= \arcsin \dfrac{x - 2}{x} \cdot$ Тому одночасно мають виконуватись умови

$$4 - x > 0 \quad \text{і} \quad \left| \frac{x - 2}{x} \right| \leq 1.$$

Перша нерівність має розв'язок $x < 4$, а другу можна записати у вигляді $|x - 2| \leq |x|$, $x \neq 0$.

Для того щоб розв'язати останню нерівність, розглянемо значення x, при яких вирази, записані під знаком модуля, дорівнюють нулю. Маємо $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$. Розбивши цими точками числову пряму на три проміжки $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $[2; +\infty)$, розглянемо нерівність на кожному з них.

При $x \in (-\infty; 0)$ нерівність матиме вигляд $-(x-2) \leq -x$, тобто не матиме розв'язку.

Якщо $x \in (0; 2)$, то нерівність запишеться так: $-(x - 2) \leq x$, звідки $x \geq 1$. Ураховуючи проміжок $(0; 2)$, на якому було розглянуто нерівність, дістанемо $x \in [1; 2)$.

Для $x \in [2; +\infty)$ нерівність матиме вигляд $x - 2 \leq x$, що справедливо для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Отже, на вказаному проміжку $x \in [2; +\infty)$.

Об'єднавши одержані розв'язки нерівності $|x - 2| \leq |x|$, дістанемо $x \in [1; +\infty)$.

Остаточно маємо $D(f) = (-\infty; 4) \cap [1; +\infty) = [1; 4)$.

2. Знайти множину значень функції $y = \dfrac{1}{2+\sin 3x}$.

Розв'язання. Ураховуючи, що $-1 \le \sin 3x \le 1 \;\Leftrightarrow\; 1 \le 2 + {}$ $+ \sin 3x \le 3 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{2+\sin 3x} \le 1$, дістаємо $1/3 \le y \le 1$. Отже, $E(f) = [1/3;\, 1]$.

3. Дослідити на обмеженість функцію $y = \dfrac{1}{1+x^4}$.

Розв'язання. Оскільки для всіх дійсних чисел $x^4 \ge 0$, то $1+x^4 \ge 1$, звідки $0 < \dfrac{1}{1+x^4} \le 1$. Отже, $\left|\dfrac{1}{1+x^4}\right| \le 1$, $\forall x \in R$, тобто задана функція є обмеженою.

4. Дослідити функцію на монотонність:

а) $f(x) = x$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Розв'язання. а) Задана функція визначена на всій числовій прямій. Якщо $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$, тобто функція є зростаючою на проміжку $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

б) Областю визначення заданої функції є $D(f) = (-\infty;\, 0) \cup$ $\cup (0;\, +\infty)$. Якщо $0 < x_1 < x_2$, то $1/x_1^3 > 1/x_2^3$, тобто функція є спадною на інтервалі $(0;\, +\infty)$. При $x_1 < x_2 < 0$ так само маємо $1/x_1^3 > 1/x_2^3$, тому функція є спадною також на інтервалі $(-\infty;\, 0)$. Проте на множині $(-\infty;\, 0) \cup (0;\, +\infty)$ задана функція не є монотонною, оскільки при $x_1 < 0 < x_2$ маємо $1/x_1^3 < 1/x_2^3$.

5. Дослідити функцію на парність:

а) $f(x) = x^2 + \cos x$; б) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$;

в) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$; г) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x - x^2}$.

Розв'язання. а) Спочатку перевіряємо, щоб область визначення заданої функції була симетричною відносно точки $x = 0$, а потім визначаємо $f(-x)$ і порівнюємо його з $f(x)$. Задана функція визначена на інтервалі $(-\infty;\, +\infty)$ і $f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x =$ $= f(x)$, тому вона є парною.

б) У цьому разі область визначення $D(f) = (-\infty;\,-1) \cap (-1;\,1) \cap \cap (1;\,+\infty)$ симетрична відносно нуля. Оскільки $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x}{x^2 - 1} = -f(x)$, то функція є непарною.

в) Для заданої функції $D(f) = (-\infty;\,+\infty)$, але $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$. Отже, функція ні парна, ні непарна.

г) Область визначення заданої функції $D(f) = (-\infty;\,0) \cap (0;\,1) \cap \cap (1;\,+\infty)$ не є симетричною відносно нуля, тому функція ні парна, ні непарна.

6. Нехай функція $y = f(x)$ є періодичною з періодом T. Довести, що функція $y = f(ax + b)$, $a \neq 0$ має період T/a.

Розв'язання. Оскільки T є періодом функції $y = f(x)$, то

$$f(a\,(x + T/a) + b) = f(ax + T + b) = f((ax + b) + T) = f(ax + b).$$

Можна показати, що число T/a є основним періодом функції $y = f(ax + b)$, коли T — основний період функції $y = f(x)$ і $a > 0$.

7. Дослідити на періодичність і знайти основний період функції:

а) $y = \sin(2x + 1)$; б) $y = \{x\}$; в) $y = x^3$.

Розв'язання. а) Оскільки період функції $y = \sin x$ дорівнює 2π, то згідно з вправою 6 основний період заданої функції $T = 2\pi/2 = \pi$.

б) Функція $y = \{x\}$ кожному дійсному числу x ставить у відповідність його дробову частину. Оскільки будь-які два числа з однаковою дробовою частиною відрізняються на ціле число, то основним періодом є число $T = 1$.

в) Задана функція не є періодичною, оскільки для будь-якого фіксованого $T \neq 0$ рівність $(x + T)^3 = x^3$ неможлива, наприклад для $x = 0$.

8. Фермерське господарство реалізує яловичину вартістю 9 грн за кілограм. Визначити функцію, що виражає дохід від продажу яловичини. Яку кількість яловичини треба продати, щоб дохід становив 11340 грн? Як зміниться дохід, якщо продаж яловичини збільшиться на 800 кг?

Розв'язання. Очевидно, що дохід від реалізації продукції виражається функцією $D = S\,x$, де S — вартість одиниці продукції; x — обсяг реалізованої продукції. Отже, функція доходу від продажу яловичини має вигляд $D = 9x$. Для одержання доходу, що становитиме 11340 грн, треба продати $x = 11340/9 = 1260$ кг яловичини. Якщо продаж яловичини збільшиться на $\Delta x = 800$ кг, то дохід збільшиться на $\Delta V = 9\Delta x = 9 \cdot 800 = 7200$ грн.

9. Щоденні фіксовані витрати їдальні становлять 500 грн, а змінні витрати на приготування одного комплексного обіду — 5 грн. Записати функцію загальних витрат щоденної роботи їдальні. Визначити загальні витрати для щоденного приготування 200 комплексних обідів.

Розв'язання. Очевидно, що загальні витрати на виробництво продукції дорівнюють сумі фіксованих витрат (оренда приміщення, сплата податків тощо) та змінних витрат (використана сировина, оплата праці), тобто виражаються функцією $V = c + k\,x$, де c — фіксовані витрати; k — змінні витрати на одиницю продукції; x — обсяг виготовленої продукції. Загальні витрати часто називають загальною собівартістю (собівартістю виробленої продукції). Таким чином, загальні щоденні витрати їдальні на приготування комплексних обідів задаються функцією $V = 500 + 5x$. Отже, для приготування 200 комплексних обідів їдальня витрачає $V = 500 + 5 \cdot 200 = 1500$ грн.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайти область визначення функції:

а) $y = \dfrac{x}{\sqrt{3-x}}$; б) $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-1}$;

в) $y = \dfrac{x+2}{x^2+x-2}$; г) $y = \sqrt{(x+1)(x-2)}$;

д) $y = \log_a(x-5)$; е) $y = \ln \dfrac{x}{x-1}$;

є) $y = \sqrt{\cos x}$; ж) $y = \operatorname{tg} 2x$.

2. Для функції $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x \le 2, \\ \sin x, & 2 < x \le 4 \end{cases}$

обчислити $f(0)$, $f(\pi)$, $f(3/2)$, $f(2\pi)$.

3. Дослідити функцію на обмеженість:

а) $f(x) = -x^2 + 2$; б) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^4}$;

в) $f(x) = 1/x^3, \quad x \in (0;\, 1)$.

4. Дослідити функцію на монотонність:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = x^2 + 1$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; г) $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x < 0, \\ 3, & x \geq 0. \end{cases}$

5. Дослідити функцію на парність:

а) $f(x) = x^4 + 3$; б) $f(x) = 2x^3 - x$; в) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

г) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$; д) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$; е) $f(x) = \sin^2 x + x$.

6. Дослідити на періодичність і визначити основні періоди функцій:

а) $f(x) = \cos(3x - 4)$; б) $f(x) = \sin \pi x$;

в) $f(x) = \mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$; г) $f(x) = (x-1)^2$.

7. Кондитерська фабрика реалізує шоколад у плитках вартістю 12 грн за кілограм, причому обсяг щоденного виробництва шоколаду не перевищує 150 кг. Записати функцію, що виражає щоденний дохід від продажу шоколаду, і знайти її область визначення. Обчислити, наскільки збільшиться дохід, якщо кількість проданого шоколаду збільшиться на 65 кг.

8. Залежність витрат y на купівлю молочної продукції від щомісячного доходу x (грн.) сім'ї виражається функцією $y = 0{,}3x - 36$, $120 \leq x \leq 1500$. Визначити, який дохід повинна мати сім'я щомісяця для того, щоб витрачати на придбання молочної продукції 120 грн. Скільки сім'я витрачатиме на купівлю молочної продукції, маючи дохід 1300 грн?

§ 4.2. ПОСЛІДОВНІСТЬ. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

Послідовність — це функція $y = f(n)$, визначена на множині N натуральних чисел. При цьому елемент $f(n)$ називають n-м (або *загальним) членом* послідовності та позначають x_n. Послідовність задають загальним членом і позначають (x_n) або задають переліком її перших членів, тобто $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ Якщо кожний член послідовності $x_n = f(n)$ є числом, то послідовність (x_n) називають *числовою*. Такі послідовності і будемо розглядати.

Властивості послідовностей. Оскільки послідовність (x_n) є числовою функцією, то для неї виконуються властивості функцій.

Послідовність (x_n) є *обмеженою*, *обмеженою зверху*, *обмеженою знизу*, якщо існує таке число M, що для всіх $n \in N$ виконуються нерівності відповідно $|x_n| \leq M$, $x_n \leq M$, $x_n \geq M$.

Послідовність (x_n) є *монотонною*, тобто *зростаючою*, *спадною*, *незростаючою*, *неспадною*, якщо для всіх $n \in N$ (всіх $n > n_0$) виконуються нерівності відповідно $x_{n+1} > x_n$, $x_{n+1} < x_n$, $x_{n+1} \leq x_n$, $x_{n+1} \geq x_n$.

Границя послідовності. Число a називають *границею послідовності* (x_n), якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер n_0 (що залежить від ε), що при всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Границю послідовності позначають $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \to a$, при $n \to \infty$ (x_n прямує до a, коли n прямує до ∞).

Якщо послідовність має скінченну границю, то її називають *збіжною*. У противному разі послідовність називають *розбіжною*.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то починаючи з деякого номера $n > n_0$ усі члени послідовності x_n лежать у довільному околі точки a (*геометричний зміст границі послідовності*).

Нескінченно малі послідовності. Послідовність (x_n) називають *нескінченно малою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, тобто $x_n \to 0, n \to \infty$ (x_n прямує до нуля, коли n прямує до ∞). Отже, для нескінченно малої послідовності нерівність $|x_n| < \varepsilon$ (де $\varepsilon > 0$ — довільне число) виконується для всіх номерів n, більших від $n_0(\varepsilon)$.

Всі члени нескінченно малої послідовності починаючи з деякого номера $n > n_0$ лежать у довільному околі точки нуль.

Властивості нескінченно малих послідовностей:

1) сума, різниця і добуток двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю;

2) добуток нескінченно малої послідовності на обмежену послідовність є нескінченно малою послідовністю.

Нескінченно великі послідовності. Послідовність (x_n) називають *нескінченно великою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, тобто $x_n \to \infty$, $n \to \infty$ (x_n прямує до ∞, коли n прямує до ∞). Отже, для нескінченно великої послідовності нерівність $|x_n| > \varepsilon$ (де $\varepsilon > 0$ — довільне число) виконується для всіх номерів n, більших від $n_0(\varepsilon)$.

Послідовність (x_n) є нескінченно великою тоді й тільки тоді, коли послідовність $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ нескінченно мала (властивість про *зв'язок нескінченно великої і нескінченно малої послідовностей*).

Наприклад, послідовність (n) є нескінченно великою, а послідовність $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ — нескінченно малою.

Властивості збіжних послідовностей:

1) кожна збіжна послідовність має єдину границю;

2) кожна збіжна послідовність є обмеженою;

3) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b; \quad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, \ b \neq 0;$$

4) якщо $x_n \le y_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $a \le b$ (граничний перехід у нерівностях);

5) якщо $x_n \le z_n \le y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ (границя проміжної змінної).

Кожна монотонна і обмежена послідовність (x_n) є збіжною (*збіжність монотонної послідовності*).

Відомо, що послідовність із загальним членом $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \in N$ є монотонною й обмеженою і тому збіжною. Границю цієї послідовності позначають e, тобто

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{4.1}$$

Число $e \approx 2,718$ ірраціональне. Логарифм числа $x > 0$ за основою e називають *натуральним логарифмом* і позначають $\ln x$.

Зразки розв'язування вправ

1. Записати чотири перших члени послідовності (x_n), якщо:

$$\text{а) } x_n = \frac{1}{n(n+1)}; \quad \text{б) } x_n = \frac{n!}{3^n}; \quad \text{в) } x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Розв'язання. Надаючи n послідовно значень 1, 2, 3 і 4, дістаємо:

$$\text{а) } x_1 = \frac{1}{2}, \ \ x_2 = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}, \quad x_3 = \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}, \quad x_4 = \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{1}{20};$$

б) ураховуючи, що $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ (функція n *факторіал* — це добуток перших n натуральних чисел), дістаємо

$$x_1 = \frac{1}{3}, \ \ x_2 = \frac{1\cdot 2}{3^2} = \frac{2}{9}, \ \ x_3 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3} = \frac{2}{9}, \ \ x_4 = \frac{8}{27};$$

$$\text{в) } x_1 = \frac{-1}{1} = -1, \ \ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \ \ x_4 = \frac{1}{2}.$$

2. Записати одну з формул для загального члена послідовності, якщо відомо її перші чотири члени:

$$\text{а) } \frac{1}{2}, \ \ \frac{3}{4}, \ \ \frac{5}{8}, \ \ \frac{7}{16}; \quad \text{б) } \frac{3}{4}, \ \ \frac{4}{9}, \ \ \frac{5}{16}, \ \ \frac{6}{25}.$$

Розв'язання. а) Чисельники дробів утворюють послідовність непарних чисел $(2n-1)$, а знаменники є степенями числа 2, тобто утворюють послідовність (2^n). Тому $x_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

б) Чисельники дробів утворюють послідовність натуральних чисел починаючи з 3, що на 2 одиниці більше номера члена послідовності, а знаменник кожного члена послідовності дорівнює квадрату числа, що на одиницю більше номера цього члена. Отже, $x_n = \dfrac{n+2}{(n+1)^2}$.

3. Довести обмеженість послідовності $x_n = (-1)^n \sin n\pi$.

Розв'язання. Оскільки $|x_n| = |(-1)^n \sin n\pi| \le 1$ для всіх $n \in N$, то (x_n) — обмежена послідовність.

4. Довести, що послідовність $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$ зростає.

Розв'язання. Запишемо $x_n = \dfrac{n-1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n}$. Аналогічно $x_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{(n+1)-1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Оскільки $n+1 > n$, то $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, звідки $x_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} > 1 - \dfrac{1}{n} = x_n$ для всіх $n \in N$. Отже, послідовність (x_n) є зростаючою.

5. Обчислити границю

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+5}{3n^2-2n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-n^3}{n^2+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^2-5}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$; д) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\sin n\right)$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{2n-1}$; є) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

Розв'язання. а) У цьому випадку чисельник і знаменник мають нескінченні границі, тобто є нескінченно великими послідовностями, і тому використати властивість про границю частки не можна. Перетворимо дріб, поділивши чисельник і знаменник на n^2 (найвищий степінь n):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+5}{3n^2-2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{5}{n^2}}{3 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}}\cdot$$

Оскільки при $n \to \infty$ маємо $\dfrac{1}{n} \to 0$, $\dfrac{2}{n} \to 0$, $\dfrac{5}{n^2} \to 0$, $\dfrac{1}{n^2} \to 0$, то згідно з властивістю про суму і добуток збіжних послідовностей границя чисельника дорівнює одиниці, а границя знаменника — 3. Згідно з властивістю границі частки дістаємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+5}{3n^2-2n+1} = \frac{1}{3}\cdot$$

б) Поділимо чисельник і знаменник дробу на найвищий степінь n виразу, що стоїть у знаменнику, тобто на n^2, а потім скористаємось властивістю про границю суми і частки.

Оскільки при $n \to \infty$ маємо $\dfrac{5}{n^2} \to 0$, $-n \to -\infty$, $\dfrac{1}{n} \to 0$, $\dfrac{1}{n^2} \to 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5-n^3}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{5}{n^2} - n}{1+\dfrac{1}{n^2}} = \frac{0-\infty}{1+0} = -\infty.$$

в) Аналогічно попередньому випадку поділимо чисельник і знаменник дробу на n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2}{n}}{1-\dfrac{5}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

г) У цьому випадку маємо різницю двох нескінченно великих послідовностей. Позбавимося ірраціональності, помноживши чисельник і знаменник (вважаємо, що знаменник дорівнює одиниці) на вираз $(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})$. Згідно з властивістю про зв'язок нескінченно великої і нескінченно малої послідовностей маємо

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3+n}+\sqrt{2+n}} = 0.$$

д) Скористаємось властивістю про суму двох нескінченно малих послідовностей. Оскільки перший доданок $(1/n)$ є нескінченно малою послідовністю, а другий — добутком нескінченно малої послідовності $(1/n^2)$ на обмежену послідовність $(\sin n)$, то задана послідовність також є нескінченно малою, тобто шукана границя дорівнює нулю.

е) Поділивши чисельник і знаменник дробу, записаного в дужках, на n і скориставшись властивостями степеня, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{4}}{\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = \frac{e^4}{e^2}\cdot 1 = e^2.$$

При цьому було використано властивість про границі добутку, частки і формулу (4.1).

є) Ураховуючи, що $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, визначаємо

$$x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

6. Вкладник вніс 2000 грн на власний пенсійний рахунок у банку, який виплачує 10 % річних. Визначити, яким буде розмір вкладу через рік і п'ять років. Яка сума буде на рахунку через рік, якщо кожного місяця вкладник забирає і знову вносить вклад? Визначити, яким буде розмір вкладу через рік при неперервному нарахуванні процентів.

Розв'язання. Нехай a — початковий вклад у банк, p — річний процент, a_t — сума вкладу через t років. Очевидно, що через рік сума вкладу становитиме

$$a_1 = a + a\frac{p}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

через два роки

$$a_2 = a_1 + a_1\frac{p}{100} = a_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2, \dots,$$

через t років $a_t = a\,(1 + p/100)^t$.

Отже, за умовою вправи

$$a_1 = 2000\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 2200 \text{ грн},$$

$$a_5 = 2000\left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 = 2000 \cdot 1,6105 = 3221 \text{ грн}.$$

Якщо вкладник забирає і одразу вносить вклад n разів на рік через однаковий проміжок часу, то банк нараховує проценти n разів на рік (при такому самому щорічному прирості p). Тоді процент, нарахований за n-ту частину року, становить p/n, а розмір вкладу за t років при nt нарахуваннях становитиме

$$a_{t/n} = a\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt}.$$

Якщо кожного місяця вкладник забирає і знову вносить вклад, то через рік розмір вкладу становитиме $a_{1/12} = 2000(1 + 1/120)^{12} = 2209,34$. Помічаємо, що $a_{1/12} > a_1$. Виявляється, що вигідніше якомога частіше забирати і знову вносити вклад.

Нехай проценти нараховуються неперервно, тобто кількість частин n, на які поділяється рік, необмежено зростає $(n \to \infty)$. У цьому випадку розмір вкладу через t років становитиме (див. формулу (4.1))

$$A_t = \lim_{n\to\infty} a\left(1+\frac{p}{100\,n}\right)^{nt} = a\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{p/100}{n}\right)^{n}\right)^{t} =$$

$$= a\left(e^{\frac{p}{100}}\right)^{t} = a\,e^{\frac{pt}{100}}.$$

Звідси випливає *формула неперервного нарахування процентів:*

$$A_t = a\,e^{\frac{pt}{100}}.$$

Отже, при неперервному нарахуванні процентів через рік сума вкладу становитиме $A_1 = 2000\,e^{\frac{10}{100}} = 2000\,e^{0,1} = 2210,34$ грн. Очевидно, що $A_1 > a_{1/12} > a_1$.

Зауважимо, що у практичних фінансових операціях неперервне нарахування процентів застосовують рідко, проте його використовують для аналізу фінансових проблем.

Якщо у формулі неперервного нарахування процентів ввести позначення $k = \dfrac{p}{100}$, то дістанемо формулу $A_t = ae^{kt}$, яка виражає неперервний *закон зростання* $(k > 0)$ або *спадання* $(k < 0)$.

Завдання для самостійного розв'язування

9. Записати чотири перших члени послідовності:

а) $\left(\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right)$; б) $\left(\dfrac{2^n}{n^3}\right)$; в) $\left(\dfrac{n^2-1}{n!}\right)$; г) $\left(\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

10. Записати одну з можливих формул для загального члена послідовності, якщо відомо кілька перших її членів:

а) $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{6},\ \dfrac{5}{7}$; б) $1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0$;

в) $\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{4},\ \dfrac{27}{6},\ \dfrac{81}{8},\ \dfrac{243}{10}$; г) $\dfrac{1}{1\cdot 3},\ \dfrac{1}{3\cdot 5},\ \dfrac{1}{5\cdot 7},\ \dfrac{1}{7\cdot 9}$.

11. Довести обмеженість послідовності:

а) $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$; б) $\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)$; в) $((-1)^n)$.

12. Довести, що послідовність (x_n) спадає, якщо:

а) $x_n = \dfrac{n+2}{n+1}$; б) $x_n = \dfrac{n^2+1}{n^2}$.

13. Довести, що послідовність (x_n) зростає, якщо:
а) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$; б) $x_n = \dfrac{2n+1}{3n+2}$.

14. Обчислити границю послідовності:

1) $\left(\dfrac{3n+1}{2n+3}\right)$; 2) $\left(\dfrac{n+5}{1-n}\right)$; 3) $\left(\dfrac{n^2-2n}{(n+1)(n+2)}\right)$;

4) $\left(\dfrac{n^2(n-1)}{4n^3+1}\right)$; 5) $\left(\dfrac{5n}{n^2-1}\right)$; 6) $\left(\dfrac{n^3}{3n^2-4}\right)$;

7) $\left(\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{n}{3n^2+1}\right)$; 8) $\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+1}\right)$;

9) $\left(\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$; 10) $\left(\dfrac{3n-2}{\sqrt{4n^4+1}}\right)$; 11) $\left(\dfrac{\sqrt{n^3+1}}{n+2}\right)$;

12) $(\sqrt{2+n} - \sqrt{3+n})$; 13) $(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$;

14) $\left(\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n}\right)$; 15) $\left(\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{3n+2}\right)$;

16) $\left(\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{4n-1}\right)$; 17) $\left(\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2}{2}}\right)$.

15. Вкладник вніс 5000 грн на власний рахунок у банку, який виплачує 12 % річних. Визначити, яким буде розмір вкладу через три роки. Яким був би розмір вкладу через три роки при неперервному нарахуванні процентів?

16. Визначити, який початковий вклад мають зробити батьки на рахунок своєї дитини в день її народження для того, щоб в день її 18-річчя він становив 10000 грн. Відомо, що банк виплачує за цим рахунком 8 % річних, які нараховуються кожні півроку.

§ 4.3. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині X, яка містить деякий окіл точки x_0, крім, можливо, безпосередньо точки x_0. Нагадаємо, що *околом (δ-околом)* точки x_0 називають інтервал $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$.

Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ у точці x_0, якщо нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ виконується для всіх точок $x \in X$, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, де $\varepsilon > 0$ — довільне число, $\delta > 0$ залежить від ε. Границю функції в точці x_0 позначають $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ або $f(x) \to A,\ x \to x_0$ ($f(x)$ прямує до A, коли x прямує до x_0).

Зауважимо, що точка x_0 може бути як скінченною, так і нескінченно віддаленою. В останньому випадку границю позначають $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ або $f(x) \to A,\ x \to \infty$.

Якщо функція f визначена в лівому околі точки x_0, тобто $X = (x_0 - \delta;\ x_0)$, число A називають *лівою границею* функції в точці x_0 і позначають $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ або $f(x_0 - 0)$. Аналогічно якщо $X = (x_0;\ x_0 + \delta)$, то число A називають *правою границею* функції в точці x_0 і позначають $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ або $f(x_0+0)$. Праву і ліву границі називають *односторонніми*.

Якщо односторонні границі існують і дорівнюють одна одній, то існує границя функції f у точці x_0, і навпаки. Якщо функція f має границю в точці x_0, то ця границя єдина.

Основні теореми про границі. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$, що визначені на X, мають скінченні границі в точці x_0, то:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, зокрема, сталий множник можна виносити за знак границі, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} (Cf(x)) = C \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$, якщо $f(x)<g(x)$, $x\in X$;

5) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$ і $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$, $x\in X$, то $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$;

6) якщо існують $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$ і $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$, то границя складної функції

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=A.$$

При розв'язуванні задач часто використовують *важливі границі*:

1) *першу* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

2) *другу* $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$;

3) *інші*

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}\cdot$$

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, то функцію f називають *нескінченно малою* в точці x_0.

Властивості нескінченно малих функцій: 1) сума, різниця і добуток двох нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією; 2) добуток нескінченно малої функції на обмежену є нескінченно малою функцією.

Функція $y=f(x)$ має границю A у точці x_0 тоді й тільки тоді, коли її можна подати у вигляді суми $f(x)=A+\alpha(x)$, де $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція (у точці x_0) (*зв'язок границі функції з нескінченно малою функцією*).

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то функцію f називають *нескінченно великою* в точці x_0.

Нескінченно малі (нескінченно великі) у точці x_0 функції f і g називають *еквівалентними*, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. При цьому записують $f(x)\sim g(x)$, $x\to x_0$.

Ураховуючи важливі границі, дістаємо основні еквівалентності при $x\to 0$:

$$\sin x\sim x,\ \ a^x-1\sim x\ln a,\ \ e^x-1\sim x,\ \ \ln(1+x)\sim x,\ \ 1+x)^\alpha-1\sim \alpha x.$$

При обчисленні границі $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ нескінченно малі (нескінченно великі) функції f і g можна замінювати еквівалентними функціями f_1 і g_1, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, якщо $f(x)\sim f_1(x)$, $g(x)\sim$ $\sim g_1(x)$ при $x\to x_0$.

Обчислюючи границю відношення двох нескінченно малих (нескінченно великих) функцій, кажуть, що треба розкрити невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Зразки розв'язування вправ

1. Обчислити границю функції:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+4}{\sqrt{x+7}};\quad \text{б)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2};\quad \text{в)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2};$$

$$\text{г)}\ \lim_{x\to \infty}\frac{x^2-2}{4x^2+3x};\quad \text{д)}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{1-3x};\quad \text{е)}\ \lim_{x\to \infty}\frac{\sin x}{x};$$

$$\text{є)}\ \lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x});\quad \text{ж)}\ \lim_{x\to \infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{3x-2}.$$

Розв'язання. а) Застосовуючи теореми про суму, добуток і частку границь, дістаємо

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+4}{\sqrt{x+7}}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}4}{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+7}}=\frac{2^2-2+4}{\sqrt{9}}=\frac{6}{3}=2.$$

б) Обчислимо спочатку границі чисельника і знаменника: $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x-2)=0$. Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Для її розкриття розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники та скоротимо на вираз $(x-1)$. Таке скорочення можливе, оскільки вираз $(x-1)$ не перетворюється на нуль (за означенням границі $x\to 1$, але $x\neq 1$). Отже,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{x+2}=\frac{2}{3}\cdot$$

в) У цьому випадку так само маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$, оскільки $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$. Виконаємо перетворення в чисельнику $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$ і використаємо першу важливу границю у вигляді $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x/2)}{x/2}$. Дістаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}}{4\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{2}}=\frac{2}{4}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Можна обчислити задану границю простіше, скориставшись еквівалентністю нескінченно малих функцій. Оскільки $\sin x/2\sim$ $\sim x/2,\ x\to 0$, то $\sin^2 x/2\sim x^2/4,\ x\to 0$, тобто

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x/2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2/4}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

г) Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Для її розкриття поділимо чисельник і знаменник дробу на $x^2 \neq 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{4x^2+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-2/x^2}{4+3/x} = \frac{1-0}{4+0} = \frac{1}{4}\,.$$

д) Вважатимемо, що $x > 0$, оскільки $x \to +\infty$. Тоді $|x| = x$, звідки

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{1-3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+4/x^2}}{x(1/x-3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+4/x^2}}{1/x-3} = -\frac{1}{3}.$$

е) Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ не існує, то використати теореми про частку границь не можна. У цьому випадку скористаємось властивістю про добуток нескінченно малої функції $1/x$ на обмежену $\sin x$ і дістанемо $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} \sin x = 0.$

є) Маємо різницю двох нескінченно великих функцій (кажуть, що маємо невизначеність типу $\infty - \infty$). Позбудемося ірраціональності в чисельнику дробу, вважаючи, що знаменник дорівнює одиниці. Для цього помножимо та поділимо цей дріб на вираз $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}$ (дістанемо невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$). Тоді

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\,(\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1-1/x})} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

ж) При обчисленні подібних границь виконуємо перетворення, які приводять до другої важливої границі (у цьому випадку кажуть, що маємо невизначеність 1^∞).

Виконаємо такі перетворення:

$$\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{3x-2} = \left(\frac{(x+2)-1}{x+2}\right)^{3x-2} = \left(1-\frac{1}{x+2}\right)^{3x-2} =$$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{-(x+2)}\right)^{-(x+2)}\right)^{\frac{3x-2}{-(x+2)}}.$$

Ураховуючи другу важливу границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$, теорему про границю складної функції та рівність $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2}{-(x+2)} = -3$, дістаємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{3x-2} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-(x+2)}\right)^{-(x+2)}\right)^{\frac{3x-2}{-(x+2)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-2}{-(x+2)}} = e^{-3}.$$

2. Визначити праву та ліву границі функції f у точці x_0:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2x-1, & 1 < x \le 2, \end{cases}$ $x_0 = 1$;

б) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $x_0 = 2$.

Розв'язання. а) Функція визначена на відрізку $[0;\,2]$. Для обчислення лівої границі в точці $x_0 = 1$ треба розглядати значення аргументу, де $x < 1$. Тоді $f(x) = x^2$ і $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} x^2 = 1$. Для обчислення правої границі розглядаємо $x > 1$ і тоді $f(x) = 2x-1$. Отже, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0}(2x-1) = 1$.

Оскільки ліва та права границі дорівнюють одна одній, то існує границя $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

б) Маємо $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x}{x-2} = -\infty$, оскільки чисельник дробу прямує до 2, а знаменник є нескінченно малою від'ємною функцією (прямує до нуля зліва); $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{x}{x-2} = +\infty$, бо в цьому випадку знаменник дробу є нескінченно малою додатною функцією (прямує до нуля справа).

Завдання для самостійного розв'язування

17. Обчислити границю:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+2x+3)$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$;

6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-4x-5}$; 7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{7-x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+1)}{x+1}$; 13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{2x^2}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\cos 2x}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x^2}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$; 19) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{4x}}$;

20) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x^2-9}$; 21) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+5}{5x^2+6x}$;

22) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^3}{6x^3+2x+1}$; 23) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2+2x+4}$;

24) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-5}{2x^3+5}$; 25) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+4}}$;

26) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$; 27) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})$;

28) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-5})$; 29) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{6x}$;

30) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x}$; 31) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{2x-6}$;

32) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2}$; 33) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}$; 34) $\lim\limits_{x\to\infty} 3^{\frac{1}{x}}$.

18. Обчислити односторонні границі функції в точці x_0:

а) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $x_0=0$; б) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4}$, $x_0=-2$;

в) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\le 0,\\ x^2-1, & x>0, \end{cases}$ $x_0=0$.

§ 4.4. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Неперервність функції в точці. Функцію f називають *неперервною в точці* x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, тобто виконуються три умови:

1) *функція визначена в точці* x_0 *(*$x_0\in D(f)$*);*
2) *існує скінченна границя функції в точці* x_0*;*
3) *границя функції дорівнює значенню функції в цій точці.*

Розглянемо точку $x\in D(f)$ і назвемо різницю $\Delta x=x-x_0$ приростом аргументу в точці x_0, а різницю $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=$ $=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ — відповідним приростом функції в цій точці. Наведемо означення неперервності мовою приростів: функцію f називають *неперервною в точці* x_0, якщо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$, тобто нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.

Точки розриву та їх класифікація. Точку x_0 називають *точкою розриву* функції f, якщо функція визначена в точках, як завгодно близьких до точки x_0, але не є неперервною в цій точці. При цьому точку x_0 називають:

1) *точкою розриву першого роду*, коли існують скінченні односторонні границі в цій точці. Якщо односторонні границі дорівнюють одна одній (існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$), то x_0 називають точкою *усувного*

розриву (розрив можна усунути, якщо покласти $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$).

І якщо односторонні границі не дорівнюють одна одній, то число $h = f(x_0+0) - f(x_0-0) \neq 0$ називають *стрибком функції* f у точці x_0, а точку x_0 — *точкою стрибкового розриву*;

2) *точкою розриву другого роду*, коли в цій точці принаймні одна з односторонніх границь не існує або є нескінченною.

Нехай функції f і g неперервні в точці x_0. Тоді в цій точці неперервними є функції $f \pm g$, $f\,g$ і f/g (якщо $g(x_0) \neq 0$).

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)\right)$, то функцію f називають *неперервною зліва (справа) у точці* x_0. Функція є неперервною у точці x_0, коли вона неперервна в цій точці і зліва, і справа.

Функція є *неперервною на множині*, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини. Кожна елементарна функція f є неперервною на множині $D(f)$, тобто в кожній точці її області визначення.

Властивості функцій, неперервних на відрізку. Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то:

1) функція обмежена на цьому відрізку (*перша теорема Вейєрштрасса*);

2) функція має на цьому відрізку найменше і найбільше значення, тобто існують такі точки x_1, $x_2 \in [a; b]$, що $f(x_1) = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ і $f(x_2) = \min\limits_{[a;b]} f(x)$ (*друга теорема Вейєрштрасса*);

3) існує точка $x_0 \in (a; b)$, для якої $f(x_0) = 0$, якщо на кінцях відрізка $[a; b]$ функція набуває різних за знаком значень (тобто $f(a)\,f(b) < 0$) (*теорема Больцано — Коші*).

Зразки розв'язування вправ

1. Використовуючи означення, довести неперервність функції f в її області визначення:

а) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$; б) $f(x) = \sin 2x$.

Розв'язання. а) Для заданої функції $D(f) = R$. Доведемо її неперервність у довільній фіксованій точці $x_0 \in R$, а отже, на множині R.

Використовуючи відомі властивості границь, дістаємо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (3x^2 + 2x + 1) = 3x_0^2 + 2x_0 + 1 = f(x_0).$$

Отже, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, тобто функція є неперервною в точці x_0 за означенням.

б) Очевидно, $D(f) = R$. Зафіксуємо довільну точку x_0, надамо аргументу приросту Δx у цій точці та обчислимо відповідний приріст функції $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$:

$$\Delta f(x_0) = \sin(2(x_0 + \Delta x)) - \sin 2x_0 = 2\sin\Delta x\cos(2x_0 + \Delta x)\cdot$$

Оскільки $\sin\Delta x \to 0$, $\cos(2x_0 + \Delta x) \to \cos 2x_0$ при $\Delta x \to 0$, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0) = 2\cdot 0\cdot\cos 2x_0 = 0$, тобто функція неперервна (за означенням мовою приростів).

2. Дослідити задану функцію на неперервність і з'ясувати характер її точок розриву:

а) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$; б) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; в) $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$.

Розв'язання. Для розв'язання вправи використаємо *правило дослідження функції f на неперервність* у точці x_0, яке випливає з означення неперервності:

1) обчислити значення функції в точці x_0;
2) обчислити границю функції в цій точці;
3) перевірити, чи дорівнює вона значенню $f(x_0)$.

а) За властивістю неперервності частки задана функція є неперервною в усіх точках множини R, крім точок -3 і 3, в яких вона не визначена.

Точка $x = -3$ є точкою розриву другого роду, оскільки

$$\lim_{x\to -3-0} f(x) = \lim_{x\to -3-0}\frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to -3-0}\frac{1}{x+3} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -3+0} f(x) = \lim_{x\to -3+0}\frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to -3+0}\frac{1}{x+3} = +\infty.$$

З'ясуємо характер розриву точки $x = 3$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{6}$, то точка $x = 3$ є точкою розриву першого роду (усувного). Цю функцію можна довизначити, поклавши $f(3) = 1/6$ для того, щоб вона стала неперервною.

б) Задана функція є елементарною, а тому неперервною в області її визначення, тобто на множині $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Точка $x = 0$ є точкою розриву першого роду (стрибкового), оскільки $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

в) Функція $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ не визначена тільки в точці $x = 1$, отже, ця точка є точкою розриву. Оскільки в цьому випадку ліва границя $\lim\limits_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$, а права $\lim\limits_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$, то $x = 1$ є точкою розриву другого роду. В усіх інших точках множини R функція неперервна.

3. Чи має рівняння $x^3 - 3x - 1 = 0$ принаймні один корінь на відрізку $[0; 2]$?

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = x^3 - 3x - 1$ неперервна на відрізку $[0; 2]$ і на його кінцях набуває різних за знаком значень: $f(0) = -1 < 0$, $f(2) = 1 > 0$, то згідно з теоремою Больцано — Коші існує принаймні одна точка $c \in [0; 2]$, в якій значення функції дорівнює нулю. Число c і є коренем заданого рівняння.

Завдання для самостійного розв'язування

19. Використовуючи означення (мовою приростів), довести неперервність функції при всіх $x \in R$:

а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = \cos x$; в) $f(x) = e^{3x}$.

20. Дослідити задану функцію на неперервність і з'ясувати характер точок розриву:

а) $f(x) = \dfrac{x}{x-5}$; б) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$;

в) $f(x) = \dfrac{\sin\, x}{2x}$; г) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$;

д) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ 1/x, & x > 0; \end{cases}$ е) $f(x) = \begin{cases} x - \pi, & x < \pi, \\ \sin x, & x \ge \pi. \end{cases}$

21. Побудувати графік заданої функції та визначити їх точки розриву:

а) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \neq 2, \\ 0, & x = 2; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 3, & x > 2 \end{cases}$

22. Перевірити, чи має задане рівняння дійсні корені на заданому відрізку:

а) $x^3 + x - 3 = 0,\ [1;\, 2]$; б) $x + e^x = 0,\ [-1;\, 0]$.

Розділ 5

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§ 5.1. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ. ОСНОВНІ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ. ПОХІДНІ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай функція f визначена в деякому околі точки x_0. Розглянемо $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приріст функції f у точці x_0, який відповідає приросту аргументу $\Delta x = x - x_0$ у цій точці.

Похідною функції в точці x_0 називають границю відношення приросту $\Delta f(x_0)$ функції до приросту Δx аргументу, тобто

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \tag{5.1}$$

Похідну функції $y = f(x)$ у довільній точці x позначають y', $f'(x)$ або $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Геометричний зміст похідної: похідна $f'(x_0)$ — це *кутовий коефіцієнт дотичної* до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0;\, f(x_0))$.

Якщо в точці x_0 функція f має скінченну похідну, то *рівняння дотичної* та *нормалі* мають вигляд відповідно

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Фізичний зміст похідної: похідна $s'(t_0)$ — це *швидкість матеріальної точки* в момент часу t_0, якщо ця точка рухається за законом $s = s(t)$. Отже, $v(t_0) = s'(t_0)$.

Економічний зміст похідної: похідна $f'(t_0) = p(t_0)$ — це *продуктивність праці* виробника в момент часу t_0, якщо функція $f = f(t)$ визначає кількість виготовленої виробником продукції за час t.

Основні правила диференціювання функцій:

1) похідна від сталої $(C)' = 0$;

2) похідна суми $(u + v)' = u' + v'$;

3) похідна добутку $(uv)' = u'v + uv'$, зокрема $(cu)' = cu'$;

4) похідна частки

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \ v \neq 0, \text{ зокрема } \left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c}{v^2};$$

5) похідна складної функції

$$(f(\varphi))'(x) = f'(u)\,\varphi'(x), \text{ де } u = \varphi(x);$$

6) похідна оберненої функції

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ де } y = f(x), \ f'(x) \neq 0;$$

7) похідна функції $y = f(x)$, заданої параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$,

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \ x'(t) \neq 0;$$

8) логарифмічна похідна функції $y' = y\,(\ln y)'$;

9) похідна неявно заданої функції y, яка визначається рівнянням $F(x, y) = 0$, обчислюється диференціюванням обох частин рівняння за змінною x, звідки виражається y'.

Основні формули диференціювання

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, зокрема
$$(x)' = 1, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
2. $(a^x)' = a^x \ln a$. 2′. $(e^x)' = e^x$.
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}\cdot$ 3′. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}\cdot$
4. $(\sin x)' = \cos x$. 5. $(\cos x)' = -\sin x$.
6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot$ 7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}\cdot$
8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$ 9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$
10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}\cdot$ 11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}\cdot$

Застосування похідної в економіці. При вивченні економічних процесів широко використовують поняття похідної.

Якщо функція $V = V(x)$ виражає залежність витрат виробництва V від обсягу випущеної продукції x, то $V'(x)$ — *граничні витрати виробництва*, що характеризують додаткові витрати на виготовлення одиниці випущеної продукції.

Аналогічно визначають *граничний дохід* $D'(x)$ і *граничний прибуток* $P'(x)$, якщо відповідна функція виражає залежність доходу $D = D(x)$ чи прибутку $P = P(x)$ від обсягу випущеної продукції x. Функції $V'(x)$, $D'(x)$, $P'(x)$ називають також відповідно *маргінальними витратами, доходом* і *прибутком.*

Зразки розв'язування вправ

1. За означенням похідної обчислити $f'(x_0)$ для функції $f(x) = \sin 2x$, де x_0 — довільне дійсне число.

Розв'язання. Для обчислення похідної функції f у точці x_0 за означенням зручно використовувати такий *алгоритм*:

1) надати x_0 приросту Δx і обчислити приріст функції $\Delta f(x_0)$:
$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

2) скласти відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

3) обчислити похідну $f'(x_0)$, тобто границю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Використовуючи наведений алгоритм, обчислюємо похідну цієї функції:

1) $f(x + \Delta x) = \sin 2(x + \Delta x)$;

2) $\Delta f(x) = \sin 2(x + \Delta x) - \sin 2x = 2 \sin \Delta x \cos(2x + \Delta x)$;

3) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 2 \cdot \dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cos(2x + \Delta x)$,

$$f'(x) = 2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos(2x + \Delta x) = 2 \cdot 1 \cdot \cos 2x = 2 \cos 2x.$$

Отже, $(\sin 2x)' = 2 \cos 2x$.

2. Використовуючи правила і формули диференціювання, визначити похідні функцій:

а) $y = \operatorname{arctg} x + \arccos x + \pi$; б) $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} + 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + 4x - 3$;

в) $y = (x^2 + 5) \ln x$; г) $y = \dfrac{e^x}{\operatorname{tg} x}$.

Розв'язання. а) За основними формулами 9 і 10 та правилами 1) і 2) дістаємо

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' + (\arccos x)' + (\pi)' = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

б) Запишемо функцію у вигляді $y = 3x^{-\frac{1}{3}} + 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + 4x - 3$. Застосовуючи формулу 1 (частинні випадки) і правила 1) — 3), знаходимо $y' = 3\left(-\dfrac{1}{3}\right) x^{-\frac{4}{3}} + \dfrac{2}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2} + 4 - 0 = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2} + 4.$

в) Використовуючи формули 1 і 3′ та правила 1) — 3), дістаємо

$$y' = (x^2+5)' \ln x + (x^2+5)(\ln x)' = 2x \ln x + \frac{x^2+5}{x}.$$

г) Використовуючи правило 4) та формули 2′ і 6, дістаємо

$$y' = \frac{(e^x)' \operatorname{tg}\ x - e^x(\operatorname{tg}\ x)'}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\left(e^x \operatorname{tg}\ x - \frac{e^x}{\cos^2 x}\right) =$$
$$= \frac{e^x(\sin 2x - 2)}{2\sin^2 x}\,.$$

3. Застосовуючи правило диференціювання складної функції і формули диференціювання, знайти похідну функції:

а) $y = (3+2x)^5$; б) $y = e^{-3x}$; в) $y = \cos^2 x$;

г) $y = \operatorname{tg}\ x^4$; д) $y = \ln(x^3+1) + \sqrt{x^5 - x}$.

Розв'язання. а) Покладемо $u = 3+2x$. Тоді $y = u^5$. Використовуючи правило 5) і формулу 1, дістаємо $y'_u = 5u^4$, $u'_x = 2$; $y' = 5u^4 \cdot 2 = 5\cdot(3+2x)^4 \cdot 2 = 10\cdot(3+2x)^4$.

б) Вводячи позначення $u = -3x$ і застосовуючи формулу 2′ та правила 5) і 3), дістаємо

$$y' = (e^u)' \cdot u' = e^u \cdot u' = e^{-3x}\cdot(-3) = -3e^{-3x}.$$

в) Покладаючи $\cos x = u$, дістаємо складну функцію $y = u^2$. Тоді
$y' = (u^2)' \cdot u' = 2u \cdot u' = 2\cos x \sin x = \sin 2x$.

г) Покладемо $x^4 = u$. Згідно з правилом 5) і формулою 6 маємо

$$y' = (\operatorname{tg} u)' \cdot u' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u' = \frac{1}{\cos^2 x^4}\cdot 4x^3 = 4x^2 \sec^2 x^4.$$

д) Нехай $u = x^2+4$ і $v = x^3 - x$. Тоді $y = \ln u + \sqrt{v}$ і

$$y' = (\ln u)' \cdot u' + (\sqrt{v})' \cdot v' = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{2\sqrt{v}} = \frac{2x}{x^2+4} + \frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}.$$

4. Обчислити похідну функції $f(x) = \ln\cos x$ у точці $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Введемо нову змінну $u = \cos x$. Тоді $f(x) = \ln u$. За формулами $3'$ і 4 маємо $f'(x) = (\ln u)' \cdot u' = -\dfrac{1}{\cos x}\sin x = \operatorname{tg} x$. Поклавши $x = \dfrac{\pi}{4}$, дістанемо $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$.

5. За допомогою логарифмічної похідної знайти похідну функції

$$y = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x-2}}.$$

Розв'язання. Логарифмуючи задану рівність, дістаємо $\ln y = 1/3 \cdot (2\ln(x+1) - \ln(x-2))$.

Використовуючи логарифмічну похідну, визначаємо

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x-5}{(x+1)(x-3)},$$

звідки

$$y' = y(\ln y)' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x-2}} \cdot \frac{x-5}{(x+1)(x-2)} =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{x-5}{\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^4}}.$$

6. Знайти похідну функції, заданої параметрично: $x = x(t) = \operatorname{tg} t$, $y = y(t) = \sin t$.

Розв'язання. За правилом диференціювання параметрично заданої функції (див. п. 7) дістаємо

$$y'_x = \frac{(\sin t)'}{(\operatorname{tg} t)'} = \frac{\cos t}{1/\cos^2 t} = \cos^3 t.$$

7. Знайти похідну неявно заданої функції $y + \ln y - x^2 = 0$.

Розв'язання. Продиференціюємо обидві частини рівняння $y+\ln y-x^2=0$ за змінною x, вважаючи $\ln y$ складною функцією від x. Оскільки $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$, то $y' + \dfrac{y'}{y} - 2x = 0$, звідки $y'\left(1+\dfrac{1}{y}\right) = 2x$. Тоді $y' = \dfrac{2xy}{y+1}$.

8. Записати рівняння дотичної та нормалі до параболи $y = x^2 - x - 3$ у точці з абсцисою $x = 2$.

Розв'язання. Оскільки $f(2) = 4-2-3 = -1$, точка дотику має координати $x_0 = 2$, $f(x_0) = -1$. Обчисливши похідну $f'(x) = 2x-1$, $f'(2) = 3$, дістанемо рівняння відповідно дотичної та нормалі:

$$y-(-1) = 3(x-2) \text{ і } y-(-1) = -1/3(x-2) = 0,$$

звідки $3x-y-7=0$ і $x+3y+1=0$.

9. Шлях s (у метрах), пройдений тілом за час t (у секундах) після початку руху, визначається за формулою $s = \dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{3}{2}t^2 + t$. Обчислити швидкість і прискорення тіла в момент часу $t = 3$ с.

Розв'язання. За фізичним змістом похідної швидкість $v = s'(t) = 2t^2+3t+1$, тобто $v(3) = 28$ м/с. Тоді прискорення $a = v'(t) = 4t+3$, $a(3) = 15$ м/с^2.

10. Відомо, що роздрібна вартість одного виробу визначається функцією $S(x) = 90 - 0,2x$, де x — обсяг виготовлених виробів. Дохід від виробництва x виробів (загальна вартість продукції) $D(x) = x\,S(x)$ (грн). Визначити граничний (маргінальний) дохід від виробництва 200 виробів.

Розв'язання. Оскільки дохід визначається функцією $D(x) = x\,S(x) = x(90-0,2x) = 90x - 0,2x^2$, то маргінальний дохід від виробництва x виробів $D'(x) = 90 - 0,4x$, звідки для 200 виробів $D'(200) = 90 - 0,4\cdot 200 = 10$ грн.

Завдання для самостійного розв'язування

1. За означенням похідної визначити y':
а) $y = x^2 - x + 1$; б) $y = 2/x$; в) $y = \cos 2x$; г) $y = e^{3x}$.

2. Обчислити похідну функції:

1) $y=x^3+\dfrac{x^2}{2}+2\sqrt{x}$;   2) $y=x^5+2^{-x}-\ln\,3$;

3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt[3]{x^2}$; 4) $y=e^{x-3}$; 5) $y=2^{1+2x}$; 6) $y=\ln x^5$;

7) $y=\ln^2 x$; 8) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$;   9) $y=2\operatorname{tg}\,x+3\cos x$;

10) $y=\cos^2 x$; 11) $y=\sin 2x$;   12) $y=x^3\ln x$;

13) $y=(x^2+1)\ \operatorname{arctg}\ x$; 14) $y=e^x(\cos x+\sin x)$;

15) $y=\dfrac{x^2}{1-x}$; 16) $y=\dfrac{x}{x^2+2}$;   17) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$;

18) $y=\dfrac{x^2+1}{\ln x}$;   19) $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$; 20) $y=\dfrac{\operatorname{arctg}\ x}{x^2}$.

3. Визначити похідну складної функції:

1) $y=(1-2x)^3$; 2) $y=\sqrt{1-x^2}$;   3) $y=\sqrt{\ln x+1}$;

4) $y=\left(\dfrac{1-x^2}{1-x}\right)^2$; 5) $y=\sin(2x-1)$; 6) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

7) $y=2\cos 3x+3\sin 2x$;   8) $y=\cos^2\dfrac{x}{2}$;   9) $y=\operatorname{tg}^3 2x$;

10) $y=(\arcsin\,x)^2$;   11) $y=\ln^2(x+1)$; 12) $y=\ln(x+x^2)$;

13) $y=e^{1-x^2}$;   14) $y=\sqrt{e^x}$;   15) $y=e^{\sqrt{x}}$; 16) $y=5^{2-3x}$;

17) $x=\sin 2xe^{4x}$; 18) $y=(x^2+1)\ln x^3$;

19) $y=e^{2x}\ln(x^2+1)$; 20) $x=(x-\sin^2 x)^2$;

21) $y=\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}\ 2x$; 22) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$;

23) $y=\cos(\ln x^2)$; 24) $y=\lg\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

25) $y=\operatorname{arctg}\ (\ln^2 x)$.

4. За допомогою логарифмічної похідної знайти похідну функції:

а) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $y = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$;

в) $y = x^{\cos x}$; г) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

5. Обчислити похідні в точці:

а) $y = e^{3x}$, $x_0 = 0$; б) $y = x^2 \arcsin x$, $x_0 = 0$;

в) $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; г) $y = \ln \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

6. Знайти похідну функції, заданої параметрично:

а) $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$; б) $x = te^t$, $y = e^{2t}$;

в) $x = \sin^2 t$, $y = \cos 2t$; г) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$.

7. Знайти похідну неявно заданої функції:

а) $3x^2 + y^2 + 2xy = 0$; б) $e^x - e^y = 3^{xy}$;

в) $y\ \mathrm{arctg}\ x - y/x - 2 = 0$; г) $\ln xy + xy - x = 0$.

8. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^2 - 3$ у точці $(1; -2)$.

9. Визначити, в якій точці дотична до параболи $y = x^2$:
а) паралельна прямій $y = 2x - 4$;
б) перпендикулярна до прямої $x + y = 1$.

10. Ліфт після вмикання рухається за законом $x = 2t^2 + 3t + 1$ (у метрах). Визначити швидкість його руху в момент часу $t = 1$ с.

11. Швидкість тіла, яке рухається прямолінійно, визначається за формулою $v = 2t^2 + 4t$. Яке прискорення матиме тіло через 3 с після початку руху?

12. Обсяг продукції, виробленої бригадою, описується функцією $y = -t^3 + 9t^2 + 120t + 60$ (одиниць), $1 \le t \le 8$, де t — робочий час (год). Визначити продуктивність праці $p(t)$ через годину після початку роботи і за годину до її завершення. Пояснити економічний зміст одержаних результатів.

13. Нехай функція $V(x) = 250 + 120x - 0{,}2x^2$ виражає витрати підприємства на виробництво x одиниць продукції (у гривнях). Знайти маргінальні витрати виробництва і обчислити їх значення, якщо обсяг випуску продукції — 30 одиниць.

14. Визначити маргінальний прибуток $P'(x)$ при обсязі випуску продукції п'ять одиниць, якщо функція доходу $D(x) = -2x^2 + 80x$, а функція витрат $V(x) = x^3 - 13x^2 + 111x - 21$ $(P(x) = D(x) - V(x))$.

§ 5.2. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Якщо функція f має в точці x_0 скінченну похідну, то вона є *диференційовною* в цій точці. Для функції f, диференційовної в точці x_0, виконується рівність

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{5.2}$$

де $\alpha(\Delta x) \to 0$, $\Delta x \to 0$.

При цьому вираз $f'(x_0)\Delta x$ називають *диференціалом* функції f у точці x_0 і позначають $df(x_0)$. Позначивши $dx = \Delta x$, дістанемо

$$df(x_0) = f'(x_0)dx. \tag{5.3}$$

Переписавши рівність (5.2) у вигляді $\Delta f(x_0) = df(x_0) + \alpha\Delta x$, можна сказати, що диференціал — це головна, лінійна відносно Δx частина приросту функції f. Отже,

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0).$$

Останню формулу можна записати в такому вигляді:

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.4}$$

За допомогою формули (5.4) можна обчислювати наближені значення функції в точках, близьких до x_0.

Основні властивості диференційовних функцій та диференціала:

1) якщо функція диференційовна в точці x_0, то вона є неперервною в цій точці;

2) сума, різниця, добуток і частка диференційовних функцій u і v також є диференційовною функцією, причому

$$d(u \pm v) = du \pm dv; \quad d(cu) = c\,du, \ c = \text{const};$$

$$d(u\,v) = u\,dv + v\,du; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \ v \neq 0;$$

3) складна функція $f(\varphi(t))$ диференційовна в точці t, якщо диференційовні функції внутрішня φ (у точці t) і зовнішня f (у точці $x = \varphi(t)$). При цьому

$$df(\varphi(t)) = f'(x)\,dx = f'(x)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Похідною другого порядку (або *другою похідною*) функції f у точці x_0 називають похідну від похідної першого порядку, яку позначають $f''(x_0)$. Отже,

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}\,.$$

Аналогічно *похідною n-го порядку* (або *n-ю похідною*) функції f у точці x_0 називають похідну від похідної $(n-1)$-го порядку, яку позначають $f^{(n)}(x_0)$ або $\dfrac{d^n f(x_0)}{dx^n}$.

Для похідних вищих порядків функції $y = f(x)$ вживають також позначення y'', y''', $y^{IV}, \ldots,\ y^{(n)}$.

Функцію f називають *n разів диференційовною в точці* x_0, якщо вона має в цій точці скінченні похідні до n-го порядку включно.

Другим диференціалом у точці x_0 функції f, двічі диференційовної в цій точці, називають диференціал від диференціала першого порядку, тобто вираз $d^2 f(x_0) = d(df)(x_0) = f''(x_0)\Delta x^2 = f''(x_0)dx^2$.

Аналогічно для функції f, n разів диференційовної в точці x_0, вводять поняття диференціала n-го порядку: $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\Delta x^n$. Поклавши $x_0 = x$, $\Delta x = dx$, для функції $y = f(x)$ дістанемо

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n. \tag{5.5}$$

Зразки розв'язування вправ

1. Визначити диференціал функції:

а) $f(x) = e^{2-x^2}$; б) $f(x) = (2x^3 + 3x)^4$.

Розв'язання. За формулою (5.3) маємо:

а) $df(x) = (e^{2-x^2})'dx = e^{2-x^2}(-2x)dx = -2xe^{x^2}dx$;

б) $df(x) = ((2x^3+3x)^4)'dx = 4(2x^3+3x)^3(6x^2+3)dx = 4x^3(2x^2+$ $+3)^3(6x^2+3)dx$.

2. Визначити диференціал df і приріст Δf функції $f(x) = x^2+1$ при $x = 2$ і $\Delta x = 0{,}1$. Обчислити абсолютну і відносну похибки, які дістаємо при заміні приросту функції її диференціалом.

Розв'язання. У будь-якій точці $x \in R$

$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1 = 2x\Delta x + \Delta x^2$,

$df(x) = (x^2+1)'\Delta x = 2x\Delta x$.

При $x = 2$ і $\Delta x = 0{,}1$ дістаємо $\Delta f(2) = 2\cdot 2\cdot 0{,}1 + 0{,}01 = 0{,}41$ і $df(2) = 0{,}4$. Абсолютна похибка $|\Delta f(2) - df(2)| = 0{,}41 - 0{,}4 = 0{,}01$, відносна похибка $\left|\dfrac{\Delta f(2) - df(2)}{\Delta f(2)}\right| = 0{,}024$, або 2,4 %.

3. Нехай $f(x) = (x+1)^2(x-2)$. Обчислити наближено $f(1{,}98)$.

Розв'язання. Покладемо $x_0 = 2$. Тоді $\Delta x = x - x_0 = 1{,}98 - 2 =$ $= -0{,}02$. У точці x_0 значення функції $f(x_0) = f(2) = 0$. Знайдемо похідну заданої функції в будь-якій точці x. Маємо $f'(x) = 2(x+1)\times$ $\times(x-2) + (x+1)^2$. Тоді $f'(x_0) = f'(2) = 9$. За формулою (5.4) наближено обчислимо $f(1{,}98) \approx 0 + 9(-0{,}02) = -0{,}18$.

4. Обчислити наближене значення $\sin 30°12'$, не користуючись таблицею і калькулятором. Одержане значення порівняти з табличним або з визначеним за допомогою калькулятора.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sin x$. Покладемо $x_0 = 30° = \pi/6$. Тоді $\Delta x = 30°12' - 30° = 12'$, або в радіанах $\Delta x = \dfrac{12\pi}{180\cdot 60} = 0{,}0035$. Обчислимо $f'(x) = \cos x$, $f'(x_0) =$ $= \cos\pi/6 = \sqrt{3}/2 \approx 0{,}8660$; $f(\pi/6) = 0{,}5$. За формулою (5.4) маємо $\sin 30°12' \approx \sin 30° + \cos 30°\cdot 0{,}0035 = 0{,}5 + 0{,}8660\cdot 0{,}0035 = 0{,}5030$. Використовуючи калькулятор, дістаємо $\sin 30°12' = 0{,}5003$.

5. Знайти похідну другого порядку функції:

а) $y = x^4 - 3x^2 + 1$; б) $y = e^{-x}$; в) $y = \sqrt{x^2-4}$.

Розв'язання. Визначаємо послідовно першу, потім другу похідну:

а) $y' = 4x^3 - 6x$, $y'' = 12x^2 - 6$; б) $y' = -e^{-x}$, $y'' = e^{-x}$;

в) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-4}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$,

$$y'' = \frac{x'\,\sqrt{x^2-4} - x(\sqrt{x^2-4})'}{x^2-4} = \frac{\sqrt{x^2-4} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,x}{x^2-4} =$$

$$= \frac{x^2-4-x^2}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}.$$

6. Визначити похідну n-го порядку від функції $y = e^{ax}$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо $y' = ae^{ax}$, $y'' = a^2e^{ax}$, $y''' = a^3e^{ax}, \ldots$ Методом математичної індукції можна довести, що $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$.

7. Визначити $d^3 f$ для функції $f(x) = x \ln x$.

Розв'язання. Знаходимо

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1,\ f''(x) = \frac{1}{x},\ f'''(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot$$

За формулою (5.5) визначаємо диференціал третього порядку:

$$d^3 f(x) = -\frac{dx^3}{x^2}\cdot$$

Завдання для самостійного розв'язування

15. Визначити диференціал функції:

а) $f(x) = (5x+3)^2$; б) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$; в) $f(x) = \arccos x^3$.

16. За допомогою диференціала обчислити наближене значення:

а) $\sqrt[4]{16{,}02}$; б) $\cos 60°1'$; в) $\operatorname{arctg} 0{,}98$; г) $\ln 1{,}02$.

17. Залежність прибутку y від обсягу виробленої продукції x (кг) виражається функцією $y = 20x - 0,1x^2$. Оцінити відносну похибку обчислення прибутку при обсязі виробництва 10 кг з точністю до $1\,\%$.

18. Для заданої функції знайти похідну вказаного порядку:

а) $y = \sin 2x,\ y''$; б) $y = \dfrac{x}{x^2-1},\ \ y''$; в) $y = \cos^2 x,\ \ y''$;

г) $y = \operatorname{arctg}\ x,\ \ \ y''$; д) $y = \sqrt[3]{x},\ \ \ y'''$; е) $y = e^{2x},\ \ \ y^{(n)}$;

є) $y = x\ln x,\ \ \ y^{(n)}$; ж) $y = \sin x,\ \ \ y^{(n)}$; з) $y = \dfrac{1}{x},\ \ \ y^{(n)}$.

19. Визначити $d^2 f$ для функції:

а) $f(x) = x^n$; б) $f(x) = \sin 5x$;

в) $f(x) = a^x$; г) $f(x) = x^3 + x^2$.

§ 5.3. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

Для розкриття невизначеностей типу $\dfrac{0}{0}$ та $\dfrac{\infty}{\infty}$ використовують *правило Лопіталя.* Нехай функції f і g диференційовні в деякому околі точки x_0, крім, можливо, безпосередньо точки x_0. Якщо f і g є одночасно нескінченно малими $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0)$ або нескінченно великими $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty)$ при $x \to x_0$, причому існує границя (скінченна або нескінченна) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує також границя $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ і виконується рівність

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,. \tag{5.6}$$

Зауважимо, що точка x_0 може бути як скінченною, так і нескінченно віддаленою.

Якщо дріб $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не має границі при $x \to x_0$, то правило Лопіталя застосовувати не можна, хоча шукана границя $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ може існувати.

Правило Лопіталя можна застосовувати кілька разів.

Крім розглянутих невизначеностей зустрічаються ще й такі:

$$0 \cdot \infty,\ +\infty - (+\infty),\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,$$

кожну з яких можна звести до невизначеності $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Зразки розв'язування вправ

Обчислити границю:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left(\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\cos x}\right)$.

Розв'язання. а) Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Застосовуючи правило Лопіталя (формулу (5.6)), визначаємо

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{2x+2} = \frac{3}{4}.$$

б) Аналогічно

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x}}{\cos x} = 3.$$

в) Застосовуючи правило Лопіталя тричі, дістаємо

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

г) Маємо невизначеність типу $\dfrac{\infty}{\infty}$. Розкриваючи її за правилом Лопіталя, дістаємо

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

д) Зводимо невизначеність $\infty - \infty$ до невизначеності $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{(-\sin x)} = 0.$$

Завдання для самостійного розв'язування

20. Застосовуючи правило Лопіталя, обчислити границю:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{1-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^5-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-12x+16}{x^3-4x^2+4x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x+\sin x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-e^{-x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} 5x$; 11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$; 12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^x}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^3+x}$; 14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$; 15) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$.

§ 5.4. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Умови монотонності функції. Якщо функція f неперервна на проміжку $\langle a;\, b\rangle$ і диференційовна в інтервалі $(a;\, b)$, то вона є монотонною на $\langle a;\, b\rangle$ тоді й тільки тоді, коли $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на $(a;\, b)$.

При цьому на проміжку $\langle a;\, b\rangle$ функція f:

1) *неспадна*, коли $f'(x) \geq 0$, $x \in (a;\, b)$;
2) *зростаюча*, коли $f'(x) > 0$, $x \in (a;\, b)$;
3) *незростаюча*, коли $f'(x) \leq 0$, $x \in (a;\, b)$;
4) *спадна*, коли $f'(x) < 0$, $x \in (a;\, b)$.

Зауважимо, що функція f є сталою на проміжку $\langle a;\, b\rangle$ тоді й тільки тоді, коли $f'(x) = 0$ $\forall x \in \langle a;\, b\rangle$.

Локальні екстремуми функції. Точку x_0 називають *точкою максимуму (мінімуму) функції* f, якщо існує такий окіл точки x_0, що для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$.

Точку максимуму (мінімуму) функції називають *точкою екстремуму (локального)*, а значення функції в цій точці — *екстремумом функції.*

Максимум (мінімум) функції позначають $f_{\max} = f(x_0)$ $(f_{\min} = f(x_0))$ (рис. 5.1).

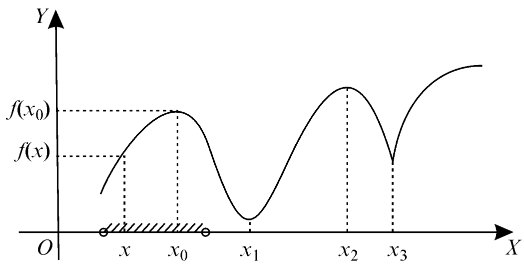


Рис. 5.1: x_0, x_2 — точки максимуму; x_1, x_3 — точки мінімуму

Необхідна умова існування екстремуму. Якщо x_0 — точка екстремуму функції f, то $f'(x_0) = 0$ або функція f не є диференційовною в точці x_0 ($f'(x_0) = \infty$ або не існує).

Критичні точки функції — це такі точки з області визначення функції, в яких похідна f' дорівнює нулю (нескінченності) або не існує. *Критичні точки — це можливі точки екстремуму функції.*

Перша достатня умова існування точки екстремуму. Критична точка x_0 функції f є точкою екстремуму цієї функції, якщо *похідна* f' *змінює знак у точці* x_0, тобто в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ похідна має один знак, а в інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$ — інший.

При цьому:

1) x_0 — *точка максимуму функції* f, *якщо* f' *змінює знак* з "+" на "−";

2) x_0 — *точка мінімуму функції* f, *якщо* f' *змінює знак* з "−" на "+".

Наведемо *перше правило дослідження функції на екстремум*:

1) знайти критичні точки заданої функції. Для цього треба розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, вибрати ті його корені, які є вну-

трішніми точками області визначення $D(f)$, і знайти точки з $D(f)$, в яких похідної f' не існує або вона нескінченна;

2) у кожній критичній точці перевірити зміну знака похідної f'. Якщо $f'(x)$ при переході x через критичну точку x_0 (зліва направо) змінює знак з плюса на мінус, то ця точка є точкою максимуму, а якщо з мінуса на плюс, то вона є точкою мінімуму;

3) обчислити значення максимуму $f_{\max}$ і мінімуму $f_{\min}$ функції.

Друга достатня умова існування екстремуму. Якщо x_0 — *стаціонарна точка функції* f, тобто $f'(x_0) = 0$, то при цьому:

1) x_0 — *точка максимуму функції* f, якщо $f''(x_0) < 0$;

2) x_0 — *точка мінімуму функції* f, якщо $f''(x_0) > 0$.

Якщо друга похідна функції легко визначається, то зручно використати *друге правило дослідження функції на екстремум*:

1) знайти стаціонарні точки заданої функції f;

2) обчислити похідну другого порядку в стаціонарній точці x_0. Якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 є точкою мінімуму, а якщо $f''(x_0) < 0$ — то точкою максимуму;

3) обчислити значення максимуму $f_{\max}$ і мінімуму $f_{\min}$ функції.

Зауважимо, що цим правилом користуватися не можна, якщо функція в досліджуваній точці недиференційовна або друга похідна дорівнює нулю.

Глобальні екстремуми функції f на проміжку $\langle a;\, b\rangle$ — це *найбільше та найменше значення функції* на цьому проміжку. Функція f набуває глобальних екстремумів або у критичних точках, або на кінцях проміжку.

Нехай функція f є неперервною на відрізку $[a;\, b]$. Тоді зручно використати *правило відшукання найбільшого і найменшого значень функції на відрізку* $[a;\, b]$:

1) знайти всі критичні точки функції f на інтервалі $(a;\, b)$;

2) обчислити значення функції в кожній критичній точці та на кінцях відрізка $[a;\, b]$;

3) найбільше з одержаних значень є найбільшим значенням функції на відрізку (глобальним максимумом), а найменше — найменшим значенням функції на цьому відрізку (глобальним мінімумом).

Опуклість функції. Функцію f називають *опуклою вниз (вгору)* на проміжку $\langle a;\, b\rangle$, якщо для всіх $x \in \langle a;\, b\rangle$ графік цієї функції лежить не нижче (не вище) будь-якої його дотичної (рис. 5.2).

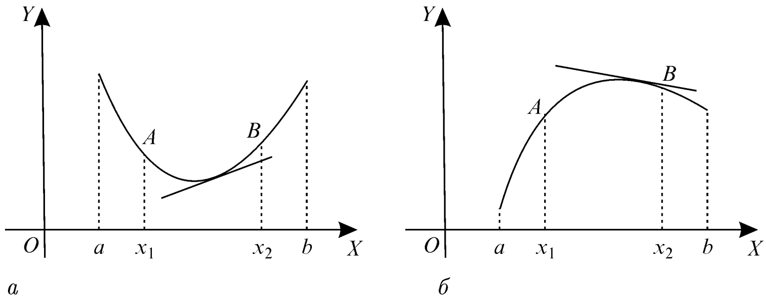


Рис. 5.2: *а* — опукла вниз; *б* — опукла вгору

Критерій опуклості: двічі диференційовна функція f опукла вниз (вгору) на $\langle a;\, b\rangle$ тоді й тільки тоді, коли $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ на цьому проміжку.

Проміжок опуклості функції f — це такий проміжок $\langle a;\, b\rangle$, на якому ця функція опукла вниз або вгору, а на ширшому проміжку вже не є такою.

Точкою перегину (скорочено — т. п.) функції f називають точку x_0, для якої при деякому δ на інтервалах $(x_0 - \delta;\ x_0)$ і $(x_0;\, x_0 + \delta)$ функція f має різний напрям опуклості.

Зауважимо, що іноді замість поняття опуклості функції f вводять поняття опуклості кривої (графіка функції f) і в цьому разі точкою перегину називають відповідну точку $(x;\ f(x))$ на цій кривій.

Наведемо *правило дослідження двічі диференційовної функції на опуклість і точки перегину*:

1) знайти другу похідну f'' і визначити точки, підозрілі на точки перегину. Для цього треба знайти розв'язки рівняння $f''(x) = 0$ або визначити, в яких точках похідна f'' є нескінченною або взагалі не існує (при цьому функція f неперервна);

2) якщо $f''(x)$ змінює знак при переході через точку x_0, то ця точка є точкою перегину;

3) якщо похідна $f''(x) \leq 0$ $(f''(x) \geq 0)$ на інтервалі $(a;\, b)$, то функція f опукла вгору (вниз) на цьому інтервалі.

Асимптотою графіка функції f (або кривої $y = f(x)$) називають пряму AB, для якої відстань від точки $(x;\ y)$ графіка f до AB прямує до нуля, коли $x \to \infty$ (або $y \to \infty$).

Вертикальною асимптотою графіка функції f є пряма $x = x_0$, для якої границя (або одностороння границя) функції в цій точці дорівнює нескінченності.

Похилою асимптотою графіка функції f є пряма $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx). \tag{5.7}$$

Якщо $k = 0$, то маємо горизонтальну асимптоту $y = b$.

Зауважимо, що коли функцію f можна записати у вигляді

$$f(x) = kx + b + \varphi(x), \text{ де } \varphi(x) \to 0, \; x \to \infty,$$

то $y = kx + b$ є похилою (зокрема, горизонтальною) асимптотою.

Зразки розв'язування вправ

1. Знайти проміжки зростання і спадання функції $f(x) = x^2 - 4x + 6$.

Розв'язання. Маємо $f'(x) = 2x - 4$. Функція зростає на проміжку, де $f'(x) > 0$, тобто при $2x - 4 > 0$, звідки $x > 2$. Отже, функція зростає на інтервалі $(2; +\infty)$. На інтервалі $(-\infty; 2)$ функція спадає, оскільки тут $f'(x) < 0$.

2. Дослідити функцію на екстремум:

а) $f(x) = x(x-1)^2$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;

в) $f(x) = xe^x$; г) $f(x) = |x + 2|$.

Розв'язання. а) Задану функцію дослідимо на екстремум за першим правилом.

1) Знаходимо критичні точки заданої функції:

$$f'(x) = (x-1)^2 + x \cdot 2(x-1) = (x-1)(3x-1).$$

Оскільки похідна f' неперервна $\forall x \in R$, то підозрілими на точки екстремуму є лише точки, в яких $f'(x) = 0$. З рівняння $(x-1) \times \times (3x-1) = 0$ знаходимо стаціонарні точки: $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1$.

2) Одержані стаціонарні точки поділяють область визначення функції на три інтервали: $(-\infty; 1/3)$, $(1/3; 1)$ і $(1; +\infty)$. На кожному з цих інтервалів похідна зберігає знак, оскільки вона скрізь неперервна. Тому, обчисливши похідну в будь-якій точці інтервалу, можна зробити висновок про її знак на всьому інтервалі.

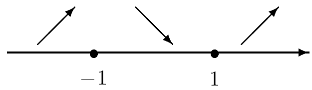


Рис. 5.3

Схематично поведінку функції зображено на рис. 5.3. Як бачимо, у точці $1/3$ функція має максимум, а в точці 1 — мінімум.

3) Підставляючи значення $1/3$ і 1 у задану функцію, дістаємо $f_{\max} = f(1/3) = 4/27$, $f_{\min} = f(1) = 0$.

б) Записавши функцію у вигляді $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, обчислимо її похідну $f'(x) = (2/3)x^{-\frac{1}{3}} = 2/3\sqrt[3]{x}$, яка не дорівнює нулю при жодному значенні x. Отже, стаціонарних точок задана функція не має. Проте точка 0 є критичною, тому що $f'(0) = \infty$. Оскільки $f'(x) < 0$ при $x < 0$ і $f'(x) > 0$ при $x > 0$, то згідно з першим правилом у точці $x = 0$ функція має мінімум: $f_{\min} = f(0) = 0$.

в) Цю функцію дослідимо на екстремум за другим правилом. Маємо $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$, $e^x(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Точка $x = -1$ є єдиною критичною (стаціонарною) точкою, оскільки похідна f' скрізь неперервна.

Знаходимо другу похідну: $f''(x) = e^x(1 + x) + e^x = e^x(2 + x)$. Оскільки $f''(-1) = e^{-1} > 0$, дістаємо, що $x = -1$ є точкою мінімуму і $f_{\min} = f(-1) = -e^{-1}$.

г) Задана функція не диференційовна в точці $-2 \in D(f)$ (похідної f' не існує в цій точці). Оскільки $f'(x) = -1 < 0$ при $x < -2$ і $f'(x) = 1 > 0$ при $x > -2$, то точка -2 є точкою мінімуму функції, причому $f_{\min} = f(-2) = 0$.

3. Обчислити найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2x^2 - 3x$ на відрізку $[-1; 2]$.

Розв'язання. За правилом відшукання найбільшого і найменшого значень функції дістаємо $f'(x) = 4x - 3$, $4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3/4$; $f(3/4) = -9/8$, $f(-1) = 5$, $f(2) = 2$.

Отже, $\max\limits_{[-1;\,2]} f(x) = f(-1) = 5$, $\min\limits_{[-1;\,2]} f(x) = f\left(\dfrac{3}{4}\right) = -\dfrac{9}{8}$.

4. На шкільному подвір'ї треба обгородити квітник прямокутної форми, що прилягає до паркана довжиною понад 50 м. Маємо 200 плит кожна довжиною 50 см. Якими мають бути розміри квітника, щоб його площа була найбільшою?

Розв'язання. Позначимо y сторону прямокутника, що паралельна паркану, а іншу — x. Тоді площа прямокутника $S = xy$. За умовою довжина огорожі становить $200 \cdot 0,5 = 100$ м. Тоді $y + 2x = 100$, звідки $y = 100 - 2x$ і $S = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$, де $0 \le x \le 50$. Отже, необхідно знайти найбільше значення функції $S = 100x - 2x^2$ на відрізку $[0;\ 50]$. За правилом відшукання найбільшого та найменшого значень функції на відрізку маємо

$$S' = 100 - 4x, \quad 100 - 4x = 0 \ \Leftrightarrow \quad x = 25;$$

$$S(25) = 2500 - 2 \cdot 625 = 1250, \quad S(0) = S(50) = 0.$$

Помічаємо, що найбільшого значення функція набуває у стаціонарній точці $x = 25$. При цьому $y = 100 - 2 \cdot 25 = 50$. Отже, квітник матиме найбільшу площу, якщо паралельна паркану сторона вдвічі довша від іншої сторони.

Цю задачу можна розв'язати й іншим способом, розглядаючи функцію S на інтервалі $(0;\ 50)$, що більше відповідає змісту задачі. Оскільки функція неперервна на цьому інтервалі та має на ньому єдину критичну точку $x = 25$, в якій $S > 0$, а при $x \to 0$ і $x \to 50$ маємо $S \to 0$, то звідси випливає, що в точці $x = 25$ функція має максимум, отже, і найбільше значення на інтервалі $(0;\ 50)$.

Нарешті, цю задачу можна розв'язати ще й так. Оскільки $S''(x) = S''(25) = -4 < 0$, дістаємо, що точка $x = 25$ є єдиною точкою локального, а тому й глобального максимуму досліджуваної функції, тобто в цій точці функція набуває найбільшого значення.

5. У цеху підприємства виготовляють продукцію одного виду. Витрати на виробництво x одиниць цієї продукції (у гривнях) виражаються функцією $V(x) = x^3 - 40x^2 + 270x + 1800$, а одержаний від її реалізації дохід $D(x) = 126x - x^2$. Визначити, яку кількість продукції треба виготовити, щоб прибуток від її реалізації був максимальний.

Розв'язання. Відомо, що прибуток від реалізації x одиниць товару визначається як різниця між доходом і витратами, тобто $P(x) = D(x) - V(x) = -x^3 + 39x^2 - 144x - 1800$.

Для визначення точки максимуму функції P скористаємося необхідною умовою існування екстремуму $P' = 0$, або $D' - V' = 0$. Зауважимо, що остання умова має економічний зміст: для того щоб прибуток P був максимальним, необхідно, щоб граничний дохід D' дорівнював граничним витратам V', тобто $D' = V'$.

Оскільки $P' = -3x^2 + 78x - 144 = 0$, то маємо дві стаціонарні точки $x_1 = 2$ і $x_2 = 24$. Обчисливши значення другої похідної в обох точках, визначимо, що прибуток буде максимальним при $x = 24$ і становитиме $P_{\max} = P(24) = 3384$ (грн).

6. Знайти інтервали опуклості та точку перегину функції:

а) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4$; б) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^5}$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$; г) $f(x) = xe^{-x}$.

Розв'язання. Скористаємось правилом дослідження функції на опуклість.

а) Визначаємо похідні $f'(x) = 6x^2 + 6x$, $f''(x) = 12x + 6$, звідки $f''(x) = 0$, коли $x = -1/2$. Для $x < -1/2$ маємо $f''(x) < 0$, і тому функція f опукла вгору, а для $x > -1/2$ маємо $f''(x) > 0$, тому функція опукла вниз. Отже, точка $x = -1/2$ є точкою перегину функції, а точка $(-1/2; 3/2)$ — точкою перегину графіка заданої функції.

б) Задана функція неперервна в області визначення $D(f) = R$. Обчислимо першу і другу похідні цієї функції: $f'(x) = \dfrac{5}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}$, $f''(x) = \dfrac{10}{9\sqrt[3]{x-1}}$. Помічаємо, що $f''(x) \neq 0 \ \ \forall x \in D(f)$. Проте функція f неперервна в точці $x = 1$ і $f''(1) = \infty$, тобто точка $x = 1$ може бути точкою перегину. Оскільки $f''(x) < 0$, коли $x < 1$ (тут функція опукла вгору), і $f''(x) > 0$, коли $x > 1$ (тут функція опукла вниз), то $x = 1$ є точкою перегину функції.

в) Запишемо функцію у вигляді $f(x) = (x+1)^{-1}$ і обчислимо похідні:

$$f'(x) = -(x+1)^{-2}, \quad f''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3}\,.$$

При $x < -1$ маємо $f''(x) < 0$, тому функція опукла вгору, а при $x > -1$ маємо $f''(x) > 0$, отже, функція опукла вниз, проте $x = 1$ не є точкою перегину, оскільки $1 \notin D(f)$.

г) Визначаємо похідні першого та другого порядку:

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}, \quad f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2).$$

Прирівнюючи до нуля другу похідну, дістаємо $f''(x) = 0$, коли $x = 2$. Ця точка є точкою перегину, оскільки при $x < 2$ маємо $f''(x) < 0$, тобто функція опукла вгору, а при $x > 2$ маємо $f''(x) > 0$, тобто функція опукла вниз.

7. Знайти асимптоти графіка функції:

а) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; б) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+3}$;

в) $f(x) = xe^{-x}$; г) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$.

Розв'язання. а) Оскільки $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \infty$, то пряма $x = -1$ є вертикальною асимптотою.

Для визначення невертикальних асимптот запишемо аналітичний вираз у вигляді

$$y = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-1-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}\,.$$

Ураховуючи, що $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$, дістаємо, що $y = 1$ — горизонтальна асимптота.

б) Пряма $x = -3$ є вертикальною асимптотою (поясніть, чому). Знайдемо похилу асимптоту. За формулами (5.7) дістаємо

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2+3x} = 3,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2}{x+3} - 3x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-9x}{x+3} = -9.$$

Отже, пряма $y = 3x - 9$ є похилою асимптотою. Цю асимптоту можна знайти таким самим способом, як і у випадку а), виділивши цілу частину виразу діленням чисельника дробу на знаменник, а саме:

$$\frac{3x^2}{x+3} = (3x-9) + \frac{27}{x+3}\,.$$

в) Задана функція неперервна при всіх $x \in R$, тому вертикальних асимптот її графік не має. Знаходимо невертикальні асимптоти: $k = \lim\limits_{x\to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

Отже, при $x \to -\infty$ похилої асимптоти не існує.

Нехай тепер $x \to +\infty$. Тоді

$$k = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0, \; b = \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Тут використано правило Лопіталя для розкриття невизначеності типу ∞/∞. Отже, $y = 0$ є горизонтальною асимптотою, коли $x \to +\infty$ (права горизонтальна асимптота).

г) Оскільки задана функція неперервна при всіх $x \in R$, то її графік вертикальних асимптот не має.

Знайдемо похилі асимптоти. Оскільки

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \operatorname{arctg}\, x}{x} = 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arctg}\, x}{x} = 1 - 0 = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (x - \operatorname{arctg}\, x - x) = -\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg}\, x = -\pi/2,$$

пряма $y = x - \pi/2$ є правою похилою асимптотою. Аналогічно можна показати (переконайтесь у цьому), що лівою похилою асимптотою є пряма $y = x + \pi/2$.

Завдання для самостійного розв'язування

21. Знайти проміжки зростання і спадання функції:

а) $f(x) = x^2 - 6x + 4$; б) $f(x) = 3x - x^3$;

в) $f(x) = \ln x + \dfrac{2}{x}$; г) $f(x) = x^2 \ln x$.

22. Визначити екстремуми функції:

1) $f(x) = 2 - x^2$; 2) $f(x) = x^2 + 4x + 1$; 3) $f(x) = 2 - 3x^2 - x^3$;

4) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$; 5) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$; 6) $f(x) = 4 - x - \dfrac{4}{x^2}$;

7) $f(x) = x^2 \ln x$; 8) $f(x) = e^{-x^2}$; 9) $f(x) = x^2 e^{-x}$;

10) $f(x) = e^{-x} + e^{2x}$; 11) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$;

12) $f(x) = \cos x - \cos^2 x$; 13) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$; 14) $f(x) = \dfrac{4x}{4+x^2}$.

23. Визначити найбільше та найменше значення функції на вказаному проміжку:

а) $f(x) = x^2 - 2x,\ \ x \in [0;\ 2]$; б) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1,\ \ x \in [-1;\ 2]$;

в) $f(x) = x^3 - 3x - 8,\ \ x \in [-2;\ 0]$; г) $f(x) = \sqrt{1-x^2},\ \ x \in [-1;\ 1]$;

д) $f(x) = x - 2\sqrt{x},\ \ x \in [0;\ 4]$; е) $f(x) = \dfrac{1}{1-x},\ \ x \in [-1/2;\ 1/2]$.

24. Матеріальна точка рухається вздовж прямої за законом $s = 6t^2 - t^3$. Яка її найбільша швидкість?

25. Визначити, яке співвідношення має бути між висотою H і радіусом R консервної банки циліндричної форми заданого об'єму V, щоб на її виготовлення пішло якнайменше матеріалу.

26. На лузі поблизу річки треба обгородити загін для скоту, що прилягає до прямолінійного берега річки і має прямокутну форму. Завезено 100 м огорожі. Якими мають бути розміри відповідного прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

27. Швидкість v зростання чисельності x деякої популяції описується функцією $v = 0,003x\,(200 - x)$. За якої чисельності популяції ця швидкість є найбільшою?

28. Реакція організму на введені ліки може полягати в підвищенні артеріального тиску, зниженні температури тіла, появі алергії тощо. Ступінь реакції y залежить від призначених ліків та їх дози x. Визначити, при якому значенні x реакція буде максимальною, якщо ступінь реакції описується функцією $y = f(x) = x^2(a - x)$, де $a > 0$ — деяка стала.

29. Відомо, що витрати (у гривнях) на відгодівлю свиней у фермерському господарстві виражаються функцією $f(x) = 1320 + 800x + 0{,}12x^2$, де x — валовий приріст ваги (у центнерах). Знайти мінімальну собівартість S одного центнера свинини, якщо $S = f(x)/x$.

30. На малому підприємстві виготовляють продукцію одного виду. Витрати на виробництво x одиниць продукції виражаються функцією $V(x) = x^3 - 30x^2 - 160x + 900$ (у гривнях), а дохід, одержаний від її реалізації (загальна вартість продукції), $D(x) = 80x - 6x^2$ (у гривнях). Визначити, скільки продукції треба виготовити, щоб прибуток був максимальним.

31. Нехай функція $V(x) = 250 + 120x - 0{,}2x^2$ виражає витрати підприємства на виробництво x одиниць продукції (у гривнях). Визначити, чи зростатимуть витрати при збільшенні обсягу виробництва продукції: а) з 250 до 300 одиниць; б) з 300 до 350 одиниць. При якому значенні x витрати будуть максимальними?

32. Знайти інтервали опуклості та точки перегину функції, якщо вони існують:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$; 2) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$; 3) $f(x) = \sqrt{x-4}$;

4) $f(x) = \sqrt[5]{(x+1)^2}$; 5) $f(x) = e^{-x^2}$; 6) $f(x) = xe^x$;

7) $f(x) = 4 - \ln(x+2)$; 8) $f(x) = x \ln x$; 9) $f(x) = |x^2 - 4|$;

10) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$; 11) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^3}$; 12) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$.

33. Знайти асимптоти графіка функції:

а) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$; б) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$; в) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+5}$;

г) $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$; д) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$; е) xe^x; є) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;

ж) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; з) $f(x) = \dfrac{|x+2|}{x^2}$; і) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arctg}\, 2x$.

34. Знайти похилу асимптоту графіка функції $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$ і обчислити відстань до неї від точки $A(x_0; f(x_0))$, де x_0 — точка мінімуму функції f.

§ 5.5. ПОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВА ЇЇ ГРАФІКА

Розглянемо **алгоритм повного дослідження функції f.**

1. *Елементарні дослідження*:

а) знайти область визначення $D(f)$ функції f;

б) дослідити функцію на парність і періодичність;

в) знайти точки перетину графіка функції з осями координат та проміжки знакосталості функції (якщо це можливо) і позначити їх на площині XOY.

2. *Дослідження на неперервність:*

визначити проміжки неперервності та точки розриву функції, з'ясувавши характер точок розриву.

3. *Відшукання асимптот*:

а) знайти вертикальні асимптоти графіка функції і зобразити їх на площині XOY;

б) знайти похилі (зокрема, горизонтальні) асимптоти і зобразити їх на площині XOY.

4. *Дослідження на монотонність та екстремум*:

а) за допомогою похідної f' визначити проміжки монотонності функції f;

б) знайти точки екстремуму та обчислити значення функції в цих точках; зобразити відповідні точки на площині XOY.

5. *Дослідження на опуклість*:

а) за допомогою другої похідної f'' визначити інтервали опуклості функції f;

б) знайти точки перегину графіка функції і зобразити відповідні точки на площині XOY.

6. *Побудова графіка функції*:

а) обчислити значення функції в деяких допоміжних точках і зобразити їх на площині XOY;

б) зобразити графік функції.

Зразок розв'язування вправ

Виконати повне дослідження функцій і побудувати їх графіки:

а) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$; б) $f(x) = x^2 \ln x$;

в) $f(x) = \sin x + \cos x$; г) $f(x) = \dfrac{|x|}{(x-1)^2}$.

Розв'язання. а) 1. Область визначення $D(f) = (-\infty;\, 0) \cup (0;\, +\infty)$. Функція непарна, оскільки $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D(f)$. Отже, графік функції симетричний відносно початку координат, і тому далі виконуватимемо дослідження лише для $x > 0$. Функція не періодична. Графік функції не перетинає координатних осей (чому?). При $x > 0$ маємо $y > 0$, тобто графік розміщується над віссю OX. Функція неперервна у своїй області визначення. У точці $x = 0$ вона має нескінченний розрив: $f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{x^2+4}{x} = -\infty$, $f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{x^2+4}{x} = +\infty$.

2. З попередніх рівностей випливає, що пряма $x = 0$ (вісь ординат) є вертикальною асимптотою. Для визначення похилої асимптоти $y = kx + b$ обчислимо коефіцієнти k і b:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0.$$

Отже, пряма $y = x$ є похилою асимптотою. Її можна знайти простіше, записавши функцію у вигляді $y = x + \dfrac{4}{x}\cdot$ Оскільки $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x} = 0$, то пряма $y = x$ є асимптотою.

3. Скориставшись поданням функції у вигляді $f(x) = x + 4/x$, знайдемо її похідну і прирівняємо до нуля. Дістанемо

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}, \quad \frac{x^2-4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0.$$

Маємо додатний корінь $x = 2$.

Дослідимо функцію на екстремум за другим правилом: $f''(x) = 8/x^3$, $f''(2) > 0$. Отже, при $x = 2$ маємо $f_{\min} = 4$. На проміжку $(0;\, 2)$ функція спадає, а на проміжку — $(2;\, +\infty)$ зростає.

4. Оскільки $f''(x) > 0$ при $x > 0$, то графік функції на цьому інтервалі опуклий вниз і точок перегину не має.

5. Допоміжні точки (1; 5) і (3; 4). Будуємо графік заданої функції для $x > 0$, а потім симетрично відображаємо його відносно початку координат (рис. 5.4).

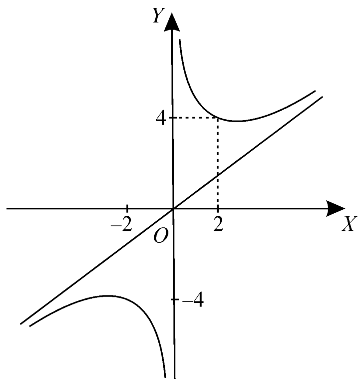


Рис. 5.4

б) Функція $f(x) = x^2 \ln x$ визначена і неперервна при $x > 0$. Вона ні парна, ні непарна, не періодична. Графік функції перетинає осі OX у точці 1 і не перетинає вісь OY; $y < 0$, якщо $x < 1$, і $y > 0$, якщо $x > 1$.

Вертикальних асимптот не існує, оскільки функція неперервна і $\lim\limits_{x\to 0+0} x^2 \ln x = 0$ (покажіть це, застосовуючи правило Лопіталя).

Невертикальних асимптот так само немає, оскільки

$$k = \lim_{x\to+\infty} x \ln x = +\infty.$$

Обчислюємо першу та другу похідні заданої функції: $f'(x) = 2x \ln x + x$, $f''(x) = 2\ln x + 3$, $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Оскільки $f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) > 0$, то функція має мінімум $f_{\min} = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$. На інтервалі $\left(0; \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ функція спадає, а на інтервалі $\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ зростає.

5. Похідна $f''(x) = 0$, якщо $x = \dfrac{1}{e\sqrt{e}}$. На інтервалі $(0; \dfrac{1}{\sqrt{e}})$ похідна $f''(x) < 0$, отже, функція опукла вгору, а на інтервалі $\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ похідна $f''(x) > 0$ і тому функція опукла вниз.

Точка $x_0 = \dfrac{1}{e\sqrt{e}}$ є точкою перегину функції f. Ураховуючи, що $f(x_0) = -\dfrac{3}{2e^3}$, дістаємо точку перегину графіка функції $(1/e\sqrt{e}; -3/2e^3)$.

6. Допоміжні точки графіка $(e; e^2)$ і $(1/e^2; -1/e^2)$. Ураховуючи виконане дослідження, будуємо графік заданої функції (рис.5.5).

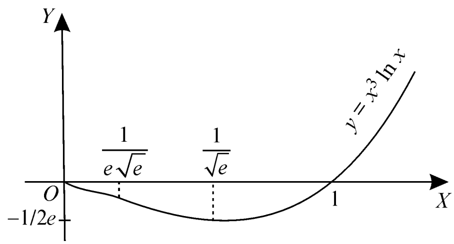


Рис. 5.5

в) Функція $f(x) = \sin x + \cos x$ визначена, неперервна і диференційовна $\forall x \in R$; ні парна, ні непарна; періодична з періодом 2π. При $x = 0$ маємо $y = 1$, а з рівняння $\sin x + \cos x = 0$ випливає, що графік функції перетинає вісь OX у точках $-\dfrac{\pi}{4}$ і $\dfrac{3\pi}{4}$ (розглядаємо функцію на відрізку $[-\pi; \pi]$ довжиною 2π).

Графік функції не має асимптот (поясніть, чому).

Обчислимо похідну і прирівняємо її до нуля: $f'(x) = \sin x - \cos x$, $\cos x = \sin x$. Звідси знаходимо дві стаціонарні точки $-\dfrac{3\pi}{4}$ і $\dfrac{\pi}{4}$, які належать відрізку $[-\pi; \pi]$. Обчислимо другу похідну: $f''(x) = -\sin x - \cos x$. Оскільки $f''\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) > 0$ і $f''\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) < 0$, то $f_{\min} = f\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$; $f_{\max} = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

Прирівнюючи другу похідну до нуля, дістаємо, що в точках з абсцисами $-\dfrac{\pi}{4}$ і $\dfrac{3\pi}{4}$ графік функції має перегин (покажіть це). Отже, точки $\left(-\dfrac{\pi}{4};\, 0\right)$ і $\left(-\dfrac{3\pi}{4};\, 0\right)$ є точками перегину. При переході через першу з них графік змінює опуклість вниз на опуклість вгору, а при переході через другу — навпаки.

Після цього будуємо графік функції $f(x) = \sin x + \cos x$ на відрізку $[-\pi;\, \pi]$, а потім повторюємо цю частину графіка на кожному відрізку довжиною 2π (рис. 5.6).

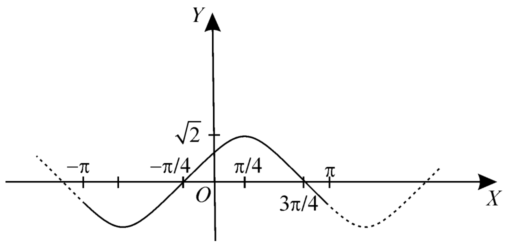


Рис. 5.6

г) Функція $f(x) = \dfrac{|x|}{(x-1)^2}$ визначена на множині $D(f) = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ і неперервна на ній; ні парна, ні непарна; не періодична.

При $x = 0$ маємо $y = 0$. Точка 1 є точкою розриву другого роду, оскільки $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = +\infty$. Тому пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

Горизонтальною асимптотою є пряма $y = 0$, оскільки $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|x|}{(x-1)^2} = 0$. Запишемо задану функцію у вигляді

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{(x-1)^2}, & x \geq 0, \\ -\dfrac{x}{(x-1)^2}, & x < 0 \end{cases}$$

і обчислимо її першу та другу похідні:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x+1}{(x-1)^3}, & x > 0, \\ \dfrac{x+1}{(x-1)^3}, & x < 0; \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+4}{(x-1)^4}, & x > 0, \\ -\dfrac{2x+4}{(x-1)^4}, & x < 0. \end{cases}$$

Критичними точками функції є -1 і 0. Неважко перевірити, що $f_{\min} = f(0) = 0$; $f_{\max} = f(-1) = 1/4$. Далі маємо $f''(x) = 0$ при $x = -2$, похідна f'' не існує в точці $x = 0$. Обидві ці точки є точками перегину функції, оскільки при переході x через ці точки друга похідна змінює знак.

Результати досліджень подамо у вигляді таблиці

x	$(-\infty;\,-2)$	-2	$(-2;\,-1)$	-1	$(-1;\,0)$
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$
f''	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f	$\nearrow$ $\smile$	$2/9$ т. п.	$\nearrow$ $\frown$	$f_{\max} = 1/4$ $\frown$	$\searrow$ $\frown$

x	0	$(0;\,1)$	1	$(1;\,+\infty)$
f'	не існує	$+$	∞	$-$
f''	не існує	$+$	$+\infty$	$+$
f	$f_{\min} = 0$ т. п.	$\nearrow$ $\smile$	$+\infty$ $\smile$	$\searrow$ $\smile$

Використовуючи наведені дані, будуємо графік функції (рис. 5.7).

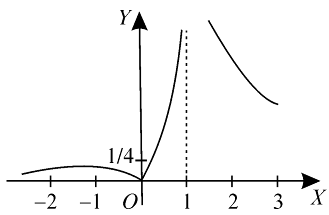


Рис. 5.7

Завдання для самостійного розв'язування

35. Виконати повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $f(x) = 4 - x^2$; 2) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; 3) $f(x) = x^3 - 3x$;

4) $f(x) = (x+2)(x-1)^2$; 5) $f(x) = 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{2}$;

6) $f(x) = \dfrac{4x^3 - x^4}{5}$; 7) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$; 8) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$;

9) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$; 10) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$; 11) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+2x}$;

12) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-4}$; 13) $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2+3}$; 14) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$;

15) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{x^2}$; 16) $f(x) = e^{-x^2}$; 17) $f(x) = x + e^{-x}$;

18) $f(x) = xe^x$; 19) $f(x) = \ln^2 x$; 20) $f(x) = \ln\sin x$;

21) $f(x) = x\ln x$; 22) $f(x) = \ln(x^2+1)$; 23) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

24) $f(x) = \sqrt{x-1}$; 25) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.

36. Прибуток P від реалізації x одиниць продукції виражається функцією $P(x) = -x^3 + 75x^2 - 1200x - 7400$ (грн). Виконати повне дослідження функції та пояснити економічний зміст одержаних результатів. Побудувати графік заданої функції. Визначити проміжок рентабельності підприємства (коли прибуток набуває додатних значень), знайшовши наближено методом хорд кінці цього проміжку.

37. Кількість хворих $p(t)$ під час епідемії грипу змінювалась з часом t (у днях) від початку вакцинації населення за законом $p(t) = \dfrac{200t}{t^2+100}$. Визначити час максимуму захворювання, інтервали його зростання і спадання та побудувати графік заданої функції.

Розділ 6

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§ 6.1. ОЗНАЧЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ. МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Функцію $F(x)$ називають *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку X, якщо в кожній точці $x \in X$ виконується умова $F'(x) = f(x)$.

Множину всіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку X називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначають так:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \tag{6.1}$$

де $f(x)$ — підінтегральна функція; $f(x)\,dx$ — підінтегральний вираз; x — змінна інтегрування; $F(x)$ — одна з первісних; c — довільне дійсне число.

Властивості невизначеного інтеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.   2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)\,dx$.

4. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$.

Таблиця невизначених інтегралів:

1. $\int a dx = ax + c.$

2. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + c, \quad m \neq -1.$

Зокрема, $\int x dx = \dfrac{x^2}{2} + c$, $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$, $\int \dfrac{1}{x^2} dx = -\dfrac{1}{x} + c.$

3. $\int \dfrac{dx}{x} dx = \ln|x| + c.$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$

5. $\int \cos x dx = \sin x + c.$

6. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c.$

7. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c.$

8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c.$ Зокрема, $\int e^x dx = e^x + c.$

9. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + c.$ Зокрема, $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c.$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + c.$ Зокрема, $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + c.$

11. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + c.$

12. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + c.$

13. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} dx = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c.$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c.$

Методи інтегрування:

- табличний — використовують табличні інтеграли, властивості інтегралів та підінтегральної функції;
- заміни (метод підстановки) — полягає у використанні формули

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \tag{6.2}$$

  де $x = \varphi(t)$; $dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)\,dt$;
- інтегрування частинами — базується на використанні формули

$$\int udv = uv - \int vdu,\ \ v = \int dv,\ \ du(x) = u'(x)\,dx. \tag{6.3}$$

Зразки розв'язування вправ

1. Обчислити інтеграл методом безпосереднього інтегрування:

а) $\int \sqrt[3]{x}dx$; б) $\int \left(5 - x^3\right)^2 dx$;

в) $\int (2\sin x - 3\cos x)\,dx$; г) $\int \dfrac{dx}{x^2+3}$.

Розв'язання. а) За формулою 2 з таблиці невизначених інтегралів для $m = \dfrac{1}{3}$ дістаємо

$$\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}+1}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + c.$$

б) Розкриємо дужки під знаком інтеграла і за формулою для $\int x^m dx$ визначаємо

$$\int \left(5 - x^3\right)^2 dx = \int \left(25 - 10x^3 + x^6\right) dx = 25x - \frac{10x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + c =$$

$$= 25x - 2,5x^4 + \frac{1}{7}x^7 + c.$$

в) Згідно з властивостями 3 і 4 невизначеного інтеграла і табличними інтегралами маємо

$$\int(2\sin x - 3\cos x)dx = 2\int\sin x\,dx - 3\int\cos x\,dx = -2\cos x - 3\sin x + c.$$

г) За формулою 9 для $a=\sqrt{3}$ дістаємо

$$\int\frac{dx}{x^2+3} = \int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + c.$$

2. Обчислити інтеграл методом заміни (підстановки):

а) $\displaystyle\int\sin 5x\,dx$; б) $\displaystyle\int\frac{dx}{5x+2}$; в) $\displaystyle\int\operatorname{tg}x\,dx$; г) $\displaystyle\int 3x^2e^{x^3}dx$;

д) $\displaystyle\int(7x+2)^{2002}dx$; е) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$; є) $\displaystyle\int\frac{5x\,dx}{1+x^4}$;

ж) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+6x+12}$; з) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+6x+7}$; і) $\displaystyle\int\frac{x+3}{x^2+4x+8}dx$.

Розв'язання. а) Замінимо змінну $t=5x$. Тоді $dt=(5x)'\,dx = 5dx \Rightarrow \displaystyle\int\sin 5x\,dx = \frac{1}{5}\int\sin 5x d(5x) = \frac{1}{5}\int\sin t dt = -\frac{1}{5}\cos t + c = -\frac{1}{5}\cos 5x + c$.

б) Замінимо змінну $t=5x+2$. Тоді

$$\int\frac{dx}{5x+2} = \frac{1}{5}\int\frac{d\,(5x+2)}{5x+2} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t| + c = \frac{1}{5}\ln|5x+2| + c.$$

в) $\displaystyle\int\operatorname{tg}x\,dx = \int\frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \int\frac{d\,(\cos x)}{\cos x} = |t=\cos x| = -\int\frac{dt}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$.

г) $\displaystyle\int 3x^2e^{x^3}dx = \int e^{x^3}d\left(x^3\right) = \left|t=x^3\right| = \int e^t dt = e^t + c = e^{x^3} + c$.

д) $\int (7x+2)^{2002}dx = \frac{1}{7}\int (7x+2)^{2002} d\,(7x+2) = \left| \begin{array}{c} t = 7x+2 \\ dx = \frac{1}{7}dt \end{array} \right| =$

$= \frac{1}{7}\int t^{2002}dt = -\frac{1}{7}\frac{t^{2003}}{2003} + c = \frac{(7x+2)^{2003}}{14021} + c.$

е) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}} = \left|t = x^2+1\right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$

$= \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{t} + c = \sqrt{x^2+1} + c.$

є) $\int \frac{5x\,dx}{1+x^4} = \frac{5}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{1+\left(x^2\right)^2} = \left|t = x^2\right| = \frac{5}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{5}{2}\operatorname{arctg} t +$

$+ c = \frac{5}{2}\operatorname{arctg} x^2 + c.$

ж) $\int \frac{dx}{x^2+6x+12} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+3} = \int \frac{d\,(x+3)}{(x+3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} =$

$= |t = x+3| = \int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{3}} + c.$

з) $\int \frac{dx}{x^2+6x+7} = \int \frac{dx}{(x+3)^2-2} = \int \frac{d\,(x+3)}{(x+3)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} =$

$= |t = x+3| = \int \frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + c =$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+3-\sqrt{2}}{x+3+\sqrt{2}}\right| + c.$

і) $\int \frac{x+3}{x^2+4x+8}dx = \left| \begin{array}{c} \left(x^2+4x+8\right)' = 2x+4 \\ x+3 = \frac{1}{2}(2x+4)+1 \end{array} \right| =$

$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+4)+1}{x^2+4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)}{x^2+4x+8}dx + \int \frac{1}{x^2+4x+8}dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \int \frac{d\,(x+2)}{(x+2)^2+2^2} = |t = x+2| = \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + c =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+8\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + c.$$

3. Обчислити інтеграл методом інтегрування за частинами:

а) $\int xe^x\,dx$; б) $\int x\cos x\,dx$; в) $\int \ln x\,dx$; г) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$;

д) $\int \sqrt[3]{x}\,(\ln x)^2\,dx$; е) $\int \frac{x\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. а) Щоб скористатись базовою формулою (6.3), позначимо $u = x$, $dx = e^x dx$. Тоді $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$. Підставивши u, v і dv у праву частину базової формули, дістанемо

$$\int xe^x dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right| =$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x\,(x-1) + c.$$

б) Щоб скористатись базовою формулою (6.3), позначимо $u = x$, $dv = \cos x\,dx$. Тоді $du = dx$, $v = \int \cos x\,dx = \sin x$. Підставивши u, v і dv у праву частину базової формули, дістанемо

$$\int x\cos x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = \cos x\,dx \\ du = dx & v = \sin x \end{matrix} \right| = x\sin x - \int \sin x\,dx =$$

$$= x\sin x + \cos x + c.$$

в) $$\int \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = x \end{matrix} \right| = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x -$$

$$- \int dx = x\,(\ln x - 1) + c.$$

г) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} & v = x \end{matrix} \right| =$

$$= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \left| \begin{matrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{matrix} \right| =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{dt}{t} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|t| + c = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c.$$

д) У розглядуваному випадку інтегрування за частинами потрібно застосувати кілька разів:

$$\int \sqrt[3]{x}\,(\ln x)^2\,dx = \left| \begin{matrix} u = (\ln x)^2 & du = 2\ln x\,(\ln x)'\,dx = 2\ln x\dfrac{1}{x}dx \\ dv = \sqrt[3]{x}dx & v = \int \sqrt[3]{x}dx = \dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x} \end{matrix} \right| =$$

$$= (\ln x)^2\,\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - \int \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\frac{2\ln x\,dx}{x} = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\,(\ln x)^2 - \frac{3}{2}\int \sqrt[3]{x}\ln x\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \ln x & dv = \sqrt[3]{x}dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x} \end{matrix} \right| = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\,(\ln x)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\ln x -\right.$$

$$\left. - \int \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\frac{dx}{x}\right) = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\,(\ln x)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\ln x - \frac{3}{4}\int \sqrt[3]{x}dx\right) =$$

$$= \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\,(\ln x)^2 - \frac{9}{8}x\sqrt[3]{x}\ln x - \frac{9}{8}\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + c =$$

$$= \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\left((\ln x)^2 - \frac{3}{2}\ln x + \frac{9}{8}\right) + c.$$

е) $\displaystyle\int \frac{x \arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x & dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = \int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{matrix} \right| =$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int \left(-\sqrt{1-x^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int dx = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C.$$

Завдання для самостійного розв'язування

1. Обчислити невизначений інтеграл методом безпосереднього інтегрування:

$$\text{а) } \int \frac{3}{x^2+5}dx;\;\; \text{б) } \int \frac{dx}{x^{12}};\;\; \text{в) } \int \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{4}{\sqrt{x^2+2}}dx;\;\; \text{д) } \int \frac{4}{4x-7}dx;\;\; \text{е) } \int (2^x - 4\sin x)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни:

$$\text{а)} \int \cos 3x\, dx;\;\; \text{б) } \int \left(1+8\operatorname{tg}^7 x\right) \frac{1}{\cos^2 x}dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{1+2\ln^3 x}{x}dx;\;\; \text{г) } \int \cos\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2};\;\; \text{д) } \int \frac{arctg^5 x\, dx}{1+x^2};$$

$$\text{е) } \int \sin^n x\cos x\, dx;\;\; \text{є) } \int \cos^n x \sin x\, dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування за частинами:

$$\text{а) } \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx;\;\; \text{б) } \int x^2 e^{3x} dx;\;\; \text{в) } \int x2^x dx;$$

$$\text{г) } \int \arcsin 2x\, dx;\;\; \text{д) } \int x^9 \ln x\, dx;\;\; \text{е) } \int \frac{x \arcsin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл, вибравши один з методів інтегрування:

$$\text{а) } \int \frac{3}{\sqrt{x^3}}dx;\; \text{б) } \int \left(3x^3+6\cos x\right) dx;\; \text{в) } \int \frac{5x\, dx}{2x^2-3};\; \text{г) } \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx;$$

$$\text{д) } \int \left(1+2\operatorname{tg}^3 x\right) \frac{dx}{\cos^2 x};\;\; \text{е) } \int x\cos 3x\, dx;\;\; \text{є) } \int x^2 \operatorname{arctg} 3x\, dx.$$

§ 6.2. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Функцію $y = f(x)$ називають *раціональною*, якщо її можна подати у вигляді $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x), Q(x)$ — многочлени з дійсними коефіцієнтами.

Якщо степінь многочлена $P(x)$ менший від степеня многочлена $Q(x)$, то раціональний дріб називають *правильним*, а якщо перевищує його або дорівнює йому, — *неправильним* і його завжди можна перетворити на *правильний*, виділивши цілу частину:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}. \tag{6.4}$$

Найпростішими раціональними називають такі дроби:

1. $\dfrac{b}{x+a}$.

2. $\dfrac{b}{(x+a)^n}$, $n \geq 2$, $n \in N$.

3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $p^2 - 4q < 0$.

4. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, $p^2 - 4q < 0$, $n \geq 2$, $n \in N$.

Будь-який правильний раціональний дріб можна подати у вигляді скінченної суми найпростіших раціональних дробів.

Отже, для інтегрування раціонального дробу використовують алгоритм:

1-й крок (виконується для неправильних дробів). Виділити цілу частину $(M(x))$ і правильний дріб $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$.

2-й крок. Розкласти дріб $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ на суму найпростіших раціональних дробів.

3-й крок. Проінтегрувати цілу частину $M(x)$ і кожний з утворених найпростіших раціональних дробів. Останній крок алгоритму можливий завдяки використанню наведених далі формул.

Інтеграли від найпростіших раціональних дробів:

$$1.\ \int \frac{b}{x+a}dx = b\ln|x+a| + c. \tag{6.5}$$

$$2.\ \int \frac{b}{(x+a)^n}dx = \frac{b}{1-n}\frac{1}{(x+a)^{n-1}} + c. \tag{6.6}$$

$$3.\ \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-pA}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + c. \tag{6.7}$$

Зразки розв'язування вправ

Обчислити інтеграл від раціональних функцій:

а) $\int \frac{dx}{x-6}$; б) $\int \frac{dx}{7-x}$; в) $\int \frac{dx}{13-5x}$; г) $\int \frac{dx}{(x-4)^3}$;

д) $\int \frac{dx}{(5-3x)^3}$; е) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}dx$;

є) $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$; ж) $\int \frac{3x^3+8}{x^2+4}dx$.

Розв'язання. а) За формулою (6.5) $\int \frac{dx}{x-6} = \ln|x-6| + c$.

б) Аналогічно попередньому прикладу $\int \frac{dx}{7-x} = -\ln|7-x| + c$.

в) $\int \frac{dx}{13-5x} = -\frac{1}{5}\ln|13-5x| + c$.

г) Використовуючи формулу (6.5) маємо

$$\int \frac{dx}{(x-4)^3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x-4)^2} + c = \frac{1}{2(x-4)^2} + c.$$

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5-3x)^3} = -\frac{1}{3}\int \frac{-3dx}{(5-3x)^3} + c = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(5-3x)^2}\right) + c =$

$$= \frac{1}{6\,(5-3x)^2} + c.$$

е) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right| + \frac{2\cdot 2 - 2\cdot 3}{\sqrt{4\cdot 5 - 2^2}} \times$

$\displaystyle\times \operatorname{arctg}\frac{2x+2}{\sqrt{4\cdot 5-2^2}} + c = \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+5| - \frac{2}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+2}{4} + c =$

$\displaystyle= \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + c.$

є) Розкладемо підінтегральний раціональний дріб на найпростіші раціональні дроби:

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2},$$

де A, B, C — невідомі коефіцієнти розкладання. Щоб знайти ці коефіцієнти, приведемо праву частину до спільного знаменника і, прирівнявши чисельники, дістанемо

$$3x^2 + 8 = A\,(x+2)^2 + Bx\,(x+2) + Cx =$$
$$= (A+B)\,x^2 + (4A+2B+C)\,x + 4A.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} A+B=3, \\ 4A+2B+C=0, \\ 4A=8, \end{cases}$$

розв'язком якої є $A=2$, $B=1$, $C=-10$, тобто

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2}.$$

Отже,

$$\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2}\right) dx =$$

$$= 2\ln|x| + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + c.$$

ж) Підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом. Виділимо цілу частину цього дробу і правильний раціональний дріб:

$$\frac{3x^3+8}{x^2+4} = 3x + \frac{-12x+8}{x^2+4}.$$

Тому

$$\int \frac{3x^3+8}{x^2+4}dx = \int 3x\,dx + \int \frac{-12x+8}{x^2+4}dx =$$

$$= \frac{3x^2}{2} - 6\ln\left(x^2+4\right) + 4\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c.$$

Завдання для самостійного розв'язування

5. Проінтегрувати раціональний дріб:

а) $\int \frac{dx}{15+5x}$; б) $\int \frac{dx}{7x+6}$; в) $\int \frac{dx}{x^2+6x+7}$;

г) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}dx$; д) $\int \frac{5x+18}{(x+4)(x+3)}dx$;

е) $\int \frac{3x-1}{x^2-6x+10}dx$; є) $\int \frac{3x-1}{x^2-2x-3}dx$;

ж) $\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2}dx$; з) $\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}dx$.

§ 6.3. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Інтегрування тригонометричних функцій

Інтеграли виду $\int \sin^{2n} x\, dx$ і $\int \cos^{2n} x\, dx$ обчислюють спрощенням підінтегральних функцій за допомогою формул пониження степеня

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};\ \cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

При знаходженні інтегралів виду

$$\int \sin(kx) \sin(mx)\, dx,\ \int \cos(kx) \cos(mx)\, dx,\ \int \sin(kx)\cos(mx)\, dx$$

використовують формули

$$\sin kx \sin mx = \frac{1}{2}\left(\cos(k-m)x - \cos(k+m)x\right);$$

$$\cos kx \cos mx = \frac{1}{2}\left(\cos(k-m)x + \cos(k+m)x\right);$$

$$\sin kx \cos mx = \frac{1}{2}\left(\sin(k+m)x + \sin(k-m)x\right).$$

При інтегруванні функцій виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$ варто користуватись наведеними далі правилами.

1. Якщо показник степеня синуса m є непарним додатним числом ($m = 2k+1,\ k \in N$), то підінтегральний вираз перетворимо так, щоб виділити перший степінь синуса:

$$\sin^{2k+1} x = \sin^{2k} x \sin x = \left(\sin^2 x\right)^k \sin x = \left(1-\cos^2 x\right)^k \sin x.$$

Вводячи заміну під знаком інтеграла $\cos x = z,\ dz = -\sin x\, dx$, зводимо інтеграл до інтегрування степеневої функції:

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x\, dx = \int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x\, dx =$$

$$= \int \left(1-\cos^2 x\right)^k \cos^n x d(\cos x) = \int \left(1-t^2\right)^k t^n dt.$$

2. Якщо показник степеня косинуса n є непарним додатним числом ($n = 2k+1,\ k \in N$), то потрібно виділити перший степінь косинуса:

$$\cos^{2k+1} x = \cos^{2k} x \cos x = \left(\cos^2 x\right)^k \cos x = \left(1-\sin^2 x\right)^k \cos x.$$

Вводячи заміну $\sin x = t$ (тоді $dt = \cos x\, dx$), зводимо інтегрування тригонометричної функції до інтегрування степеневої функції:

$$\int \sin^n x \cos^{2k+1} x\, dx = \int \sin^n x \cos^{2k} x \cos x\, dx =$$

$$= \int \sin^n x \left(1-\sin^2 x\right)^k d(\sin x) = \int t^n \left(1-t^2\right)^k dt.$$

3. Якщо сума показників степенів синуса і косинуса $m+n$ є парним від'ємним числом, то інтегрування здійснюють за допомогою однієї з підстановок $\operatorname{tg} x = z$ або $\operatorname{ctg} x = z$. При цьому справедливі такі формули:

якщо $\operatorname{tg} x = z$, то $dx = \dfrac{dz}{1+z^2}$; $\sin x = \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$;

якщо $\operatorname{ctg} x = z$, то $dx = -\dfrac{dz}{1+z^2}$; $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$;
$\cos x = \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}$.

При інтегруванні функцій $f(x) = R(\sin x, \cos x)$, що є раціональними функціями від $\sin x$, $\cos x$, ефективним є використання універсальної тригонометричної підстановки $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$. Тоді

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t}{1+t^2}, \quad dx = 2\left(\operatorname{arctg} t\right)' dt = \frac{2}{1+t^2} dt$$

та інтеграл від тригонометричної функції зводиться до інтеграла від раціональної функції аргументу t.

Інтегрування ірраціональних функцій

Проінтегрувати функції, що містять ірраціональності виду $\sqrt[n_1]{x^{k_1}}$, $\sqrt[n_2]{x^{k_2}}, \ldots,$ $\sqrt[n_s]{x^{k_{1s}}}$ можна за допомогою підстановки $x = \sqrt[n_0]{t}$, де n_0 — найменше спільне кратне чисел $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_s$.

Інтеграли виду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n}{m}}\right) dx$, де R — раціональна функція зводяться до інтегралів від раціональних функцій змінної t за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$.

Інтегрування функції $f(x)$, яка є раціональною від функцій $f_1(x) = x$ та $f_2(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$, приводять до інтегрування раціональних функцій змінної t за допомогою однієї з підстановок Ейлера:

якщо $a > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$;

якщо $c > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{c}$;

якщо α — один з дійсних коренів рівняння $ax^2+bx+c=0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\,t$.

Зразки розв'язування вправ

1. Обчислити інтеграл:

а) $\int \sin x \cos x\, dx$; б) $\int \sin^2 x\, dx$; в) $\int \cos^3 x\, dx$;

г) $\int \cos 3x \cos x\, dx$; д) $\int \sin x \cos 2x \cos 3x\, dx$; е) $\int \cos^7 x\, dx$;

є) $\int \sin^6 x \cos^3 x\, dx$; ж) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$; з) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx$;

і) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx$; ї) $\int \frac{dx}{\sin^5 x} dx$.

Розв'язання. а) $\int \sin x \cos x\, dx = \int \frac{1}{2} \sin 2x\, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x\, dx = = \frac{1}{4}\int \sin 2x d(2x) = |t = 2x| = \frac{1}{4}\int \sin t dt = -\frac{1}{4} \cos t + c = -\frac{1}{4} \cos 2x + c.$

б) $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x - - \frac{1}{4}\int \cos 2x d\,(2x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c.$

в) $\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int \left(1-\sin^2 x\right) d\left(\sin x\right) =$

$$= |t = \sin x| = \int dt - \int t^2 dt = t - \frac{t^3}{3} = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

г) $\int \cos 3x \cos x\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos 4x\right) dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos 2x + \cos 4x\right) dx = \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin 4x}{4} + c = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{8} + c.$$

д) $\int \sin x \cos 2x \cos 3x\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin\left(-x\right) + \sin 3x\right)\cos 3x\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \sin\left(-x\right)\cos 3x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin\left(3x\right)\cos 3x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\left(\sin\left(-4x\right) + \sin 2x\right) dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\sin 6x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(-\sin 4x + \sin 2x\right) dx + \frac{1}{4}\int \sin 6x\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 2x}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 6x}{6}\right) + c = \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 2x}{8} - \frac{\cos 6x}{24} + c.$$

е) $\int \cos^7 x\,dx = \int \cos^6 x \cos x\,dx = \int \left(\cos^2 x\right)^3 \cos x\,dx =$

$$= \int \left(1-\sin^2 x\right)^3 d\left(\sin x\right) = \left|\begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array}\right| = \int \left(1-t^2\right)^3 dt =$$

$$= \int \left(1^3 + 3\cdot 1t^4 - 3\cdot 1^2 t^2 - t^6\right) dt = \int \left(1 + 3t^4 - 3t^2 - t^6\right) dt =$$

$$= t + \frac{3t^5}{5} - \frac{3t^3}{3} - \frac{t^7}{7} + c = \sin x + \frac{3}{5}\sin x^5 - \sin x^3 - \frac{1}{7}\sin x^7 + c.$$

є) $\int \sin^6 x \cos^3 x\,dx = \int \sin^6 x \cos^2 x \cos x\,dx =$

$$= \int \sin^6 x\left(1-\sin^2 x\right) d\left(\sin x\right) = \left|\begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array}\right| = \int t^6\left(1-t^2\right) dt =$$

$$= \int \left(t^6 - t^8\right) dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^9}{9} + c = \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{\sin^9 x}{7} + c.$$

ж) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\cos x} dx = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right) \sin x \, dx}{\cos x} =$

$$= \left| \begin{array}{c} \cos x = z \\ -\sin x \, dx = dz \end{array} \right| = \int \frac{\left(1-z^2\right)(-dz)}{z} = -\int \frac{\left(1-z^2\right) dz}{z} =$$

$$= -\int \left(\frac{1}{z} - z\right) dz = -\int \frac{1}{z} dz + \int z dz = -\ln|z| + \frac{z^2}{2} + c =$$

$$= -\ln|\cos x| + \frac{\cos^2 x}{2} + c.$$

з) При обчисленні цього інтегралу засвідчуємось, що сума степенів при косинусі та синусі є від'ємним парним числом. Тому підходить заміна $z = \operatorname{ctg} x$. Тоді

$$dx = -\frac{dz}{1+z^2}; \quad \sin x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}; \quad \cos x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}};$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx = \int \frac{\frac{z^4}{\sqrt{\left(1+z^2\right)^4}}}{\frac{1}{\sqrt{\left(1+z^2\right)^6}}} \frac{dz}{1+z^2} = -\int z^4 dz = -\frac{z^5}{5} + c =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + c.$$

і) У цьому випадку сума степенів при косинусі та синусі є також від'ємним парним числом і підходить підстановка $z = \operatorname{tg} x$. Тоді

$$dx = \frac{dz}{1+z^2}, \sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}};$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx = \int \frac{\frac{z^3}{\sqrt{\left(1+z^2\right)^3}}}{\frac{1}{\sqrt{\left(1+z^2\right)^7}}} \frac{dz}{1+z^2} = \int z^3 \sqrt{\left(1+z^2\right)^4} \frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= \int z^3 \left(1+z^2\right)^2 \frac{dz}{1+z^2} = \int z^3 \left(1+z^2\right) dz =$$

$$= \int \left(z^3+z^5\right) dz = \frac{z^4}{4} + \frac{z^6}{6} + c = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} + c.$$

ї) При обчисленні цього інтеграла скористаємось універсальною заміною $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = z$, звідки $dx = \dfrac{2dz}{1+z^2}$; $\sin x = \dfrac{2z}{1+z^2}$. Тому

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} dx = \int \frac{\dfrac{2dz}{1+z^2}}{\dfrac{32z^5}{\left(1+z^2\right)^5}} = \frac{1}{16} \int \frac{\left(1+z^2\right)^4}{z^5} dz =$$

$$= \frac{1}{16} \int \frac{1+4z^2+6z^4+4z^6+z^8}{z^5} dz =$$

$$= \frac{1}{16} \int z^{-5} + 4z^{-3} + \frac{6}{z} + 4z + z^3 dz =$$

$$= \frac{1}{16} \left(\frac{z^{-4}}{-4} + \frac{4z^{-2}}{-2} + 6 \ln|z| + \frac{4z^2}{2} + \frac{z^4}{4} \right) + c =$$

$$= -\frac{1}{4z^4} - \frac{1}{8z^2} + \frac{3}{8} \ln|z| + \frac{z^2}{8} + \frac{z^4}{64} + c =$$

$$= -\frac{1}{4 \operatorname{tg}^4 \dfrac{x}{2}} - \frac{1}{8 \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}} + \frac{3}{8} \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}}{8} + \frac{\operatorname{tg}^4 \dfrac{x}{2}}{64} + c.$$

2. Обчислити інтеграли:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$; б) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx$; г) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+x+2} dx$.

Розв'язання. а) Підінтегральний вираз містить корені другого та третього степеня. Найменшим спільним кратним цих чисел є 6. Тому здійснимо підстановку $x = t^6$. Звідки $dx = 6t^5dt$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$;

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + c = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + c.$$

б) У цьому випадку найменшим спільним кратним двох коренів є 4. Здійснюючи підстановку $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$, дістаємо

$$\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}}dx = \int \frac{1+t}{t^4 + t^2}4t^3dt = 4\int \frac{t^2 + t}{t^2 + 1}dt = 4\int \left(1 + \frac{t-1}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= 4 \left(\int dt + \int \frac{tdt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1}\right) = 4t + 2\ln\left|t^2 + 1\right| - 4\operatorname{arctg} t + c =$$

$$= 4\sqrt[4]{x} + 2\ln\left(1 + \sqrt{x}\right) - 4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + c.$$

в) Виділивши повний квадрат у квадратному тричлені та здійснивши заміну $t = x + 1$, дістанемо

$$\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}dx = \int \frac{2x+5}{\sqrt{(x+1)^2 + 4}}dx = \left| \begin{array}{c} t = x+1, dt = dx, \\ x = t - 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2t+3}{\sqrt{t^2+4}}dt = 2\int \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt + 3\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \int \frac{d\left(t^2+4\right)}{\sqrt{t^2+4}} +$$

$$+ 3\ln\left|t + \sqrt{t^2+4}\right| = 2\sqrt{t^2+4} + 3\ln\left|t + \sqrt{t^2+4}\right| + c =$$

$$= 2\sqrt{x^2 + 2x + 5} + 3\ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}\right| + c.$$

г) Здійснимо підстановку Ейлера: $t - x = \sqrt{x^2 + x + 2}$. Піднесемо до квадрату ліву і праву частини цієї рівності: $t^2 - 2x + x^2 = x^2 + x + 2$, звідки $x = \dfrac{t^2-2}{3}$, $dx = \dfrac{2}{3}tdt$, $\sqrt{x^2+x+2} = t - \dfrac{t^2-2}{3} = \dfrac{-t^2+3t+2}{3}$;

$$\int \sqrt{x^2 + x + 2}dx = \int \frac{-t^2+3t+2}{3}\frac{2}{3}tdt = \frac{2}{9}\int \left(-t^3 + 3t^2 + 2t\right) dt =$$

$$= \frac{2}{9}\left(-\frac{t^4}{4}+t^3+t^2\right)+c = -\frac{1}{18}\left(x+\sqrt{x^2+x+2}\right)^4 +$$

$$+\ \frac{2}{9}\left(x+\sqrt{x^2+x+2}\right)^3+\frac{2}{9}\left(x+\sqrt{x^2+x+2}\right)^2+c.$$

Завдання для самостійного розв'язування

6. Обчислити інтеграли:

а) $\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx$; б) $\int \sin 4x \cos 6x\,dx$; в) $\int \sin x \sin 2x \cos 3x\,dx$;

г) $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$; д) $\int \frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}$; е) $\int \cos^7 x\,dx$;

є) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}dx$; ж) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$; з) $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x^2}}$;

і) $\int \frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{8-6x+x^2}}$; ї) $\int x\sqrt{x^2+4x+2}dx$.

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§ 6.4. ОЗНАЧЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$ і $a = x_0 < < x_1 < \cdots < x_n = b$ є довільним розбиттям цього відрізка на n частин. *Інтегральною сумою* функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ називають суму виду

$$s_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i \Delta x_i),$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; ξ_i — довільна точка проміжку $[x_{i-1}, x_i]$.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми $s_n(f)$, коли максимальна з різниць Δx_i прямує до нуля, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a,b]$ на частини, ні від вибору точок ξ_i, то цю границю називають *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначають так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i \Delta x_i).$$

При цьому функцію $f(x)$ називають *інтегровною* на відрізку $[a,b]$.

Формула Ньютона — Лейбниця. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, а функція $F(x)$ є однією з первісних для $f(x)$ на цьому відрізку, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Властивості визначеного інтеграла:

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

2. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$

4. $\int\limits_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x) + \dots$
$\dots + \int\limits_a^b f_n(x)dx.$

5. $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx.$

Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, а функції $x=\varphi(t)$ і $x'=\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha,\beta]$, де $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta F(t)dt. \tag{6.8}$$

Інтегрування за частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u=u(x)$, $v=v(x)$ та їх похідні $u'(x)$, $v'(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu, \tag{6.9}$$

де $uv\Big|_a^b = u(b)v(b)-u(a)v(a)$.

Зразок розв'язування вправ

Обчислити визначений інтеграл:

а) $\int\limits_1^2 5x^2dx$; б) $\int\limits_0^4 \dfrac{dx}{\sqrt{3x+4}}$; в) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \dfrac{dx}{e^x-e^{-x}}$;

г) $\int\limits_0^1 x\operatorname{arctg}x\,dx$; д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{2+\cos x}$.

Розв'язання. а) Знайдемо одну з первісних функцій і скористаємось формулою Ньютона — Лейбниця:

$$\int_1^2 5x^2dx = 5\int_1^2 x^2dx = 5\frac{x^3}{3}\bigg|_1^2 = 5\left(\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right) = 5\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= 5\cdot\frac{7}{3} = \frac{35}{3}.$$

б) $$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} = \frac{1}{3}\int_0^4 (3x+4)^{-\frac{1}{2}}dx(3x+4) = \frac{2}{3}(3x+4)^{\frac{1}{2}}\bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{2}{3}\left((3\cdot4+4)^{\frac{1}{2}}-(3\cdot0+4)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(16^{\frac{1}{2}}-4^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{3}(4-2) = \frac{4}{3}.$$

в) Замінимо змінну $t = e^x$, $dx = \dfrac{1}{e^x}dt = \dfrac{dt}{t}$ і знайдемо межі для змінної t: якщо $x = \ln 2$, то $t = 2$; якщо $x = \ln 3$, то $t = 3$. Здійснивши такі підстановки у визначеному інтегралі, дістанемо

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int_2^3 \frac{dt}{t(t-t^{-1})} = \int_2^3 \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\bigg|_2^3 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

г) Для обчислення цього інтеграла застосуємо метод інтегрування частинами. Позначимо $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x\,dx$. Тоді

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2};$$

$$\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\bigg|_0^1 -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 - 0\operatorname{arctg} 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

д) Для обчислення цього інтеграла виконаємо універсальну підстановку $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Тоді $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$. Визначимо межі інтегрування для змінної t: якщо $x = 0$, то $t = 0$, а якщо $x = \dfrac{\pi}{2}$, то $t = 1$. Отже,

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} = \int\limits_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)(2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2})} = 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{3+t^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Завдання для самостійного розв'язування

7. Обчислити визначений інтеграл:

а) $\displaystyle\int\limits_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\displaystyle\int\limits_1^4 \frac{3x+5\sqrt{x}}{x^3}dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}dx$;

г) $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{(3-2\ln x)\,dx}{x}$; д) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$; е) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;

є) $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2 e^{-x} dx$; ж) $\displaystyle\int\limits_1^e x^3 \ln x\, dx$; з) $\displaystyle\int\limits_0^1 \arccos x\, dx$.

§ 6.5. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ДО ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ, ОБ'ЄМІВ, ПОВЕРХОНЬ

Якщо фігура обмежена графіками функцій $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $f_1(x)\ f_2(x)$ для всіх $x \in [a, b]$ та прямими $x = a$, $x = b$, то площу фігури обчислюють за формулою

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx. \tag{6.10}$$

Якщо функція $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ має неперервну похідну $f'(x)$, то довжину дуги обчислюють за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx. \tag{6.11}$$

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OX фігури, що обмежена графіком цієї функції, віссю OX та прямими $x = a$, $x = b$, становить

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \tag{6.12}$$

Якщо функція $y = f(x)$ у кожній внутрішній точці відрізка $[a, b]$ має неперервну похідну $f'(x)$, то площу поверхні, яка утворюється при обертанні графіка функції $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ навколо осі OX, визначають за формулою

$$S_n = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx. \tag{6.13}$$

Зразки розв'язування вправ

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $xy = 3$ і $x + y = 4$.

Розв'язання. Функція $y = \dfrac{3}{x}$ є гіперболою, гілки якої розміщені в першій і третій координатних чвертях; $x + y = 4$ — пряма, що проходить через точки $(0;4)$, $(4;0)$. Необхідно обчислити площу, утворену графіками цих функцій. Спочатку знайдемо абсциси точок перетину графіків. Для цього розв'яжемо рівняння $\dfrac{3}{x} = 4 - x$, звідки $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Далі за формулою (6.10), де роль f_1 і f_2 відіграють $4 - x$ і $\dfrac{3}{x}$ та $a = 1$, $b = 3$, дістаємо

$$S = \int_1^3 (4 - x - \frac{3}{x})dx = (4x - \frac{x^2}{2} - 3\ln|x|)\Big|_1^3 = 4 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} - 3\ln 3 -$$

$$- 4 \cdot 1 + \frac{1^2}{2} + 3\ln 1 = 12 - \frac{9}{2} - 3\ln 3 - 4 + \frac{1}{2} = 4 - \ln 3^3 \text{ кв. од.}$$

2. Обчислити довжину лінії $x^2 + y^2 = 9$, що розміщується в першій координатній чверті.

Розв'язання. Очевидно, графіком $x^2 + y^2 = 9$ є коло радіуса 3 із центром у початку координат. Коло в першій координатній чверті визначається функцією $y = \sqrt{9 - x^2}$, $x \in [0;3]$. Тоді $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$. Застосовуючи формулу (6.11), визначаємо довжину дуги:

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}}dx = \int_0^3 \sqrt{\frac{9}{9 - x^2}}dx = 3\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} =$$

$$= 3\arcsin\frac{x}{3}\Big|_0^3 = 3(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{3\pi}{2}.$$

3. Обчислити площу поверхні, утвореної при обертанні дуги параболи $y = x^2$ при $0 \le x \le 1$ навколо осі Ox.

Розв'язання. За формулою (6.13) маємо

$$S_n = 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + ((x^2)')^2}dx = 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + 4x^2}dx =$$

$$= 2\pi \frac{x+8x^3}{32}\sqrt{1+4x^2} - \frac{\pi}{32}\ln(2x+\sqrt{1+4x^2})\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{32}(18\sqrt{5} - \ln(2+\sqrt{5})).$$

4. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2px$, $x = a$ навколо осі Ox.

Розв'язання. При обертанні фігури, утвореної параболою $y^2 = 2px$ та прямою $x = a$ навколо осі Ox, утворюється сегмент параболоїда обертання. Об'єм такого тіла обчислимо за формулою (6.12):

$$V = \pi \int_0^a 2px\,dx = \pi 2p\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^a = \pi p a^2 \text{ куб. од.}$$

Завдання для самостійного розв'язування

8. Знайти площу фігури, обмеженої заданими кривими:

а) $y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 2 - \frac{3}{2}x$; б) $y = \sin x, \quad y = \cos x\,(0 \le x \le \pi/4)$;

в) $y = 2x - x^2, \quad y = -x$; г) $y = \ln(x+2), \quad y = 2\ln x, \quad x = 1$.

9. Знайти довжину дуги кривої:

а) $y = 1 - 2x^{3/2}\,(0 \le x \le 11)$; б) $y = x^2/4\,(0 \le x \le 2)$;

в) $y = \ln x\,\left(2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{6}\right)$; г) $y = 1 - \ln\sin x\,(\pi/3 \le x \le 2\pi/3)$.

10. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривими:

а) $y^2 = 4x, \quad y = x$; б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1, \quad x = 5$;

в) $y = x^2 + 1, \quad y = 3x + 1$; г) $y = \sin 2x, \quad y = 4x/\pi$.

11. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривими:

а) $y = \frac{1}{3}x^3, \ y = 0, \ x = 1$; б) $y^2 = 4x, \ x = 3$; в) $x^2 + y^2 = R^2$.

§ 6.6. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду)

Якщо функція $y = f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b]$ при довільному $b > a$ і існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то її називають *невласним інтегралом першого роду*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

а також кажуть, що інтеграл по нескінченній межі інтегрування збігається.

Якщо зазначена границя не існує або нескінченна, то невласний інтеграл називають розбіжним.

Аналогічно означується інтеграл з нескінченною нижньою межею:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Якщо обидві межі інтегрування нескінченні, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

де c — довільне число.

Ознаки збіжності невласних інтегралів

Ознака порівняння. Якщо на проміжку $[a;\infty)$ неперервні функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють умову $0 \le f(x) \le g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int\limits_a^{\infty} g\,(x)\,dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{\infty} f\,(x)\,dx$, із розбіжності інтеграла $\int\limits_a^{\infty} f\,(x)\,dx$ — розбіжність інтеграла $\int\limits_a^{\infty} g\,(x)\,dx$.

Гранична ознака порівняння. Якщо на проміжку $[a;\infty)$ неперервні функції $f(x)$ і $g(x)$ зберігають свій знак і існує границя $A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ така, що $A \neq 0$, $A \neq \infty$, то невласні інтеграли $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$, $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ одночасно або збігаються, або розбігаються.

Інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду)

Якщо функція $y = f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b-\varepsilon]$ для довільного $\varepsilon > 0$, необмежена на відрізку $[b-\varepsilon; b]$ й існує скінченна границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то її називають *невласним інтегралом другого роду*

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

а також кажуть, що інтеграл від необмеженої функції збігається.

Якщо ж границі не існує або вона нескінченна, то невласний інтеграл розбіжний.

Аналогічно означується невласний інтеграл від функції $f(x)$, необмеженої в околі точки a:

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Якщо функція $y = f(x)$ необмежена у внутрішній точці $c \in [a,b]$, то невласний інтеграл означується рівністю

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

У цьому разі інтеграл називають збіжним, якщо обидва інтеграли, що розміщуються праворуч у рівності, збігаються.

Ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду аналогічні ознакам збіжності невласних інтегралів першого роду.

Зразки розв'язування вправ

1. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. За означенням невласного інтеграла першого роду

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b}\right) + \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{1}\right) = 1.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює одиниці.

2. Обчислити невласні інтеграли а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{3x}dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^0 e^{3x}dx$ або встановити їх розбіжність.

Розв'язання. а) За означенням

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^0 = +\infty.$$

Отже, інтеграл розбіжний.

б) $$\int\limits_{-\infty}^0 e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}\Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{3}e^0 - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3}e^{3x} = \frac{1}{3}.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює $\frac{1}{3}$.

3. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція неперервна на всій числовій осі й парна. Тому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x\Big|_{+\infty}^{0} = 2\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює π.

4. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+2x+3x^3}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = 1 + 2x + 3x^3 > 0$ на проміжку інтегрування $[1, \infty)$. Порівняємо цю функцію з $g(x) = \frac{1}{x^3}$, інтеграл від якої $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ збігається. Оскільки

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+2x+3x^3}{x^3} = 3 \neq 0,$$

то за граничною ознакою інтеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+2x+3x^3}$ також збігається.

5. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція необмежена в околі точки $x = 1$. За означенням

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin(1-\varepsilon) - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

6. Дослідити на збіжність невласний інтеграл:

а) $\int\limits_0^4 \frac{\cos^2 x\, dx}{\sqrt{4-x}}$; б) $\int\limits_0^5 \frac{\sin x\, dx}{x^2}$.

Розв'язання. а) Порівняємо підінтегральну функцію $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt{4-x}}$ з "еталонною" $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$. Очевидно, що $\frac{\cos^2 x}{\sqrt{4-x}} \le \frac{1}{\sqrt{4-x}}$. Оскільки інтеграл $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ збігається, то за ознакою порівняння збігається також інтеграл $\int\limits_0^4 \frac{\cos^2 x\, dx}{\sqrt{4-x}}$.

б) Підінтегральна функція $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ має особливу точку $x=0$, оскільки $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\frac{1}{x}\right) = \infty$. Порівняємо її з $g(x) = \frac{1}{x}$, інтеграл від якої $\int\limits_0^5 \frac{dx}{x}$ розбіжний. Ураховуючи, що

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1,$$

за граничною ознакою порівняння доходимо висновку, що інтеграл $\int\limits_0^5 \frac{\sin x\,dx}{x^2}$ розбіжний.

Завдання для самостійного розв'язування

12. Обчислити інтеграл або встановити його розбіжність:

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; в) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,dx$;

д) $\int\limits_0^{1/4} \frac{dx}{x\ln x}$; е) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$; є) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2-1}$; ж) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

13. Дослідити невласний інтеграл на збіжність:

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x\,dx}{x^3}$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(x+2)dx}{x^2-4x+7}$; в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(3x^3-4)dx}{e^x}$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; д) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sin x - x}dx$; е) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx$.

Розділ 7

РЯДИ

ЧИСЛОВІ РЯДИ

§ 7.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ. НЕОБХІДНА УМОВА ЗБІЖНОСТІ РЯДУ

Нехай задано деяку нескінченну послідовність чисел a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_n, \ldots$ Вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

називають *рядом*, a_n — його загальним членом.

Суму перших n членів ряду $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ називають *частинною сумою ряду.* Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A, A < \infty$, то *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *збіжним*, а A — сумою цього ряду. Якщо $A = \infty$ або границі $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ не існує, то *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *називають розбіжним.*

Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (Необхідна умова збіжності.)

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбіжний. (Необхідна умова розбіжності.)

§ 7.2. ЗНАКОДОДАТНІ РЯДИ. ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ РЯДУ

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, усі члени якого є додатними числами, називають *знакододатним рядом.*

Ознака порівняння. Нехай маємо два додатних ряди (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ і починаючи з деякого $n > N$ маємо

$$a_n \le b_n \quad \text{або} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Тоді із збіжності ряду (B) випливає збіжність ряду (A), а з розбіжності ряду (A) — розбіжність ряду (B).

Гранична ознака порівняння. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = K$, $K \ne 0$, то обидва ряди одночасно або збігаються, або розбігаються.

Ознака Даламбера. Якщо для знакододатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то при $q < 1$ ряд збіжний, а при $q > 1$ — розбіжний.

Ознака Коші. Якщо для знакододатного ряду $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то при $q < 1$ ряд збіжний, а при $q > 1$ — розбіжний.

Інтегральна ознака Коші. Нехай задано ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots,$$

де $f(x)$ — додатна, неперервна, монотонно спадна функція на проміжку $[1, \infty)$.

Тоді якщо інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$;

якщо інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Зразки розв'язування вправ

1. Дослідити ряд на збіжність і знайти його суму: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$.

Розв'язання. Частинна сума ряду

$$A_n = \left(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1\right) + \left(\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}\right) + \left(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right) +$$
$$+ \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} =$$
$$= 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

Послідовність частинних сум має границю $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 1 - \sqrt{2}$.

Отже, ряд збігається і його сума $A = 1 - \sqrt{2}$.

2. Дослідити збіжність ряду $\frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \ldots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \ldots$

Розв'язання. Застосуємо ознаку Даламбера. Загальним членом ряду є $a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2 2^{n^2}}{(n!)^2\, 2^{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0.$$

Отже, ряд збігається.

3. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{3}(\sqrt{2}+(-1)^n) \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1.$$

Отже, ряд збігається.

4. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаку Коші:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}}.$$

Оскільки $\dfrac{1+\cos n}{2+\cos n} - \dfrac{2}{3} \le 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, то

$$q \le \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2-\dfrac{\ln n}{n}} = \frac{4}{9} < 1.$$

Отже, ряд збігається.

5. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\sin \dfrac{1}{n^p}\right|$.

Розв'язання. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ і обчислимо його границю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sin \dfrac{1}{n^p}\right|}{\dfrac{1}{n^p}} = 1,\ p > 0.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ збіжний при $p > 1$ і розбіжний при $p \le 1$.

Отже, за граничною ознакою порівняння ряд збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \le 1$.

6. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1! + 2! + \ldots + n!}{(2n)!}$.

Розв'язання. Для заданого ряду розглянемо мажорантний ряд

$$a_n \leq \frac{nn!}{(2n)!} = b_n.$$

Цей ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний за ознакою Даламбера:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!\,(n+1)\,2n!}{n!n\,(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)\,(2n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}.$$

Отже, за ознакою порівняння заданий ряд збігається.

7. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^2}$.

Розв'язання. Застосувавши ознаку Даламбера, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!n^2}{(n+1)^2\, n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty.$$

Отже, ряд розбігається.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Дослідити ряд на збіжність:

а) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4i}$; б) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\ln i}{\sqrt[4]{i^5}}$; в) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{9} + \ldots + \dfrac{n^2}{3^n} + \ldots$;

г) $\sin\dfrac{\pi}{2} + 4\sin\dfrac{\pi}{4} + \ldots + n^2 \sin\dfrac{\pi}{2^n} + \ldots$;

д) $\dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$;

е) $\dfrac{1}{2\ln 2} + \dfrac{1}{3\ln 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\ln n} + \ldots$;

є) $\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} + \ldots$;

ж) $1 + \frac{1 \cdot 2}{2^2} + \ldots + \frac{n!}{n^n} + \ldots$;

з) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(5n-4)(4n-1)} + \ldots$;

і) $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \ldots + \frac{2n-1}{3^n} + \ldots$

§ 7.3. ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ

Нехай члени числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ можуть бути як додатними, так і від'ємними. Якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, складений з абсолютних величин його членів, то *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *абсолютно збіжним.*

Числовий *ряд* називають *умовно збіжним*, якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, але ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбігається.

Знакопочережним називають *ряд* виду

$$c_1 - c_2 + c_3 - \ldots + (-1)^n c_n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n, \; c_n \geq 0.$$

Ознака Лейбниця. Якщо члени знакопочережного ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n$ монотонно спадають за абсолютною величиною $c_{n+1} < c_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, то цей ряд збігається.

Зразок розв'язування вправ

Дослідити на збіжність знакопочережний ряд:

а) $1 - \dfrac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\,\dfrac{1}{2n-1} + \ldots;$

б) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2^2} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n} \dfrac{1}{2^n} + \ldots;$

в) $\dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln 3} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{1}{\ln(n+1)} + \ldots;$

г) $-1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \ldots + (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \ldots;$

д) $\sum \dfrac{2^{n^2}}{n!}(-1)^{n+1}.$

Розв'язання. а) Застосуємо теорему Лейбниця:

$$c_n = \frac{1}{2n-1},\ c_{n+1} = \frac{1}{2n+1}\, c_{n+1} < c_n;\ \lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Як бачимо, ряд збігається, але не абсолютно, що випливає з інтегральної ознаки. Отже, ряд збігається умовно.

б) Перевіримо абсолютну збіжність ряду за ознакою Даламбера:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{n+1}\dfrac{1}{2^{n+1}}}{\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{2^n}} = \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд збігається абсолютно.

в) За ознакою Лейбниця цей ряд збігається. Справді, $\dfrac{1}{\ln(n+1)} < \dfrac{1}{\ln n}$ та $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$. Водночас для великих n виконується нерівність $\dfrac{1}{\ln(n+1)} > \dfrac{1}{(n+1)^p}$, $p < 1$. Абсолютна збіжність ряду відсутня за ознакою порівняння: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^p}$, $p < 1$ розбіжний. Отже, наявна умовна збіжність ряду.

г) Абсолютна збіжність ряду відсутня. Перевіримо збіжність за теоремою Лейбниця:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad c_{n+1} \le c_n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Отже, ряд умовно збіжний.

д) Абсолютна збіжність ряду відсутня за ознакою Даламбера. Застосуємо ознаку Лейбниця:

$$c_n = \frac{2^{n^2}}{n!}, \quad c_{n+1} = \frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!},$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{n^2+2n+1} \cdot n!}{(n+1)! 2^{n^2}} = \frac{2^{2n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Отже, умова ознаки Лейбниця не виконана і ряд розбігається.

Завдання для самостійного розв'язування

2. Дослідити ряд на умовну та абсолютну збіжності.

а) $1 - \frac{1}{3^2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots;$

б) $\frac{\sin\alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{4} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n^2};$

в) $2 - \frac{3}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{n+1}{n} + \ldots;$

г) $\frac{1}{2} - \frac{8}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n} + \ldots;$

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}.$

СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

§ 7.4. ОЗНАЧЕННЯ СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ. РАДІУС ЗБІЖНОСТІ

Степеневим називають *ряд* виду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

де $a_n, n = 0, 1, \ldots$ — дійсні числа.

Число R називають *радіусом збіжності степеневого ряду* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, якщо цей ряд збігається абсолютно для будь-якого $|x| < R$ і розбігається для будь-якого $|x| > R$. Інтервал $(-R, R)$ називають інтервалом збіжності. На кінцях цього інтервалу ряд може збігатись або розбігатись. Це питання вирішується для кожного ряду окремо.

Радіус збіжності визначають за відомими ознаками Коші і Даламбера:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ або } R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

якщо границі існують. Якщо $R = \infty$, то ряд збіжний на всій числовій осі, а якщо $R = 0$, то ряд збіжний лише в точці $x = 0$.

Радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ визначається за тими самими формулами, що й для ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Але інтервал збіжності знаходять з нерівності $|x - a| < R$.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збіжний при $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний при всіх значеннях x, що задовольняють нерівність $|x| < x_0$. Якщо при $x = x_1$ степеневий ряд розбіжний, то він розбіжний при всіх значеннях x, для яких $|x| > |x_1|$.

Зразок розв'язування вправ

Знайти радіус збіжності степеневого ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{a^{n^2}} x^n$, $a > 1$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{2^n (n!)^2}{(2n+1)}\right)^p x^n$;

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} \left(\dfrac{n}{e}\right) x^n$.

Розв'язання. а) Застосуємо формулу Даламбера:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = 1.$$

Отже, радіус збіжності дорівнює одиниці.
б) Застосуємо формулу Коші:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3^n + (-2)^n}{n}\right|} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 3 \sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = 3.$$

Отже, радіус збіжності дорівнює $\dfrac{1}{3}$.
в) Застосуємо формулу Даламбера:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n! a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = \infty.$$

Отже, числовий ряд збігається на всій числовій осі.
г) За формулою Даламбера отримуємо

$$R = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \frac{(2n+3)!}{2^n((n+1)!)^2}\right)^p = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^p = 2^p.$$

Отже, ряд збігається абсолютно при $|x| < 2^p$.
д) Застосуємо формулу Даламбера:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} e \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 1.$$

Отже, ряд збігається абсолютно при $|x| < 1$.

Задачі для самостійного розв'язування

3. Знайти радіус збіжності степеневого ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}\right)^p \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$, $a > 0$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3 + (-1)^n}{n}\right)^n x^n$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$.

Розділ 8
ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

§ 8.1. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ОБЛАСТЬ ЇЇ ВИЗНАЧЕННЯ. ГРАФІК І ЛІНІЇ РІВНІВ

Сукупність всеможливих упорядкованих наборів (точок) $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, відстань між якими

$$\rho(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}, \qquad (8.1)$$

називають *n-вимірним евклідовим простором* і позначають R_n.

Функцією багатьох дійсних змінних називають закон, який кожній точці $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ множини $E \subset R_n$ ставить у відповідність єдине дійсне число y. При цьому записують $y = f(X), X \in E$, або $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$. Множину E називають *областю визначення* функції багатьох змінних.

Якщо функцію задано аналітично (за допомогою формул) і явно не зазначено область визначення, то під областю визначення розуміють множину всіх точок $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in R_n$, при яких відповідні формули мають зміст.

Графіком функції $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з областю визначення $E \subset R_n$ називають множину всіх точок $(x_1; x_2; \ldots; x_n; y) \in R_{n+1}$, де $(x_1; \ldots; x_n) \in E$.

У випадку функції двох дійсних змінних за традицією аргументи позначають x та y, а функцію — z ($z = f(x,y)$). Графіком функції двох змінних є деяка підмножина простору R_3 (як правило, деяка поверхня), проекція якої на XOY збігається з множиною E.

Лінія рівня — це проекція на площину XOY лінії, яку одержуємо при перетині графіка функції $z = f(x,y)$ площиною $Z = C$.

Зразки розв'язування вправ

1. Виразити об'єм V циліндра як функцію його висоти h та радіуса основи R. Зазначити область визначення цієї функції.

Розв'язання. Як відомо з геометрії, об'єм циліндра $V = \pi R^2 h$. Оскільки аргументи R і h мають чіткий геометричний зміст, то областю визначення функції V буде множина $E = \{(R;h) : R > 0, h > 0\}$.

2. Знайти область визначення функції:

а) $z = f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \dfrac{5x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + \sin x$;

б) $u = f(x,y,z) = \ln(16 - x^2 - y^2 - z^2)$.

Розв'язання. а) Область визначення складається з точок (x,y) площини, координати яких задовольняють умови

$$\begin{cases} 9 - x^2 - y^2 \geq 0; \\ x^2 + y^2 - 1 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9; \\ x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Область визначення збігається з частиною площини, яка лежить між колами $x^2 + y^2 = 9$ (включаючи саме коло) і $x^2 + y^2 = 1$ (не включаючи коло). Схематично це зображено на рис. 8.1.

б) Областю визначення є множина всіх точок (x,y,z) простору, координати яких задовольняють умову $16 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$. Область визначення збігається з внутрішністю кулі радіуса 4, центр якої лежить на початку координат.

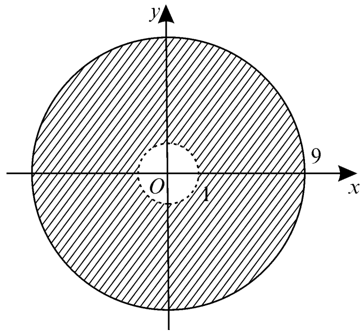


Рис. 8.1

3. Охарактеризувати графіки функції:

а) $z = 2x + 3y - 7$; б) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Розв'язання. а) Оскільки рівняння $2x + 3y - z - 7 = 0$ є рівнянням площини, що рівносильне рівнянню $z = 2x + 3y - 7$, то графіком функції $z = 2x + 3y - 7$ є площина.

б) Очевидно, що $z \geq 0$. При $z \geq 0$ рівняння $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ рівносильне рівнянню $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ або $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яке є рівнянням сфери радіуса 1 з центром у початку координат. Отже, графіком функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ є частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка лежить у площині XOY і вище.

4. Дослідити лінії рівня функції $z = xy$ і побудувати їх.

Розв'язання. Лінії рівня мають вигляд $xy = C$.

При $C = 0$ лінія рівня розпадається на пару прямих, що перетинаються (осі Ox і Oy).

При $C > 0$ лінія рівня є гіперболою $y = \dfrac{C}{x}$, гілки якої лежать у першій та третій чвертях.

При $C < 0$ лінія рівня є гіперболою $y = \dfrac{C}{x}$, гілки якої лежать у другій та четвертій чвертях.

На основі здійсненого аналізу можна стверджувати, що графіком цієї функції є гіперболічний параболоїд (оскільки серед поверхонь другого порядку такі лінії рівня має тільки гіперболічний параболоїд). Схематично лінії рівня зображено на рис. 8.2.

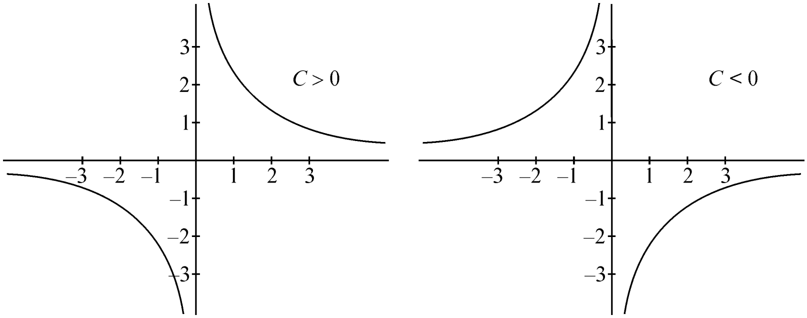


Рис. 8.2

Завдання для самостійного розв'язування

1. Виразити площу S трикутника:

а) як функцію його сторони a і висоти h_a, проведеної до цієї сторони;

б) як функцію трьох його сторін a, b, c;

в) як функцію двох його сторін a і b та кута α між ними.

2. Виразити суму прибутку, яку отримає вкладник за два роки, як функцію від початкового внеску A і відсоткової ставки b, % за умови нарахування складних відсотків.

3. Виразити об'єм прямого кругового конуса як функцію радіуса R його основи та площі S бічної поверхні.

4. Які фактори впливають на розмір відрахувань із заробітної плати? Виразити розмір цих відрахувань як функцію від зазначених факторів.

5. Виразити об'єм кулі як функцію від площі поверхні сфери такого самого радіуса.

6. Знайти і зобразити області визначення функції:

а) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

б) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$;

в) $z = \dfrac{1}{x + y}$;

г) $z = \ln(16 - x^2 - y^2) - \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$;

д) $z=\ln x+\ln y$;

е) $z=\sqrt{1-x^2}+17\sqrt{1-y^2}+\cos x$;

є) $z=x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2+3}$;

ж) $z=\arcsin(x^2+y^2-9)$;

з) $z=\sqrt{25-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-25}$;

і) $z=y+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}$;

ї) $z=\sqrt{\sin x}+\dfrac{1}{\sqrt{\cos y}}$.

7. Охарактеризувати графік функції:

а) $z=x+y$; б) $z=2x-3y$;

в) $z=x^2+y^2$; г) $z=4x^2+y^2$;

д) $z=x^2-y^2$; е) $z=y^2-x^2$;

є) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$; ж) $z=-\sqrt{16-x^2-y^2}$;

з) $z=-\sqrt{x^2+y^2-4}$; і) $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$;

ї) $z=\sqrt{x^2+y^2+16}$; к) $z=-\sqrt{x^2+y^2+9}$.

8. Дослідити лінії рівня функції і побудувати їх для трьох значень параметра C:

а) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$; б) $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$; в) $z=\dfrac{2x}{y}$;

г) $z=\dfrac{x+y}{y}$; д) $z=x^2-y^2$; е) $z=y^2+x^2$; є) $z=\dfrac{x^2-y^2}{x}$;

ж) $z=\dfrac{x+y^2}{x}$; з) $z=\sin x+y$; і) $z=-\cos y+x$.

§ 8.2. ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Точку $X_0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0) \in R_n$ називають *границею послідовності точок* $X_k = (x_1^k; x_2^k; \ldots; x_n^k) \in R_n$, якщо

$$\lim_{k\to\infty} \rho(X_k, X_0) = 0. \tag{8.2}$$

Для того щоб послідовність $\{X_k\} = \{(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)\}$ збігалася до точки $X_0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$, необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{k\to\infty} x_1^k = x_1^0, \ \lim_{k\to\infty} x_2^k = x_2^0, \ \ldots, \ \lim_{k\to\infty} x_n^k = x_n^0.$$

Число A називають *границею функції* $y = f(X) = f(x_1, \ldots, x_n)$ у точці X_0, якщо для довільної послідовності точок X_k, збіжної до X_0, виконується рівність

$$\lim_{k\to\infty} f(X_k) = \lim_{X_k\to X_0} f(X_k) = A.$$

У цьому разі записують: $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = A$.

Далі розглядатимемо здебільшого функції $z = f(x, y)$ двох змінних і замість послідовності $\{(x_1^k; x_2^k)\}$ писатимемо $\{x_k; y_k\}$.

Функцію $z = f(x, y)$ називають *неперервною в точці* $M_0(x_0, y_0)$, якщо для довільної послідовності точок $M_k(x_k, y_k)$, збіжної до M_0, виконується рівність

$$\lim_{k\to\infty} f(M_k) = f(M_0).$$

Функцію, що неперервна в усіх точках деякої області, називають неперервною у цій області. Графіком такої функції є деяка поверхня.

Теореми про неперервність суми, різниці, добутку та частки неперервних функцій двох змінних аналогічні відповідним теоремам для функції однієї змінної.

Точки, в яких функція $z = f(x, y)$ не є неперервною, називають *точками розриву*. Геометричним місцем точок розриву може бути як множина ізольованих точок, так і ціла лінія або множина зі складнішою будовою.

Зразки розв'язування вправ

1. Дослідити послідовність $\{X_k\}$ на збіжність:

а) $X_k = \left\{ \frac{1}{k};\ \frac{k+1}{k};\ \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \right\};$

б) $X_k = \left\{ \frac{k^2+k}{k^2+7}; (-1)^k;\ \frac{1}{k^2};\ \left(\frac{2}{5}\right)^k \right\}.$

Розв'язання. а) Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$; $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$; $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$, то $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = (0; 1; e)$.

б) Оскільки послідовність $\{(-1)^k\}$ не має границі, то і вся послідовність $\{X_k\}$ не має границі.

2. Дослідити, чи існує границя функції $z = f(x, y)$ у точці M_0:

а) $z = x^2 + y^2$, $M_0(2; 1)$;

б) $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $M_0(0; 0)$.

Розв'язання. а) Оскільки $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} x^2 = 4$ і $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} y^2 = 1$, то

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} (x^2 + y^2) = 5.$$

б) Доведемо, що функція $z = f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ не має границі в точці $M_0(0; 0)$. Для цього розглянемо дві послідовності $\{M_k\}$ і $\{M'_k\}$, які збігаються до точки M_0, але послідовності $\{f(M_k)\}$ та $\{f(M'_k)\}$ мають різні границі.

Нехай $M_k = \left(\frac{1}{k}; \frac{1}{k}\right)$. Тоді

$$\lim_{M_k\to M_0} f(M_k) = \lim_{k\to\infty} f(M_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = 0.$$

Нехай $M_k' = \left(\frac{2}{k}; \frac{1}{k}\right)$. Тоді

$$\lim_{M_k' \to M_0} f(M_k') = \lim_{k\to\infty} f(M_k') = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{4}{k^2} - \frac{1}{k^2}}{\frac{4}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{3}{5}.$$

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = \lim\limits_{k\to\infty} M_k' = M_0$, але $\lim\limits_{k\to\infty} f(M_k) \neq \lim\limits_{k\to\infty} f(M_k')$, то розглядувана функція не має границі в точці $M_0(0;0)$.

3. Дослідити функцію на неперервність:

а) $z = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; б) $z = \dfrac{2x-y}{x^2-y^2}$.

Розв'язання. а) Оскільки функції $z = x$ та $z = x^2 + y^2$ неперервні на всій площині, то функція $z = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ є неперервною в усіх точках площини, за винятком точок, де $x^2 + y^2 = 0$. У точці $M_0(0;0)$ функція не визначена. Мало того, функція $z = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ не має границі в точці $M_0(0;0)$. Справді, якщо $M_k = \left(\frac{1}{k}; \frac{1}{k}\right)$, то $M_k \to M_0$ і $\lim\limits_{M_k\to M_0} f(M_k) = +\infty$.

Якщо $M_k' = \left(\frac{1}{k^2}; \frac{1}{k}\right)$, то $M_k' \to M_0$, але $\lim\limits_{M_k'\to M_0} f(M_k') = 1$.

б) Функція $z = \dfrac{2x-y}{x^2-y^2}$ неперервна на всій області свого визначення, тобто в усіх точках $(x;y)$ площини, для яких $x^2 - y^2 \neq 0$.

Точки $(x;y)$ площини, для яких виконується умова $x^2 - y^2 = 0$, є точками розриву. Множина точок розриву складається з двох прямих: $x - y = 0$ та $x + y = 0$.

Завдання для самостійного розв'язування

9. Знайти границю (якщо вона існує) послідовності:

а) $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{k^2+3k}{k^3+k^2}; \left(\dfrac{k+3}{k}\right)^k\right)$; б) $\lim\limits_{k\to\infty} \left(k \sin\dfrac{1}{k}; \dfrac{k^2+7k+8}{k^2-13}\right)$;

в) $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sin\dfrac{\pi k}{2};\dfrac{1}{k^2}\right)$; г) $\lim\limits_{k\to\infty}\left((-1)^k\dfrac{k+2}{k+3};\dfrac{k+5}{k^2+4}\right)$.

10. Знайти границю (якщо вона існує) функції в точці:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(x^2+y)$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to \frac{\pi}{2}}}\sin x^2y$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x+y}{x^2-y^2}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\dfrac{x-y}{x^2-y^2}$;

д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy^2)}{3x}$; е) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{x+y}{x}\right)^{3x}$; є) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$;

ж) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^6}$; з) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}$; і) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^6y^8}{x^2+y^4}$.

11. Дослідити функцію на неперервність і охарактеризувати множину точок розриву:

а) $z=x^2+y^2$; б) $z=\dfrac{1}{x-y}$; в) $z=\dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{x+y}$;

г) $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x\neq 0 \text{ або } y\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0, y=0;\end{cases}$

д) $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x+y}, & \text{якщо } x\neq 0 \text{ або } y\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0, y=0;\end{cases}$

е) $z=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x\neq 0 \text{ або } y\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0, y=0;\end{cases}$

є) $z=\dfrac{1}{\sin x}$; ж) $z=\dfrac{\cos x}{\cos y}$.

§ 8.3. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ. ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ. ПОХІДНА ЗА НАПРЯМОМ. ГРАДІЄНТ

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$. Розглянемо границю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя існує, то її називають *частинною похідною функції* $z = f(x, y)$ *за змінною* x і символічно позначають

$$f'_x(x_0; y_0), \quad \text{або} \quad \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x}, \quad \text{або} \quad z'_x(x_0; y_0).$$

Аналогічно означується частинна похідна функції $z = f(x, y)$ за змінною y:

$$f'_y(x_0; y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y}.$$

При знаходженні частинної похідної за змінною x від функції $z = f(x, y)$ змінна y залишається сталою. Тому функція $z = f(x, y)$ при цьому може трактуватись як функція від однієї змінної x: $z(x) = f(x, y_0)$, а змінну y можна сприймати як деякий параметр. Тоді частинна похідна від функції $z = f(x, y)$ за змінною x є звичайною похідною від функції $z(x) = f(x, y_0)$. Аналогічно, обчислюючи частинну похідну за змінною y, змінну x потрібно вважати сталою.

Частинні похідні $f'_x(x, y)$ та $f'_y(x, y)$ так само є функціями двох змінних. Частинні похідні (якщо вони, звичайно, існують) від функцій $f'_x(x, y)$ та $f'_y(x, y)$ називають *частинними похідними другого порядку*. За означенням

$$z''_{xx} = (z'_x)''_x; \quad z'_{xy} = (z'_x)''_y;$$

$$z''_{yx} = (z'_y)''_x; \quad z'_{yy} = (z'_y)''_y.$$

Похідні z''_{xy} та z''_{yx} називають *мішаними похідними другого порядку.* У разі неперервності мішаних похідних вони дорівнюють одна одній.

Аналогічно означуються частинні похідні вищих порядків.

Диференціалом функції $z = f(x, y)$ називають суму добутків частинних похідних цієї функції на прирости відповідних незалежних змінних:

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y.$$

Оскільки $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, то

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Функцію $z = f(x, y)$ називають *диференційовною в точці* (x, y), якщо її повний приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = z'_x dx + z'_y dy + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

де $\alpha = \alpha(x, y, \Delta x, \Delta y)$; $\beta = \beta(x, y, \Delta x, \Delta y)$; $\alpha \to 0, \beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Як і для функцій однієї змінної з диференційовності функції $z = f(x, y)$ у деякій точці випливає неперервність цієї функції в цій точці. Для функції однієї змінної $y = f(x)$ існування скінченної похідної $f'(x)$ було необхідною і достатньою умовою диференційовності цієї функції. Для функції двох змінних ситуація значно складніша. З існування скінченних частинних похідних $f'(x)$ і $f'(y)$ не випливає навіть неперервність функції $z = f(x, y)$ і тому існування скінченних частинних похідних ще недостатньо для диференційовності функції двох змінних. Проте якщо функція $z = f(x, y)$ у деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ має *неперервні* частинні похідні z'_x і z'_y, то функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці M_0.

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$, то для малих Δx і Δy правильною є наближена рівність

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y =$$

$$= f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0).$$

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в околі точки $M_0(x_0, y_0)$, $\vec{e}$ — деякий вектор, який утворює кут α з додатним напрямом осі Ox.

Похідною $z'_{\vec{l}}$ у напрямі, що визначається вектором $\vec{l}$, називають границю (якщо вона існує)

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{f(M_1) - f(M)}{M_1M}.$$

Можна довести, що

$$z'_{\vec{l}} = z'_x \cos\alpha + z'_y \sin\alpha.$$

Похідна $z'_{\vec{l}}$ характеризує швидкість зміни функції в напрямі вектора $\vec{l}$, який утворює кут α з додатним напрямом осі Ox.

Градієнтом функції $z = f(x, y)$ називають вектор з координатами $(z'_x; z'_y)$:

$$\nabla z = \overrightarrow{\operatorname{grad} z} = (z'_x; z'_y).$$

Градієнт ∇z функції $z = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$ вказує напрям найшвидшої зміни функції в цій точці.

Зразки розв'язування вправ

1. Знайти частинні похідні першого порядку функції:

а) $z = 3x^2y + 5xy - 12xy^2 + 8x - y + 1$;

б) $z = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Розв'язання. а) Вважаючи y сталою, дістаємо

$$z'_x = 6xy + 5y - 12y^2 + 8.$$

Вважаючи x сталою, дістаємо

$$z'_y = 3x^2 + 5x - 24xy - 1.$$

б) $z'_x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x^2 + y^2\right)'_x = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$;

$$z'_y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x^2 + y^2\right)'_y = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

2. Знайти частинні похідні першого та другого порядку функції $z = 2x^2 + 4y^2 + 8xy$. Обчислити $z'_x(2;9)$, $z''_{xy}(2;1)$.

Розв'язання.

$$z'_x = \left(2x^2 + 4y^2 + 8xy\right)'_x = 4x + 8y,$$

$$z'_y = \left(2x^2 + 4y^2 + 8xy\right)'_y = 8y + 8x;$$

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (4x + 8y)'_x = 4, \quad z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4x + 8y)'_y = 8;$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = (8x + 8y)'_x = 8, \quad z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = (8x + 8y)'_y = 8;$$

$$z'_x(2;9) = 4 \cdot 2 + 8 \cdot 9 = 80, \quad z''_{xy}(2;1) = 8.$$

3. Знайти повний диференціал функції $z = x^y$.

Розв'язання. Повний диференціал можна записати у вигляді

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Оскільки $z'_x = (x^y)'_x = yx^{y-1}$; $z'_y = (x^y)'_y = x^y \ln x$, то

$$dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy.$$

4. Дослідити функцію $z = x^2 + y^2$ на диференційовність.

Розв'язання. Спосіб I.

$$\Delta z = z(x + \Delta x) - z(x) = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - (x^2 + y^2) =$$

$$= 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = z'_x\Delta x + z'_y\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Оскільки $\alpha = \Delta x \to 0$ і $\beta = \Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, то функція $z = x^2 + y^2$ диференційовна в усіх точках площини XOY.

Спосіб II. $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$. Оскільки частинні похідні є неперервними функціями в усіх точках $(x;y)$ площини, то $z = x^2 + y^2$ є всюди диференційовною функцією.

5. Обчислити наближено $1,01^{4,02}$, замінюючи повний приріст функції її повним диференціалом.

Розв'язання. Розглянемо функцію $z = x^y$. Ця функція диференційовна в околі точки $M_0(1;4)$, причому $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y \ln x$, $z'_x(1;4) = 4$, $z'_y(1;4) = 0$, $z(1;4) = 1$. Тому

$$z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z(x_0, y_0) + z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y,$$

де $x_0 = 1$; $y_0 = 4$; $\Delta x = 0,01$; $\Delta y = 0,02$.

Отже,

$$1,01^{4,02} \approx 1 + 4 \cdot 0,01 + 0 \cdot 0,02 = 1,04.$$

6. Знайти градієнт функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ у точці $M_0(\sqrt{3}; 1)$.
Розв'язання.

$$z'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x^2 + y^2\right)'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$z'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x^2 + y^2\right)'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$z'_x(\sqrt{3}; 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z'_y(\sqrt{3}; 1) = \frac{1}{2}.$$

Отже, $\nabla z = \overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)}$.

7. Зазначити точки, в яких градієнт функції $z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - 2x^2 - 3y^2 + 2x + 10y + 4$ збігається з вектором $\vec{a}(-1; 2)$.

Розв'язання. Визначаємо

$$\nabla z = (x^2 - 4x + 2; y^2 - 6y + 10).$$

$\nabla z = \vec{a}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2 = -1, \\ y^2 - 6y + 10 = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \in \{1; 3\}, \\ y \in \{2; 4\}. \end{cases}$$

Отже, існує чотири точки, в яких градієнт функції z збігається з вектором $\vec{a}$: $M_1(1; 2)$, $M_2(1; 4)$, $M_3(3; 2)$, $M_4(3; 4)$.

8. Знайти похідну функції $z = x^2 + 2x + y^2$ в точці $M_0(1; 7)$ у напрямі вектора $\vec{a} = (5; 12)$.

Розв'язання. Знайдемо орт вектора $\vec{a}$:

$$\vec{l} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \cdot (5; 12) = \left(\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right).$$

Отже, вектор $\vec{a}$ утворює з додатним напрямом осі Ox кут α такий, що $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$, $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$. Тоді

$$z'_x = 2x + 2, \quad z'_x(1;7) = 4;$$
$$z'_y = 2y, \quad z'_y(1;7) = 14.$$

Отже, $z'_{\vec{a}} = z'_x \cos\alpha + z'_y \sin\alpha = 4 \cdot \dfrac{5}{13} + 14 \cdot \dfrac{12}{13} = \dfrac{188}{13} = 14\dfrac{6}{13}$.

Завдання для самостійного розв'язування

12. Знайти частинні похідні першого порядку функції:

1) $z = x^3y - y^3x$; 2) $z = 2x^3y + 5x^2y^2 - xy^3 + y^4 + 5xy - 7y$;

3) $z = x^3 + 3x^2y - xy + 3x - 2y + \sqrt{3}$; 4) $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$;

5) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; 6) $z = \sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$; 7) $z = xy2^{x+y}$;

8) $z = \arcsin\dfrac{x+y}{xy}$; 9) $z = \dfrac{1}{y}e^{yx}$; 10) $z = \dfrac{1}{2y}\ln\dfrac{x-y}{x+y}$;

11) $z = \dfrac{1}{x}\sin(xy) + \dfrac{1}{y}\cos(xy)$; 12) $z = e^{-\frac{x}{y}}$;

13) $z = (1 + xy)^y$; 14) $z = arc\mathrm{tg}\sqrt{x^y}$.

13. Знайти значення частинних похідних $z'_x, z'_y, z''_{x^2}, z''_{xy}, z''_{y^2}$ у точці M_0:

а) $z = \cos(xy)$, $\quad M_0\left(\dfrac{\pi}{2}; 4\right)$;

б) $z = \cos x \cos y$, $\quad M_0\left(\dfrac{\pi}{2}; 4\right)$;

в) $z = (x + 2y)^3$, $\quad M_0\,(2;1)$;

г) $z = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, $\quad M_0\,(1;3)$;

д) $z = e^y(\cos x + y\sin x)$, $\quad M_0\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$;

е) $z = e^x(x\cos y + \sin y)$, $\quad M_0\,(1;\pi)$.

14. Знайти повний диференціал функції:

а) $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$; $\quad$ б) $z = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$;

в) $z = \sin xy$; $\quad$ г) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$;

д) $z = \sin(x^3+y^3)$; $\quad$ е) $z = e^{xy}\cos xy$.

15. Дослідити функцію на диференційовність:

а) $z = x^2 + x - y^2$; $\quad$ б) $z = x^2 + y^2 + 2x + y + 1$;

в) $z = \sin xy$; $\quad$ г) $z = \cos(x^3 - y^3)$.

16. Замінюючи повний приріст функції її повним диференціалом, обчислити наближене значення виразу:

а) $1,02^{5,01}$; $\quad$ б) $1,03^{8,02}$;

в) $\ln\left(0,07^4 + 0,99^4\right)$; $\quad$ г) $\ln\left(0,05^{10} + 0,98^7\right)$;

д) $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$; $\quad$ е) $\sqrt{9\cdot 0,99^8 + 3,02^3}$;

є) $\sqrt[3]{0,98^5 + 0,03^7}$; $\quad$ ж) $\sqrt[3]{1,02^6 + 0,02^3}$.

17. Знайти градієнт функції $z = f(x,y)$ у точці M_0:

а) $z = x\sin y$, $\quad M_0\left(3;\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\quad$ б) $z = y\cos x$, $\quad M_0\,(\pi;2)$;

в) $z = x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + 2$, $\quad M_0\,(0;0)$;

г) $z = x^2 + 2x + y^2 - 8y + 3$, $\quad M_0\,(-1;4)$.

18. Зазначити точки, в яких градієнт функції $z = f(x,y)$ збігається з вектором $\vec{a}$:

а) $z = x^2 + 2y^2 + 4xy + 7$, $\quad \vec{a}(6;8)$;

б) $z = x^2 - y^2 + 8xy$, $\quad \vec{a}(8;-2)$;

в) $z = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3}y^3 - 2y^2 + 8y + 3, \quad \vec{a}(-2; 4);$

г) $z = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 2x + \frac{y^3}{3} - \frac{5y^2}{2} + 2, \quad \vec{a}(-1; -6).$

19. Знайти похідну функції $z = f(x, y)$ в точці M_0 у напрямі вектора $\vec{a}$:

а) $z = \frac{xy}{x+y}, \quad M_0\,(1; 1), \quad \vec{a}(4; 3);$

б) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad M_0\,(2; 3), \quad \vec{a}(12; -5);$

в) $z = x^y, \quad M_0\,(1; 2), \quad \vec{a}(6; -8);$

г) $z = y\sqrt{x^2 + y^2}, \quad M_0\,(3; 4), \quad \vec{a}(1; 0).$

§ 8.4. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ. НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ У ЗАМКНЕНІЙ ОБЛАСТІ

Точку $M_0(x_0; y_0)$ називають *точкою локального мінімуму* функції $z = f(x, y)$, якщо існує окіл точки M_0 такий, що для всіх точок $(x; y)$ з цього околу виконується умова $f(x;\ y) > f(x_0;\ y_0)$.

Точку $M_0(x_0; y_0)$ називають *точкою локального максимуму* функції $z = f(x, y)$, якщо існує окіл точки M_0 такий, що для всіх точок $(x; y)$ з цього околу виконується умова $f(x;\ y) < f(x_0;\ y_0)$.

Точку, в якій усі частинні похідні перетворюються на нуль, називають *стаціонарною*.

Теорема (необхідна умова екстремуму). Якщо $M_0(x_0; y_0)$ — точка екстремуму диференційовної функції $z = f(x; y)$, то в цій точці виконуються умови

$$\begin{cases} f'_x(x_0;\ y_0) = 0, \\ f'_y(x_0;\ y_0) = 0. \end{cases}$$

Теорема (достатня умова екстремуму). Нехай $M_0(x_0; y_0)$ — стаціонарна точка функції $z = f(x_0; y_0)$, причому в околі точки M_0 існують неперервні частинні похідні другого порядку цієї функції і

$$f''_{xx}(x_0; y_0) = A; \quad f''_{xy}(x_0; y_0) = f''_{yx}(x_0; y_0) = B; \quad f''_{yy}(x_0; y_0) = C.$$

I. Якщо $\Delta = AC - B^2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$, то функція $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ має екстремум:

а) якщо $A > 0$, то M_0 — точка мінімуму;

б) якщо $A < 0$, то M_0 — точка максимуму.

II. Якщо $\Delta < 0$, то точка $M_0(x_0; y_0)$ не є точкою екстремуму функції $z = f(x, y)$.

III. Якщо $\Delta = 0$, то потрібне додаткове дослідження.

З теорем II і III випливає алгоритм дослідження диференційовної функції двох змінних на екстремум.

1-й крок. Знайти стаціонарні точки як розв'язки системи

$$\begin{cases} f'_x(x; y) = 0, \\ f'_y(x; y) = 0. \end{cases}$$

2-й крок. В усіх стаціонарних точках перевірити виконання достатніх умов екстремуму.

Нехай F — замкнена область, $F \subset R_2$, $z = f(x, y)$ — диференційовна (а отже, і неперервна) функція. Тоді за теоремою Вейєрштрасса функція $z = f(x, y)$ набуває в області F найбільшого та найменшого значень. Точки, в яких функція набуває екстремальних значень, можуть бути як внутрішніми точками цієї області (у цьому разі це будуть точки локального екстремуму), так і межовими.

Тому досліджувати диференційовну функцію $z = f(x, y)$ на найбільше (найменше) значення функції в замкненій області F доцільно за таким планом:

1. Знайти стаціонарні точки і обчислити значення функції в стаціонарних точках, які належать області F (при цьому не обов'язково визначати, чи є стаціонарні точки точками екстремуму).

2. Дослідити функцію на найбільше (найменше) значення на межі ∂F.

3. Серед знайдених значень функції вибрати найбільше і найменше.

Зразки розв'язування вправ

1. Дослідити функцію на екстремум:

а) $z = x^2 - 6x - y^2 - 2y + 3$; б) $z = x^2 + 8x + y^2 + 7$; в) $z = x^3 + y^3$.

Розв'язання. а) Знайдемо стаціонарні точки із системи:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0; \end{cases} \begin{cases} 2x - 6 = 0, \\ -2y - 2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = -1. \end{cases}$$

Отже, $M_0(3; -1)$ — стаціонарна точка.

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= 2, & A &= z''_{xx}(3; -1) = 2; \\ z''_{xy} &= 0, & B &= z''_{xy}(3; -1) = 0; \\ z''_{yy} &= -2, & C &= z''_{yy}(3; -1) = -2. \end{aligned}$$

$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 < 0$. Отже, $M_0(3; -1)$ не є точкою екстремуму.

б) Знайдемо стаціонарні точки із системи:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0; \end{cases} \begin{cases} 2x - 8 = 0, \\ 2y = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 4, \\ y = 0. \end{cases}$$

Отже, $M_0(4; 0)$ — стаціонарна точка.

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= 2, & A &= z''_{xx}(4; 0) = 2; \\ z''_{xy} &= 0, & B &= z''_{xy}(4; 0) = 0; \\ z''_{yy} &= 2, & C &= z''_{yy}(4; 0) = 2. \end{aligned}$$

$\Delta = AC - B^2 = 4 > 0$. Отже, $M_0(4; 0)$ — точка екстремуму. Оскільки $A = 2 > 0$, то M_0 — точка локального мінімуму.

в) Знайдемо стаціонарні точки із системи:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0; \end{cases} \begin{cases} 3x^2 = 0, \\ 3y^2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Отже, $M_0(0;0)$ — стаціонарна точка.

$$\begin{aligned} &z''_{xx} = 6x, \quad A = z''_{xx}(0;0) = 0;\\ &z''_{xy} = 0, \qquad B = z''_{xy}(0;0) = 0;\\ &z''_{yy} = 6y, \quad C = z''_{yy}(0;0) = 0;\\ &\Delta = AC - B^2 = 0. \end{aligned}$$

Зазначена теорема не дає відповіді на питання, чи є точка M_0 точкою екстремуму. Але легко переконатись, що в довільному околі точки $M_0(0;0)$ є точки, в яких функція набуває додатних значень (це довільні точки з першої чверті), і точки, в яких функція набуває від'ємних значень (це довільні точки з третьої чверті). Отже, точка M_0 не є точкою екстремуму.

2. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 4y^2$ у замкненій області D, якщо:

а) $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$; б) $D = \{(x,y) : 1 \le x \le 4, -1 \le y \le 3\}$.

Розв'язання. Функція $z = x^2 + 4y^2$ диференційовна скрізь. Тому найбільшого та найменшого значень вона набуває або у стаціонарних точках, або на межі замкненої області D.

Знайдемо стаціонарні точки із системи: $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 0, \\ 8y = 0. \end{cases}$

Отже, $M_0(0;0)$ — стаціонарна точка.

а) Точка $M_0(0;0)$ належить області D, $z(0;0) = 0$. Знайдемо найбільше та найменше значення функції на межі області D, тобто на колі $x^2 + y^2 = 1$. Якщо точка (x,y) належить колу $y^2 = 1 - x^2$, то

$$z = x^2 + 4y^2 = x^2 + 4(1 - x^2) = 1 - 3x^2 = \varphi(x),$$

причому функція $\varphi(x)$ визначена на відрізку $[-1;1]$.

Знайдемо стаціонарні точки функції $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = 0, \quad -6x = 0, \quad x = 0.$$

При $x = 0$ маємо $\varphi(0) = 4$.

Знайдемо значення функції $\varphi(x)$ на кінцях відрізка $[-1;1]$: $\varphi(-1) = 1$, $\varphi(1) = 1$.

Отже, на колі $x^2+y^2=1$ функція набуває найбільшого значення 4 (при $x=0$) і найменшого 1 (при $x=\pm 1$), причому

$$\max_{(x,y)\in D} z = z(0;1) = z(0;-1) = \varphi(0) = 4, \quad \min_{(x,y)\in D} z = z(0;0) = 0.$$

Тому найбільше значення функції $z=x^2+4y^2$ у замкненій області D дорівнює 4, а найменше — нулю.

б) Точка $M_0(0;0)$ не належить області D. Знайдемо найбільше та найменше значення функції на межі області D.

Оскільки межа складається з чотирьох відрізків, то розв'яжемо задачу на кожному з них.

$$AB\colon y=-1,\ 1\le x\le 4. \quad \text{Тоді } z=x^2+4y^2=x^2+4=\varphi_1(x).$$

Очевидно, що $\max\limits_{1\le x\le 4}\varphi_1(x)=\varphi_1(4)=20$, $\min\limits_{1\le x\le 4}\varphi_1(x)=\varphi_1(1)=5$.

$$BC\colon x=4,\ -1\le y\le 3. \quad \text{Тоді } z=x^2+4y^2=16+4y^2=\varphi_2(y).$$

Очевидно, що $\max\limits_{-1\le y\le 3}\varphi_2(y)=\varphi_2(3)=52$, $\min\limits_{-1\le x\le 3}\varphi_2(y)=\varphi_2(0)=16$.

$$CF\colon y=3{,}1\le x\le 4. \quad \text{Тоді } z=x^2+4y^2=x^2+36=\varphi_3(x).$$

Очевидно, що $\max\limits_{1\le x\le 4}\varphi_3(x)=\varphi_3(4)=52$, $\min\limits_{1\le x\le 4}\varphi_3(x)=\varphi_3(1)=37$.

$$FA\colon x=1,\ -1\le y\le 3. \quad \text{Тоді } z=x^2+4y^2=1+4y^2=\varphi_4(y).$$

Очевидно, що $\max\limits_{-1\le y\le 3}\varphi_4(y)=\varphi_4(3)=37$, $\min\limits_{-1\le x\le 3}\varphi_4(y)=\varphi_4(0)=1$.

Отже, найбільше значення функції в замкненій області D дорівнює 52, а найменше — одиниці.

Оскільки $\varphi_2(3)=z(4;3)=52$ і $\varphi_4(0)=z(1;0)=1$, то функція набуває найбільшого значення в точці $C(4;3)$, а найменшого — у точці $L(1;0)$ (рис. 8.3).

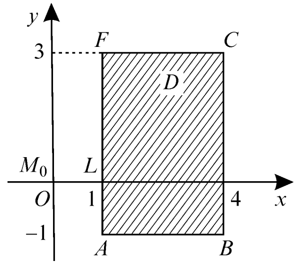


Рис. 8.3

3. Серед прямокутних паралелепіпедів об'ємом 1000 см^3 знайти той, що має найменшу площу поверхні.

Розв'язання. Нехай довжина паралелепіпеда дорівнює x см, а ширина — y см. Тоді його висота дорівнює $\dfrac{1000}{xy}$ см.

Отже, площа поверхні

$$S = f(x, y) = 2xy + 2x\frac{1000}{xy} + 2y\frac{1000}{xy} = 2xy + \frac{2000}{y} + \frac{2000}{x},$$

$$x > 0, \quad y > 0.$$

Знайдемо найбільше значення функції в першій чверті:

$$f'_x = 2y - \frac{2000}{x^2} = 0, \quad f'_y = 2x - \frac{2000}{y^2} = 0,$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{1000}{x^2}, \\ x = \dfrac{1000}{y^2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 10, \\ y = 10. \end{cases}$$

Тоді

$$f''_{xx} = \frac{4000}{x^3}, \quad f''_{xx}(10; 10) = 4 = A,$$

$$f''_{xy} = 2, \quad f''_{xy}(10; 10) = 2 = B,$$

$$f''_{yy} = \frac{4000}{y^3}, \quad f''_{yy}(10; 10) = 4 = C;$$

$$\Delta = AC - B^2 = 16 - 4 = 12 > 0, \quad A = 4 > 0.$$

Отже, $M_0(10;10)$ — точка локального мінімуму. Тоді

$$S = f(10;10) = 600 \text{ см}^2.$$

Для того щоб перевірити, чи є M_0 точкою глобального мінімуму (тобто значення функції в точці M_0 є найбільшим значенням функції на всій області визначення), потрібно додатково дослідити поведінку функції на множині, яка є межею області визначення. Якщо область визначення необмежена, то потрібно дослідити поведінку функції для великих значень x та y. Межею першої координатної чверті на евклідовій площині є додатні координатні промені осей Ox ($y = 0,\ 0 \le x < \infty$) та Oy ($x = 0,\ 0 \le y < \infty$). У точках цих променів функція не визначена, але якщо $x \to 0$ або $y \to 0$, то $f(x, y) \to \infty$. Якщо $x \to +\infty$ або $y \to +\infty$, то $f(x, y) \to +\infty$.

Отже, $M_0(10;10)$ — точка глобального мінімуму. Тоді при об'ємі 1000 см^3 найменшу площу поверхні має куб з ребром 10 см.

Завдання для самостійного розв'язування

20. Дослідити функцію на екстремум:

а) $z = x^2 + y^2 - 4x + 8y + 5$; б)$z = 2x^2 + 4y^2 - 16x - 8y$;

в) $z = x^4 + y^4$; г) $z = x^6 + y^6$;

д) $z = x^2 - y^2 + 2x$; е) $z = -x^2 + y^2 + 6y - 12$;

є) $z = x^5 + y^3$; ж) $z = x^6 - y^6$;

з) $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 5}$; і) $z = \sqrt[4]{x^4 + y^4 - 2x^2 + 2}$.

21. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ у замкненій області D:

а) $z = xy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\}$;

б) $z = x^2 - y^2$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$;

в) $z = 2x^2 + 6y^2 + 4x + 5$, $D = \{(x, y) : -2 \le x \le 2, -2 \le y \le 2\}$;

г) $z = 4x^2 + 8x + y^2 - 10$, $D = \{(x, y) : |x| \le 1, |y| \le 1\}$;

д) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 5}$, $D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \le 1\}$;

е) $z = \sqrt{x^4 + y^4}$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\}$.

Розділ 9

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

§ 9.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ

Диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{9.1}$$

яке пов'язує між собою незалежну змінну x, невідому функцію $y(x)$ та її похідну.

Диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно першої похідної, називають рівняння виду

$$y' = f(x, y). \tag{9.2}$$

Розв'язком диференціального рівняння (9.1) або (9.2) на деякому інтервалі (a, b) називають функцію $y = \varphi(x)$, яка після підстановки в ці рівняння перетворює їх на тотожність за змінною x на (a, b).

Умову

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0, \tag{9.3}$$

згідно з якою функція $y = \varphi(x)$ набуває заданого значення y_0 у заданій точці x_0, називають *початковою умовою*, або *умовою Коші*.

Диференціальні рівняння першого порядку, як правило, мають безліч розв'язків.

Загальним розв'язком рівняння (9.2) у деякій області G площини Oxy називають функцію $y = \varphi(x, C)$, що залежить від змінної x і довільної сталої C, якщо вона є розв'язком цього рівняння при довільному значенні сталої C і якщо при довільній початковій умові (9.3) такій, що $(x_0, y_0) \in G$, існує єдине значення сталої $C = C_0$, при якому функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє її: $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Частинним розв'язком рівняння (9.2) в області G називають функцію $y = \varphi(x, C_0)$, яка одержується із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при певному значенні параметра $C = C_0$.

§ 9.2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЕНИМИ ЗМІННИМИ

Диференціальним рівнянням з відокремленими змінними називають рівняння першого порядку виду

$$y' = f(x)\, g(y), \tag{9.4}$$

де $f(x)$ і $g(x)$ — деякі неперервні на певному проміжку функції.

Рівняння (9.4) можна подати також у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = f(x)\, g(y)$. Перенісши диференціал dx та розділивши обидві частини рівняння на $g(y) \neq 0$, отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx. \tag{9.4$'$}$$

Розв'язком рівняння (9.4$'$) є

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx. \tag{9.5}$$

Частинним випадком рівняння з відокремленими змінними є неповні рівняння, тобто ті, у яких права частина залежить лише від однієї змінної x:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \left(\text{його розв'язком є } y + c = \int f(x)\, dx\right)$$

або y

$$\frac{dy}{dx} = g\,(y) \quad \left(\text{його розв'язком є } \int \frac{dy}{g\,(y)} = x + c.\right)$$

Диференціальне рівняння (9.4) є окремим випадком рівняння виду

$$P\,(x)\,Q\,(y)\,dx = P_1\,(x)\,Q_1\,(y)\,dy.$$

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні достатньо розділити обидві його частини на функцію $P_1\,(x)\,Q\,(y) \neq 0$. Розв'язок цього рівняння можна записати у вигляді

$$\int \frac{P\,(x)}{P_1\,(x)}dx = \int \frac{Q_1\,(y)}{Q\,(y)}dy.$$

Зразок розв'язування вправ

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}$; б) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; в) $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{|y|}$;

г) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y}$; д) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$;

е) $yy' = \dfrac{1 - 2x}{y}$; є) $xy' + y = y^2$; ж) $y' + \sqrt{\dfrac{1 - y^2}{1 - x^2}} = 0$.

Розв'язання. а) Перенесемо диференціал dx у праву частину рівняння $dy = -\dfrac{dx}{x^2}$. Проінтегрувавши обидві частини рівняння за відповідними змінними, дістанемо $y = -\displaystyle\int \frac{dx}{x^2} + c$, або $y = \dfrac{1}{x} + C$.

б) $dy = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx$. Отже, $y = x^{\frac{2}{3}} + c$.

в) При $y \geq 0$ рівняння набере вигляду $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$. Відокремивши змінні, одержимо рівняння $\dfrac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$. Проінтегрувавши обидві частини рівняння, дістанемо $\sqrt{y} = x + C$, або $y = (x+C)^2$. Якщо $y < 0$, то $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{-y}$. Після відокремлення змінних та інтегрування одержуємо розв'язок: $-y = (x+C)^2$. Отже, загальним розв'язком рівняння є $|y| = (x+C)^2$.

г) Маємо рівняння з відокремленими змінними $2ydy = dx$. Проінтегрувавши обидві його частини, дістанемо $y^2 = x + C$.

д) Винісши з перших дужок змінну x, а з других — змінну y, одержимо $x(y^2+1)dx + y(1-x^2)dy = 0$. Розділивши рівняння на $\left(y^2+1\right)\left(1-x^2\right) \neq 0$ та проінтегрувавши його, дістанемо

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{xdx}{x^2-1} \Rightarrow \ln\left|y^2+1\right| = \ln\left|x^2-1\right| + \ln c,$$

або $y^2 + 1 = c\left|x^2-1\right|$. При такому діленні втрачено розв'язок $x = 1$.

Отже, розв'язком рівняння є $x = 1$; $y^2 + 1 = c\left|x^2-1\right|$.

е) Маємо рівняння з відокремленими змінними $y^2dy = (1-2x)dx$. Інтегрування дає такий розв'язок:

$$\frac{y^3}{3} = (x - x^2) + \frac{c}{3}, \quad \text{або} \quad y = \sqrt[3]{c + 3x - 3x^2}.$$

є) Маємо рівняння з відокремленими змінними $\dfrac{dy}{y^2-y} = \dfrac{dx}{x}$. Розв'язок у неявній формі має вигляд

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln|y| + \ln|y-1| = \ln|x| + \ln C,$$

або

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln\left(C\,|x|\right) \Rightarrow \frac{y-1}{y} = Cx.$$

ж) Маємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Після інтегрування отримуємо такий загальний розв'язок:

$$\arcsin y + \arcsin x = c.$$

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $xyy' = 1 - x^2$;   б) $y'\mathrm{tg}x - y = a$;

в) $xdy - y\ln ydx = 0,\ \ y \geq 0$;   г) $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$;

д) $y' = xy^2 + 2xy$;   е) $e^x dx - (1+e^x)ydy = 0$.

§ 9.3. ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ

Рівняння виду

$$M(x,y)dx + \mathrm{N}(x,y)dy = 0 \tag{9.6}$$

називають *однорідним*, якщо $M(x,y)$ та $N(x,y)$ — однорідні функції одного і того самого степеня m:

$$M(tx,ty) = t^m M(x,y) N(tx,ty) = t^m N(x,y).$$

Інтегрують рівняння шляхом заміни змінної $y = zx$. У результаті отримують рівняння з відокремленими змінними.

§ 9.4. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{9.7}$$

де $p\,(x)\,, q\,(x) \neq 0$ — задані функції, називають *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку.* Якщо $q\,(x) = 0$, рівняння (9.7) називають *однорідним.*

Розв'язок лінійного однорідного рівняння (9.7) визначають методом інтегрування рівнянь з відокремленими змінними:

$$y = ce^{-\int p(x)\,dx}.$$

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (9.7) знаходять методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа)

$$y(x) = c(x)e^{-\int p(x)\,dx}$$

і подають у вигляді

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(c + \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx\right).$$

§ 9.5. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ

Рівнянням Бернуллі називають рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \tag{9.8}$$

де m — будь-яке дійсне число.

Інтегрують рівняння Бернуллі шляхом зведення до лінійного рівняння за допомогою підстановки $z = y^{1-m}$, $m \neq 0$, $m \neq 1$.

Зразок розв'язування вправ

Знайти розв'язок диференціального рівняння:

а) $x^3y' = y(y^2 + x^2)$; б) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + y^2e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$;

в) $(x - y\cos\dfrac{y}{x})dx + x\cos\dfrac{y}{x}dy = 0$; г) $xy' + y = y^2\ln x$;

д) $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3x^2 - 2x^4$; е) $\dfrac{dy}{dx} = 2\left(\dfrac{y+1}{x+y-2}\right)^2$.

Розв'язання. а) Рівняння однорідне. Зведемо його до рівняння з відокремленими змінними, здійснивши заміну $y = zx$. Продиференціювавши цю рівність, дістанемо $y' = xz' + z$. Здійснивши ці заміни у рівнянні, одержимо рівняння $x^3(xz'+z) = zx(z^2x^2+x^2)$, або $xz' = z^3$. Після переходу до диференціалів маємо $xdz = z^3dx$, або $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^3}$, звідки випливає, що $\ln\frac{x}{c} = -\frac{1}{2}z^{-2}$, або $x = ce^{-\frac{z}{2}}$.

Отже, розв'язком є $x = ce^{-\frac{y^2}{2x^2}}$.

б) Рівняння однорідне. Здійснюємо заміну $y = zx$. Ураховуючи, що $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx}+z$, дістаємо $x\frac{dz}{dx}+z = z+z^2e^{-\frac{1}{z}}$. Відокремивши змінні, приходимо до рівняння $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2}dz = \frac{dx}{x}$, розв'язком якого є $e^{\frac{1}{z}}+\ln|x| = c$, або $e^{\frac{x}{y}} + \ln|x| = c$.

в) Рівняння однорідне. Здійснивши заміну $y = zx$ у заданому рівнянні, приходимо до рівняння $dx+x\cos z dz=0$, або $\frac{dx}{x}+\cos z dz=0$. Після інтегрування отримуємо $\ln|x| + \sin z = c$. Отже,

$$\ln|x| + \sin\frac{y}{x} = c.$$

г) Задане рівняння є рівнянням Бернуллі, а тому його можна звести до лінійного рівняння за допомогою заміни $z = \frac{1}{y}$. Справді, оскільки $y = \frac{1}{z}$ і $y' = -\frac{z'}{z^2}$, то, виконавши ці заміни в заданому рівнянні, отримаємо $-xz' + z = \ln x$. Однорідне рівняння $-xz' + z = 0$ має розв'язок $z = Cx$. Розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо методом Лагранжа $z(x) = c(x)x \Rightarrow z' = c'x + c$. Після відповідної підстановки в неоднорідне рівняння отримуємо $-c'x^2-cx+cx = \ln x$, або $c' = -\frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow c = -\int\frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{\ln x + 1}{x} + C$. Отже, розв'язком неоднорідного рівняння є функція $z = \ln x + 1 + Cx$, а заданого — функція $y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}$.

д) Рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням зі змінним коефіцієнтом. Розв'язком однорідного рівняння $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 0$ є функція $y = ce^{x^2}$.

За методом Лагранжа розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $y(x) = C(x)e^{x^2}$, $C(x)$ — невідома функція. Для її знаходження підставимо цей вираз у неоднорідне рівняння. Відносно функції $C(x)$ отримаємо рівняння $e^{x^2}\dfrac{dC(x)}{dx} = 3x^2 - 2x^4$, розв'язком якого є функція $C(x) = x^3e^{-x^2} + c$. Отже, розв'язок рівняння має такий вигляд:

$$y = (c + x^3e^{-x^2})e^{x^2} = ce^{x^2} + x^3.$$

е) Зведемо рівняння до однорідного шляхом лінійної заміни $y = y_1 - 1$, $x = x_1 + 3$. Обчислюємо $\dfrac{dy_1}{dx_1} = 2\left(\dfrac{y_1}{x_1 + y_1}\right)^2$. Нехай $y_1 = x_1 u$. Тоді $x_1\dfrac{du}{dx_1} + u = \dfrac{2u^2}{(1+u)^2}$, або $x_1\dfrac{du}{dx_1} + \dfrac{u + u^3}{(1+u)^2} = 0$. Після інтегрування $\ln|u| + 2\mathrm{arctg}u + \ln|x_1| = \ln c$ остаточно одержуємо $(y+1)e^{2\mathrm{arctg}\frac{y+1}{x-3}} = c$.

Завдання для самостійного розв'язування

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння:

а) $(x^2y - 1)dy + (xy^2 - 1)dx = 0$;

б) $(x\cos xy + 2y)dy + (y\cos xy + 2x)dx = 0$;

в) $y' + 2y = e^x y^2$; г) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$;

д) $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$;

е) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+2}{x+1} + \mathrm{tg}\,\dfrac{y - 2x}{x+1}$.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

§ 9.6. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називають рівняння виду

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{9.9}$$

де p, q — сталі дійсні числа; $f(x)$ — задана неперервна функція.

Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння називають *неоднорідним* і його загальний розв'язок визначається через дві довільні сталі c_1, c_2:

$$y_{\text{з.н}}(x) = \varphi(x; c_1, c_2).$$

Для знаходження єдиного розв'язку залучаються додаткові умови

$$y(x_0) = y_1, \quad y'(x_0) = y_2,$$

які називають *початковими умовами*, або *умовами Коші для диференціального рівняння другого порядку.*

Якщо $f(x) \equiv 0$, рівняння (9.9) називають *однорідним*:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{9.10}$$

Однорідне рівняння при довільних коефіцієнтах p і q має два лінійно незалежних розв'язки: $y_1(x)$, $y_2(x)$. Загальний розв'язок цього диференціального рівняння такий:

$$y_{\text{з.о}}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y_{\text{з.н}}(x)$ можна подати через загальний розв'язок однорідного рівняння $y_{\text{з.о}}(x)$ рівністю

$$y_{\text{з.н}}(x; c_1, c_2) = y_{\text{з.о}}(x; c_1, c_2) + y_{\text{ч.н}}(x),$$

де $y_{\text{ч.н}}(x)$ — будь-який частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння (9.10) шукають у вигляді $y(x) = e^{\lambda x}$, де λ — стала, яка визначається з характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{9.11}$$

Для квадратного рівняння (9.11) можливі три випадки:

1. Існують два дійсних різних кореня λ_1, λ_2. Тоді $y_1\,(x)$, $y_2\,(x)$ і загальний розв'язок рівняння (9.11) такий:

$$y_1\,(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2\,(x) = e^{\lambda_2 x}; \quad y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2. Існує один кратний корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Тоді

$$y_1\,(x) = e^{\lambda x}, \quad y_2\,(x) = xe^{\lambda x}; \quad y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}.$$

3. Існують два комплексно спряжених кореня $\lambda_1 = \mu + i\upsilon$, $\lambda_2 = \mu - i\upsilon$. Тоді

$$y_1(x) = e^{\mu x}\cos\upsilon x,\; y_2(x) = e^{\mu x}\sin\upsilon x;\; y(x) = c_1 e^{\mu x}\cos\upsilon x + c_2 e^{\mu x}\sin\upsilon x.$$

Розв'язок неоднорідного рівняння знаходять методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа):

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

де $c_1\,(x)$, $c_2\,(x)$ — функції, що визначаються з рівностей

$$c_1' = \frac{f(x)y_2(x)}{W(x)},\; c_2' = -\frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}; \quad W(x) = y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x);$$

або $c_1(x) = \displaystyle\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx + c_1$, $c_2(x) = -\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx + c_2$.

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння (9.9) запишемо у вигляді

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx y_1(x) - \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx y_2(x).$$

Якщо лінійне диференціальне рівняння має функцію $f(x)$ спеціального виду, то частинний розв'язок можна знайти за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

1. Нехай $f(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_{s-1}x + A_s$. Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння $y_{\text{ч.н}}$ шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{ч.н}}(x) = x^k\left(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_sx^s\right),$$

де $k = 0$ при $q \neq 0$; $k = 1$ при $q = 0, p \neq 0$; $k = 2$ при $q = 0$, $p = 0$.

Невідомі сталі $c_0, \ldots, c_s$ шукають так, щоб частинний розв'язок задовольняв задане рівняння. Для цього знаходять його першу і другу похідні, які разом з функцією підставляють у диференціальне рівняння. Далі, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях змінної x, одержують відносно невідомих сталих систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

2. Нехай $f(x)$ має вигляд $f(x) = Ae^{rx}$. Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння $y_{\text{ч.н}}$ шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{ч.н}}(x) = Bx^se^{rx},$$

де $s = 0$, якщо r не є коренем характеристичного рівняння і $s = 1$ або $s = 2$, якщо r — корінь рівняння кратності 1 або 2.

3. Нехай $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$. Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння $y_{\text{ч.н}}$ шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{ч.н}}(x) = x^s\left(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x\right),$$

де $s = 1$, якщо одночасно $p = 0$, $q > 0$, $\beta = \sqrt{q}$, і $s = 0$ в інших випадках.

4. Нехай $f(x) = e^{rx}(A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s)$. Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння $y_{\text{ч.н}}$ шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{ч.н}}(x) = x^se^{rx}\left(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_sx^s\right),$$

де $s = 0$, якщо r не є коренем характеристичного рівняння, і $s = 1$ або $s = 2$, якщо r — корінь рівняння кратності 1 або 2.

5. Нехай $f(x) = e^{rx}[P_s(x)\cos\mu x + Q_l(x)\sin\mu x]$, де $P_s(x), Q_r(x)$ — многочлени степеня відповідно s і l і, наприклад, $l \leq s$. Частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{ч.н}} = x^ke^{rx}[(A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s)\cos\mu x +$$
$$+ (B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_s)\sin\mu x],$$

де $k = 1$, якщо одночасно $p = 0, q > 0$, $\beta = \sqrt{q}$, і $k = 0$ в інших випадках.

Зразки розв'язування вправ

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Це рівняння має два дійсних різних кореня $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Тому $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-2x}$. Загальний розв'язок запишемо у вигляді $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$4y'' - 8y' + 5y = 0.$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння $4\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0$, яке має два комплексних кореня $\lambda_{1,2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 80}}{8} = 1 \pm \dfrac{i}{2}$. Тому $y_1(x) = e^x \sin \dfrac{x}{2}$, $y_1(x) = e^x \cos \dfrac{x}{2}$.

Загальний розв'язок рівняння має такий вигляд:

$$y(x) = e^x \left(c_1 \sin \frac{x}{2} + c_2 \cos \frac{x}{2} \right).$$

3. Знайти розв'язок рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$, що задовольняє граничним умовам $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ має два однакових розв'язки $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Загальний розв'язок диференціального рівняння запишемо у вигляді $y(x) = e^{3x}(c_1 + c_2 x)$. Для знаходження довільних сталих c_1, c_2 з граничних умов отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} (c_1 + c_2 \cdot 0)e^0 = 0, \\ (c_1 + c_2)e^3 = 1, \end{cases}$$

розв'язком якої є $c_1 = 0$, $c_2 = e^{-3}$.

Отже, розв'язок має вигляд $y(x) = xe^{3(x-1)}$.

4. Знайти розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^x \cos \frac{x}{2}.$$

Розв'язання. Розглянемо однорідне рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$. Його характеристичне рівняння $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, коренями якого є $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $\tilde{y}(x) = e^x (A \cos \dfrac{x}{2} + B \sin \dfrac{x}{2})$, де A, B — константи, які необхідно визначити. Запишемо першу та другу похідні функції $\tilde{y}(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = e^x \left[(A + \frac{B}{2}) \cos \frac{x}{2} + (B - \frac{A}{2}) \sin \frac{x}{2} \right];$$

$$\tilde{y}''(x) = e^x \left[(B + \frac{3A}{4}) \cos \frac{x}{2} - (A - \frac{3B}{4}) \sin \frac{x}{2} \right].$$

Знайдені похідні та функцію підставимо в неоднорідне рівняння і згрупуємо відповідні доданки:

$$e^x \left[\left(B + \frac{3A}{4} - 3A - \frac{3B}{2} + 2A \right) \cos \frac{x}{2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{3A}{2} + 2B - A + \frac{3B}{4} - 3B \right) \sin \frac{x}{2} \right] = 2e^x \cos \frac{x}{2}.$$

З останньої рівності отримуємо систему рівнянь відносно A і B: $\begin{cases} A + 2B = -8, \\ 2A - B = 0, \end{cases}$ розв'язком якої є $A = -\dfrac{8}{5}$, $B = -\dfrac{16}{5}$.

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд $\tilde{y}(x) = -\dfrac{8}{5} e^x (\cos \dfrac{x}{2} + 2 \sin \dfrac{x}{2})$, а загальний

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \frac{8}{5} e^x (\cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2}).$$

5. Знайти розв'язок неоднорідного рівняння $y'' + 2y' + y = x^2 + 1$.
Розв'язання. Спочатку розв'язуємо однорідне рівняння

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, коренями якого є $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{з.о}}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Оскільки справа стоїть многочлен другого степеня і характеристичне рівняння не містить нульових коренів, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_{\text{ч.н}}(x) = ax^2 + bx + c,$$

де a, b, c — невідомі сталі. Для їх знаходження обчислимо першу і другу похідні частинного розв'язку, тобто

$$y'_{\text{ч.н}}(x) = 2ax + b, \quad y''_{\text{ч.н.}}(x) = 2a,$$

і підставимо разом з ним у рівняння. Дістанемо

$$2a + 2\,(2ax + b) + ax^2 + bx + c = x^2 + 1,$$

або

$$ax^2 + (4a + b)\,x + 2a + 2b + c = x^2 + 1.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях у многочленів лівої та правої частин

$$\begin{array}{ll} x^2 : a = 1, & \\ x : 4a + b = 0, & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1, \\ b = -4, \\ c = 7 \end{array} \right. \\ x^0 : 2a + 2b + c = 1 & \end{array}$$

і дістанемо систему лінійних рівнянь відносно сталих a, b, c, розв'язком якої є $a = 1$, $b = -4$, $c = 7$. Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{з.н}}(x) =_1 e^{-x} +_2 xe^{-x} + x^2 - 4x + 7.$$

6. Знайти розв'язок неоднорідного рівняння $y'' + y = e^x x$.

Розв'язання. Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння $y'' + y = 0$, характеристичне рівняння якого має вигляд $\lambda^2 + 1 = 0$. Його коренями будуть $\lambda_{1,2} = \pm i$. Тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{з.о}}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Оскільки справа стоїть многочлен першого порядку, помножений на експоненту, то частинний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{ч.н}}(x) = e^x(ax + b).$$

Звідси

$$y'_{\text{ч.н}}(x) = e^x(ax + a + b), \quad y''_{\text{ч.н}}(x) = e^x(ax + 2a + b).$$

Підставимо одержані вирази у диференціальне рівняння

$$e^x(ax + 2a + b) + e^x(ax + b) = e^x x, \quad \text{або} \quad 2ax + 2a + 2b = x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2a = 1, \\ 2a + 2b = 0, \end{cases}$$

розв'язок якої має вигляд $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$.

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{з.н}}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x(x - 1).$$

7. Знайти розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = xe^x$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Отже, однорідне рівняння має такий розв'язок: $y_{\text{з.о}}(x) = e^x(c_1 x + c_2)$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $\tilde{y}(x) = x^2 e^x(B_0 x + B_1)$.

Знайшовши першу і другу похідні

$$\tilde{y}'(x) = e^x(B_0 x^3 + (B_1 + 3B_0)x^2 + 2B_1 x),$$

$$\tilde{y}''(x) = e^x(B_0 x^3 + (B_1 + 6B_0)x^2 + (4B_1 + 6B_0)x + 2B_1)$$

і підставивши їх разом з функцією в неоднорідне рівняння, дістанемо

$$e^x(6B_0 x + 2B_1) = xe^x.$$

З останньої рівності знаходимо $B_1 = 0, B_0 = \dfrac{1}{6}$. Частинний розв'язок має вигляд $\tilde{y}(x) = \dfrac{1}{6}x^3 e^x$.

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння такий:

$$y(x) = e^x(c_1 x + c_2 + \frac{1}{6}x^3).$$

8. Розв'язати лінійне неоднорідне рівняння $y'' - y = x\cos x + \sin x$.

Розв'язання. Записавши характеристичне рівняння $\lambda^2 - 1 = 0$ і знайшовши його розв'язки $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, загальний розв'язок однорідного рівняння подамо у вигляді

$$y_{\text{з.о}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного шукатимемо у вигляді

$$y'_{\text{ч.н}}(x) = (ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x.$$

Звідси

$$\begin{aligned} y'_{\text{ч.н}}(x) &= (cx + a + d)\cos x + (-ax - b + c)\sin x, \\ y''_{\text{ч.н}}(x) &= (-ax - b + 2c)\cos x + (-cx - 2a - d)\sin x. \end{aligned}$$

Підставляємо одержані вирази в диференціальне рівняння

$$(-ax - b + 2c)\cos x + (-cx - 2a - d)\sin x - (ax + b)\cos x - \\ - (cx + d)\sin x = x\cos x + \sin x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових виразах:

$$\begin{cases} x\cos x: -2a = 1, \\ x\sin x: -2c = 0, \\ \cos x: -b + 2c - b = 0, \\ \sin x: -2a - 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2}, \\ b = 0, \\ c = 0, \\ d = 0. \end{cases}$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{ч.н}}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x.$$

9. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння. Корені його характеристичного рівняння є комплексними числами: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $y_0(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа): $\tilde{y}(x) = c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x$. Для того щоб знайти функцію $c_1\,(x)$, $c_2\,(x)$, спочатку знайдемо похідну від $\tilde{y}\,(x)$:

$$\tilde{y}'\,(x) = c_1'\,(x) \sin x + c_1\,(x) \cos x + c_2'\,(x) \cos x - c_2\,(x) \sin x.$$

Покладемо в цій першій похідній $c_1'\,(x) \sin x + c_2'\,(x) \cos x = 0$. Тоді

$$\tilde{y}'\,(x) = c_1\,(x) \cos x - c_2\,(x) \sin x.$$

Знайдемо другу похідну від $\tilde{y}\,(x)$. Для цього продиференціюємо $\tilde{y}'\,(x)$

$$\tilde{y}''\,(x) = c_1'\,(x) \cos x - c_1\,(x) \sin x - c_2'\,(x) \sin x - c_2\,(x) \cos x$$

і підставимо в неоднорідне рівняння цю другу похідну і функцію $\tilde{y}\,(x)$. У результаті дістанемо $c_1'(x) \cos x - c_2'(x) \sin x = 1/\sin x$, тобто відносно $c_1'(x), c_2'(x)$ маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = 0, \\ c_1'(x) \cos x - c_2'(x) \sin x = 1/\sin x. \end{cases}$$

Із цієї системи знаходимо $c_1'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $c_2'(x) = -1$, звідки після інтегрування дістаємо $c_1(x) = \ln|\sin x| + c_1$, $c_2(x) = -x + c_2$. Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння такий:

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 x \cos x + \sin x \ln|\sin x| - x \cos x.$$

Завдання для самостійного розв'язування

3. Знайти загальний та частинний розв'язки диференціального рівняння:

а) $y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x)$;

б) $5y'' - 6y' = 5y = e^{2x} + 2x^3 - x + 2;$

в) $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-1,5x}, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -5,5;$

г) $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3), \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 2;$

д) $y'' + y + \sin 2 = 0, \quad y(\pi) = y'(\pi) = 1;$

е) $y'' - 9y = e^{3x} x \cos x;$

є) $y'' - 4y' - 5y = 10e^{2x} \sin x,\ y\,(0) = 0,\ y'\,(0) = 5;$

ж) $y'' + y = \sin x;$

з) $y'' - y = 10x \sin 3x + 14 \cos x.$

ВІДПОВІДІ

Розділ 1

§ 1.1.

2. $\begin{pmatrix} -16 & 26 \\ 12 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 16 & -3 \\ 15 & -1 & 6 \end{pmatrix}$. **4.** а) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2.5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. **5.** а) $\begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$, не можна; б) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, можна.

6. а) $AB = (-1)$, $BA = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 6 \\ 5 & -2 & -3 \\ -12 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; б) $AB = \begin{pmatrix} 3 & -9 & -6 \\ 14 & 17 & 27 \\ 25 & -3 & 56 \end{pmatrix}$,

$BA = \begin{pmatrix} 25 & -9 & 5 \\ 20 & 29 & 17 \\ 11 & 30 & 22 \end{pmatrix}$. **9.** а) $f(A) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $f(A) = \begin{pmatrix} -13 & 9 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}$; в) $f(A) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 \\ -12 & -9 & 6 \\ -8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

§ 1.2.

10. а) (-21); б) (20); в) (-27); г) (-45). **11.** а) (124); б) (-195); в) (-187); г) $abcd$. **12.** а) 0; б) 0; в) 0. **13.** а) $x = 1$; б) $x_1 = 1,\ x_2 = 2$; в) $x_1 = -2,\ x_2 = 4$.

§ 1.3.

14. а) $-\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 41 & -1 & 1 \\ 9 & -3 & -9 \\ -8 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 9 & -6 & -11 \\ -5 & 10 & 15 \end{pmatrix}$;

в) $-\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 28 & -13 & 4 \\ -21 & 3 & -3 \\ 34 & -10 & 1 \end{pmatrix}$; г) $-\frac{1}{45}\begin{pmatrix} 40 & -15 & 5 \\ -32 & 3 & -4 \\ 53 & -12 & 1 \end{pmatrix}$.

15. $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0\\ -6 & 8 & 2\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}$. **16.** $a_1=1$, $a_2=-6$. **17.** а) $X=\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

б) $X=\begin{pmatrix} -4 & 2\\ -5 & 3\end{pmatrix}$; в) $X=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -16 & 52 & 68\\ 7 & -21 & -27\\ -1 & 3 & 3\end{pmatrix}$;

г) $X=\begin{pmatrix} 4 & -7 & 1\\ -6 & 13 & -1\end{pmatrix}$; д) $X=\begin{pmatrix} -7 & -11 & -2\\ 8 & 10 & 9\end{pmatrix}$.

§ 1.4.

18. а) 3; б) 1; в) 2; г) 3; д) 3; е) 4; є) 2.

§ 1.5.

19. $(1,1,2)$. **20.** а) $(1,-1)$; б) $(5,1)$; в) $(2,0,-1)$; г) $(0,-1,2)$; д) $(2,2,3)$.
21. а) $x_1=43x_4+82x_5-81$, $x_2=-14x_4-26x_5+26$, $x_3=3x_4+5x_5-5$; б) $x_1=27x_4-57$, $x_2=-9x_4+18{,}5$, $x_3=2x_4-3{,}5$, $x_5=0$; в) система не сумісна; г) $x_1=19x_3+1$, $x_2=-6x_3$, $x_4=0$, $x_5=1$;
д) $x_1=-6x_4-5x_5+1$, $x_2=-3+4x_4+4x_5$, $x_3=5$; е) система не сумісна.
22. а) $\lambda\neq 1$, $\lambda\neq -2$; $x_1=x_2=x_3=\dfrac{1}{\lambda+2}$; б) $\lambda\neq 1$, $\lambda\neq -3$; $x_1=x_2=x_3=x_4=\dfrac{1}{\lambda+3}$. **23.** Щоденний обсяг випуску дитячих костюмів 200, жіночих — 300, чоловічих — 200. **24.** Транспорту типу *I* необхідно замовити 30 одиниць, типу *II* — 10, типу *III* — 40.

Розділ 2

§ 2.1.

4. $\overline{CN}=\dfrac{1}{3}\bar a+\dfrac{2}{3}\bar b$; $\overline{CM}=\dfrac{2}{3}\bar a+\dfrac{1}{3}\bar b$. **5.** $\overline{CA_1}=\bar a-\bar b-\bar c$, $\overline{AC_1}=\bar a+\bar b+\bar c$, $\overline{DB_1}=\bar a+\bar b-\bar c$, $\overline{BD_1}=\bar a-\bar b+\bar c$. **6.** а) $\overline{AB}=(-2,-1,3)$, $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{14}$, $\cos\alpha=\dfrac{-2}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\dfrac{-1}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$; б) $\overline{AB}=(1,0,2)$, $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt5}$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=\dfrac{2}{\sqrt5}$; в) $\overline{AB}=(-3,-1,5)$, $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{35}$, $\cos\alpha=\dfrac{-3}{\sqrt{35}}$, $\cos\beta=\dfrac{-1}{\sqrt{35}}$, $\cos\gamma=\dfrac{5}{\sqrt{35}}$; г) $\overline{AB}=(-4,5,0)$, $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{41}$, $\cos\alpha=\dfrac{-4}{\sqrt{41}}$, $\cos\beta=\dfrac{5}{\sqrt{41}}$, $\cos\gamma=0$. **7.** а) $\bar a=\left(\sqrt2,1,-1\right)$;

б) $\bar{a} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}\right)$; в) $\bar{a} = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. **9.** а) 2; б) $\sqrt{69}$. **10.** $\lambda = -2$.
11. $(4; -5; -6)$. **12.** а) $\bar{b} = \bar{a}_1 - \bar{a}_2 + 2\bar{a}_3$; б) $\bar{b} = -2\bar{a}_1 + 5\bar{a}_3$;
в) $\bar{b} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3$; г) $\bar{b} = \bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 - \bar{a}_3$.

§ 2.2.

13. а) $\cos\varphi = \frac{-7}{\sqrt{38}\sqrt{29}}$; б) $\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{10}}$. **14.** а) $\cos A = \frac{-6}{49}$,
$\cos B = \frac{61}{7\sqrt{122}}$, $\cos C = \frac{61}{7\sqrt{122}}$; б) $\cos A = \frac{34}{\sqrt{41}\sqrt{65}}$, $\cos B = \frac{7}{\sqrt{41}\sqrt{38}}$,
$\cos C = \frac{31}{\sqrt{65}\sqrt{38}}$. **15.** $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{66}}$. **16.** $m = -4$. **17.** а) $(-13, 4, 2)$;
б) $(-11, 5, 2)$; в) $(-4, -10, 1)$; г) $(2, 2, -1)$. **18.** $8\sqrt{3}$. **19.** а) $(2, 1, 4)$;
б) $(4, 2, 8)$; в) $(8, 4, 16)$. **20.** а) $AB = \sqrt{50}$, $\cos\varphi = \frac{42}{5\sqrt{86}}$, $v = 70$;
б) $AB = 11$, $\cos\varphi = \frac{16}{11\sqrt{5}}$, $v = 88$; в) $AB = \sqrt{13}$, $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{26}}$, $v = 22$;
г) $AB = \sqrt{6}$, $\cos\varphi = 0$, $v = 22$.

Розділ 3

§ 3.1.

1. а) $(-1; -1)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$; б) $(-2; 4)$, $(2; 4)$, $(-2; -4)$; в) $(4; -3)$, $(-4; -3)$, $(4; 3)$; г) $(2; 5)$, $(-2; 5)$, $(2; -5)$. **2.** $M(-3; 2)$. **3.** а) 7,5; б) 3; в) 3; г) 3,5; д) 3,5; е) 1,5.

§ 3.2.

5. $\left(-\frac{7}{3}; 1\right)$. **6.** $\left(0; \frac{5}{3}\right)$. **7.** а) AB: $y - 2 = 0$, AC: $3x - y - 4 = 0$,
BC: $3x + 4y + 1 = 0$, $\cos A = \frac{1}{\sqrt{10}}$; б) AB: $x - y + 2 = 0$,
AC: $x + 2y - 1 = 0$, BC: $x + y - 2 = 0$, $\cos A = \frac{1}{\sqrt{10}}$; в) AB: $x - 3y = 0$,
AC: $x + 2y - 5 = 0$, BC: $2x - y = 0$, $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) AB: $2x - 3y + 4 = 0$,
AC: $x - y + 2 = 0$, BC: $3x - 4y + 5 = 0$, $\cos A = \frac{5}{\sqrt{26}}$;
д) AB: $x + 2y - 6 = 0$, AC: $2x - 3y - 5 = 0$, BC: $3x - y - 4 = 0$,

$\cos A = \dfrac{4}{\sqrt{65}}$; е) AB: $2x - y - 4 = 0$, AC: $x - 2y - 2 = 0$, BC: $x - y - 1 = 0$, $\cos A = \dfrac{-4}{5}$. **8.** а) $y - 3 = 0$, $x - 2 = 0$; б) $3x - 2y = 0$; в) $x + y - 5 = 0$; г) $x + 2y - 8 = 0$; д) $2x - y - 1 = 0$. **9.** $5x + 3y - 30 = 0$. **10.** $(2; 10)$.
11. $3x - y - 7 = 0, x + 3y - 9 = 0$. **12.** $2x + 5y - 28 = 0$, $11x - 10y - 42 = 0$, $x - y = 0$. **13.** $A\,(1; 1)$, $B\,(3; 5)$, $C\,(0; -2)$, $\dfrac{2}{\sqrt{58}}$.

§ 3.3.

14. а) так; б) ні. **15.** а) так; б) ні. **16.** $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 13$.
17. а) $a = 3, b = 2$, $F_1\left(-\sqrt{5}; 0\right)$, $F_2\left(\sqrt{5}; 0\right)$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $x = \pm\dfrac{9}{\sqrt{5}}$; б) $a = 8, b = 4$, $F_1\left(-4\sqrt{3}; 0\right)$, $F_2\left(4\sqrt{3}; 0\right)$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \pm\dfrac{16}{\sqrt{3}}$.
18. а) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{27} = 1$; в) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$; г) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.
19. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16/3} = 1$. **20.** а) $O\,(1; -1)$, $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$, $F_1\,(-1; -1)$, $F_2\,(3; -1)$; б) $O\,(1; 1)$, $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, $F_1\,(0; 1)$, $F_2\,(2; 1)$. **21.** а) $a = 3$, $b = 2$, $F_1\left(-\sqrt{13}; 0\right)$, $F_2\left(\sqrt{13}; 0\right)$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$, $y = \pm\dfrac{2}{3}x$, $x = \pm\dfrac{9}{\sqrt{13}}$; б) $a = 3$, $b = 4$, $F_1\,(-5; 0)$, $F_2\,(5; 0)$, $\varepsilon = \dfrac{5}{3}$, $y = \pm\dfrac{4}{3}x$, $x = \pm\dfrac{9}{5}$. **22.** а) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{176/25} = 1$; в) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$; г) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$. **23.** $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$.
24. а) $O\,(1; 1)$, $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $F_1\left(1 - \sqrt{6}; 1\right)$, $F_2\left(1 + \sqrt{6}; 1\right)$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$; б) $O\,(1; 1)$, $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, $F_1\,(-4; 1)$, $F_2\,(6; 1)$, $\varepsilon = \dfrac{5}{2}$. **25.** а) $y^2 = 16x$; б) $x^2 = y$; в) $y^2 = x$. **26.** а) $F\,(6; 0)$, $x = -6$; б) $F\,(0; -4)$, $y = 4$; в) $F\,(-8; 0)$, $x = 8$. **27.** а) $O\,(-2; 1)$, $F\,(-2; 1{,}25)$, $y = 0{,}75$; б) $O\,(4; 3)$, $F\,(3{,}5; 3)$, $x = 4{,}5$; в) $O\,(-1; -1)$, $F\,(-1; -1{,}75)$, $y = -0{,}25$. **28.** $(y-3)^2 = 4\,(x-2)$.

§ 3.5.

29. $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{10} - \dfrac{z}{2} = 1$. **30.** $2x + 14y + 20z = 0$. **31.** а) $3x - y - 2z = 0$; б) $2x + 4y + z - 7 = 0$. **32.** а) $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{70}}$; б) $\cos\varphi = -\dfrac{2}{\sqrt{11}\sqrt{38}}$;

в) $\cos\varphi = \dfrac{12}{7\sqrt{6}}$. **33.** а) прямі паралельні, $d = \dfrac{2}{\sqrt{38}}$; б) прямі збігаються; в) прямі не паралельні.

§ 3.6.

34. а) $\dfrac{x}{-4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-2}{3}$; б) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-8}$; в) $\dfrac{x}{-8} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-2}{6}$; г) $-x = y+5 = z$. **35.** а) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-3}{-2}$; б) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{3}$.

36. а) не перетинаються, $\cos\varphi = \dfrac{5}{\sqrt{70}}$; б) перетинаються, $\cos\varphi = \dfrac{4}{\sqrt{70}}$; в) не перетинаються, $\cos\varphi = -\dfrac{7}{6\sqrt{7}}$.

§ 3.7.

39. а) $2x - 2y + 3z - 14 = 0$; б) $-2x + 3y - 7z + 25 = 0$.

41. а) $M(-1;-2;0)$, $\sin\varphi = \dfrac{4}{3\sqrt{14}}$; б) $M(-4;3;1)$, $\sin\varphi = -\dfrac{11}{\sqrt{84}}$; в) $M(-3;15;5)$, $\sin\varphi = -\dfrac{13}{\sqrt{194}\sqrt{21}}$.

Розділ 4

§ 4.1

1. а) $x < 3$; б) $x = 1$; в) $x \in (-\infty;-2) \cup (-2;1) \cup (1;+\infty)$; г) $x \in (-\infty;-1] \cup [2;+\infty)$; д) $x > 5$; е) $x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$; є) $x \in [-\pi/2 + 2k\pi;\ \pi/2 + 2k\pi]$; ж) $x \neq \pi/4 + k\pi/2;\ \pi/3 + 2k\pi]$.
2. $f(0) = 0,\ f(\pi) = 0,\ f(3/2) = 9/4$. **3.** а) обмежена зверху; б) обмежена; в) обмежена знизу. **4.** а) зростаюча на $(-\infty;+\infty)$; б) спадна при $x < 0$, зростаюча при $x > 0$; в) спадна при $x < 1$ та при $x > 1$; г) незростаюча.
5. а) парна; б) непарна; в) парна; г) непарна; д) непарна; е) ні парна, ні непарна. **6.** а) $T = 2\pi/3$; б) $T = 2$; в) $T = 2\pi$; г) неперіодична.
7. $D = 12x,\ x \in [0;150],\ \Delta D = 780$ грн. **8.** $x = 520$ грн при $y = 120,\ y(1300) = 354$ грн.

§ 4.2

9. а) $-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{9}$; б) $2, \dfrac{1}{2}, \dfrac{8}{27}, \dfrac{1}{4}$; в) $0, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{8}$; г) 1, 0, -1, 0.

10. а) $\dfrac{n}{n+2}$; б) $\sin\dfrac{n\pi}{2}$; в) $\dfrac{3^n}{2n}$; г) $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. **14.** 1) $3/2$; 2) -1; 3) 1;

4) 1/4; 5) 0; 6) ∞; 7) 0; 8) 1/2; 9) 1; 10) 0; 11) ∞; 12) 0; 13) 0; 14) e^6; 15) e^6; 16) e^{-4}; 17) e. **15.** $a_3 = 7024,64$ грн, $A_3 \approx 7166,65$ грн. **16.** $A_0 \approx 2439$ грн.

§ 4.3

17. 1) 6; 2) 0; 3) 1/6; 4) $-1/4$; 5) $-2/3$; 6) $-1/2$; 7) 4; 8) -4; 9) $-1/6$; 10) 2/5; 11) 3/4; 12) $\sin 1$; 13) 1/4; 14) 2; 15) 2; 16) 1/2; 17) ∞; 18) 1/2; 19) $\sqrt{e}$; 20) ∞; 21) 3/5; 22) $-1/3$; 23) ∞; 24) 0; 25) 1; 26) 1; 27) 1; 28) $-\infty$; 29) $1/e^2$; 30) e^3; 31) $1/e$; 32) e^3; 33) 0; 34) 1.

18. а) $f(0-0)=0,\ f(0+0)=+\infty$; б) $f(-2-0)=-\infty,\ f(-2+0)=+\infty$; в) $f(0-0)=1,\ f(0+0)=-1$.

§ 4.4

20. а) $x=5$ — точка розриву другого роду; б) $x=-1$ — точка (усувного) розриву першого роду; в) $x=0$ — точка (усувного) розриву першого роду; г) $x=0$ — точка розриву другого роду; д) $x=0$ — точка розриву другого роду; е) функція неперервна при всіх $x \in \mathbb{R}$. **21.** а) $x=2$ — точка усувного розриву; б) $x=2$ — точка розриву першого роду. **22.** а), б) має хоча б один корінь.

Розділ 5

§ 5.1

2. 1) $3x^2+x+1/\sqrt{x}$; 2) $5x^4-2^{-x}\ln 2$; 3) $\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x}}$; 4) e^{x-3}; 5) $4^{1+x}\ln 2$; 6) $5/x$; 7) $\dfrac{2\ln x}{x}$; 8) 0; 9) $\dfrac{2}{\cos^2 x}-3\sin x$; 10) $-\sin 2x$; 11) $2\cos 2x$; 12) $x^2(3\ln x+1)$; 13) $2x\operatorname{arctg}x+1$; 14) $2e^x\cos x$; 15) $\dfrac{x(2-x)}{(1-x)^2}$; 16) $\dfrac{2-x^2}{(x^2+2)^2}$; 17) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$; 18) $\dfrac{x^2(2\ln x-1)-1}{x\ln x}$; 19) $\dfrac{1-\cos x}{\sin^x}$; 20) $\dfrac{x-2\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}x}{x^3(1+x^2)}$. **3.** 1) $-6(1-2x)^2$; 2) $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}}$; 4) $2(1+x)$; 5) $2\cos(2x-1)$; 6) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$; 7) $6\cos 2x-6\sin 3x$; 8) $-\sin x/2$; 9) $\dfrac{6\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x}$; 10) $\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; 11) $\dfrac{2\ln(x-1)}{x-1}$; 12) $\dfrac{1+2x}{x+x^2}$; 13) $-2xe^{1-x^2}$; 14) $\dfrac{\sqrt{e^x}}{2}$; 15) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$; 16) $-5^{2-3x}\ln 5$; 17) $2e^{4x}(\cos 2x+2\sin 2x)$; 18) $2x\ln x^3+3\left(x^2+1\right)/x$;

19) $2e^{2x}\left(\ln\left(x^2+1\right)+\dfrac{x}{x^2+1}\right)$; 20) $2\left(x-\sin^2 x\right)(1-\sin 2x)$;

21) $\dfrac{8\operatorname{tg} x\sin^2 x-2}{\sin^2 x}$; 22) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; 23) $-\dfrac{2\sin\left(\ln x^2\right)}{x}$; 24) $\dfrac{1}{\sin x\ln 10}$;

25) $\dfrac{2\ln x}{x\left(1+\ln^4 x\right)}$. **4.** а) $\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^3}}$; б) $\dfrac{x^2-4x+2}{\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$;

в) $x^{\cos x}\left(\dfrac{\cos x}{x}-\sin x\,\ln x\right)$; г) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right)$.

5. а) 3; б) 0; в) 2; г) 8/3. **6.** а) $-(3/2)\operatorname{ctg}\,t$; б) $\dfrac{2e^t}{1+t}$; в) -2; г) $\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$.

7. а) $y'=-\dfrac{3x+y}{x+y}$; б) $y'=\dfrac{e^x-y3^{xy}\ln 3}{e^y+x3^{xy}\ln 3}$;

в) $y'=\dfrac{y\left(2x^2+1\right)}{x\left(1+x^2\right)(1-x\operatorname{arctg},x)}$; г) $y'=\dfrac{y(x-xy-1)}{x(xy+1)}$.

8. $2x-y-4=0,\ x+2y+3=0$. **9.** а) (1; 1); б) (1/2; 1/4). **10.** 7 м/с.
11. 16 м/с^2. **12.** $p(t)=-3t^2+18t,\ p(1)=15,\ p(7)=-21$. **13.** 108 грн.
14. $P'(5)=4$ грн.

§ 5.2

15. а) $10(5x+3)\,dx$; б) $\dfrac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2}dx$; в) $-\dfrac{3x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$. **16.** а) 2,00125;

б) 0,4997; в) 0,775; г) 0,02. **17.** 0,0095 (0,95 %). **18.** а) $-4\sin 2x$;

б) $\dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$; в) $-2\cos\,2x$; г) $-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$; д) $\dfrac{10}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$; е) 2^ne^{2x};

є) $(-1)^n\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}$, $n\geq 2$; ж) $\sin\,(x+n\pi/2)$; з) $\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

19. а) $n(n-1)x^{n-2}dx^2$; б) $-25\sin 5x dx^2$; в) $a^x\ln^2 a dx^2$; г) $(6x+2)dx^2$.

§ 5.3

20. 1) -2; 2) 1/5; 3) 1; 4) $+\infty$; 5) 1; 6) 1/2; 7) 1; 8) 0; 9) 0; 10) 1/5; 11) 0; 12) 0; 13) ∞; 14) 0; 15) 0.

§ 5.4.

21. а) Спадає на $(-\infty;\,3)$, зростає на $(3;\,+\infty)$; б) спадає на $(-\infty;\,-1)$ і $(1;\,+\infty)$, зростає на $(-1;\,1)$; в) спадає на (0; 2), зростає на $(2;\,+\infty)$; г) спадає на $(0;\,1/\sqrt{e})$, зростає на $(1/\sqrt{e};\,+\infty)$. **22.** 1) $f_{\max}(0)=2$; 2) $f_{\min}(-2)=-3$; 3) $f_{\min}(0)=2,\ f_{\max}(2)=6$; 4) $f_{\min}=f(0)=f(1)=0$, $f_{\max}(1/2)=1/16$; 5) $f_{\max}(-2)=-4$; 6) $f_{\max}(2)=1$;

7) $f_{\min}\left(1/\sqrt{e}\right)=-1/2e$; 8) $f_{\max}(0)=1$; 9) $f_{\min}(0)=0$;
10) $f_{\min}\left(-\ln 2/3\right)=3/\sqrt[3]{4}$; 11) $f_{\min}(\pm1)=0$, $f_{\max}(0)=1$;
12) $f_{\max}\left(\pm\pi/3+2k\pi\right)=1/4$; 13) $f_{\max}\left(\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}/2$,
$f_{\min}\left(-\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}/2$; 14) $f_{\min}(-2)=-1$, $f_{\max}(2)=1$.
23. а) $\max f=f(0)=f(2)=0$, $\min f=f(1)=-1$;
б) $\max f=f(-1)=6$, $\min f=f\left(3/4\right)=-1/8$; в) $\max f=f(-1)=-6$, $\min f=f(1)=-1$; г) $\max f=f(0)=1$, $\min f=f(-1)=f(1)=0$;
д) $\max f=f(0)=f(4)=0$, $\min f=f(-1)=f(1)=0$;
е) $\max f=f\left(1/2\right)=2$, $\min f=f\left(-1/2\right)=2/3$. **24.** $v(2)=12$. **25.** $H=2R$.
26. 50 м і 25 м. **27.** $v_{\max}(100)=30$. **28.** $f_{\max}\left(2a/3\right)=4a^3/27$.
29. $S_{\min}(104{,}9)=825{,}17$. **30.** $P_{\max}(20)=5500$. **31.** $V_{\max}(300)=18250$.
32. 1) $(2;0)$ — т. перегину; 2) $(-1;0)$ і $(1;0)$ — т. перегину; 3) опукла вгору на $(4;+\infty)$; 4) опукла вгору; 5) $\left(\pm1/\sqrt{2};1/\sqrt{e}\right)$ — т. перегину; 6) $\left(-2;-2/e^2\right)$ — т. перегину; 7) опукла вниз на $(-2;+\infty)$; 8) опукла вниз на $(0;+\infty)$; 9) $(\pm2;0)$ — т. перегину; 10) опукла вгору на $(-\infty;1)$ і вниз на $(1;+\infty)$; 11) опукла вгору на $(-\infty;-1)$ і вниз на $(-1;+\infty)$; 12) опукла вгору на $(-\infty;0)$ і вниз на $(0;+\infty)$. **33.** а) $x=-1$, $y=0$; б) $x=1$, $x=2$, $y=0$; в) $y=3$; г) $x=0$, $y=2x$; д) $x=0$, $y=x+1$; е) $y=0$ при $x\to+\infty$; є) $y=x$, $y=-x$; ж) $y=0$; з) $x=0$, $y=0$; і) $y=x/2\pm\pi/2$. **34.** $y=4x$ — асимптота, відстань $d=0$.

§ 5.5.

35. 1) парна, $f_{\max}=f(0)=4$, опукла вгору; 2) $f_{\min}=f(2)=-1$, опукла вниз; 3) непарна, $f_{\max}=f(-1)=2$, $f_{\min}=f(1)=-2$; $(0;0)$ — т. перегину; 4) $f_{\max}=f(-1)=4$, $f_{\min}=f(1)=0$, $(0;2)$ — т. перегину; 5) парна, $f_{\max}=f(-1)=f(1)=3/2$, $f_{\min}=f(0)=1$, $\left(\pm1/\sqrt{3};23/18\right)$ — т. перегину; 6) $f_{\max}=f(3)=27/5$, $(0;0),(2;16/5)$ — т. перегину, на $(-\infty;0)$ і $(2;+\infty)$ опукла вгору, на $(0;2)$ опукла вниз; 7) спадна при $x\neq-1$, $y=1$ і $x=-1$ — асимптоти, на $(-\infty;-1)$ опукла вгору, на $(-1;+\infty)$ опукла вниз; 8) парна, $y=0$ — асимптота, $f_{\max}=f(0)=1$, $\left(\pm1/\sqrt{3};3/4\right)$ — т. перегину; 9) $x=0$, $x=1$ і $y=0$ — асимптоти, $f_{\max}=f\left(1/2\right)=-4$; 10) непарна, $x=0$ і $y=x/2$ — асимптоти, $f_{\max}=f(2)=2$, $f_{\min}=f(-2)=-2$; 11) $x=0$, $x=-2$ і $y=0$ — асимптоти, $f_{\max}=f(-1)=-2$, на $(-\infty;-2)$ і $(-2;0)$ опукла вгору, на $(0;+\infty)$ опукла вниз; 12) $x\neq\pm2$, непарна, $x=\pm2$ і $y=2$ — асимптоти, $f_{\max}=f(0)=0$, на $(-\infty;-2)$ і $(2;+\infty)$ опукла вниз, на $(-2;2)$ опукла вгору; 13) $f(x)\geq0$, парна, $y=4$ — асимптота, $f_{\min}=f(0)=0$, опукла вгору; 14) непарна, $x=\pm1$ і $y=x$ — асимптоти, $f_{\max}=f\left(-\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}/2$, $f_{\min}=f(\sqrt{3})=3\sqrt{3}/2$, $(0;0)$ — т. перегину, на

$(-\infty; -1)$ і $(0; 1)$ опукла вгору, на $(-1; 0)$ і $(1; +\infty)$ опукла вниз;
15) $x \neq 0$, $f_{\min} = f\left(-\sqrt[3]{2}\right) = 3/\sqrt[3]{4}$, на $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ опукла вниз, $x = 0$ і $y = -x$ — асимптоти; 16) парна, $y = 0$ — асимптота, $f_{\max} = f(0) = 1$, $\left(\pm 1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{e}\right)$ — т. перегину; 17) $y = 0$ — асимптота при $x \to +\infty$, $f_{\min} = f(0) = 1$, опукла вниз; 18) $y = 0$ — асимптота при $x \to -\infty$, $f_{\min} = f(-1) = -1/e$, $\left(-2; -2/e^2\right)$ — т. перегину;
19) $f(0+0) = +\infty$, $f_{\min} = f(1) = 0$, $(e; 1)$ — т. перегину;
20) $D(f) = (2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $f_{\max} = f\left(\pi/2 + 2k\pi\right) = 0$, опукла вгору;
21) $f(0+0) = 0$, $f_{\min} = f\left(e^{-1}\right) = -e^{-1}$, опукла вниз; 22) парна, $f_{\min} = f(0) = 0$, $(-1; \ln 2)$ і $(1; \ln 2)$ — т. перегину; 23) $-1 < x < 1$, непарна, $f(1-0) = +\infty$, $f(-1+0) = -\infty$, $x = \pm 1$ — асимптоти, $(0; 0)$ — т. перегину; 24) $x \geq 1$, зростаюча, опукла вгору;
25) $D(f) = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, спадна при $x < -1$, зростаюча при $x > 1$, опукла вгору, $x = -1$ — ліва асимптота, $x = 1$ — права асимптота.
36. $P_{\max} = P(40) = 600$, $P_{\min} = P(10) = -12900$, (25; 6150) — т. п., проміжок рентабельності: (36.18; 43.52). **37.** $p_{\max} = p(10) = 10$.

Розділ 6

§ 6.1.

1. а) $\dfrac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{5}} + C$; б) $-\dfrac{x^{-11}}{11} + C$; в) $2 \ln |x + \sqrt{x^2 - 4}| + C$;
г) $4 \ln |x + \sqrt{x^2 + 2}| + C$; д) $\ln |4x - 7| + C$; е) $\dfrac{2^x}{\ln 2} + 4 \cos x + C$.
2. а) $\dfrac{1}{3} \sin 3x + C$; б) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^8 x + C$; в) $\ln |x| + \dfrac{1}{2} \ln^4 |x| + C$;
г) $-\sin \dfrac{1}{x} + C$; д) $\dfrac{1}{6} \operatorname{arctg}^6 x + C$. **3.** а) $2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$;
б) $\dfrac{1}{3} e^{3x} (x^2 - \dfrac{2}{3} x + \dfrac{2}{9}) + C$; в) $\dfrac{2^x}{\ln 2}(x - \dfrac{1}{\ln 2}) + C$;
г) $x \arcsin 2x + \dfrac{1}{2}\sqrt{1 - 4x^2} + C$; д) $\dfrac{1}{10} x^{10} (\ln |x| - \dfrac{1}{10}) + C$;
е) $x - \sqrt{1 - x^2} \arcsin x + C$. **4.** а) $-\dfrac{6}{\sqrt{x}} + C$; б) $\dfrac{3}{4} x^4 + 6 \sin x + C$;
в) $\dfrac{5}{4} \ln \left|2x^2 - 3\right| + C$; г) $\operatorname{arctg} e^x + C$; д) $\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{2} \operatorname{tg}^4 x + C$;
е) $\dfrac{1}{3} x \sin 3x + \dfrac{1}{9} \cos 3x + C$; є) $\dfrac{x^3}{3} \operatorname{arctg} 3x - \dfrac{x^2}{54} + \dfrac{1}{486} \ln |9x^2 + 1| + C$.

§ 6.2.

5. а) $\frac{1}{5}\ln|15+5x|+C$; б) $\frac{1}{7}\ln|7x+6|+C$; в) $\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+3-\sqrt{2}}{x+3+\sqrt{2}}\right|+C$;

г) $\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$; д) $2\ln|x+4|+3\ln|x+3|+C$;

е) $\frac{3}{2}\ln(x^2-6x+10)+8\operatorname{arctg}(x-3)+C$; є) $2\ln|x-3|+\ln|x+1|+C$;

ж) $\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{2}{3}\ln|x+2|+2\frac{1}{x+2}+C$;

з) $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\ln(x^2+x+1)-\ln|x|+C$.

§ 6.3.

6. а) $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C$; б) $-\frac{1}{20}\cos 10x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$;

г) $\frac{1}{8}(x-\frac{1}{4}\sin 4x)+C$; д) $\frac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C$;

е) $\sin x-\frac{3}{2}\sin^2 x+\sin^3 x-\frac{1}{4}\sin^4 x+C$; є) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x+C$;

ж) $\frac{1}{4}\ln|\frac{x}{x+1}|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$; з) $3\ln|\sqrt[3]{x}+1|+C$;

і) $\frac{3}{2}(x-3+\sqrt{x^2-6x+8})+4\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x+8}|-$

$-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-3+\sqrt{x^2-6x+8}}+C$;

ї) $\frac{1}{16}(x-2+\sqrt{x^2+4x+2})^2+\frac{1}{2}(x-2+\sqrt{x^2+4x+2})+$

$+\frac{5}{a}\cdot\frac{1}{x-2+\sqrt{x^2+4x+2}}+C$.

§ 6.4.

7. а) 6; б) $\frac{65}{12}$; в) $\frac{2}{3}$; г) 2; д) 1; е) $\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$; є) $2-\frac{5}{e}$; ж) $\frac{1}{9}(1+2e^3)$; з) 1.

§ 6.5.

8. а) $\frac{125}{12}$; б) $\sqrt{2}-1$; в) $\frac{9}{2}$; г) $3\ln\frac{4}{3}$. **9.** а) $\frac{222}{9}$; б) $\frac{5}{4}+\ln(1+\sqrt{2})$;

в) $2+\frac{1}{2}\ln 2$; г) $\ln 3$. **10.** а) $\frac{32}{3}\pi$; б) $\frac{176}{27}\pi$; в) $\frac{162}{5}\pi$; г) $\frac{\pi-3}{24}$.

11. а) $\frac{\sqrt{8}-1}{9}\pi$; б) $\frac{57}{3}\pi$; в) $4\pi R^2$.

§ 6.6.

12. а) розбіжний; б) $\dfrac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})$; в) розбіжний; г) розбіжний; д) розбіжний; е) розбіжний; є) розбіжний. **13.** а) збігається; б) розбіжний; в) збігається; г) збігається; д) розбіжний; е) збігається.

Розділ 7

§ 7.2.

1. а), г), е) розбігається; б), в), д), є), ж), з), і) збігається.

§ 7.3.

2. а), б), г) збігається абсолютно; в) розбігається; д) збігається умовно.

§ 7.4.

3. а) $R=e^{-1}$; б) $R=2$; в) $R=1$; г) $R=\infty$; д) $R=1$.

Розділ 8

§ 8.1.

1. а) $S=\dfrac{1}{2}ah_a$; б) $S=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$; в) $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\alpha$. **2.** $\left(1+\dfrac{b}{100}\right)^2 A-A$. **3.** $V=\dfrac{1}{3}R\sqrt{S^2-R^4}$. **5.** $V=\dfrac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{\pi}}$.

6. а) $D(z)$ — множина всіх точок, які є внутрішністю круга з центром в т. $O(0;0)$ і радіусом 2; б) $D(z)$ — множина всіх точок, які є зовнішністю круга з центром в т. $O(0;0)$ і радіусом 3; в) $D(z)$ — множина всіх точок площини, крім точок прямої $y=-x$; г) $D(z)$ — множина всіх точок, яка є кільцем між колами з центром в т. $O(0;0)$ і радіусами 4 та 2. Точки кола не входять у цю множину; д) $D(z)$ — співпадає з множиною точок I координатної чверті; е) $D(z)$ — квадрат, що розміщується між лініями $x=\pm1$ та $y=\pm1$; є), ж) $D(z)$ — множина всіх точок площини; з) $D(z)$ — множина всіх точок кола $x^2+y^2=25$; і) $D(z)$ — прямокутник, що розміщується між лініями $x=\pm1$ та $y=\pm2$;
ї) $D(z)=\left\{(x,y):\pi n x\pi\,(2n+1)\,,-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z\right\}$.

7. а), б) — площини; в), г) — еліптичні параболоїди; д), е) — гіперболічні параболоїди; є) верхня половина сфери $x^2+y^2+z^2=9$; ж) нижня половина сфери $x^2+y^2+z^2=16$; з) нижня половина однопорожнинного гіперболоїда $x^2+y^2-z^2=4$; і) верхня половина однопорожнинного гіперболоїда $x^2+y^2-z^2=4$; ї) верхня частина двопорожнинного гіперболоїда $x^2+y^2-z^2=-16$; к) нижня частина двопорожнинного гіперболоїда $x^2+y^2-z^2=-9$.

§ 8.2.

9. а) $(0;e^3)$; б) $(1;1)$; в) не існує; г) не існує. **10.** а) 3; б) 1; в) не існує; г) не існує; д) $\dfrac{4}{3}$; е) 1; є) не існує; ж) не існує; з) 0; і) 0. **11.** а) Функція неперервна на всій площині; б) функція неперервна в усіх точках площини, за виключенням точок прямої $y=x$; в) функція неперервна в усіх точках площини, за виключенням точок прямої $y=-x$; г) функція неперервна на всій площині; д) функція неперервна на всій площині; е) функція неперервна в усіх точках площини, за виключенням точки (0; 0), в якій функція не має границі; є) функція неперервна в усіх точках площини, за виключенням точок прямих $x=\pi k,\ k\in Z$; ж) функція неперервна в усіх точках площини, за виключенням точок прямих $y=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

§ 8.3.

12. 1) $z'_x=3x^2y-y^3,\ z'_y=x^3-3y^2x$; 2) $z'_x=6x^2y+10xy^2-y^3+5y$, $z'_y=2x^3+10x^2y-3xy^2+4y^3+5x-7$; 3) $z'_x=3x^2+6xy-y+3x$, $z'_y=3x^2-x-2$; 4) $z'_x=\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2},\ z'_y=-\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{x}$; 5) $z'_x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$z'_y=\dfrac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}$; 6) $z'_x=\dfrac{\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}}{y}+\dfrac{y\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}}{x^2}$,

$z'_y=-\dfrac{x\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}}{y^2}-\dfrac{\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}}{x}$; 7) $z'_x=2^{x+y}(xy\ln 2+y)$,

$z'_y=2^{x+y}(xy\ln 2+x)$;

8) $z'_x=-\dfrac{y}{x\sqrt{x^2y^2-(x+y)^2}},z'_y=-\dfrac{y}{x\sqrt{x^2y^2-(x+y)^2}}$;

9) $z'_x=e^{xy},z'_y=e^{xy}(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{y^2})$;

10) $z'_x=\dfrac{1}{x^2-y^2},z'_y=-\dfrac{1}{2y^2}\ln(\dfrac{x-y}{x+y})-\dfrac{x}{y(x^2-y^2)}$;

11) $z'_x=\dfrac{y}{x}\cos(xy)-\dfrac{1}{x^2}\sin(xy),z'_y=\cos(xy)$; 12) $z'_x=-\dfrac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}},z'_y=\dfrac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$;

13) $z'_x = y^2 x^{y^2-1}$, $z'_y = 2yx^{y^2}\ln x$; 14) $z'_x = \dfrac{y\sqrt{x^y}}{2x(x^y+1)}$, $z'_y = \dfrac{\ln x\sqrt{x^y}}{2(x^y+1)}$.

13. а) $0; 0; -16; -2\pi; -\frac{\pi^2}{4}$; б) $-\cos 4$; 0; 0; $\sin 4$; 0; в) 48; 96; 24; 48; 96; г) 48; 48; 24; 24; 24; д) -1; 1; 0; -1; 2; е) $-2e$; $-e$; $-3e$; $-e$; e.
14. а) $dz = (2xy^4 - 3x^2y^y + 4x^3y^2)dx + (4x^2y^3 - 3x^3y^2 + 2x^4y)dy$;
б) $dz = \dfrac{x}{x^2+y^2}dx + \dfrac{y}{x^2+y^2}dy$; в) $dz = y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy$;

г) $dz = \dfrac{y^2+1}{1+x^2y^2+x^2+y^2}dx + \dfrac{x^2+1}{1+x^2y^2+x^2+y^2}dy$;

д) $dz = 3x^2\cos(x^3+y^3)dx + 3y^2\cos(x^3+y^3)dy$;
е) $dz = ye^{xy}(\cos xy - \sin xy)dx + xe^{xy}(\cos xy - \sin xy)dy$. **16.** а) 1,10; б) 1,27; в) $-0{,}04$; г) $-0{,}14$; д) 2,95; е) 5,99; є) 0,97; ж) 1,04. **17.** а) $(1, 0)$; б) $(0, -1)$; в) $(0, 0)$; г) $(0, 0)$. **18.** а) $(1, 1)$; б) $(0, 1)$; в) такої точки не існує; г) $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$. **19.** а) $\dfrac{7}{20}$; б) $-\dfrac{22}{117}$; в) $\dfrac{6}{5}$; г) $\dfrac{12}{5}$.

§ 8.4.

20. а) $(2; -4)$ — точка мінімуму; б) $(4; 1)$ — точка мінімуму; в) $(0; 0)$ — точка мінімуму; г) $(0; 0)$ — точка мінімуму; д) точок екстремуму немає; е) точок екстремуму немає.

Розділ 9

§ 9.2.

1. а) $x^2 + y^2 = \ln cx^2$; б) $y = c\sin x - a$; в) $y = e^{ce^{\frac{x^2}{2}}}$;

г) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = c$; д) $y = \dfrac{2ce^{x^2}}{1-ce^{x^2}}$; е) $y^2 - 1 = 2\ln\dfrac{1+e^x}{2}$.

§ 9.5.

2. а) $x^2y^2 - 2x^3y - x^4 = c$; б) $\sin xy + x^2 + y^2 = c$; в) $y\left(e^x + Ce^{2x}\right) = 1$;
г) завдання має три розв'язки: $\dfrac{x}{y} = 1$, $\dfrac{x}{y} = -1$, $\arcsin\dfrac{y}{x} = \operatorname{sign} x \ln|x|$;

д) $y = x + 1$, $y = 2x$; е) $\sin\dfrac{y-2x}{x+1} = c(x+1)$.

§ 9.6.

3. а) $y(x) = e^{2x}(c_1 + c_2x) + \dfrac{1}{4}\cos 2x + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$; б) $y(x) =$

$= e^{\frac{3}{5}x}\left(c_1\cos\dfrac{4}{5}x + c_2\sin\dfrac{4}{5}x\right) + \dfrac{1}{13}e^{2x} + \dfrac{1}{5}\left(2x^3 + \dfrac{36}{5}x^2 + \dfrac{107}{25}x + \dfrac{908}{125}\right)$;

в) $y(x) = (1+x)e^{-1,5x} + 2e^{-2,5x}$; г) $y(x) = e^x \left(e^x - x^2 - x + 1\right)$;

д) $y(x) = \dfrac{1}{3}\sin 2x - \dfrac{1}{3}\sin x - \cos x$;

е) $y(x) =_1 e^{3x} +_2 e^{-3x} + e^{3x}\left(\left(-\dfrac{1}{37}x + \dfrac{234}{1369}\right)\cos x + \left(\dfrac{6}{37}x + \dfrac{2}{1369}\right)\sin x\right)$;

є) $y = e^{5x} - e^{-x} - e^{2x\,\sin x}$; ж) $y(x) = c_1\cos x - c_2\sin x - \dfrac{1}{2}x\cos x$;

з) $y(x) =_1 e^x +_2 e^{-x} - x\sin 3x - 2\cos 3x$.

Список використаної та рекомендованої літератури

1. *Барковський В. В., Барковська Н. В.* Математика для економістів: У 2 т. — К.: Національна академія управління, 1999. — Т. 1. Вища математика. — 400 с.
2. *Вища* математика: Основні означення, приклади і задачі: Навч. посіб.: У 2 ч. / Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, В. В. Плахотнік, Г. Й. Призва. — К.: Либідь, 1992. — Ч. 1. — 288 с.
3. *Вища* математика: Основні означення, приклади і задачі: Навч. посіб.: У 2 ч. / І. П. Васильченко, В. Я. Данилов, А. І. Лобанов, Є. Ю. Таран. — К.: Либідь, 1992. — Ч. 2. — 256 с.
4. *Высшая* математика для экономистов: Учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ, 2000. — 472 с.
5. *Данко П. Е., Кожевников А. Г., Попов А. Г.* Высшая математика в упражнениях и задачах. — М.: Высш. шк., 1986. — 354 с.
6. *Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О.* Вища математика: Приклади і задачі: Посібник. — К.: Видавничий центр “Академія”, 2002. — 624 с.
7. *Жильцов О. Б., Торбін Г. М.* Вища математика з елементами інформаційних технологій: Навч. посіб. — К.: МАУП, 2002. — 408 с.
8. *Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н.* Математические методы в экономике: Учебник. — М.: Изд-во МГУ; Дис, 1998. — 368 с.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1968. — 232 с.
10. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1970. — 400 с.
11. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1970. — 96 с.

12. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. — М.: Наука, 1969. — Т. 1. — 608 с.; Т. 2. — 800 с.; Т. 3. — 656 с.

13. *Хазанова Л. Э.* Математическое моделирование в экономике: Учеб. пособие. — М.: БЕК, 1998. — 144 с.

14. *Шипачев В. С.* Высшая математика. — М.: Высш. шк., 1990. — 480 с.

15. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 424 с.

Зміст

In the practice book are basic definitions, formulas, algorithms of typical examples and tasks solutions. It also contains tasks for self-solutions in such sections of higher mathematics as: linear algebra, vectorial analysis, analytic geometry, differential and integration calculation of one changeable function, fundamentals of many changeable function, differential equations, rows.

It is meant for students of economic specialities in the higher educational establishments.

Навчальне видання

Юртин Іван Іванович
Дюженкова Ольга Юріївна
Жильцов Олексій Борисович та ін.

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Educational edition

Yurtyn, Ivan I.
Dyuzhenkova, Olga Y.
Zhyl'tsov, Oleksiy B. and others

PRACTICE BOOK OF HIGHER MATHEMATICS

Educational manual

Відповідальний редактор *С. Г. Рогузько*
Редактори *О. І. Маєвська, І. В. Хронюк*
Коректор *Л. Г. Бурлакіна*
Комп'ютерне верстання *С. В. Фадєєв, А. В. Цебренко*
Оформлення обкладинки *О. В. Сирота*

Підп. до друку 10.09.03. Формат 60 ґ 84/$_{16}$. Папір офсетний. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 14,42. Обл.-вид. арк. 12,6. Тираж 5000 пр. Зам. № 3-136

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК № 8 від 23.02.2000

Друкарня ТОВ "Техніка ЛТД"
04119 Київ-19, вул. Білоруська, 36а

Свідоцтво ДК № 54 від 17.04.2000