

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Я.Й. Бігун, І.В. Березовська

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ І СИСТЕМ

Навчальний посібник



Чернівці

Чернівецький національний університет

2011

УДК 519.615(075.8)
ББК 22.193.1я73
Б 597

Друкується за ухвалою редакційно-видавничої ради
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

Рецензенти :

Маценко В.Г., кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Черевко І.М., доктор фіз.-мат. наук, професор

Бігун Я.Й., Березовська І.В.

Б 597 Числові методи розв'язування нелінійних рівнянь і систем : навч. посібник / Я.Й. Бігун, І.В. Березовська. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2011. – 104 с.

У посібнику розглянуто основні ітераційні методи розв'язування нелінійних рівнянь і систем. Окремо виділено клас алгебраїчних рівнянь. Наведено ітераційні методи половинного поділу, лінійної інтерполяції, Ньютона та його модифікації, полюсний метод Ньютона та січних. Звернуто увагу на методи знаходження кратних коренів нелінійних рівнянь. Для систем рівнянь розглянуто й проілюстровано метод Ньютона та його модифікацій, зроблено огляд градієнтних методів. Наведено завдання для самостійного опрацювання матеріалу і лабораторних робіт.

Для студентів, які навчаються за напрямками «Прикладна математика», «Інформатика», «Системний аналіз» та ін.

УДК 519.65(075.8)
ББК 22.192я73

© Чернівецький національний
університет, 2011
© Бігун Я.Й., 2011
© Березовська І.В., 2011

Зміст

Передмова	4
1. Скалярні рівняння	5
1.1. Приклади нелінійних рівнянь.....	5
1.2. Відокремлення коренів.....	6
1.3. Швидкість збіжності ітераційного методу.....	10
1.4. Метод половинного поділу.....	12
1.5. Метод лінійної інтерполяції.....	13
1.6. Метод простої ітерації.....	17
1.7. Метод Ньютона.....	23
1.8. Кратні корені.....	31
1.9. Модифікації методу Ньютона.....	34
1.10. Особливості реалізації методу Ньютона.....	45
1.11. Тестові приклади та порівняння методів.....	47
Завдання для самостійної роботи.....	50
Завдання для лабораторної роботи.....	54
2. Алгебраїчні рівняння	55
2.1. Приклади алгебраїчних рівнянь.....	55
2.2. Властивості розв'язків алгебраїчних рівнянь.....	57
2.3. Метод Ліна.....	64
2.4. Метод Мюллера.....	66
2.5. Особливості розв'язування алгебраїчних рівнянь.....	69
Завдання для самостійної роботи.....	72
Завдання для лабораторної роботи.....	74
3. Системи нелінійних рівнянь	75
3.1. Приклади систем нелінійних рівнянь.....	75
3.2. Метод простої ітерації та метод Зейделя.....	76
3.3. Нелінійні методи Якобі та Гаусса–Зейделя.....	81
3.4. Метод Ньютона.....	81
3.5. Комбіновані методи.....	88
3.6. Градієнтні методи.....	89
Завдання для самостійної роботи.....	96
Завдання для лабораторної роботи.....	101
Перелік посилань.....	103

Передмова

Однією з головних задач числових методів є розв'язування нелінійних рівнянь і систем рівнянь, які є результатом як математичних досліджень, так і математичними моделями прикладних задач. Відповідні приклади наведені на початку кожного з трьох розділів посібника. Часто рівняння, а тим більше системи рівнянь, не вдається розв'язати точно. Зокрема, алгебраїчні рівняння, степінь яких перевищує чотири, у загальному випадку не розв'язуються в радикалах. Більше того, навіть розв'язки кубічних рівнянь і рівнянь четвертого степеня, які можна одержати за допомогою таких систем як Mathematica або Maple, із-за громіздкості не є зручними для використання. Наближено рівняння і системи рівнянь розв'язуються ітераційними методами. Такі методи для скалярних рівнянь наведено у розділі 1. Розділ 2 присвячений розв'язуванню алгебраїчних рівнянь. Наведено теоретичні відомості з оцінки меж та кількості додатних і від'ємних коренів. Розглянуто виділення квадратичних дільників методом Ліна та ітераційний метод Мюллера.

У розділі 3 розглядаються системи нелінійних рівнянь, в яких кількість рівнянь і невідомих збігаються. Описано як методи їх прямого розв'язування (простої ітерації, Зейделя, Ньютона, квазіньютонівські методи), так і методи зведення до розв'язування задачі нелінійної оптимізації градієнтними методами.

У посібнику основним ітераційним методом уточнення розв'язків нелінійних рівнянь і систем є метод Ньютона. Цей метод ґрунтується на ітеративній лінеаризації процесу. Метод Ньютона вперше був опублікований у 1669 р. Але обчислювалась не послідовність наближень, а послідовність многочленів. У 1690 р. Дж. Рафсон описав метод, використовуючи послідовні наближення, але також обмежуючи його застосування алгебраїчними многочленами. Тому його часто називають методом Ньютона–Рафсона. Як ітераційний метод розв'язування нелінійних рівнянь і систем двох рівнянь метод Ньютона у сучасному вигляді в 1740 р. сформулював Т.Сімпсон.

Розглянуті у посібнику методи проілюстровані на прикладах. У кожному з розділів наведено завдання для самостійної роботи і лабораторних робіт.

Автори щиро вдячні доценту кафедри прикладної математики Василю Григоровичу Маценку за уважне прочитання даного посібника та зроблені при цьому зауваження.

1. Скалярні рівняння

1.1. Приклади нелінійних рівнянь

Одним із перших трансцендентних рівнянь, застосованим на практиці, було рівняння Кеплера (1609 р.)

$$E - \varepsilon \sin E = M$$

для визначення ексцентричної аномалії E еліптичної орбіти планети.

Тут ε – ексцентриситет еліпса, $0 < \varepsilon < 1$, M – середня аномалія.

Розглянемо також модель динаміки популяції з чисельністю $N(t)$ у момент часу t і міграцією ν , яка описується диференціальним рівнянням

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t) + \nu, \quad t > 0,$$

де λ – коефіцієнт росту. Розв'язок рівняння з початковою умовою $N(0) = N_0$ і постійною міграцією має вигляд

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{\nu}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1).$$

Нехай для деякої популяції $N_0 = 10$, $\nu = 7$ і $N(1) = 15$. Тоді для знаходження коефіцієнта росту λ одержимо нелінійне рівняння

$$15 = 10\lambda e^{\lambda} + 7(e^{\lambda} - 1).$$

До розв'язання нелінійних рівнянь зводяться важливі математичні задачі. Абсциси точок екстремуму диференційовної функції $y = g(x)$ знаходяться з рівняння

$$g'(x) = 0.$$

Ще одним прикладом є задача про знаходження стаціонарних розв'язків диференціального рівняння $x' = f(x)$, де f – задана функція.

У скалярному випадку це є розв'язки рівняння

$$f(x) = 0. \quad (1.1)$$

Математичні моделі процесів, швидкість зміни яких залежить від стану процесу як у момент часу t , так і в попередній момент $t - \Delta$, $\Delta > 0$, у лінійному випадку описуються диференціальним рівнянням із запізненням аргументу

$$\dot{u}(t) = au(t) + bu(t - \Delta),$$

де a і $b \neq 0$ – деякі сталі. Якщо шукати розв’язок рівняння у вигляді $u(t) = e^{\lambda t}$, то для параметра λ одержимо нелінійне рівняння

$$\lambda = a + be^{-\lambda\Delta},$$

яке має нескінченну множину коренів.

1.2. Відокремлення коренів

Припустимо, що в скалярному рівнянні (1.1) f – неперервна функція, визначена на скінченному або нескінченному проміжку.

Означення 1.1. Корінь x^* рівняння (1.1) або нуль функції f має кратність $m > 0$, якщо

$$f(x) = (x - x^*)^m g(x),$$

де $\lim_{x \rightarrow x^*} g(x) \neq 0$. Якщо $m = 1$, то корінь називається простим.

Прості та кратні корені проілюстровано на рис. 1.1. Наприклад, для рівняння $(x-1)\sqrt[3]{(x-2)^2} = 0$ корінь $x_1 = 1$ – простий, а $x_2 = 2$ має кратність $\frac{2}{3}$. Для рівняння $1 - \cos 4x = 0$ корінь $x = 0$ має кратність 2. Справді,

$$1 - \cos 4x = x^2 \frac{1 - \cos 4x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} = 8.$$

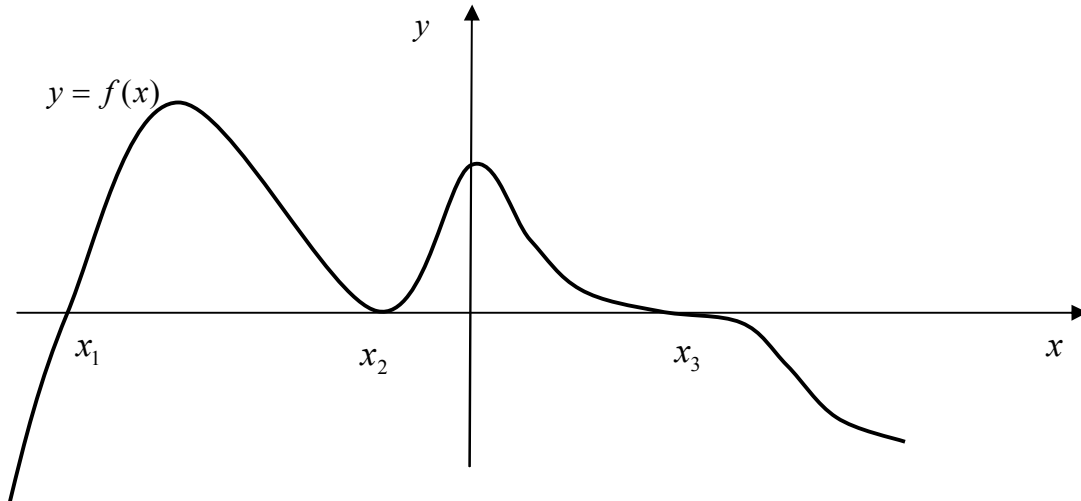


Рис. 1.1. Корінь x_1 – простий, x_2 – корінь парної, а x_3 – непарної кратності

Нехай $f \in C^m(a, b)$, $x^* \in (a, b)$ і

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(m)}(x^*) \neq 0.$$

Тоді з розкладу функції f за формулою Тейлора у точці x з малого околу x^* маємо:

$$f(x) = f(x^*) + (x - x^*)f'(x^*) + \frac{(x - x^*)^2}{2}f''(x^*) + \dots + \frac{(x - x^*)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(x^*) + \frac{(x - x^*)^m}{m!}f^{(m)}(\xi) = \frac{(x - x^*)^m}{m!}f^{(m)}(\xi), \quad \xi \in (a, b). \quad (1.2)$$

Із (1.2) випливає, що корінь x^* має кратність m . Оскільки

$$f^{(m)}(x^*) \neq 0, \text{ то для близьких до } x^* \text{ значень аргументу } f^{(m)}(\xi(x)) \neq 0.$$

Наближене обчислення кратних коренів складніше, порівняно з знаходженням простих коренів, і вимагає значно вищої точності.

Наближене обчислення коренів рівняння $f(x) = 0$ передбачає наступні етапи: відокремлення коренів, вибір початкового (нульового) наближення для відокремленого кореня і уточнення кореня деяким ітераційним методом. Відокремлення коренів полягає

у знаходженні таких інтервалів (a_ν, b_ν) , на кожному з яких існує єдиний корінь рівняння (1.1) і $\bigcap_\nu (a_\nu, b_\nu) = \emptyset$. Якщо нескладно побудувати графік функції $y = f(x)$, то можна одержати інформацію про кількість та розміщення коренів. Деколи задачу можна спростити записавши рівняння (1.1) у вигляді

$$f_1(x) = f_2(x),$$

де f_1 і f_2 такі функції, графіки яких просто побудувати. Тоді задача відокремлення коренів зводиться до знаходження кількості точок перетину цих графіків і виділенні на осі абсцис тих проміжків, яким належать проекції точок перетину.

Перевірити, що на проміжку $[a, b]$ є корінь рівняння (1.1), де f – неперервна функція, можна на підставі теореми Больцано–Коші. Якщо

$$f(a)f(b) < 0, \tag{1.3}$$

то на інтервалі (a, b) є хоча б один корінь рівняння (1.1). Ця теорема не дає відповіді на питання про кількість коренів рівняння на інтервалі (a, b) . Крім того, для коренів з парною кратністю умова (1.3) не виконується (корінь x_2 на рис. 1.1).

Приклад 1.1. Розглянемо рівняння $x^2 - \cos x - 1 = 0$ і $x^2 \ln x = 1$, які запишемо відповідно у вигляді $x^2 - 1 = \cos x$ і $\ln x = 1/x^2$. Графіки лівих і правих частин цих рівнянь показані на рис. 1.2а та 1.2б відповідно.

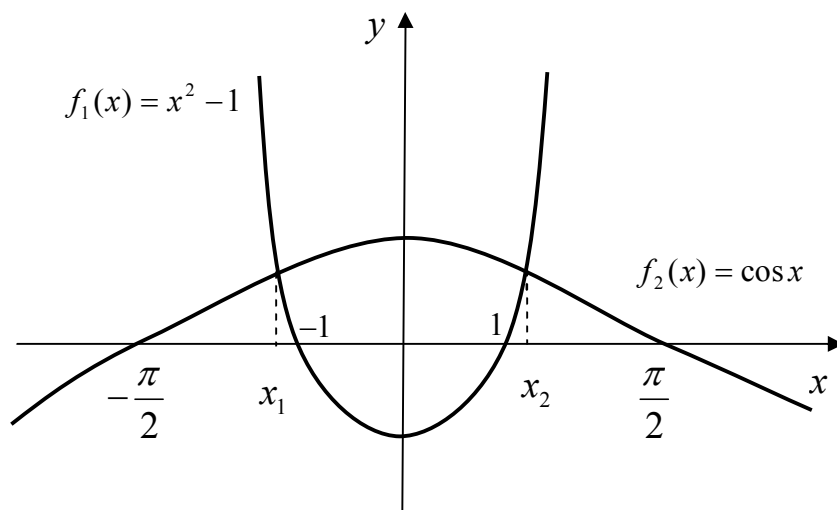


Рис. 1.2а. Локалізація коренів рівняння $x^2 - \cos x - 1 = 0$, $x_1 \in (-1.5, -1)$,
 $x_2 \in (1, 1.5)$

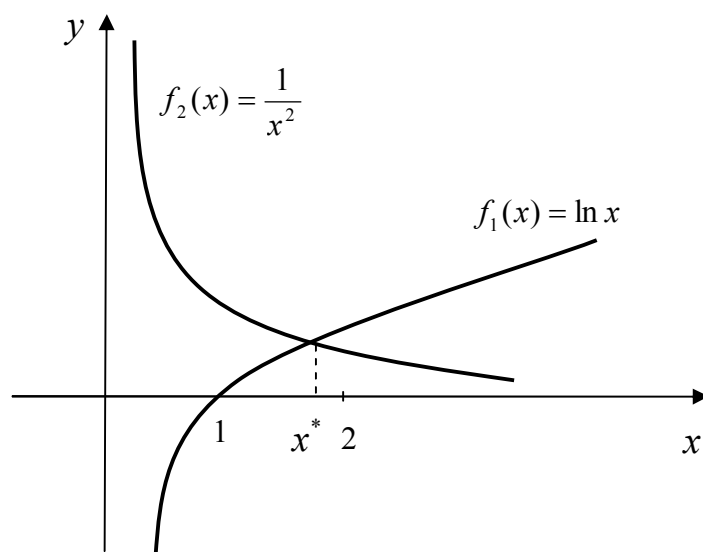


Рис. 1.2б. Локалізація коренів рівняння $x^2 \ln x = 1$, $x^* \in (1, 2)$

Якщо на інтервалі (a, b) функція f монотонна і виконується умова (1.3), то на (a, b) існує єдиний корінь. Наприклад, функція $f = x^2 \ln x - 1$ монотонна на інтервалах $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$ і $(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty)$. Оскільки $f(1) = -1 < 0$, $f(2) \approx 1.77 > 0$ і на інтервалі $(1, 2)$ функція зростає, то корінь єдиний (рис. 1.2б).

Ще одним способом відокремлення коренів є розбиття проміжку $[a, b]$, на якому знаходяться корені, точками $x_i = a + ih$, $i = 1, \dots, n$, $x_0 = a$,

$x_n = b$, де $h = (b - a) / n$ – досить мале. На кожному з інтервалів $(x_\nu, x_{\nu+1})$, $\nu = 0, \dots, n - 1$, перевіряють умову $f(x_\nu)f(x_{\nu+1}) < 0$. Якщо відома кількість коренів і вони прості, то зменшуючи h , наприклад у два рази, можна локалізувати всі корені. Недоліком цього способу є те, що для близьких коренів, відстань між якими має порядок точності обчислень, для малих h прийдемо до таких проміжків, кожна з точок яких може бути прийнята за корінь рівняння (1.1).

1.3. Швидкість збіжності ітераційного методу

Нелінійні рівняння наближено розв'язуються ітераційними методами. Для оцінки швидкості збіжності та порівняння ітераційних методів між собою введемо деякі поняття [2, 6-8, 16-20]. Нехай результатом виконання ітераційного процесу

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

є послідовність значень x_0, x_1, \dots , яка має своєю границею x^* при $k \rightarrow \infty$.

Означення 1.2. Збіжність послідовності $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ називається лінійною (ітераційний процес збігається лінійно), якщо для деякої сталої $C \in (0, 1)$ і деякого номера k_0 виконується нерівність

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C |x_k - x^*| \quad \forall k \geq k_0. \quad (1.4)$$

Лінійну збіжність також називають збіжністю зі швидкістю геометричної прогресії. Справді, якщо ввести позначення $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$, то $\varepsilon_{k+1} = |x_{k+1} - x^*| \leq C \varepsilon_k$ і мажоранти ε_k , $k = 0, 1, \dots$, утворюють геометричну прогресію, збіжність якої досягається при $C < 1$.

Означення 1.3. *Послідовність $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ збігається з надлінійною швидкістю, якщо існує така додатна послідовність $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$, що $C_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ і*

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C_k |x_k - x^*| \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Означення 1.4. *Послідовність $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ збігається, щонайменше із порядком p (ітераційний процес має хоча б p -й порядок), якщо знайдуться такі сталі $C > 0$, $p > 1$, $k_0 \geq 0$, що*

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C |x_k - x^*|^p, \quad k \geq k_0. \quad (1.5)$$

Для $p = 2$ збіжність називається квадратичною. Якщо можна вказати послідовність $\{C_k\}$ таку, що $|x_{k+1} - x^*| \leq C_k |x_k - x^*|^p$ і $C_k \rightarrow C$ при $k \rightarrow \infty$, то асимптотичну збіжність із p -м порядком. Аналогічно, маємо асимптотично лінійну збіжність, якщо $p = 1$ і $C_k \rightarrow C \in (0,1)$.

Якщо ітераційний метод має порядок p , то з ростом k можна спостерігати стабілізацію відношення

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p}$$

відносно сталої C . Якщо ж швидкість збіжності не дорівнює p , то такої стабілізації вже не буде (див. приклад 1.5).

Означення 1.5. *Якщо ітераційний процес збігається для всіх початкових значень x_0 із деякої області, то збіжність називається глобальною. Якщо ж тільки для початкових значень x_0 із деякого досить малого околу шуканого розв'язку x^* , то ітераційний метод збігається локально.*

При дослідженні збіжності ітераційних процесів використовуються *апостеріорні оцінки* похибки вигляду

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C\nu^{p^k}$$

де $C > 0$, $\nu \in (0,1)$, p – порядок методу, або *апостеріорні оцінки*

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C |x_{k+1} - x_k|^p.$$

Контроль точності ітераційного наближення x_{k+1} здійснюється згідно з апостеріорною оцінкою

$$C |x_{k+1} - x_k|^p \leq \varepsilon,$$

$\varepsilon > 0$ характеризує точність обчислення кореня. З іншими поняттями збіжності та їх деталізацією можна ознайомитись у працях [16, 19, 22].

1.4. Метод половинного поділу

Нехай для рівняння $f(x) = 0$, де $f \in C[a,b]$, виконується нерівність (1.3) і корінь $x^* \in (a,b)$ – єдиний. Запишемо алгоритм методу у такому вигляді.

1. Задати: a, b , допустиму абсолютну похибку ε розв'язку і/або допустиму точність δ обчислення функції f .

2. $k := 1$;

3. **do** $c := (a + b) / 2$;

if $f(a)f(c) < 0$ **then**

$b := c$; $k := k + 1$;

else $a := c$; $k := k + 1$;

until $abs(a - b) \leq \varepsilon$ або $abs(f(c)) \leq \delta$

4. $x := c$; x – k -те наближення розв'язку.

Геометрична ілюстрація методу половинного поділу показана на рис. 1.3. Видно, що метод може збігатись досить повільно, якщо корінь знаходиться близько до одного з кінців проміжку $[a, b]$ (див. приклади у підрозділі 1.11).

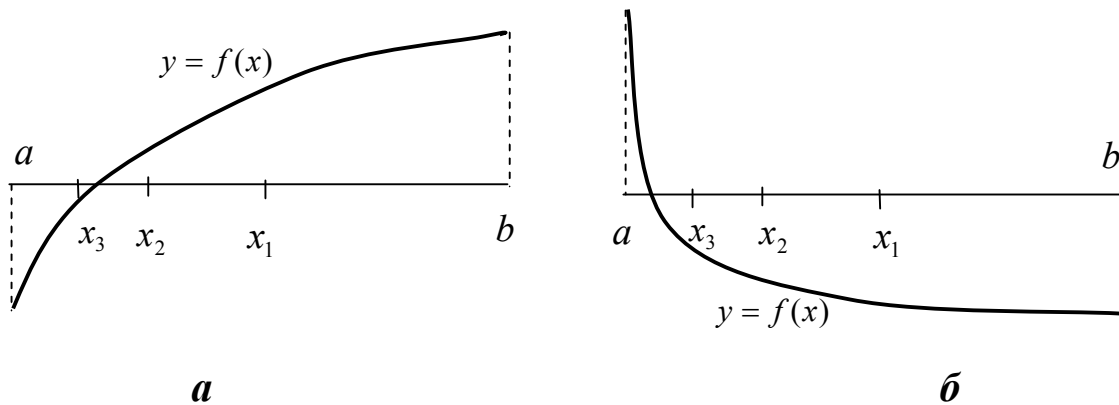


Рис. 1.3. Геометрична ілюстрація методу половинного поділу
З алгоритму методу половинного поділу випливає, що

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{1}{2} |x_k - x^*|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

тобто $C = 0.5, p = 1$ і метод має перший порядок збіжності. Оскільки на кожній ітерації довжина попереднього відрізка зменшується удвічі, то оцінка похибки набуває вигляду

$$|x_k - x^*| \leq \frac{1}{2^k} (b - a), \quad k = 1, 2, \dots$$

1.5. Метод лінійної інтерполяції

На відміну від методу половинного поділу у цьому методі точкою поділу відрізок $[a, b]$ ділиться на частини, пропорційно ординатам $|f(a)|$ і $|f(b)|$ (рис. 1.4.)

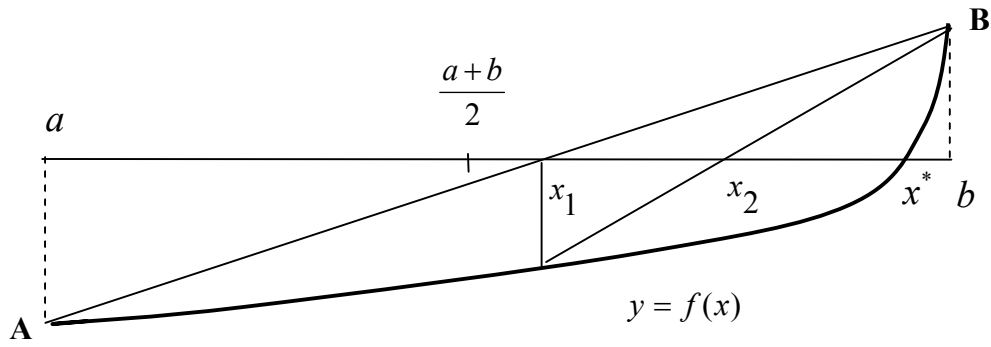


Рис. 1.4. Ілюстрація методу лінійної інтерполяції

Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точки $A(a, f(a))$ і $B(b, f(b))$

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

При $y = 0$ знаходимо абсцису ξ точки перетину прямої з віссю Ox

$$\xi = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}.$$

Якщо ввести позначення $x_0 = b, x_1 = a$, то метод лінійної інтерполяції (його ще називають методом хорд, або *regula falsi* [17]), набуває вигляду

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Метод лінійної інтерполяції детально вивчений в [8, 17]. Розглянемо випадок, коли $f \in C^1[a, b]$ і

$$0 < m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1, \quad x \in [a, b]. \quad (1.7)$$

За формулою Тейлора маємо:

$$f(x_k) = f(x^*) + f'(\theta_1)(x_k - x^*) = f'(\theta_1)(x_k - x^*),$$

де точка θ_1 знаходиться між x_k і x^* . Згідно з теоремою про скінченні прирости $f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\theta_2)(x_k - x_{k-1})$, точка θ_2 належить інтервалу з кінцями x_{k-1} і x_k . Тоді з рівності (1.6) випливає, що:

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \frac{f(\theta_1)}{f'(\theta_2)}(x_k - x^*) = \frac{f'(\theta_2) - f'(\theta_1)}{f'(\theta_2)}(x_k - x^*).$$

Враховуючи нерівності (1.7) одержимо

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_k - x^*|.$$

Якщо метод лінійної інтерполяції збіжний і $M_1 < 2m_1$, то $C = (M_1 - m_1) / m_1 < 1$ і збіжність лінійна.

Повніше проаналізувати метод лінійної інтерполяції вдається для випадку, коли зберігаються знаки першої і другої похідної на $[a, b]$. Нехай

$$f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0, \quad x \in [a, b]. \quad (1.8)$$

Інші випадки розглядаються аналогічно. Введемо позначення $x_0 = b$, $x_1 = a$ (рис. 1.5а), тоді

$$f(x_0)f''(x_0) > 0. \quad (1.9)$$

Нерівність (1.9) називається умовою Фур'є [17]. Точка x_0 у цьому випадку залишається нерухомою і формула (1.6) набуває вигляду

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - b)}{f(x_k) - f(b)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.10)$$

На рис. 1.5а видно, що $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$. Справді, із (1.10) випливає, що на першій ітерації ($k = 1$)

$$x_2 = a - \frac{f(a)(a-b)}{f(a) - f(b)} > a,$$

оскільки $f(a) < 0$ і $f(b) > f(a)$. Далі залишається застосувати метод математичної індукції.

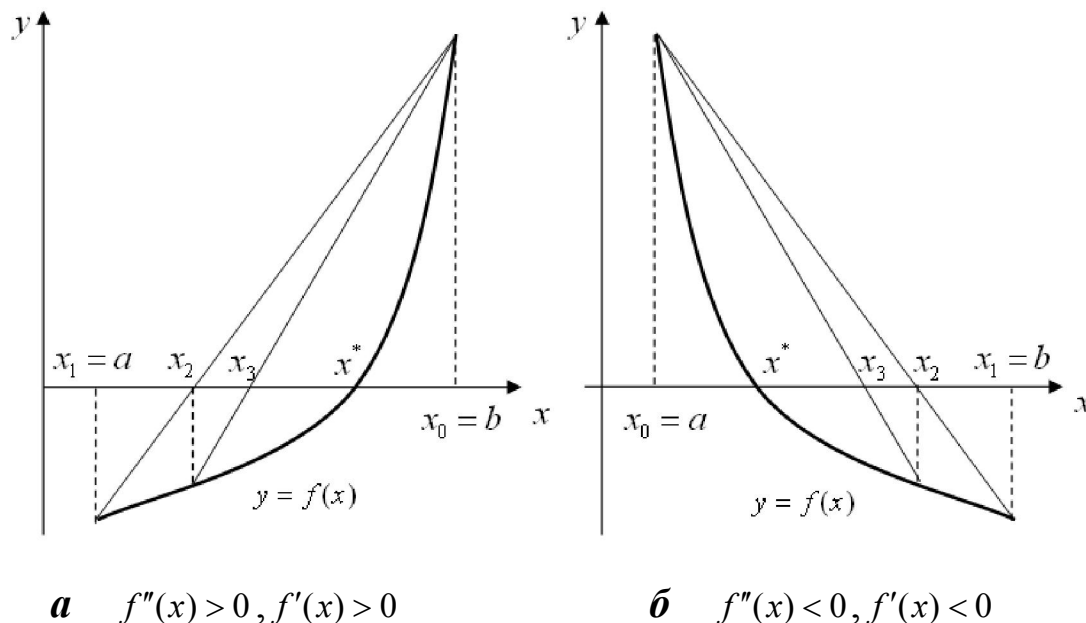


Рис. 1.5. Метод лінійної інтерполяції для знакопостійних f' і f'' на $[a, b]$

Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча і обмежена зверху числом x^* , тому існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi.$$

Перейшовши в (1.10) до границі при $k \rightarrow \infty$ одержимо, що $f(\xi) = 0$.

Оскільки корінь єдиний на $[a, b]$, то $\xi = x^*$.

Якщо $f \in C^2[a, b]$, похідні f' і f'' зберігають знак на $[a, b]$, m_1 і M_1 визначені згідно з (1.7) і x_0 задовольняє умову Фур'є (1.9), то як показано в [8, 17], правильна апостеріорна оцінка похибки методу лінійної інтерполяції:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_{k+1} - x_k|. \quad (1.11)$$

У загальному випадку довжина проміжку локалізації кореня може не прямувати до нуля. Без додаткових умов, наприклад,

$|f'(x)| \geq m_1$, метод лінійної інтерполяції може збігатись повільніше, ніж метод половинного поділу.

Приклад 1.2. Результати числових експериментів із розв'язання рівнянь методом лінійної інтерполяції і методом половинного поділу для різної кількості ітерацій k наведені в табл. 1.1. Всі цифри результатів ітерацій є правильними.

Таблиця 1.1. Результати розв'язання рівнянь $f(x) = 0$ за допомогою методу лінійної інтерполяції (МЛІ) і методу половинного поділу (МПП)

№	f	a	b	$k = 5$		$k = 10$		$k = 20$	
				МЛІ	МПП	МЛІ	МПП	МЛІ	МПП
1	$x - \exp(-0.5x)$	0	1	0,7034675	0,71875	0,7034674	0,70410156	0,70346742	0,70346736
2	$x - \frac{1}{2010}$	0	1	0,0004975	0,03125	0,0004975	0,00097656	0,00049751	0,00049686
3	$x^2 - 2$	1	2	1,4141414	1,40625	1,4142135	1,41503906	1,41421356	1,41421413
4	$x^4 + 2x^3 - x - 1$	0	1	0,8660848	0,84375	0,8667602	0,86621093	0,86676039	0,86676120
5	$x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$	0,2	0,3	0,2984997	0,296875	0,2975305	0,29755859	0,29753023	0,29753026

1.6. Метод простої ітерації

Запишемо рівняння (1.1) у рівносильному вигляді

$$x = \varphi(x), \quad (1.12)$$

де функція $\varphi: [a, b] \rightarrow [a, b]$. Для довільного $x_0 \in [a, b]$ розглянемо ітераційну послідовність

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.13)$$

Доведення збіжності ітерацій (1.13) впливає із теореми про стискаючі відображення [13, с.73].

Теорема 1.1. Нехай $\varphi: B \rightarrow B$, де B – повний метричний простір з метрикою ρ , а відображення φ – стискаюче, тобто існує таке $q \in (0,1)$, що для будь-яких $x_1, x_2 \in B$, виконується нерівність

$$\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq q\rho(x_1, x_2).$$

Тоді відображення φ має єдину нерухому точку x^* (рівняння (1.12) має єдиний розв'язок x^*), яка є границею послідовних наближень

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

для довільного початкового значення $x_0 \in B$. ■

Нагадаємо, що простір B – повний, якщо в ньому збігається будь-яка фундаментальна послідовність. Повним метричним простором є R^n із метрикою $\rho(x, y) = \|x - y\|$, породженою, наприклад, нормами $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$, замкнена куля в R^n , простір $C[a, b]$ з нормою $\|\varphi\| = \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)|$. Із теореми 1.1 випливає обґрунтування збіжності послідовності (1.13) до розв'язку рівняння (1.12).

Теорема 1.2. Нехай функція

$$\varphi: [a, b] \rightarrow [a, b]$$

задає стискаюче відображення, тобто існує таке $q \in (0,1)$, що

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq q|x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]. \quad (1.14)$$

Тоді рівняння (1.12) має єдиний розв'язок x^* , який для довільного $x_0 \in [a, b]$ є границею послідовності (1.13), причому

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{q}{1-q} |x_k - x_{k-1}| \leq \frac{cq^k}{1-q}, \quad c = |x_1 - x_0|. \quad \blacksquare \quad (1.15)$$

Оцінки (1.15) випливають з таких нерівностей:

$$|x_{k+1} - x^*| = |\varphi(x_k) - \varphi(x^*)| \leq q|x_k - x^*| \leq q|x_{k+1} - x^*| + q|x_{k+1} - x_k|,$$

$$|x_{k+1} - x_k| = |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \leq q|x_k - x_{k-1}| \leq \dots \leq q^k|x_1 - x_0|.$$

Таким чином, метод простої ітерації є глобально збіжним лінійним ітераційним методом.

Зауваження 1. Нехай $\varphi \in C^1[a, b]$, тоді замість умови стиску (1.14) простіше перевірити умову

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \quad x \in [a, b]. \quad (1.16)$$

Справді, для довільних $x_1, x_2 \in [a, b]$ маємо:

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = |\varphi'(\theta)| \cdot |x_2 - x_1| \leq \max_{[a, b]} |\varphi'(x)| \cdot |x_2 - x_1| \leq q|x_2 - x_1|.$$

Тут θ – точка між x_1 і x_2 .

Геометрична ілюстрація методу простої ітерації для рівняння $x = \varphi(x)$, коли похідна φ' зберігає знак на (a, b) показана на рис. 1.6.

Нехай $B = [x_0 - r, x_0 + r]$. При виконанні ітерацій досить перевірити, що всі $x_k \in B$. Тоді умову $\varphi: B \rightarrow B$ можна замінити перевіркою умови

$$|\varphi(x_0) - x_0| \leq (1 - q)r, \quad (1.17)$$

де q – стала Ліпшица, $q < 1$.

Теорема 1.3 (Ознака існування розв'язку). Якщо на проміжку B функція φ задовольняє умову Ліпшица зі сталою $q, 0 < q < 1$, і виконується нерівність (1.17), то рівняння (1.12) має єдиний розв'язок x^* , який є границею послідовності (1.13).

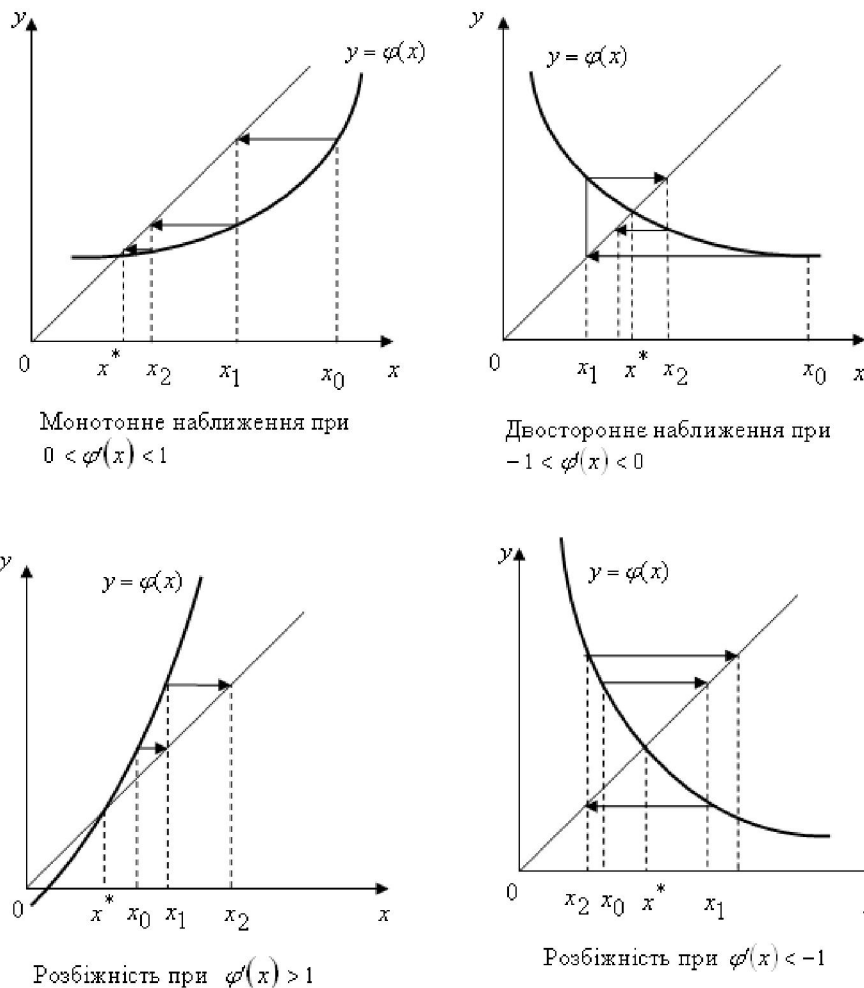


Рис. 1.6. Геометрична ілюстрація методу простої ітерації

Доведення. Досить довести, що $\varphi: V \rightarrow V$. Справді, для будь-якого $x \in V$ на підставі (1.14) і (1.17)

$$|\varphi(x) - x_0| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_0)| + |\varphi(x_0) - x_0| \leq q|x - x_0| + (1-q)r \leq qr + (1-q)r = r.$$

Тепер твердження теореми 1.3 одержується із теореми 1.2.

Якщо припустити існування кореня $x = x^*$ рівняння (1.12), то маємо наступну ознаку збіжності методу простої ітерації. ■

Теорема 1.4. Нехай функція φ на проміжку V задовольняє умову Ліпшица зі сталою $q < 1$, тоді послідовність (1.13) збігається до розв'язку x^* при будь-якому $x_0 \in V$ і має лінійну швидкість збіжності, тобто

$$|x_{k+1} - x^*| \leq q|x_k - x^*|. \quad (1.18)$$

Доведення. Умова стиску впливає з умови Ліпшица. Для довільного $x \in B$ маємо

$$|\varphi(x) - x^*| \leq |\varphi(x) - \varphi(x^*)| \leq q|x - x^*| \leq qr < r,$$

тобто $\varphi: B \rightarrow B$.

В обчислювальній практиці популярним є емпіричний підхід щодо завершення ітераційного процесу (1.13) та оцінки похибки наближення x_{k+1} . А саме: обчислення ведуться до тих пір, поки не виконається нерівність $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, де ε – належним чином вибране досить мале число. Якщо порядок x_k наперед невідомий, то правильніше орієнтуватись на виконання нерівності $|x_{k+1} - x_k| \leq \delta |x_k|$ або $|x_{k+1} - x_k| \leq \delta(|x_k| + \sigma)$, де δ – відносна похибка, σ – характеристика точності виконання обчислень. ■

Приклад 1.3. Рівняння $x^2 - 2 = 0$, запишемо у вигляді

$$x = \varphi(x), \quad \varphi(x) = x - \lambda(x^2 - 2).$$

Параметр λ виберемо так, щоб виконувались умови теореми 1.2. Нехай $\lambda = 0.25$. Тоді для $x \in [1, 2]$ $|\varphi'(x)| = |1 - 0.5x| \leq q = 0.5$. Оскільки $\varphi'(x) = 1 - 0.5x > 0$ для $x \in (1, 2)$, то функція $\varphi(x) = -0.25x^2 + x + 0.5$ зростає на $(1, 2)$. Крім того, $\varphi(1) = 1.25$, $\varphi(2) = 1.5$. Отже, $\varphi: [1, 2] \rightarrow [1.25, 1.5] \subset [1, 2]$.

Для початкового значення $x_0 = 1$ наближення $x_6 = 1.41378$ одержується з похибкою, яка не перевищує 0.0004.

У загальному випадку перехід від рівняння (1.1) до (1.12) можна здійснити, записавши рівняння (1.1) у вигляді

$$x = x - \lambda f(x).$$

Параметр $\lambda \neq 0$ вибирається таким чином, щоб похідна $\varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x)$ в деякій області задовольняла нерівність (1.16).

Якщо, наприклад,

$$0 < \alpha \leq f'(x) \leq \gamma,$$

тоді для функції $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$ одержимо $1 - \gamma\lambda \leq \varphi'(x) \leq 1 - \alpha\lambda$.

Отже, $|\varphi'(x)| \leq q(\lambda) := \max\{|1 - \lambda\alpha|, |1 - \lambda\gamma|\}$. Аналізуючи одержані нерівності, можна побачити, що при будь-яких $\lambda \in (0, 2/\gamma)$ виконується оцінка $q(\lambda) < 1$. Зокрема, при $\lambda = 1/\gamma$ маємо:

$$0 \leq \varphi'(x) \leq 1 - \frac{\alpha}{\gamma} < 1,$$

що забезпечує монотонну збіжність ітераційного процесу зі швидкістю, обумовленою оцінкою (1.15) при $q = 1 - \frac{\alpha}{\gamma}$. Оптимальним

є значення параметра $\lambda = \lambda_0 := \frac{2}{\alpha + \gamma}$. При цьому значенні параметра

$$1 - \lambda\gamma = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha + \gamma} \quad \text{і} \quad 1 - \lambda\alpha = \frac{\gamma - \alpha}{\alpha + \gamma}, \quad \text{тобто максимум } |\varphi'(x)|, \text{ що}$$

дорівнює $q(\lambda_0) = \frac{\gamma - \alpha}{\alpha + \gamma}$, досягається на кожному з елементів множини

$\{|1 - \lambda\alpha|, |1 - \lambda\gamma|\}$. У прикладі 1.3 таким значенням є

$$\lambda_0 = 2/(2 + 4) = 1/3.$$

1.7. Метод Ньютона

1.7.1. Побудова ітераційного процесу. Розглянемо рівняння

$$f(x) = 0, \quad (1.19)$$

де $f \in C^2[a, b]$ і x^* – єдиний корінь рівняння на $[a, b]$. Одним із основних методів наближеного розв’язування нелінійних рівнянь та систем вигляду (1.19) є метод Ньютона, це пов’язано з простотою його реалізації та високою швидкістю збіжності. Цей метод узагальнений для нелінійних операторних рівнянь у функціональних просторах і відомий як метод Ньютона–Канторовича [11, 13].

Нехай x_k – деяке наближення розв’язку рівняння (1.19). За формулою Тейлора для довільного $t \in [a, b]$ маємо:

$$f(t) = f(x_k) + f'(x_k)(t - x_k) + \frac{1}{2} f''(\theta_k)(t - x_k)^2,$$

де θ_k – точка між t і x_k . Поклавши $t = x^*$, одержимо

$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} f''(\theta_k)(x^* - x_k)^2. \quad (1.20)$$

Якщо наближення x_k близьке до x^* , то значення $(x^* - x_k)^2$ досить мале, порівняно з $|x^* - x_k|$. Тоді, нехтуючи останнім доданком у правій частині одержаної рівності, маємо:

$$f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) \approx 0. \quad (1.21)$$

Запишемо точну рівність, замінивши x^* наближеним значенням x_{k+1} . Одержимо ітераційний **метод Ньютона**, який визначається рівнянням $f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$, звідки маємо:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.22)$$

Формула (1.22) визначена, якщо $f'(x_k) \neq 0$.

Метод Ньютона, який ще називається *методом дотичних*, має простий геометричний зміст (рис. 1.7). Запишемо рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_k, f(x_k))$:

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k).$$

Позначимо абсцису точки перетину дотичної через x_{k+1} . Тоді при $y = 0$ одержимо формулу (1.22).

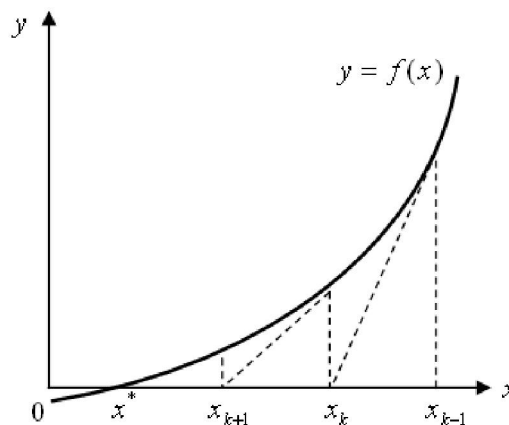


Рис. 1.7. Ілюстрація методу Ньютона

Формула (1.22) також впливає з методу простої ітерації, якщо записати рівняння (1.20) у вигляді $x = x - \lambda f(x)$, а параметр λ на k -й ітерації вибирати так, щоб $\varphi'(x_k) = 1 - \lambda f'(x_k) = 0$. Тоді

$\lambda = \lambda_k = \frac{1}{f'(x_k)}$ (метод нестационарний) і

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k f(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

1.7.2. Оцінка похибки та збіжність методу Ньютона. Умови збіжності методу Ньютона одержується, зокрема, з теореми 1.2 про збіжність методу простої ітерації. Справді, метод Ньютона є ітераційним методом (1.13) з функцією

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Умова стиску виконується, якщо

$$|\varphi'(x)| = \left| 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| = \frac{|f(x)f''(x)|}{(f'(x))^2} < 1.$$

Її можна записати у вигляді $|f(x)f''(x)| \leq (f'(x))^2$, $x \in [a, b]$. Одержана умова є складною для перевірки. Наступною теоремою даються оцінки методу Ньютона та його порядок.

Теорема 1.5. Нехай: 1) функція $f \in C^2[a, b]$;

2) $|f'(x)| \geq m_1 > 0$, $|f''(x)| \leq M_2$ при $x \in [a, b]$;

3) ітераційні наближення $x_k \in [a, b]$, $k = 0, 1, \dots$ і послідовність $\{x_k\}$ збіжна до кореня $x^* \in [a, b]$ рівняння (1.19).

Тоді виконуються нерівності:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_k - x^*)^2, \quad (1.23)$$

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_{k+1} - x_k)^2, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.24)$$

Перша з нерівностей означає, що метод має другий порядок, а друга нерівність служить для оцінки похибки методу.

Доведення. Із (1.20), (1.21) і враховуючи, що $f(x^*) = 0$, одержимо

$$f'(x_k)(x^* - x_k) + f''(\theta_k)(x_k - x^*)^2 / 2 = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Звідси випливає, що

$$f'(x_k)(x_{k+1} - x^*) = f''(\theta_k)(x_k - x^*)^2 / 2.$$

Далі маємо:

$$x_{k+1} - x^* = \frac{f''(\theta_k)}{2f'(x_k)}(x_k - x^*)^2.$$

Звідки й випливає нерівність (1.23).

Для доведення нерівності (1.24) побудуємо оцінку нев'язки $f(x_{k+1})$. Застосувавши формулу Тейлора (1.20) для $t = x_{k+1}$ і враховуючи (1.21) одержимо

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2}f''(\bar{\theta}_k)(x_{k+1} - x_k)^2 = \frac{1}{2}f''(\bar{\theta}_k)(x_{k+1} - x_k)^2.$$

Таким чином, маємо:

$$|f(x_{k+1})| \leq \frac{1}{2}M_2(x_{k+1} - x_k)^2. \quad (1.25)$$

Згідно з теоремою про скінченні прирости

$$f(x_{k+1}) - f(x^*) = f'(\xi_{k+1})(x_{k+1} - x^*), \quad (1.26)$$

де ξ_{k+1} – точка між x_{k+1} і x^* . Оскільки $f(x^*) = 0$, то

$$f'(\xi_{k+1})(x_{k+1} - x^*) = \frac{1}{2}f''(\bar{\theta}_k)(x_{k+1} - x_k)^2,$$

На підставі умови 2) теореми одержимо нерівність (1.24):

$$|x_{k+1} - x^*| = \frac{|f(x_{k+1})|}{|f'(\xi_{k+1})|} \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_{k+1} - x_k)^2. \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. Замінивши в рівності (1.26) $k+1$ на k і врахувавши, що $f(x^*) = 0$, одержимо

$$|x_k - x^*| = \frac{|f(x_k)|}{|f'(\xi_k)|} \leq \frac{|f(x_k)|}{m_1}.$$

Тобто контролювати точність обчислення кореня можна за величиною нев'язки $f(x_k)$. А саме, точність ε досягнута при

$$|x_k - x^*| \leq \frac{|f(x_k)|}{m_1} \leq \varepsilon.$$

Якщо $m_1 \geq 1$, то $|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|$. Якщо ж $0 < m_1 < 1$, то точність ε досягається при

$$|f(x_k)| < m_1 \varepsilon. \quad (1.27)$$

Доведемо збіжність методу Ньютона, коли похідні $f'(x)$ і $f''(x)$ не змінюють свого знаку на $[a, b]$, тобто $f'(x)f''(x) \neq 0$ при $x \in [a, b]$.

Теорема 1.6. *Якщо $f \in C^2[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$ і похідні f' і f'' зберігають знак на $[a, b]$, то, починаючи з початкового наближення $x_0 \in [a, b]$, для якого виконується умова Фур'є*

$$f(x_0)f''(x_0) > 0,$$

метод Ньютона збіжний до єдиного розв'язку x^ рівняння (1.19) з квадратичною швидкістю.*

Доведення. Нехай $f'(x) > 0$ і $f''(x) > 0$, $x \in [a, b]$ (рис. 1.8). Тоді за початкове значення можна взяти довільне $x_0 \in (x^*, b]$, зокрема $x_0 = b$. Умова $f(a)f(b) < 0$ і знакопостійність $f'(x)$ гарантують існування єдиного розв'язку x^* рівняння (1.19). Для $x_0 > x^*$ згідно з формулою Тейлора маємо:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + \frac{1}{2}f''(\theta_0)(x^* - x_0)^2 = 0.$$

Оскільки $f''(\theta_0) > 0$, то рівність виконується, якщо

$$f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) < 0. \text{ Звідки випливає, що } x^* < x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1.$$

Методом індукції доводиться, що $x^* < x_k < x_{k+1}$ для довільного k . Послідовність $\{x_k\}$ монотонно спадна й обмежена знизу коренем x^* , тому існує $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x} \geq x^*$. Оскільки $f(\bar{x}) = 0$, то $\bar{x} = x^*$ і корінь єдиний.

Інші 3 випадки розглядаються аналогічно (рис. 1.8). ■

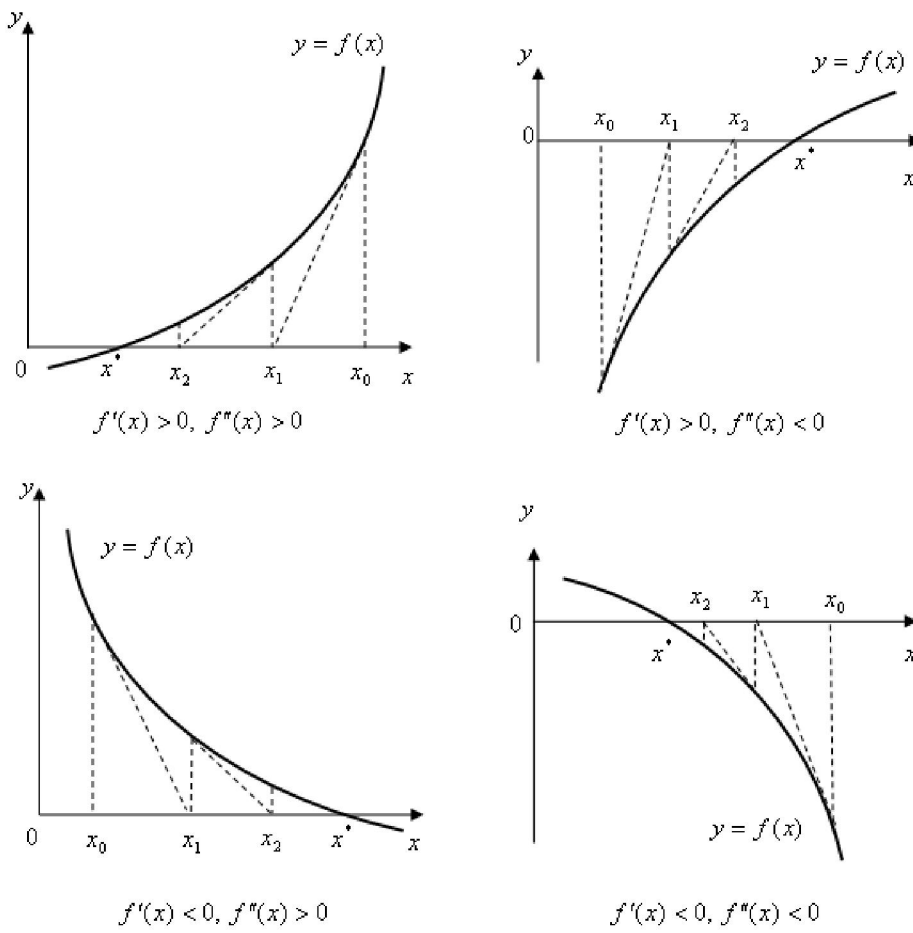


Рис. 1.8. Метод Ньютона для знакопостійних похідних $f'(x)$ і $f''(x)$

Існування кореня рівняння (1.19) й збіжність методу Ньютона обґрунтовано й при слабших обмеженнях на функцію f . Сформулюємо одну з таких теорем [2, 8, 17].

Теорема 1.7. Нехай виконуються умови:

- 1) $f \in C^2 [x_0, x_0 + 2h_0]$, $f(x_0)f'(x_0) \neq 0$, $h_0 = -f(x_0)/f'(x_0)$;
- 2) $2|h_0| \max_{[x_0, x_0+2h_0]} |f''(x)| \leq |f'(x_0)|$.

Тоді всі ітерації $x_k \in [x_0, x_0 + 2h_0]$, де

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

і $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$, x^* – єдиний корінь рівняння $f(x) = 0$, і виконується оцінка

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_2}{2|f'(x_k)|} (x_k - x_{k-1})^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad \blacksquare$$

Приклад 1.4. Застосуємо метод Ньютона для обчислення \sqrt{a} , що рівносильне знаходженню додатного кореня рівняння $f(x) = x^2 - a = 0$. Згідно з (1.22) ітерації набувають вигляду

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{x_k}{2} + \frac{a}{2x_k} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.28)$$

Похибка на $(k+1)$ -й ітерації

$$r_{k+1} = x_{k+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right) - \sqrt{a} = \frac{(x_k - \sqrt{a})^2}{2x_k} = \frac{r_k^2}{2x_k}. \quad (1.29)$$

Нехай $x_0 > \sqrt{a}$. Покажемо, що абсолютна величина похибки зменшується з кожною ітерацією хоча б удвічі. Справді,

$$r_{k+1} = \frac{r_k}{2x_k} \cdot r_k = \frac{x_k - \sqrt{a}}{2x_k} r_k = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_k} \right) r_k.$$

Оскільки $x_0 > \sqrt{a}$, то із (1.28) випливає, що $\sqrt{a} < x_{k+1} < x_k$ для $k = 0, 1, \dots$. Внаслідок цього

$$0 < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_k} < \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отже, $|r_{k+1}| \leq \frac{1}{2} |r_k|$, $k = 0, 1, \dots$. Розглянемо відносну похибку

$$\delta_k = \frac{|r_k|}{\sqrt{a}} = \left| 1 - \frac{x_k}{\sqrt{a}} \right|. \quad \text{На підставі (1.29) маємо}$$

$$\delta_{k+1} = \frac{|r_{k+1}|}{\sqrt{a}} = \frac{r_k^2}{2x_k \sqrt{a}} < \frac{1}{2} \frac{r_k^2}{(\sqrt{a})^2} \leq \frac{1}{2} \delta_k^2.$$

Це означає, що для достатньо близького початкового наближення до \sqrt{a} , $x_0 > \sqrt{a}$ кожне наступне наближення подвоює число правильних

цифр. Обчислення $\sqrt{2} = 1.414213562373\dots$ із початковим значенням $x_0 = 2$ наведено в табл. 1.2. Зокрема, $x_2 \approx 1.414167$ містить 2 правильні цифри, $x_3 \approx 1.414215$ – 6, а для $x_4 \approx 1.4142135624$ – 10 правильних цифр після крапки. У наближених значеннях x_k розв'язку підкреслено правильні цифри.

Таблиця 1.2. Обчислення $\sqrt{2}$ різними методами

Номер ітерації k	Метод поділу відрізка пополам		Метод лінійної інтерполяції		Метод Ньютона	
	x_k	r_k	x_k	r_k	x_{k+1}	r_k
0	1,0	–	2.0	–	2	–
1	2,0	–	1.0	–	<u>1,5</u>	0,0858
2	1,5	0,2756	1,3333333	-0,0809	<u>1,4166666</u>	0,0025
3	1,25	0,1320	1,3999999	-0,0142	<u>1,4142156</u>	2,1216E-6
4	1,375	0,2024	<u>1,4117647</u>	-0,0024	<u>1,4142135623</u>	-2,42031E-8
5	<u>1,4375</u>	0,2385	<u>1,4137930</u>	-0,0004		
6	<u>1,406250</u>	0,2204	<u>1,4141414</u>	-7,2146E-5		
7	<u>1,421875</u>	0,2295	<u>1,4142011</u>	-1,2422E-5		
8	<u>1,417969</u>	0,2272	<u>1,4142113</u>	-2,1698E-6		
9	<u>1,416016</u>	0,2261	<u>1,4142131</u>	-3,8183E-7		
10	<u>1,415039</u>	0,2255	<u>1,4142135</u>	-2,4203E-8		

Номер ітерації k	Метод січних		Метод простої ітерації	
	x_k	r_k	x_{k+1}	r_k
0	1.0	–	2	-
1	2.0	–	1,5	0,0857
2	<u>1,3333333</u>	-0,0812	<u>1,4375</u>	0,0233
3	<u>1,3999999</u>	-0,0145	<u>1,4208984</u>	0,0067
4	<u>1,4146341</u>	0,0004	<u>1,4161603</u>	0,0019
5	<u>1,4142113</u>	-2,1698E-6	<u>1,4147827</u>	0,0006
6	<u>1,4142135</u>	-2,4203E-8	<u>1,4143801</u>	0,0002
7			<u>1,4142624</u>	4,8852E-5
8			<u>1,4142278</u>	1,4281E-5
9			<u>1,4142177</u>	4,1481E-6
10			<u>1,4142147</u>	1,1679E-6

Знаходження квадратних коренів за методом Ньютона (1.28) відоме як *процес Горнера*. Оскільки $f'(x) = 2x > 0$ і $f''(x) = 2$, то умови знакопостійності похідних виконуються. Залишається задовольнити умову Фур'є (1.9). Для цього потрібно вибрати x_0 так, щоб $x_0^2 > a$. Нехай ціле додатне m таке, що $a = 2^m q$, $q \in [0.5, 1]$, тоді $2^{m-1} \leq a < 2^m$. Можна для парного m взяти $x_0 = 2^{0.5m}$ і $x_0 = 2^{0.5(m+1)}$ для непарного.

Якщо потрібно обчислити $\sqrt[n]{a}$ для $a > 0$, то процес наближень для $\sqrt[n]{a}$ будується методом Ньютона, як розв'язок рівняння $x^n - a = 0$. Ітераційний процес набуває вигляду

$$x_{k+1} = \frac{1}{n} \left[(n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}} \right], \quad k = 0, 1, \dots$$

Значення $x_0 > 0$ вибирається так, щоб $x_0^n > a$.

1.8. Кратні корені

Припустимо, що відома кратність m кореня x^* рівняння (1.19). Тоді $f^{(m)}(x^*) \neq 0$. Оскільки для x , близьких до x^* малими є $f(x)$ і $f'(x)$, то метод Ньютона може збігатись тільки лінійно. Нехай $f(x) \geq 0$ для парних m , коли $x \in [a, b]$, інакше розглянемо рівняння $f(x) = 0$. Тоді для рівняння

$$g(x) := \sqrt[m]{f(x)} = 0$$

x^* – простий корінь і метод Ньютона для нього набуває вигляду

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{\sqrt{g'(x_k)}} = x_k - \frac{\sqrt[m]{f(x_k)}}{m^{-1} \sqrt[m]{(f(x_k))^{m-1}} \cdot f'(x_k)} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Таким чином, якщо відомо точна кратність m кореня, то маємо таку модифікацію методу Ньютона:

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.30)$$

Приклад 1.5. Розглянемо рівняння $f(x) = x^3 - 3x + 2 = 0$. Тут $x^* = 1$ – корінь кратності $m=2$. Порівняємо наближення, одержані згідно з методом Ньютона (1.22)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k + 2}{3(x_k^2 - 1)} = \frac{2x_k^3 - 2}{3(x_k^2 - 1)}$$

і модифікацією методу Ньютона (1.33), яка враховує точну кратність,

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - 2 \frac{\bar{x}_k^3 - 3\bar{x}_k + 2}{3(\bar{x}_k^2 - 1)} = \frac{\bar{x}_k^3 + 3\bar{x}_k - 4}{3(\bar{x}_k^2 - 1)}.$$

Початкові значення $x_0 = \bar{x}_0 = 2$. Результати обчислень наведено в табл. 1.3. Швидкість збіжності порівнюється за допомогою обчислення відношення $\frac{|r_{k+1}|}{|r_k|}$ і $\frac{|\bar{r}_{k+1}|}{\bar{r}_k^2}$, де $r_k = x_k - x^*$.

Таблиця 1.3. Наближення кратних коренів

№	Метод Ньютона				Модифікований метод Ньютона (m=2)			
	x_k	r_k	$\frac{ r_{k+1} }{ r_k }$	$\frac{ r_{k+1} }{r_k^2}$	\bar{x}_k	\bar{r}_k	$\frac{ \bar{r}_{k+1} }{ \bar{r}_k }$	$\frac{ \bar{r}_{k+1} }{\bar{r}_k^2}$
0	2	–	–	–	2	–	–	–
1	1,5555555	0,5555555	0,5555555	0,5555555	1,1111111	0,1111111	0,1111111	0,1111111
2	1,2979066	0,2979066	0,5362318	0,9652173	1,0019493	0,0019493	0,0019493	0,1578947
3	1,1553901	0,1553901	0,5216071	1,7509081	1,0000006	6,3268E-7	6,3268E-7	0,1665043
4	1,0795622	0,0795622	0,5120156	3,2950316	1,0000000	6,750E-14	6,750E-14	0,1686288
5	1,0402884	0,0402884	0,5063765	6,3645355				
6	1,0202768	0,0202768	0,5032910	12,4921971				
7	1,0101723	0,0101723	0,5016727	24,7412083				
8	1,0050947	0,0050947	0,5008434	49,2358906				
9	1,0025495	0,0025495	0,5004234	98,2235355				
10	1,0012753	0,0012753	0,5002121	196,197952				

Як видно з результатів, наведених у таблиці, метод Ньютона (1.22) збігається лінійно, а (1.30) – з квадратичною швидкістю.

Ще однією модифікацією методу Ньютона на випадок кратних коренів є *метод Хейлі*. Якщо x^* – корінь кратності $m \geq 2$, то для функції $F(x) = f(x)/f'(x)$ він простий. Справді, якщо $f(x) = (x - x^*)^m g(x)$ і $g(x^*) \neq 0$, то

$$F(x) = \frac{(x - x^*)g(x)}{mg(x) + (x - x^*)g'(x)}.$$

Отже, $F(x^*) = 0$ і нескладно перевірити, що

$$F'(x^*) = g^2(x^*) \left(mg(x^*) \right)^{-1} \neq 0.$$

Застосувавши до рівняння $F(x) = 0$ метод Ньютона

$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$, одержимо метод Хейлі

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{(f'(x_k))^2 - f(x_k)f''(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.31)$$

На відміну від методу (1.30), тут не потрібно знати точної кратності кореня.

Для рівняння $x^3 - 3x + 2 = 0$, де $x^* = 1$ – корінь кратності $m = 2$, маємо

$$x_{k+1} = \frac{2(2x_k + 1)}{x_k^2 + 2x_k + 3}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Для знаходження \sqrt{a} згідно з методом Хейлі маємо ітераційний процес

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k^2 - a) \cdot 2x_k}{4x_k^2 - (x_k^2 - a) \cdot 2} = \frac{2ax_k}{x_k^2 + a}.$$

Метод Хейлі для кратного кореня рівняння (1.19) має квадратичну збіжність.

1.9. Модифікації методу Ньютона

1.9.1. Спрощений метод Ньютона. На першому кроці обчислюється $f'(x_0)$ і надалі $f'(x_k) := f'(x_0)$. Ітераційний процес набуває вигляду

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Геометрична ілюстрація показана на рис. 1.9. Метод має тільки лінійну швидкість збіжності, що випливає з аналізу збіжності методу простої ітерації із функцією

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}.$$

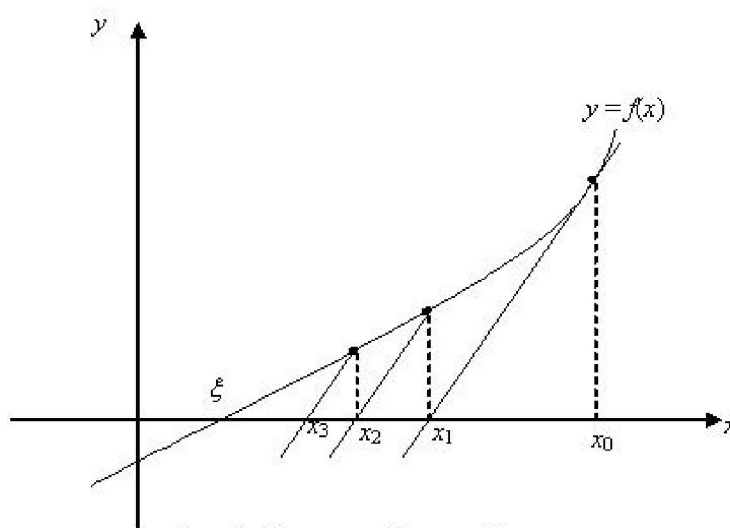


Рис. 1.9. Спрощений метод Ньютона

1.9.2. Різницевий метод Ньютона. Надлінійну швидкість збіжності можна одержати тоді, коли $f'(x_k)$ замінити на кожній ітерації деяким близьким до нього значенням. Наприклад, похідну можна апроксимувати різницеvim відношенням

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + h_k) - f(x_k)}{h_k},$$

де h_k – малий параметр, який певним чином вибирається. Тоді метод Ньютона набуває вигляду

$$x_{k+1} = x_k - \frac{h_k f(x_k)}{f(x_k + h_k) - f(x_k)}. \quad (1.32)$$

Що стосується вибору h_k , то із ростом k значення h_k має зменшуватись з метою точнішої апроксимації $f'(x_k)$. Наприклад, $h_k = \lambda h_0$, де $\lambda < 1$, наприклад $\lambda = 0.5$ або 0.1 . Недоліком такого вибору є відсутність зв'язку між $h_k \rightarrow 0$ і $x_k \rightarrow \xi$. Може виявитись, що x_k ще не достатньо близьке до ξ , а $|h_k|$ досить мале і $f(x_k + h)$ та $f(x_k)$ практично не відрізняються. Протилежна ситуація може привести до втрати швидкості збіжності.

Оскільки $f(x_k) \rightarrow 0$ при $x_k \rightarrow \xi$, то можна взяти $h_k = f(x_k)$, якщо x_k близьке до ξ . Тоді ітерації обчислюється за формулою

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.33)$$

і метод називається **методом Стеффенсона**. Цей метод, як і метод Ньютона, володіє локальною збіжністю, швидкість якої квадратична.

У наведених модифікаціях на кожній ітерації обчислюється два значення функції f , але не обчислюється значення похідної. При цьому швидкість збіжності залишається квадратичною, як і в методі Ньютона.

1.9.3. Метод січних. У цьому випадку $h_k = x_k - x_{k-1}$ і маємо ітераційний процес

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.34)$$

де значення x_0 і x_1 потрібно задати. Формула (1.34) визначає двокроковий метод, оскільки для знаходження x_{k+1} потрібні два попередні наближення x_{k-1} і x_k . На кожній ітерації обчислюється одне значення функції $f(x_k)$. Формулою (1.34) визначається і метод лінійної інтерполяції (1.6), але породжуються ці методи різними підходами. Геометрично у методі січних наближення x_{k+1} одержується як абсциса точки перетину січної, проведеної через точки $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$, із віссю x . На рис. 1.10 показано побудову наближень x_2 і x_3 .

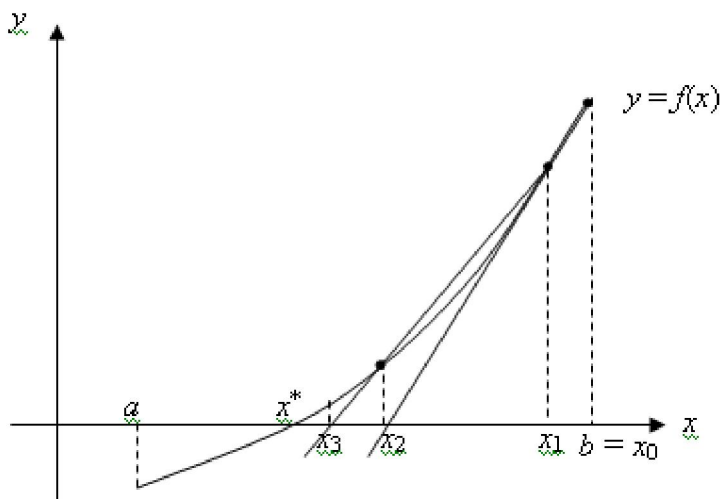


Рис. 1.10. Метод січних

З'ясуємо швидкість збіжності методу січних при виконанні умов теореми 1.6. Для цього проаналізуємо спадання похибки наближення з ростом k . Із (1.34) маємо:

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = x_k - x^* - \frac{f(x_k)}{f(\theta_k)}, \quad (1.35)$$

де θ_k – точка між x_k і x^* . За формулою Тейлора

$$f(x_k) = f(x^*) + f'(x^*)(x_k - x^*) + \frac{1}{2}f''(\bar{\theta}_k)(x_k - x^*)^2.$$

Підставимо значення $f(x_k)$ в праву частину (1.34), врахувавши, що

$f(x^*) = 0$. Одержимо, що

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= \frac{x_k - x^*}{f'(\theta_k)} \left[f'(\theta_k) - f'(x^*) - \frac{1}{2}f''(\bar{\theta}_k)(x_k - x^*) \right] = \\ &= \frac{x_k - x^*}{f'(\theta_k)} \left[f''(\tilde{\theta}_k)(\theta_k - x^*) - \frac{1}{2}f''(\bar{\theta}_k)(x_k - x^*) \right]. \end{aligned}$$

Якщо метод січних збіжний, то $|\theta_k - x^*| < |x_{k-1} - x^*|$,

$$|x_k - x^*| < |x_{k-1} - x^*|$$

і в підсумку маємо:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{|x_k - x^*|}{|f'(\theta_k)|} \left[|f''(\tilde{\theta}_k)| \cdot |x_{k-1} - x^*| + \frac{1}{2}|f''(\bar{\theta}_k)| \cdot |x_{k-1} - x^*| \right].$$

Звідси випливає, що

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{3M_2}{2m_1} |x_k - x^*| \cdot |x_{k-1} - x^*|. \quad (1.36)$$

Введемо позначення: $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$, $C = \frac{3M_2}{2m_1}$. Тоді нерівність (1.36)

набуває вигляду $\varepsilon_{k+1} < C\varepsilon_k\varepsilon_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Для $k = 1, 2, 3, 4$ маємо:

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &< C\varepsilon_1\varepsilon_0 < C^{-1}(C\varepsilon_0)^2, \\ \varepsilon_3 &< C\varepsilon_2\varepsilon_1 < C^{-1}(C\varepsilon_0)^2 \cdot C\varepsilon_0 = C^{-1}(C\varepsilon_0)^3, \\ \varepsilon_4 &< C\varepsilon_3\varepsilon_2 < C^{-1}(C\varepsilon_0)^5, \\ \varepsilon_5 &< C\varepsilon_4\varepsilon_3 < C^{-1}(C\varepsilon_0)^8.\end{aligned}$$

Показники степенів утворюють послідовність чисел Фібоначчі: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Нагадаємо, що такі числа задаються рекурентним співвідношенням

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad F_0 = F_1 = 1.$$

Тоді оцінка для ε_k набуває вигляду

$$\varepsilon_k < C^{-1}(C\varepsilon_0)^{F_k}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (1.37)$$

Згідно з формулою Біне

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right].$$

Для великих k значення $F_k \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1}$, оскільки значення при

$k \rightarrow \infty \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \rightarrow 0$. Якщо початкове наближення x_0 близьке до

кореня рівняння x^* , то із (1.37), випливає, що

$$\varepsilon_k < \frac{1}{C} \left((C\varepsilon_0)^{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}} \right)^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k} = C_1 \nu^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k},$$

де $C_1 = C^{-1}$, $\nu = (C\varepsilon_0)^{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}} < 1$. Одержана нерівність дає підставу стверджувати, що збіжність методу січних надлінійна і має порядок, не менший, ніж

$$p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618.$$

1.9.4. Гібридні методи. Якщо виконуються умови теореми 1.6 і вибір початкового наближення x_0 задовольняє умову Фур'є (1.9), то метод лінійної інтерполяції і метод Ньютона збігаються одночасно. Крім того, ітерації за методом лінійної інтерполяції

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \frac{f(\bar{x}_k)(\bar{x}_k - x_0)}{f(\bar{x}_k) - f(x_0)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

і методом Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad x_1 = x_0 \quad (1.38)$$

забезпечують двостороннє наближення до розв'язку x^* (рис. 1.11).

Отже, виконання оцінки

$$|\bar{x}_k - x_k| \leq \varepsilon$$

гарантує задану точність обчислення кореня рівняння $f(x) = 0$.

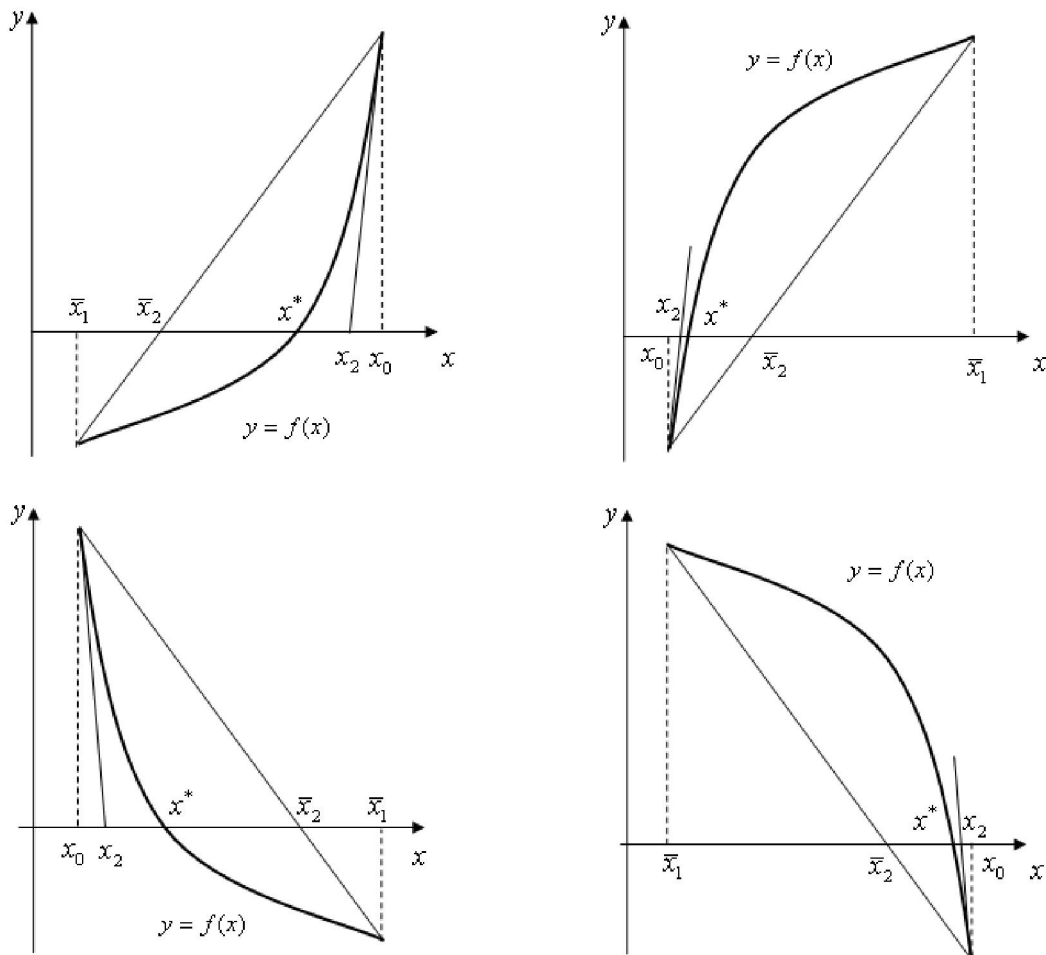


Рис. 1.11. Комбінація методу лінійної інтерполяції і Ньютона

Ще одним підходом є поєднання глобально збіжного методу половинного поділу із локально збіжним методом Ньютона. Можна стартувати із швидко збіжного методу Ньютона і підключити „повільний” глобально збіжний метод або навпаки. Розглянемо перший випадок і запишемо алгоритм методу Ньютона – половинного поділу.

Крок 1. Задати початкове значення x_0 , $k := 0$.

Крок 2. Обчислити $\bar{x}_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

Крок 3. Якщо $|f(\bar{x}_k)| < |f(x_k)|$, то $x_{k+1} := \bar{x}_k$. інакше обчислити

$$\bar{x}_k := \frac{1}{2}(x_k + \bar{x}_k)$$

і повернутись на крок 2.

Крок 4. Перевірити алгоритм на завершення. Робота алгоритму або припиняється із $x^* := x_{k+1}$, або продовжується з переходом на крок 2 і $k := k + 1$.

Такий алгоритм враховує, що метод Ньютона задає локально правильний напрям, але щоб запобігти надмірному переміщенню, відбувається корекція за допомогою половинного поділу відрізка, якщо не виконується умова релаксації $|f(\bar{x}_k)| < |f(x_k)|$ на кроці 2. Алгоритм не завжди глобально збіжний, але дозволяє розширити границі застосування методу Ньютона і вести пошук коренів, якщо знаки похідних f' і f'' можуть змінюватись на $[a, b]$.

Розглянемо можливі умови завершення ітераційного алгоритму.

1. Якщо $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$, де ε – задана точність.

2. За величиною відносної похибки $\delta_k = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k|}$. Якщо значення x_k близькі до нуля, то за значенням $\delta_k = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k| + \beta}$, де β характеризує точність обчислень або обчислювальну похибку.

3. За величиною нев'язки $f(x_{k+1})$, а саме, $x^* \approx x_{k+1}$, якщо $|f(x_{k+1})| \leq \varepsilon$, надійніше $|f(x_{k+1})| \leq m_1 \varepsilon$, де $m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

1.9.5. Полісний метод Ньютона. Розглянемо модифікацію методу Ньютона для розв'язування рівнянь вигляду (1.19), увівши в нього два параметри [6]. Дана модифікація ґрунтується на такій геометричній ідеї (рис. 1.12).

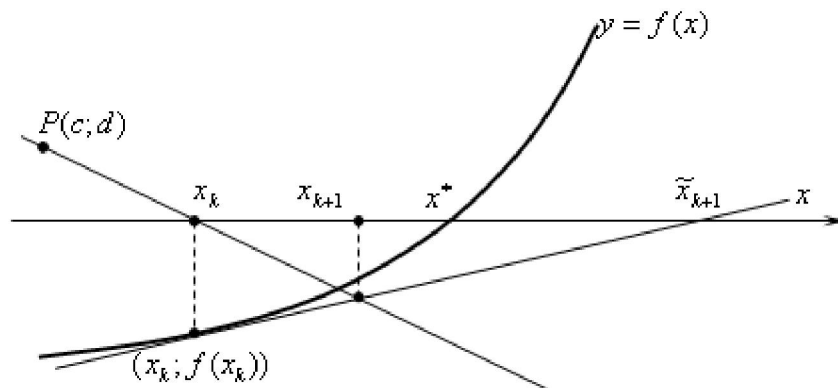


Рис. 1.12. До побудови полісного методу Ньютона

Візьмемо на площині Oxy деяку точку $P(c, d)$ (назвемо її полюсом) і через неї та визначеною попереднім наближенням x_k точку $(x_k, 0)$ проведемо пряму. Новим наближенням x_{k+1} до кореня x^* рівняння $f(x) = 0$ будемо вважати абсцису точки перетину цієї прямої з дотичною до графіка функції $y = f(x)$, проведеною в точці $(x_k, f(x_k))$. Рівняння вказаних прямих мають вигляд

$$y = \frac{d(x - x_k)}{c - x_k} \quad \text{та} \quad y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k).$$

Прирівнявши ординати, одержимо рівняння

$$\frac{d(x - x_k)}{c - x_k} = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k),$$

для абсциси x і знайдене таким чином значення візьмемо за наступне наближення x_{k+1} . У підсумку одержимо ітераційну формулу

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{d}{c - x_k}}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.39)$$

яка й визначає двопараметричний однокроковий метод, який називається *полюсним методом Ньютона*.

1.9.6. Поліусний метод січних. Проведемо через точки $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ та $(x_k, f(x_k))$ січну (рис. 1.13). Її рівняння

$$y = f(x_k) + \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k}(x - x_k).$$

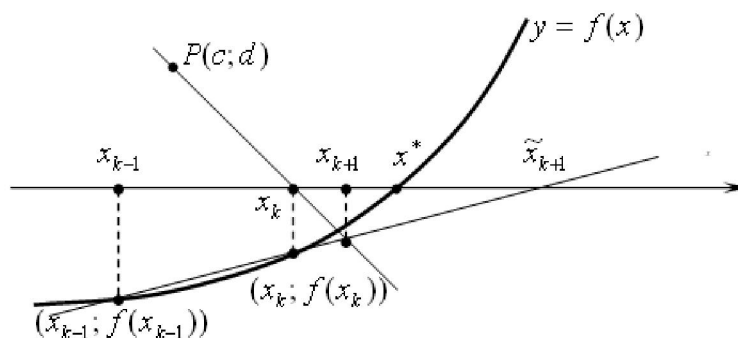


Рис. 1.13. Ілюстрація полюсного методу січних

Як і в полюсному методі Ньютона через полюс $P(c, d)$ і точку $(x_k, f(x_k))$ проведемо пряму $y = d(x - x_k)/(c - x_k)$. Знайшовши абсцису точки перетину цих двох прямих, одержимо двопараметричний двокроковий ітераційний процес

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k} - \frac{d}{c - x_k}}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.40)$$

який називається *полюсним методом січних*.

Легко бачити, що при рівності нулю виразу $d/c - x_k$ (тобто при $d = 0$) методи (1.39), (1.40) збігаються із класичними методами Ньютона (1.22) та січних (1.34) відповідно. Формула (1.40) може бути отримана з формули (1.39) апроксимацією похідної подібно до того, як формула січних (1.34) була отримана з формули методу Ньютона (1.22).

Аналізуючи рис. 1.12 і 1.13, на яких через \tilde{x}_{k+1} позначено наближення за методами (1.22) та (1.34) відповідно, можна зробити висновок, що при вдалому виборі полюса P полюсними модифікаціями методів Ньютона та січних можна отримати краще уточнення наближеного значення кореня, ніж за допомогою базового методу. Можна також змодельовати графічно ситуацію, коли полюсні варіанти генеруватимуть збіжні до кореня послідовності, в той час як, наприклад, ньютонівські наближення – розбіжні.

У табл. 1.4 наведено основні ітераційні методи роз'язування нелінійних рівнянь та їх характеристики.

Таблиця 1.4. Ітераційні методи розв'язування рівняння $f(x) = 0$

№	Метод	Формула	Швидкість збіжності	Кількість обчислень значень функції на кроці
1	Метод половинного поділу	$x_{k+1} = \frac{a+b}{2}$	1	1
2	Метод лінійної інтерполяції	$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$	1	1
3	Метод простої ітерації	$x_{k+1} = \phi(x_k)$	1	1
4	Метод Ньютона	$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$	2	2
5	Модифікований метод Ньютона	$x_{k+1} = x_k - \frac{f_k}{f' \left[x_k - \frac{1}{2} \frac{f_k}{f'_k} \right]}$	3	3
6	Метод Стеффенсона	$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}$	2	2
7	Метод січних	$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$	1.62	1
8	Поліосний метод Ньютона	$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{d}{c - x_k}}$	2	2
9	Поліосний метод січних	$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k} - \frac{d}{c - x_k}}$	1.62	2

1.10. Особливості реалізації методу Ньютона

Ділення на нуль. Помилку ділення на нуль, якщо $f'(x_k) = 0$, легко попередити перевіркою $|f'(x_k)| > \delta > 0$. Тут δ – досить мале число, узгоджене із точністю обчислень і типом даних.

Відсутність коренів. Якщо значення x_k – коливаються, не наближаючись до деякого значення, то це може служити ознакою того, що рівняння $f(x) = 0$ не має коренів. Наприклад, для рівняння $\sin 3x - 1.4 = 0$, яке не має дійсних коренів, з початковим наближенням r значення ітерацій такі: 0.467, 1.308, 0.883, 0.438, 1.049, 0.558, -0.235, ...

“Хибні корені”. Нехай функція f – додатна і монотонно спадає на $[a, \infty)$. Якщо $x_0 > a$, то $100000 = \sum_{j=1}^{12} \frac{5000}{(1+s)^j} + \sum_{j=13}^{24} \frac{4000}{(1+s)^j} + \frac{25000}{(1+s)^{24}}$

при $k \rightarrow \infty$. Але, якщо контролювати точність за величиною нев’язки $f(x_k)$, то n при $k \rightarrow \infty$. Тому для деякого k помилково можна взяти за корінь $u(t) = e^{\lambda t}$. Наприклад, для рівняння $f(x) = x^2 e^{-2x} = 0$ маємо

$x_{k+1} = \frac{x_k(1-2x_k)}{2(1-x_k)}$. Якщо $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ то $A \quad x_2 = 5.333$,

$\det(A - \lambda I) = 0$, але I при $k \rightarrow \infty$. Тому доцільно використовувати критерій зупинки, що ґрунтується на оцінці відносної похибки $\delta_k = |x_{k+1} - x_k| / (|x_k| + \beta)$.

Зацікловання. Для деякого початкового значення $n > 4$ і $n \geq 1$ метод може зацікловуватись, тобто $x_{k+n} = x_k$ або $x_{k+n} \approx x_k$. Наприклад

для рівняння $(x_2, f(x_2))$ у методі Ньютона $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 3}{3x_k^2 - 1}$ 3

початковим значенням $x_0 = 0$ одержимо: $(x_1, f(x_1))$ $x_2 = -1.96154$,
 $x_3 = -1.14718$, $(x_0, f(x_0))$ $x_5 = -3.00039$, $x_6 = -1.96182$, $x_7 = -1.14743, \dots$
 Отже, $P(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$, $k = 0, 1, \dots$ (рис. 1.14).

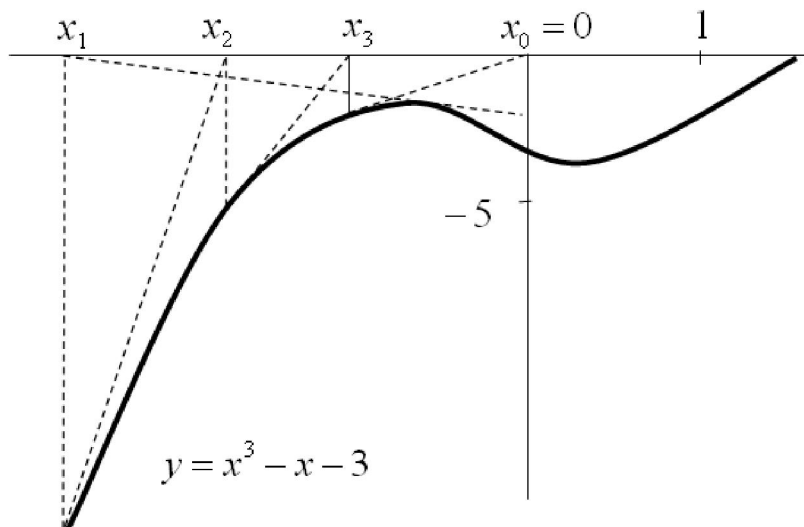


Рис. 1.14. Циклічне повторення ітерацій

Втрата швидкості збіжності. Якщо не існує другої похідної в точці $x = x^*$, то швидкість методу Ньютона може бути меншою 2. Розглянемо приклад рівняння $(x_2, f(x_2))$. Тоді похідна $f''(x) = (4/9)x^{-2/3}$ не існує при $x = 0$. Збіжність послідовності $x_{k+1} = x_k^{4/3} / (3 + 4\sqrt[3]{x_k})$ складає приблизно $(x_1, f(x_1))$.

Якщо $f'(x^*) = 0$, то швидкість збіжності не може бути квадратичною, а метод Ньютона може дати неправильний результат або розбігатись. Нехай $f(x) = x^2$. Тоді $(x_0, f(x_0))$ і

$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2}{2x_k} = \frac{1}{2}x_k$. Отже, швидкість збіжності лінійна.

1.11. Тестові приклади та порівняння методів

Приклад 1.6. На проміжку $[0,1]$ побудуємо наближення розв'язку рівняння x з точністю 10^{-6} . На цьому проміжку корінь єдиний, оскільки $f(0) = -1$; $f(1) = 1$ і є одна знакозмінна в системі коефіцієнтів. За початкове значення візьмемо x_3 , тому що в цій точці $f(1)f''(1) > 0$, отже умова Фур'є (1.9) виконана. Наближений розв'язок рівняння з точністю 10^{-6} , отриманий за допомогою різних методів, наведений в табл. 1.5.

Таблиця 1.5. Наближені розв'язки рівняння $f(x) \equiv x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$

<i>Метод обчислень</i>	<i>Наближене значення кореня</i>	<i>Кількість ітерацій</i>
Спрощений метод Ньютона	0,86676047	12
Метод Ньютона	0,86676039	4
Метод Стеффенсона	0,86676039	7
Метод січних	0,86676042	3
Метод Ньютона–Шредера (кратні корені)	0,86676039	4
Поліосний метод Ньютона (c=2, d=1)	0,86676037	8
Поліосний метод січних (c=2, d=1)	0,86676032	6
Метод половинного поділу	0,86676037	21

Приклад 1.7. Розглянемо знаходження $\sqrt{2}$ як розв'язку рівняння $f(x) = x^2 - 2$ на відрізку $[0,2]$ з точністю x_0, x_1 і початковим наближенням $x_0 = 1$. Результати наведені у табл.1.6.

Таблиця 1.6. Наближені розв'язки рівняння $f(x) = x^2 - 2$, $x > 0$

<i>Метод обчислень</i>	<i>Наближене значення кореня</i>	<i>Кількість ітерацій</i>
Спрощений метод Ньютона	1,41421339	16
Метод Ньютона (дотичних)	1,41421356	4
Метод Стеффенсона	1,41421356	6
Метод січних	1,41421362	3
Метод Ньютона–Шредера (кратні корені)	1,41421356	4
Полюсний метод Ньютона (c=15, d=3)	1,41421335	6
Полюсний метод січних (c=15, d=3)	1,41421362	6
Метод Ньютона з рухомим полюсом	1,41421356	5
Метод половинного поділу	1,41421365	23

Приклад 1.8. Знайдемо наближене значення кореня рівняння $(x_1, f(x_1))$. Точність $\varepsilon = 10^{-6}$, початкове значення $x_0 = 1$ (табл.1.7).

Таблиця 1.7. Наближені розв'язки рівняння $(x_0, f(x_0))$

<i>Метод обчислень</i>	<i>Наближене значення кореня</i>	<i>Кількість ітерацій</i>
Простий метод Ньютона	розбігається	∞
Метод Ньютона (дотичних)	1,25643120	8
Метод Стеффенсона	1,25643120	8
Метод січних	1,25643134	4
Метод Ньютона–Шредера (кратні корені)	1,25643135	4
Полюсний метод Ньютона (c=15, d=3)	1,25643182	8
Полюсний метод січних (c=15, d=3)	1,25643158	9
Метод Ньютона з рухомим полюсом	1,25643120	6
Метод половинного поділу	1,25643110	20

Приклад 1.9. Порівняємо результати застосування методу Ньютона та його модифікацій для різних рівнянь. Результати наведені в табл. 1.8. Навпроти назви кожного методу вказана кількість ітерацій, яка необхідна для виконання нерівності для нев'язки $|f(x_k)| < 10^{-6}$.

Таблиця 1.8. Застосування модифікацій методу Ньютона для рівнянь $f(x) = 0$

Функція $f(x)$	Корінь x^* (точність 10^{-6})	Початкове наближення x_0	Простий метод	Метод	Метод	Метод	Метод	Полосний метод	Полосний метод	Метод
			Ньютона	Ньютона	Стеффенсона	січних	Ньютона- Шредера (крайні корені)	Ньютона (c=15, d=3)	січних (c=15, d=3)	Ньютона з рухомим полюсом
$x^3 - x + 2$	-1,521379	-2	19	4	9	4	4	5	5	5
		16	3070	14	16743	26	14	24	21	-
		1	∞	39	94	9	39	24	10	8
$(1 - x^2)^2 - x$	0,524888	0	∞	10	3	5	10	7	5	6
		1,3	∞	5	3	5	5	6	7	7
$\frac{1-x}{x} - x$	0,618033	0,8	15	4	5	3	4	5	5	4
		-1,618033	-3	10	4	3	3	4	7	5
$\frac{1}{x} - x$	1,000000	-0,1	1024	7	4	8	7	11	11	6
		1,2	8	3	3	3	3	6	4	3
		10	722	7	7	8	7	8	7	7

Завдання для самостійної роботи

Запитання для контролю

1. Якими способами можна відокремити корені нелінійних рівнянь?
2. Що означає корінь кратності x_1 ? Навести приклади рівнянь, корені яких мають кратність 3, 4, 2.5.
3. В чому полягає лінійна і квадратична збіжність ітераційного процесу?
4. Що означає локальна і глобальна збіжність ітераційного процесу? Навести приклади глобально збіжних ітераційних процесів.
5. Які переваги й недоліки методу половинного поділу?
6. Навести алгоритм методу лінійної інтерполяції. В яких випадках метод глобального збіжний і як в цих випадках вибрати початкову точку?
7. Як оцінити похибку k -го наближення в методі простої ітерації та Ньютона?
8. Пояснити, чому метод Ньютона називають ще методом дотичних?
9. Як вибрати нульове наближення в методі Ньютона і в методі лінійної інтерполяції, якщо $f'(x)f''(x) \neq 0$ при x_0 ?
10. В чому полягає геометрична інтерпретація методу хорд?
11. Як визначити порядок збіжності ітераційного методу?
12. Які засоби розв'язування нелінійних рівнянь передбачено у пакетах Mathematica і Maple?

Задачі

1. Записати метод Ньютона для обчислення:
 - 1) $\sqrt[3]{x}$ в точці $x=100$ з точністю $\varepsilon=10^{-6}$, виконати два наближення;
 - 2) $1/\sqrt{x}$ без операції ділення. Обчислити це значення для $x=2$ і $x=0.2$ з точністю $\varepsilon=10^{-4}$.
2. Довести існування єдиного кореня рівняння $(x-1)^2 e^x - 7 = 0$ та уточнити його з точністю $\varepsilon=10^{-6}$ методами половинного поділу, Ньютона та січних.
3. Якщо в комп'ютері відсутній пристрій для ділення чисел, то для обчислення $1/a$, $a > 0$ можна застосувати метод Ньютона з функцією $f(x) = 1/x - a$. Записати формулу методу Ньютона, дослідити збіжність і вибір початкового значення. Обчислити π^{-1} , e^{-1} і 10^{-1} з точністю 10^{-10} , якщо $\pi \approx 3.141592653$, $e \approx 2.7182818284$.
4. Методом простої ітерації розв'язати рівняння Кеплера $E - \varepsilon \sin E = M$ відносно E , якщо $\varepsilon = 0.1$ і $M = 0.85$. Дослідити збіжність ітераційного процесу.
5. Знайти із точністю 10^{-3} найменших 10 додатних значень x , для яких пряма $y = x$ перетинає графік функції $y = \operatorname{tg} x$. Розв'язок цієї задачі використовується при визначенні максимального навантаження, яке може витримати стержень без зміни форми.
6. Нехай $\varphi \in C^1[a, b]$, $|\varphi'(x)| \geq 1$ при $x \in [a, b]$ і x^* – єдиний корінь рівняння $x = \varphi(x)$ на $[a, b]$. Показати, що метод простої ітерації розбіжний для довільного $x_0 \in [a, b] \setminus \{x^*\}$.

7. Для знаходження простого нуля функції $f \in C^4$ використовується ітераційний процес

$$x_{n+1} = (u_{n+1} + v_{n+1}) / 2,$$

де

$$u_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad v_{n+1} = x_n + \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \quad g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Довести, що для збіжного методу швидкість збіжності – кубічна.

8. Показати, що якщо x^* – корінь рівняння $f(x) = 0$ кратності p , то модифікація методу Ньютона (1.30) має квадратичну збіжність.

9. Показати, що метод Стеффенсона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

володіє квадратичною збіжністю.

10. Методом Ньютона побудувати ітераційний алгоритм обчислення a^{-1} . Довести квадратичну збіжність ітераційного процесу.

11. Застосувати метод Ньютона до рівняння $(x - \pi)^2 + \cos x + 1 = 0$.
Перевірити, що ітерації збігаються лінійно, а не квадратично.
Застосувати модифіковані методи Ньютона (1.30) і (1.31).

12. Показати, що у випадку кратного кореня рівняння $f(x) = 0$ метод Ньютона, застосований для рівняння $F(x) = 0$, $F(x) = f(x) / f'(x)$, має квадратичну швидкість збіжності.

13. Довести, що послідовність $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ збігається до розв'язку x^* рівняння $x = \varphi(x)$ з порядком m , якщо

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \dots = \varphi^{(m-1)}(x^*) = 0, \quad \varphi^{(m)}(x^*) \neq 0.$$

14. Рівняння $f(x) = 0$ з коренем x^* еквівалентне рівнянню $x = x + \lambda(x)f(x)$, де $\lambda(x)$ – довільна неперервна функція, $\lambda(x^*) \neq 0$.
Вибрати $\lambda(x)$ так, щоб послідовність $x_{k+1} = x_k + \lambda(x_k)f(x_k)$ збігалась квадратично. Який метод при цьому одержується?
15. Довести, що послідовність $x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 3ax_k}{3x_k^2 + a}$, $a > 0$, збігається з третім порядком до \sqrt{a} . Покласти $x_0 = 1$, $a = 3$, обчислити x_3 і порівняти зі значенням $\sqrt{3} \approx 1.7320508075$, всі цифри якого правильні.
16. Дослідити швидкість збіжності методу Ньютона для рівняння $x + \sqrt[3]{x^4} = 0$.

Завдання для лабораторної роботи

- I. Відокремити корені рівняння.
- II. Скласти програму для уточнення коренів із заданою точністю вказаним методом або методами.
- III. Порівняти одержаний результат з результатом розв'язання рівняння в одному із математичних пакетів (Mathematica, Maple, MathCad).
- IV. Оформити звіт з аналізом одержаних результатів.

1. $\ln 8x = 9x - 3.1$

2. $0.7e^{-0.59x} - x^2 + 1 = 0$

3. $xe^{x^2} - \sin^2 x + 3\cos x + 5 = 0$

4. $x^3 - \sin^2 x + 3\cos x + 5 = 0$

5. $x = 2.5 + 3.1e^{-x} + 1.4e^{-2x}$

6. $0.9x - 3\sin 1.3x - 0.25 = 0$

7. $2x\sin 0.4x = 0.5x + 1$

8. $4\cos 1.5x = 2.1e^{0.9x} + x$

9. $\arcsin 1.2x = 0.8e^{-2x}$

10. $\ln 5.1x = 0.9\sin x + 2.4$

11. $x^3 - 5\sin 1.1x + 1.2 = 0$

12. $\sqrt[3]{\cos 1.3x + 1.1} = x$

13. $\sqrt[3]{2\sin 1.9x + 1.4} = 0.5x$

14. $\sqrt{2\sin 1.6x + 1.1} = 2x$

15. $\sqrt{0.3\cos 1.5x + 0.8} = 3x$

16. $e^{-x} + 0.25x - 0.98 = 0$

17. $\ln x - 1.23 + 0.61x^2 = 0$

18. $e^x + \cos \pi x - 1 = 0$

19. $x^2 - e^x - 3x + 2 = 0$

20. $\arctg 2.1x - 3x + 1.1 = 0$

21. $(x-1)^2 e^{1.2x} - 0.7 = 0$

22. $x + 1 - e^{\sin x} = 0$

23. $e^{-2x}(x-1) + x^2 = 0$

24. $1 + e^{-2x^2} = e^{2x}$

25. $x + e^{-\frac{1}{1+x^2}} = 2$

2. Алгебраїчні рівняння

2.1. Приклади алгебраїчних рівнянь

Розглянемо модель популяційного спалаху комах [5]

$$u' = ru \left(1 - \frac{u}{q} \right) - \frac{u^2}{1+u^2},$$

де $u(t)$ – щільність популяції, r і q – додатні сталі. Положення рівноваги моделі знаходяться із кубічного рівняння

$$f(u) := r \left(1 - \frac{u}{q} \right) - \frac{u}{1+u^2} = 0.$$

У залежності від значення r , це рівняння може мати 1, 2 або 3 різні додатні корені (рис.2.1).

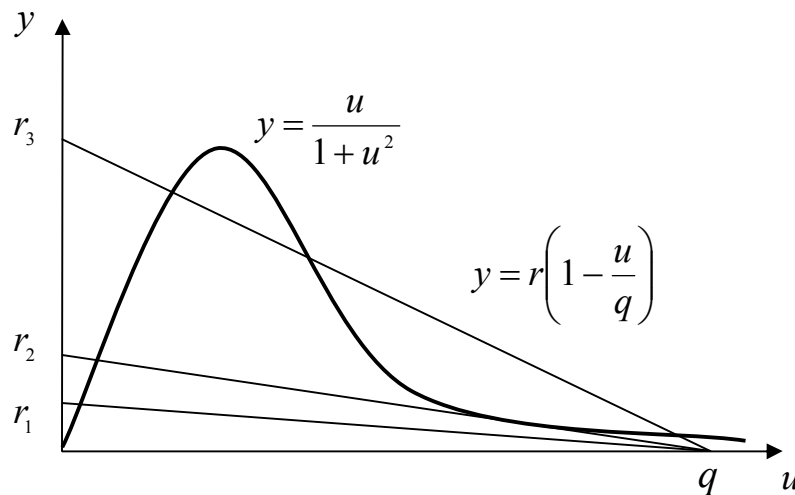


Рис. 2.1. Кількість коренів рівняння $f(u) = 0$ у залежності від значення r

Алгебраїчні рівняння виникають і при проведенні деяких фінансових розрахунків. Наприклад, при обчисленні процентної ставки при певному капіталовкладенні. Нехай деяка фірма закуповує машини, скажімо, на 10000 гривень. Припустимо, що гроші вкладено на 12 місяців по 500 гривень/місяць, а на наступні 12 місяців – по 400 гривень/місяць. Відомо, що машина буде коштувати 2500 гривень у

кінці цього періоду. Розв'язання полягає в наступному: поточна ціна однієї гривні через n місяців складатиме $\frac{1}{(1+s)^n}$, де s – невідома процентна ставка. Тому

$$10000 = \sum_{j=1}^{12} \frac{500}{(1+s)^j} + \sum_{j=13}^{24} \frac{400}{(1+s)^j} + \frac{2500}{(1+s)^{24}}.$$

Звідси отримуємо

$$10000(1+s)^{24} - \sum_{j=1}^{12} 500(1+s)^{24-j} - \sum_{j=13}^{24} 400(1+s)^{24-j} - 2500 = 0$$

– алгебраїчне рівняння порядку 24 відносно $(1+s)$.

Розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами порядку n

$$u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} u' + a_n u = 0,$$

де $u = u(x)$ – невідома функція, будуються у вигляді $u(t) = e^{\lambda t}$.

Значення λ є коренями алгебраїчного рівняння степеня n вигляду

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

яке називається характеристичним.

При знаходженні власних значень квадратної матриці A порядку n також одержуємо алгебраїчне рівняння степеня n

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

де I – одинична матриця.

2.2. Властивості розв'язків алгебраїчних рівнянь

2.2.1. Загальні властивості. Розглянемо задачу про знаходження нулів многочлена з дійсними коефіцієнтами вигляду

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

тобто задачу про знаходження коренів алгебраїчного рівняння

$$P_n(x) = 0. \quad (2.1)$$

Будь-яке алгебраїчне рівняння, степінь якого не перевищує 4, розв'язується в радикалах. Для кубічних рівнянь корені можна записати за допомогою формули Кардано, але при цьому доводиться проводити обчислення з комплексними числами. Корені рівняння (2.1) степеня $n > 4$, як довів Н.Абель в 1826 р., в загальному випадку такого зображення не мають. У частинних випадках, наприклад, $x^n - a = 0$ або $x^{2n} + bx^n + c = 0$ розв'язок можна записати в явному вигляді.

Теорема 2.1 [14]. *Алгебраїчне рівняння степеня n має рівно n коренів, дійсних або комплексних, за умови, що кожен корінь враховується стільки разів, якою є його кратність.* ■

Нагадаємо, що корінь x^* рівняння (2.1) має кратність m , $1 \leq m \leq n$, якщо виконуються умови

$$P_n(x^*) = P_n'(x^*) = \dots = P_n^{(m-1)}(x^*) = 0, \quad P_n^{(m)}(x^*) \neq 0.$$

Корені рівняння (2.1) із дійсними коефіцієнтами комплексно спряжені, тобто $x = \alpha \pm \beta i$, де $i = \sqrt{-1}$, $\alpha, \beta \in R$. Звідси випливає, що для непарного n рівняння (2.1) має хоча б один дійсний корінь.

Для уточнення відокремлених дійсних коренів рівняння (2.1) можна застосувати метод лінійної інтерполяції (1.6), метод Ньютона

(1.22), комбінований метод або інші методи, розглянуті у розділі 1. Наближене значення комплексних коренів обчислюється за допомогою методу Ньютона [17] або інших спеціальних методів [20, 23, 25].

Обчислити значення многочлена $P_n(x)$ можна за схемою Горнера, виконавши n множень і n додавань. Справді, згідно з теоремою Безу для довільного c існують b_0, b_1, \dots, b_{n-1} такі, що

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = (x - c)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + b_n. \quad (2.2)$$

Після множення многочленів у правій частині і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x одержимо:

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1 + b_0c, \dots, b_n = a_n + b_{n-1}c, \quad (2.3)$$

причому $b_n = P_n(c)$. Числа b_0, b_1, \dots, b_n називається коефіцієнтами Горнера.

Якщо відоме значення кореня $x = c$ рівняння (2.1), то із (2.2) випливає, що $b_n = 0$ і на підставі співвідношення (2.3) можна перейти до знаходження коренів многочлена $b_0x^{n-1} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, виділивши лінійний множник $x - c$ згідно з (2.2).

2.2.2. Межі коренів. Розглянемо питання про межі дійсних додатних x_+ і від'ємних x_- коренів рівняння (2.1), коли $a_n \neq 0$. Якщо $a_n = 0$, то $x = 0$ є коренем рівняння і в цьому випадку переходимо до розв'язування рівняння $a_0x^{n-1} + \dots + a_{n-2}x + a_{n-1} = 0$.

Як відомо [8, 14, 23], всі корені рівняння (2.1) лежать у кільці

$$\frac{|a_0|}{A + |a_n|} \leq |x| \leq 1 + \frac{B}{|a_0|}, \quad (2.4)$$

де $A = \max(|a_0|, \dots, |a_{n-1}|)$, $B = \max(|a_1|, \dots, |a_n|)$.

Зауважимо, що можна обмежитись знаходженням верхньої границі R лише для додатних коренів рівняння (2.1). Для цього розглянемо допоміжні алгебраїчні рівняння:

$$x^n P_n(1/x) = 0, \quad P_n(-x) = 0, \quad x^n P_n(-1/x) = 0.$$

Нехай додатні корені рівняння

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0,$$

обмежені зверху числом $R_1 > 0$, тоді, згідно з (2.4) за верхню межу

додатних коренів можна взяти $R_1 = 1 + \frac{A}{|a_n|}$. Отже, $y_+ = x_+^{-1} \leq R_1$.

Таким чином,

$$R_1^{-1} \leq x_+ \leq R_1.$$

Для знаходження меж від'ємних коренів розглянемо многочлени

$P_n(-x)$ і $x^n P_n(-1/x)$. Тоді

$$-R_2 \leq x_- \leq -R_3^{-1},$$

де R_2 і R_3 – нижня і верхня межі коренів рівнянь $P_n(-x) = 0$ і $P_n(-1/x) = 0$ відповідно.

Точніше, порівняно з (2.4), обчислити значення R можна згідно з теоремами Лагранжа або Ньютона.

Теорема 2.2 (Лагранжа, [8, 23]). *Нехай $a_0 > 0$ і a_k ($k \geq 1$) – перший із від'ємних коефіцієнтів многочлена $P_n(x)$, C – найбільша з абсолютних величин від'ємних коефіцієнтів многочлена. Тоді за верхню границю додатних коренів рівняння (2.1) можна взяти число*

$$R = 1 + k \sqrt[k]{\frac{C}{a_0}}. \quad (2.5)$$

Якщо всі $a_k > 0$, то додатних коренів немає. ■

Теорема 2.3 (Ньютона, [8, 23]). Нехай $a_0 > 0$ і для $x = c > 0$ значення $P_n(x)$ та похідних $P'_n(x), \dots, P_n^{(n-1)}(x)$ невід'ємні. Тоді число c можна взяти за верхню межу додатних коренів. ■

Цей результат випливає із формули Тейлора для многочлена

$$P_n(x) = P(c) + P'(c)(x-c) + \frac{P''(c)}{2}(x-c)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Приклад 2.1. Розглянемо рівняння

$$x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6 = 0,$$

коренями якого є числа: $\pm i$, -1 , 2 , 3 . Тут $A = 4$, $B = 6$, $a_0 = 1$, $a_5 = 6$. Згідно з (2.4) додатні корені рівняння знаходяться на проміжку $0.6 \leq x \leq 7$. На підставі теореми Лагранжа $\bar{R} = 1 + \frac{4}{1} = 5$, що точніше порівняно із раніше знайденим значенням $R = 7$.

Для многочленна $P_5(y) = 6y^5 + y^4 + 2y^3 + 2y^2 - 4y + 1$ маємо: $C = 4$, $a_0 = 6$, $k = 4$. Тому $R_1 = 1 + \sqrt[4]{4/6} \approx 1.2$. Отже, додатні корені знаходяться на проміжку $[0.83, 5]$. Застосуємо теорему Ньютона для $C = 4$. Оскільки $P_5(4) = 170$, $P'_5(4) = 369$, $P''_5(4) = 564$, $P'''_5(4) = 588$, $P_5^{(4)}(4) = 384$, $P_5^{(5)}(4) = 511$, то додатні корені при $x > 4$ відсутні.

2.2.3. Кількість дійсних коренів многочлена. Питання полягає в знаходженні на заданому інтервалі кількості коренів рівняння (2.1) або її оцінки. Якщо $P_n(a_1)P_n(b_1) < 0$, то на інтервалі (a_1, b_1) є непарне число коренів із врахуванням їхньої кратності. Якщо ж $P_n(a_2)P_n(b_2) > 0$, то на (a_2, b_2) або немає коренів рівняння (2.1), або є парне число коренів. Ілюстрацію цих висновків показано на рис. 1.1.

Деяку інформацію про кількість додатних і від'ємних коренів можна одержати з наступних теорем.

Теорема 2.4 (Декарта, [8]). *Кількість додатних коренів рівняння (2.1) із врахуванням їх кратності дорівнює числу знакозмін в системі коефіцієнтів*

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

(нульові коефіцієнти не враховуються) або менше його на парне число. ■

Інформацію про кількість від'ємних коренів одержимо, застосувавши теорему Декарта до многочлена $P_n(-x)$.

Необхідну ознаку того, що всі корені дійсні дає теорема Гюа [8].

Теорема 2.5. *Якщо коефіцієнти рівняння (2.1) дійсні і всі його корені дійсні, то*

$$a_k^2 > a_{k-1}a_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad \blacksquare$$

Важливим є наслідок з теореми Гюа.

Наслідок 1. *Якщо для деякого k , $1 \leq k \leq n-1$, виконується нерівність*

$$a_k^2 \leq a_{k-1}a_{k+1},$$

то існує хоча б одна пара комплексно спряжених коренів.

Приклад 2.2. Розглянемо рівняння

$$P_5(x) := x^5 - 2x^4 - 11.25x^3 + 22.5x^2 - 12.25x + 24.5 = 0, \quad (2.6)$$

коренями якого є числа $\pm i$, -3.5 , 2 , 3.5 . Тут $A = 22.5$, $B = 24.5$, $a_0 = 1$, $a_5 = 24.5$. Згідно з (2.4) корені рівняння знаходять в кільці

$$0.02 < (22.5 + 22.5)^{-1} \leq |x| \leq 1 + 24.5 = 25.5.$$

На підставі теореми Лагранжа $\bar{R} = 1 + 12.25 = 13.25$, що точніше, порівняно із вже знайденим значенням $R = 25.5$.

Для многочлена

$$\bar{P}_5(y) = 24.5y^5 - 12.25y^4 + 22.5y^3 - 11.25y^2 - 2y + 1$$

маємо: $C = 12.25$, $a_0 = 24.5$, $k = 1$. Тому $R_1 = 1 + 12.25/24.5 = 1.5$.

Отже, додатні корені знаходять на проміжку $\left(\frac{1}{1.5}, 13.25\right)$ або $(0.66, 13.25)$.

Застосуємо теорему Ньютона для $C = 5$. Тоді $P_5(5) = 994.5 > 0$ і, що нескладно перевірити $P_5^{(k)}(5) > 0$, $k = 1, \dots, 5$. Тому за верхню межу додатних коренів можна взяти $R = 5$.

Для рівняння (2.6) система коефіцієнтів має знаки $+---+--+$. Число знакозмін 4, тому додатних коренів 4, 2 або їх немає. Для многочлена $P_5(-x)$ маємо послідовність знаків $--++++$. Отже, існує один від'ємний корінь. Оскільки $12.25^2 < 22.5 \cdot 22.5$, то з наслідку 1 випливає, що існує одна або дві пари комплексно спряжених коренів. Якщо $x = 3$, то $P_5(3) = -32.5 < 0$, тому рівняння (2.6) має два додатних корені і пару комплексно спряжених коренів.

Точніший результат можна одержати за допомогою системи Штурма [8, 23]. Для многочлена $P_n(x)$ система Штурма будується за таким правилом:

$$Q_0(x) = P_n(x), \quad Q_1(x) = P_n'(x), \quad Q_2(x), \dots, Q_m(x),$$

де многочлен $Q_i(x)$ – остача при діленні $Q_{i-2}(x)$ на $Q_{i-1}(x)$, взята з протилежним знаком; і так доти, доки не дійдемо до $R_m(x) = const$.

Зауважимо, що систему Штурма можна обчислити з точністю до додатного множника. Позначимо через $N(c)$ число змін знаків в системі Штурма при $x = c$, за умови, що нульові елементи цієї системи викреслені.

Теорема 2.4. (Штурма, [8, 23]). *Якщо многочлен $P_n(x)$ не має кратних коренів, $P(a) \neq 0$ і $P(b) \neq 0$, то кількість його дійсних коренів $N(a,b)$ на інтервалі $a < x < b$ дорівнює числу втрачених знакозмін в системі Штурма для $P_n(x)$ при переході від $x=a$ до $x=b$, тобто*

$$N(a,b) = N(a) - N(b). \quad \blacksquare$$

Наслідок 2. *Якщо $P(0) \neq 0$, то число N_+ додатних і кількість N_- від'ємних коренів многочлена $P_n(x)$ відповідно дорівнюють*

$$N_+ = N(0) - N(+\infty), \quad N_- = N(-\infty) - N(0).$$

Наслідок 3. *Для того щоб всі корені многочлена $P_n(x)$, який не має кратних коренів, були дійсними, необхідно і досить, щоб виконувалась умова $N(-\infty) - N(+\infty) = n$.*

Отже, всі корені рівняння $P_n(0) = 0$, $a_0 > 0$, будуть дійсними тоді і тільки тоді, коли:

- 1) система Штурма має максимальне число елементів $n+1$, тобто $m = n$;
- 2) виконується нерівність $Q_k(+\infty) > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), тобто старші коефіцієнти всіх функцій Штурма $Q_k(x)$ повинні бути додатними.

2.3. Метод Ліна

Метод призначений для знаходження дільників довільного степеня заданого многочлена. Розглянемо випадок квадратичних дільників, які використовуються для знаходження пари комплексно спряжених коренів рівняння (2.1) для $n \geq 3$. Справді, якщо $x_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексні корені, то

$$(x - (\alpha - \beta i))(x - (\alpha + \beta i)) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

Зауважимо, що методом Ліна можна знайти шуканий дільник або одержати в підсумку інший дільник, ніж передбачалось.

Наведемо схему ітераційного методу Ліна. Нехай для многочлена

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, n > 2, a_n \neq 0, n \geq 3,$$

потрібно знайти дільник

$$d(x) = x^2 + b_1 x + b_2.$$

Нехай відомо деяке наближення $d_0(x) = x^2 + b_1^{(0)}x + b_2^{(0)}$ цього дільника. Поділимо $P_n(x)$ на $x d_0(x)$. Тоді залишок, у загальному випадку, матиме степінь 2. Поділивши його на коефіцієнти при x^2 одержимо многочлен $d_1(x)$. Аналогічно побудуємо $d_2(x), d_3(x), \dots$. Одержимо послідовність многочленів $d_0(x), d_1(x), \dots$, яка може збігатись до дільника $d(x)$.

При виконанні ділення

$$P_n(x) = x(x^2 + b_1 x + b_2)(C_0 x^{n-3} + C_1 x^{n-4} + \dots + C_{n-4} x + C_{n-3}) + d_0 x^2 + d_1 x + d_2, \quad \text{К}$$

$n > 4$

коєфіцієнти C_0, \dots, C_{n-3} і d_0, d_1, d_2 обчислюється за рекурентними формулами:

$$C_0 = a_0,$$

$$C_1 = a_1 - b_1 C_0,$$

$$C_2 = a_2 - b_1 C_1 - b_2 C_0,$$

.....

$$C_{n-3} = a_{n-3} - b_1 C_{n-4} - b_2 C_{n-5},$$

$$d_0 = a_{n-2} - b_1 C_{n-3} - b_2 C_{n-4},$$

$$d_1 = a_{n-1} - b_2 C_{n-3},$$

$$d_2 = a_n$$

Приклад 2.3. Розглянемо рівняння $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$, коренями якого є $x_{1,2} = \pm i, x_3 = 1, x_4 = 2$. Дільник $x^2 + 1$ відповідає комплексним кореням $x_{1,2} = \pm i$, а $x^2 - 3x + 2$ – дійсним кореням $x_3 = 1$ і $x_4 = 2$.

Використовуючи метод Ліна за k ітерацій при різних початкових наближеннях дільника $d_0(x)$ отримуємо коефіцієнти дільників, близькі до 1 і 0, або до -3 і 2 (табл. 2.1).

Таблиця 2.1. Виділення дільників $x^2 + 1$ і $x^2 - 3x + 2$ методом Ліна

$d_0(x) = x^2 + 0.95 + 0.01$			$d_0(x) = x^2 + 0.992 + 0.01$		
k	b_1	b_2	k	b_1	b_2
0	0.95	0.01	0	0.0992	0.01
5	0,59821009	0,08458426	1	0,98130611	-0,00690839
10	2,38271654	-3,13668566	2	1,00099277	-0,03146165
15	2,05851986	-3,05711547	3	1,04953153	-0,01496346
20	2,00142188	-3,00142188	4	1,04942697	0,06972915
26	2,00017302	-3,00018287			

Зауважимо, що наближення дільника $x^2 + 1$ вдається одержати тільки при досить точному початковому наближенні.

2.4. Метод Мюллера

Метод Мюллера (метод парабол) призначений для знаходження всіх коренів алгебраїчного рівняння (2.1) з комплексними коефіцієнтами. Цей метод нескладно реалізувати на комп'ютері і забезпечити високу швидкість збіжності та досить точно визначати прості корені многочлена. Кратні і близькі по модулю корені знаходяться дещо гірше, ніж прості, але точніше, порівняно з іншими методами. Всі корені многочлена визначаються послідовно один за одним.

У методі січних за двома початковими наближеннями x_0 та x_1 і визначається наступне наближення x_2 як абсциса точки перетину осі x та прямої, що проходить через точки $(x_0, f(x_0))$ і $(x_1, f(x_1))$ (рис. 2.2). У методі Мюллера потрібно задати три початкових наближення x_0, x_1 і x_2 . Наступне наближення x_3 знаходиться як абсциса точки перетину осі x з параболою, що проходить через точки $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ та $(x_2, f(x_2))$ (рис. 2.3).

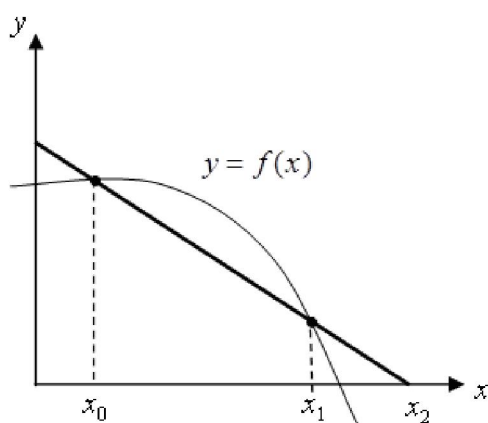


Рис. 2.2. Метод січних

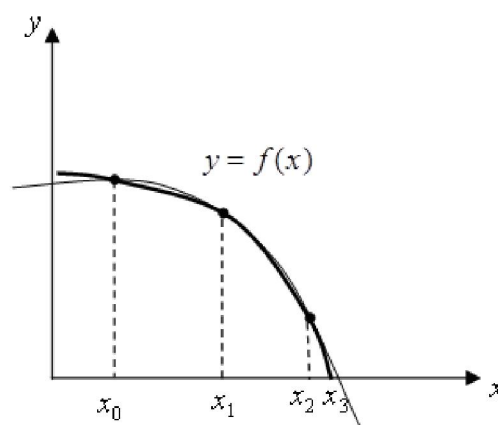


Рис. 2.3. Метод парабол

Побудуємо многочлен другого порядку

$$P(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c,$$

графік якого проходить через точки $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ та $(x_2, f(x_2))$. Невідомі a, b та c знаходяться з умов інтерполяції:

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c,$$

$$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c,$$

$$f(x_2) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c.$$

Із одержаної системи лінійних рівнянь маємо:

$$c = f(x_2),$$

$$b = \frac{(x_0 - x_2)^2[f(x_1) - f(x_2)] - (x_1 - x_2)^2[f(x_0) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)},$$

$$a = \frac{(x_1 - x_2)[f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}.$$

Наступне наближення x_3 знаходимо як корінь рівняння $P(x) = 0$.

Щоб зменшити обчислювальну похибку, яка може виникнути при відніманні досить близьких чисел, застосуємо формулу

$$x_3 = x_2 - \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

За цією формулою ми отримуємо два значення x_3 при різних знаках перед коренем у знаменнику. У методі Мюллера знак вибирають такий самий, як і знак коефіцієнта b . Вибраний таким чином знаменник буде більшим за абсолютною величиною, тому за x_3 буде взятий той з коренів, що знаходиться ближче до x_2 . Отже

$$x_3 = x_2 - \frac{2c}{b + \text{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Далі процедура повторюється вже для наступної трійки x_1, x_2 та x_3 , щоб визначити наближення розв'язку x_4 . Алгоритм завершується

при досягненні заданої точності або вичерпанні максимальної кількості ітерацій. На кожному кроці в цьому методі обчислюється корінь $\sqrt{b^2 - 4ac}$, тому при $b^2 - 4ac < 0$ маємо комплексні корені.

Приклад 2.4. Розглянемо те ж рівняння, що і в прикладі 2.3, $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$, коренями якого є $x_{1,2} = \pm i, x_3 = 1, x_4 = 2$. Використовуючи алгоритм методу Мюллера, з точністю 10^{-5} визначимо корені для різних початкових значень x_0, x_1, x_2 . Результати наведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2. Метод Мюллера для знаходження коренів рівняння

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

$x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 0.7$			$x_0 = 1.5, x_1 = 2.2, x_2 = 2.5$			$x_0 = 0, x_1 = -0.5, x_2 = -0.6$		
k	x_k	$f(x_k)$	k	x_k	$f(x_k)$	k	x_k	$f(x_k)$
3	1.0891314	-0.1774917	3	2.0390849	0.2094740	3	$0.122+0.512 \cdot i$	$1.219-0.887 \cdot i$
4	1.0019232	-0.0038465	4	1.9946630	-0.0264291	4	$0.195+0.762 \cdot i$	$0.989-0.649 \cdot i$
5	0.9999794	0.00004112	5	2.0001175	0.0005849	5	$0.124+1.059 \cdot i$	$0.712+0.452 \cdot i$
6	0.9999999	$3.8417 \cdot 10^{-9}$	6	2.00000002	$1.2341 \cdot 10^{-7}$	6	$-0.015+0.99 \cdot i$	$-0.089-0.051 \cdot i$
7	1	0	7	2	0	7	$-3.1 \cdot 10^{-5}+1.0 \cdot i$	$-0.001+0.002 \cdot i$
						8	$-4.9 \cdot 10^{-7}+0.9 \cdot i$	$-1.4 \cdot 10^{-6}-5.4 \cdot 10^{-6} \cdot i$
						9	i	0

2.5. Особливості розв'язування алгебраїчних рівнянь

2.5.1. Чутливість деяких задач. Алгебраїчне рівняння $(x-1)^{10} = 0$ має кратний корінь $x=1$. Внесемо малу похибку $\varepsilon > 0$ у праву частину рівняння. Змінене рівняння $(x-1)^{10} = \varepsilon$ має корінь $\bar{x} = 1 + \sqrt[10]{\varepsilon}$. Для $\varepsilon = 10^{-10}$ похибка розв'язку складає $\Delta = 10^{-1}$, що в 10^9 раз перевищує збурення вільного члена рівняння. Тут $x=1$ є коренем кратності $m=10$. Для наближення $x = 1 + 10^{-4}$ маємо $f(x) = 10^{-40}$, що вже не попадає в діапазон $[10^{-38}, 10^{38}]$ чисел звичайної точності [4, 6, 12, 18].

Приклад 2.5. Розглянемо приклад Уілкінсона (1963, [21]) про нулі многочлена

$$P_{20}(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + \dots + 20!$$

Очевидно, що $P_{20}(x) = 0$ при $x = 1, 2, \dots, 20$. Внесемо похибку $2^{-23} \approx 10^{-7}$ у коефіцієнт при x^{19} . А саме, замість многочлена $P_{20}(x)$ розглянемо многочлен $\bar{P}_{20}(x) = P_{20}(x) + 2^{-23}x^{19}$. Корені рівняння $\bar{P}_{20}(x) = 0$, обчислені з усіма правильними цифрами, такі:

1.00000 0000	6.00000 6944	10.09526 6145 \pm 0.64350 0904i
2.00000 0000	6.99969 7234	11.79363 3881 \pm 1.65232 9728i
3.00000 0000	8.00726 7603	13.99235 8137 \pm 2.51883 0070i
4.00000 0000	8.91725 0249	16.73073 7466 \pm 2.81262 4894i
4.99999 9928	20.84690 8101	19.50243 9400 \pm 1.94033 0347i

Отже, менші по модулю корені змінилися мало, а більші значно відрізняються від коренів многочлена $P_{20}(x)$, з'явилося 5 пар комплексних коренів. Причина сильної зміни коренів не пов'язана з похибками заокруглення чи алгоритмом, а полягає в чутливості до похибок самої задачі.

2.5.2. Басейни Ньютона. До цих пір розглядалися алгебраїчні рівняння $P_n(x) = 0$, в яких $P_n(x)$ – алгебраїчний многочлен із дійсними коефіцієнтами. Для знаходження комплексних коренів $z = x + iy$ рівняння $P_n(z) = 0$ алгоритм методу Ньютона залишається без змін:

$$z_{k+1} = z_k - \frac{P_n(z_k)}{P_n'(z_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Знаходження комплексних коренів можна звести до розв'язування системи двох алгебраїчних рівнянь, якщо виділити дійсну і уявну частини функції $P_n(z)$. Тоді $P_n(x + iy) = f_1(x, y) + if_2(x, y) = 0$ і одержимо систему нелінійних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0, \\ f_2(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Цікавим питанням є знаходження множини початкових значень для кожного з коренів, для яких метод Ньютона збіжний. Виявляється, що на межах цих областей початкових значень утворюються фрактали – нескінченні самоподібні структури [15]. Оскільки Ньютон розвинув свій метод для алгебраїчних рівнянь, то фрактали такого типу називаються фракталами або басейнами Ньютона. Для рівнянь $z^5 - 1 = 0$ та $z^3 - 1 = 0$ басейни Ньютона показані на рис. 2.4 відповідно зліва і справа.

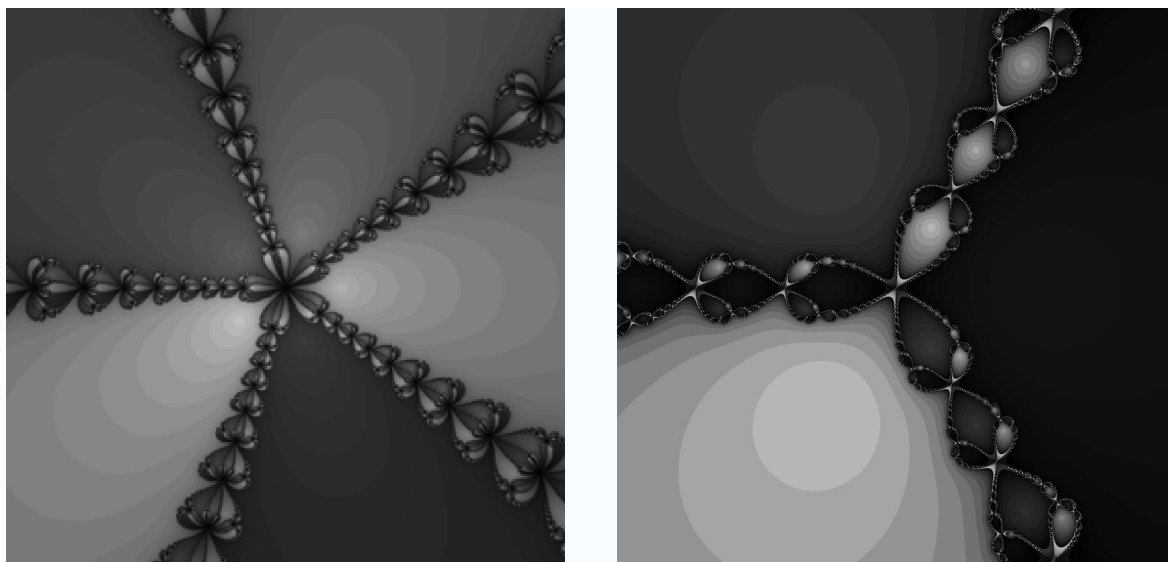


Рис.2.4. Басейни Ньютона. Для початкових значень із областей, зафарбованих темнішими кольорами, відповідає більша кількість ітерацій

Завдання для самостійної роботи

Запитання для контролю

1. Які засоби розв'язування алгебраїчних рівнянь передбачено у пакетах MathCad, Mathematica і Maple?
2. Пояснити, як можна оцінити кількість додатних і від'ємних коренів алгебраїчного рівняння.
3. Навести способи знаходження меж для додатних, від'ємних і комплексних коренів алгебраїчного рівняння степеня n .
4. Пояснити призначення і реалізацію методу Ліна. У чому полягають недоліки цього методу?
5. У чому суть методу Мюллера? Як здійснюється вибір наступної точки у черговій ітерації?
6. Які можуть зустрітись особливості при знаходженні коренів алгебраїчних рівнянь? Як впливають похибки коефіцієнтів на точність коренів?
7. Які особливості застосування методу Ньютона при уточненні комплексних коренів алгебраїчних рівнянь, зокрема, при виборі початкових значень?
8. У чому полягає чутливість алгебраїчного рівняння до зміни коефіцієнтів? Пояснити на прикладі Уілкінсона або на іншому прикладі.

Задачі

1. Відокремити всі дійсні корені алгебраїчних рівнянь:

1) $x^3 - 3x - 2 = 0$,

2) $x^3 - 3x^2 + 2.99x - 0.99 = 0$,

3) $x^3 - 3x^2 + 2.9999x - 0.9999 = 0$.

2. Знайти кількість коренів рівняння $5x^4 - 2x^3 - 33.75x^2 + 45x - 12.25 = 0$ на $(0, \infty)$ і на інтервалі $(-2, 5)$ за допомогою системи Штурма.

3. Використовуючи один з ітераційних методів, знайти з точністю 10^{-3} додатний корінь алгебраїчного рівняння

$$x^3 + 5x^2 - 8x - 48 = 0.$$

Виділити цей корінь за схемою Горнера і знайти інші два корені.

4. Застосувати метод Ньютона для розв'язування рівняння

$$z^5 + (7 - 2i)z^4 + (20 - 12i)z^3 + (20 - 28i)z^2 + (19 - 12i)z + 13 - 26i = 0$$

з початковим значенням $z_0 = 3i$. Точність обчислень 10^{-6} .

5. Побудувати збіжний метод простої ітерації для знаходження кореня рівняння $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$, локалізованого на проміжку $[3, 4]$.

6. Знайти проміжок одиничної довжини, на якому є від'ємний корінь рівняння $x^3 - x^2 + 4 = 0$. За скільки кроків методу половинного поділу можна уточнити цей корінь з точністю 0.1, 0.01 і 10^{-6} ?

7. Перевірити, що метод Ньютона для рівняння $x^3 - 2x + 2 = 0$ зациклюється, якщо $x_0 = 0$.

8. Застосувати метод Ньютона для обчислення комплексних коренів історичного прикладу

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

на якому Валліс застосував метод Ньютона, коли він вперше був опублікований (1671 р.).

Завдання для лабораторної роботи

- I. Знайти межі та оцінити кількість додатних і від'ємних коренів заданого алгебраїчного рівняння.
- II. В одному із математичних пакетів (Mathematica, Maple, MathCad) знайти наближене значення коренів рівняння.
- III. Оформити звіт з аналізом одержаних результатів.

1. $x^5 - 3.98x^4 - 2.94x^3 + 12.41528x^2 - 4.45368x + 18.472608 = 0$

2. $x^5 - 3.96x^4 - 3.0152x^3 + 13.21584x^2 - 4.52672x + 19.329024 = 0$

3. $x^5 - 3.94x^4 - 3.0152x^3 + 13.99976x^2 - 4.61912x + 20.167136 = 0$

4. $x^5 - 3.92x^4 - 3.2008x^3 + 14.76512x^2 - 4.73088x + 20.984832 = 0$

5. $x^5 - 3.9x^4 - 3.32x^3 + 15.51x^2 - 4.862x + 21.78 = 0$

6. $x^5 - 3.88x^4 - 3.4568x^3 + 16.23248x^2 - 5.01248x + 22.550528 = 0$

7. $x^5 - 3.86x^4 - 3.6112x^3 + 16.93064x^2 - 5.18232x + 23.294304 = 0$

8. $x^5 - 3.84x^4 - 3.7832x^3 + 17.60256x^2 - 5.37152x + 24.009216 = 0$

9. $x^5 - 3.82x^4 - 3.9728x^3 + 18.24632x^2 - 5.58008x + 24.693152 = 0$

10. $x^5 - 3.8x^4 - 4.18x^3 + 18.86x^2 - 5.808x + 25.344 = 0$

11. $x^5 - 3.78x^4 - 4.4048x^3 + 19.44168x^2 - 6.05528x + 25.959648 = 0$

12. $x^5 - 3.76x^4 - 4.6472x^3 + 19.98944x^2 - 6.32192x + 26.537984 = 0$

13. $x^5 - 3.74x^4 - 4.9072x^3 + 20.50136x^2 - 6.60792x + 27.076896 = 0$

14. $x^5 - 3.72x^4 - 5.1848x^3 + 20.97552x^2 - 6.91328x + 27.574272 = 0$

15. $x^5 - 3.7x^4 - 5.48x^3 + 21.41x^2 - 7.238x + 28.028 = 0$

16. $x^5 - 3.68x^4 - 5.7928x^3 + 21.80288x^2 - 7.58208x + 28.435968 = 0$

17. $x^5 - 3.66x^4 - 6.1232x^3 + 22.15224x^2 - 7.94552x + 28.796064 = 0$

18. $x^5 - 3.64x^4 - 6.4712x^3 + 22.45616x^2 - 8.32832x + 29.106176 = 0$

19. $x^5 - 3.62x^4 - 6.8368x^3 + 22.71272x^2 - 8.73048x + 29.364192 = 0$

20. $x^5 - 3.6x^4 - 7.22x^3 + 22.92x^2 - 9.152x + 29.568 = 0$

21. $x^5 - 3.58x^4 - 7.6208x^3 + 23.07608x^2 - 9.59288x + 29.715488 = 0$

22. $x^5 - 3.56x^4 - 8.0392x^3 + 23.17904x^2 - 10.05312x + 29.804544 = 0$

23. $x^5 - 3.54x^4 - 8.4752x^3 + 23.22696x^2 - 10.53272x + 29.833056 = 0$

24. $x^5 - 3.52x^4 - 8.9288x^3 + 23.21792x^2 - 11.03168x + 29.798912 = 0$

25. $x^5 - 3.5x^4 - 9.4x^3 + 23.15x^2 - 11.55x + 29.7 = 0$

3. Системи нелінійних рівнянь

3.1. Приклади систем нелінійних рівнянь

Такі системи одержуються при дослідженні на екстремум функції $y = g(x_1, \dots, x_n)$ двох або більше змінних. Якщо існують неперервні частинні похідні, то необхідна умова екстремуму записується у вигляді системи рівнянь

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ще однією математичною задачею, яка зводиться до системи нелінійних рівнянь є знаходження положень рівноваги динамічної системи

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Положення рівноваги є розв'язками системи рівнянь

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

При розв'язуванні задачі про відбиття звукової хвилі на межі поділу двох середовищ одержується система чотирьох нелінійних рівнянь [16]

$$\begin{aligned} a_2 \cos \phi_2 - a_3 \cos \phi_3 + a_1 &= 0, \\ a_2 \sin \phi_2 + a_3 \sin \phi_3 &= 0, \\ \frac{r_1}{p_1}(a_2 \cos \phi_2 - a_1) - \frac{r_2}{p_2} a_3 \cos \phi_3 &= 0, \\ \frac{r_1}{p_1} a_2 \sin \phi_2 + \frac{r_2}{p_2} a_3 \sin \phi_3 &= 0 \end{aligned}$$

відносно невідомих амплітуд a_2 і a_3 та фаз ϕ_2 і ϕ_3 відбитої хвилі і хвилі, яка розповсюджується у другому середовищі. Параметри a_1 , r_1 , r_2 , p_1 і p_2 – вважаються відомими.

3.2. Метод простої ітерації та метод Зейделя

Розглянемо систему n рівнянь з n невідомими x_1, \dots, x_n вигляду

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

де f_i – задані функції, визначені у деякій області $G \subseteq R^n$, в якій існує розв'язок, тобто такий вектор $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$, що $f(x^*) = 0$. Увівши позначення $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, де T – символ транспонування, запишемо систему рівнянь (3.1) у векторній формі

$$f(x) = 0. \quad (3.2)$$

Припустимо, що систему рівнянь (3.2) можна звести до рівносильної системи рівнянь вигляду

$$x = \varphi(x), \quad (3.3)$$

де вектор-функція $\varphi: G \rightarrow G$. Наприклад, система рівнянь (3.2) може бути записана таким чином

$$x = x - \lambda f(x), \quad (3.4)$$

де $\lambda > 0$ – деякий параметр або функція $\lambda = \lambda(x) \neq 0$.

Алгоритм методу простої ітерації, як і у випадку скалярного рівняння, полягає в наступному. Задається початкове наближення $x^{(0)} \in G$. Наступні наближення будуються згідно з формулою

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

В координатній формі метод набуває вигляду

$$x_i^{(k+1)} = \varphi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Умови збіжності методу впливають із теореми про стискаючі відображення [13], аналогічно як для скалярного рівняння (теорема 1.2). Нехай $\|\cdot\|$ – деяка векторна норма, наприклад, $\|x\|_2 = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ або $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Теорема 3.1. *Нехай G – замкнена випукла область в просторі R^n , вектор-функція $\varphi: G \rightarrow G$ і задає стискаюче відображення, тобто існує таке $q \in (0,1)$, що*

$$\|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\| \leq q \|x_2 - x_1\| \quad \forall x_1, x_2 \in G. \quad (3.6)$$

Тоді система рівнянь (3.3) має єдиний розв'язок $x^* \in G$, який для довільного $x^{(0)} \in G$ є границею послідовності наближень (3.5). Причому,

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|. \quad \blacksquare \quad (3.7)$$

Замість умови стиску (3.6) можна перевірити зручнішу умову.

Нехай в G існують неперервні частинні похідні $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$, і для

матриці Якобі

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

виконується нерівність

$$\|J(x)\| \leq q < 1, \quad (3.8)$$

Припускається, що норма матриці у (3.8) узгоджена з відповідною векторною нормою в нерівності (3.7).

У методі Зейделя використовуються вже знайдені компоненти $(k + 1)$ -го наближення і алгоритм набуває вигляду

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} &= \varphi_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}), \\ &\dots \\ x_n^{(k+1)} &= \varphi_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}). \end{aligned}$$

Умови теореми 3.1 забезпечують збіжність і методу Зейделя. Метод має лінійну швидкість збіжності, але вона може бути досить повільною, якщо значення q близьке до 1.

Приклад 3.1. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 0.5 &= 0, \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4 &= 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

яку запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1^2 - 2x_1 + 0.5, \\ \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{1} &= 1. \end{aligned}$$

Із геометричної ілюстрації (рис. 3.1) видно, що система має 2 розв'язки (на рисунку 3.1 – координати точок M_1 і M_2). Оскільки парабола перетинає вісь x_2 у точці $x_2 = 0.5$, то $0.5 < x_2^* < 1.0$. Для $x_1 = -0.4$ відповідна ордината точки на параболі $x_2 = 1.46 > 1$. Тому точка M_1 локалізована в прямокутнику $P = [-0.4, 0] \times [0.5, 1]$.

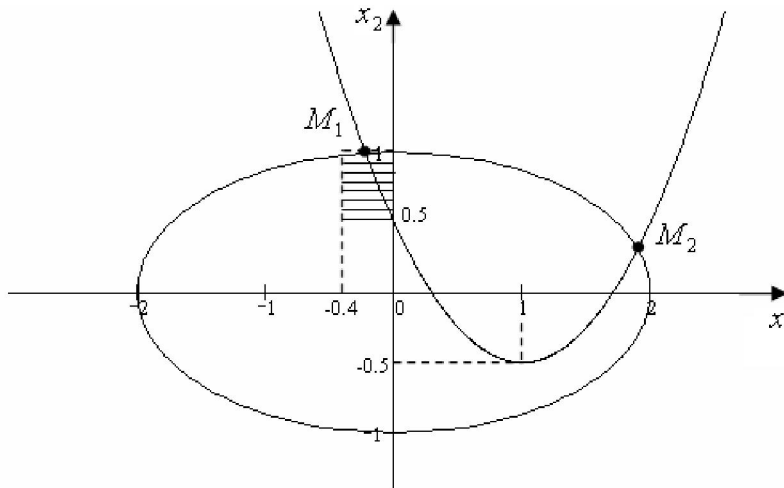


Рис. 3.1. Локалізація точки M_1

Для застосування методу простої ітерації запишемо систему у вигляді

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(x_1^2 - x_2 + \frac{1}{2} \right) \equiv \varphi_1(x_1, x_2),$$

$$x_2 = \frac{1}{8} (-x_1^2 - 4x_2^2 + 8x_2 + 4) \equiv \varphi_2(x_1, x_2).$$

Перевіримо достатню умову стиску відображення $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ у прямокутнику P . Для норми $\|\cdot\|_\infty$ маємо

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right| = |x_1| + 0.5 \leq 0.4 + 0.5 = 0.9 < 1,$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right| = \frac{1}{4} |x_1| + |-x_2 + 1| \leq 0.1 + 0.5 = 0.6 < 1.$$

Отже, $q = \max(0.9, 0.6) = 0.9$ і відображення є стискаючим.

Послідовні наближення для методу простої ітерації

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2} \left((x_1^{(k)})^2 - x_2^{(k)} + \frac{1}{2} \right),$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8} \left(-(x_1^{(k)})^2 - 4(x_2^{(k)})^2 + 8x_2^{(k)} + 4 \right)$$

і методу Зейделя

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2} \left((x_1^{(k)})^2 - x_2^{(k)} + \frac{1}{2} \right),$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8} \left(-(x_1^{(k+1)})^2 - 4(x_2^{(k)})^2 + 8x_2^{(k)} + 4 \right).$$

Критерієм зупинки кожного з алгоритмів візьмемо виконання нерівності

$$\max \left(|x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}|, |x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}| \right) < 0.5\varepsilon,$$

де ε – задана точність. Коефіцієнт 0.5 вибраний із тих міркувань, що в методі простої ітерації згідно з (3.7) точність досягається, якщо

$$\frac{q}{1-q} \max \left(|x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}|, |x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}| \right) < \varepsilon.$$

Результати обчислень з точністю $\varepsilon = 0.001$ наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1. Застосування методу простої ітерації та методу Зейделя для системи рівнянь (3.9)

k	Метод простої ітерації			Метод Зейделя		
	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\ f(x^{(k)})\ $	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\ f(x^{(k)})\ $
0	-0,2	0,75	1,71	-0,2	0,75	1,71
1	-0,105	0,96375	0,273719	-0,105	0,967372	0,246347
2	-0,226363	0,997965	0,034975	-0,228173	0,992960	0,015450
3	-0,223362	0,993593	0,003023	-0,220448	0,993901	0,004406
4	-0,221851	0,993743	0,000823	-0,222652	0,993785	0,001092
5	-0,222263	0,993828	0,000179	-0,222105	0,993814	0,000272
6	-0,222214	0,993806	0,000021	-0,222242	0,993807	0,000068

3.3. Нелінійні методи Якобі та Гаусса–Зейделя

У методі Якобі знаходження розв'язку системи рівнянь (3.1) зводиться до послідовного розв'язування n нелінійних скалярних рівнянь

$$\begin{aligned} f_1(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}) &= 0, \\ f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}) &= 0, \\ &\dots \\ f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k+1)}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для розв'язання скалярних рівнянь можна застосувати будь-який ітераційний метод, не обов'язково один і той же.

На відміну від ітерацій (3.10) у методі Гаусса–Зейделя при розв'язуванні i -го рівняння, $i \geq 2$, використовується вже знайдені наближення $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$:

$$\begin{aligned} f_1(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}) &= 0, \\ f_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}) &= 0, \\ &\dots \\ f_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)}, \dots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k+1)}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.4. Метод Ньютона

3.4.1. Метод Ньютона для системи двох рівнянь. Розглянемо спочатку систему двох рівнянь

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Припустимо, що функції f_1, f_2 – визначені і неперервні разом з першими частинними похідними в області $G \subseteq R^n$ і в деякому околі

точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T \in G$ існує єдиний розв'язок системи (3.12).

Зберігши члени нульового і першого порядку в розкладі функцій f_1

та f_2 за формулою Тейлора у точці $x^{(0)}$, одержимо

$$f_1(x^{(0)}) + \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_1}(x_1 - x_1^{(0)}) + \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_2}(x_2 - x_2^{(0)}) \approx 0, \quad (3.13)$$

$$f_2(x^{(0)}) + \frac{\partial f_2(x^{(0)})}{\partial x_1}(x_1 - x_1^{(0)}) + \frac{\partial f_2(x^{(0)})}{\partial x_2}(x_2 - x_2^{(0)}) \approx 0.$$

Запишемо точні рівності, замінивши $x_i - x_i^{(0)}$ на $\Delta_i^{(0)}$, $i = 1, 2$.

Тоді для $\Delta_1^{(0)}$ і $\Delta_2^{(0)}$ одержимо систему лінійних рівнянь

$$\frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_1} \Delta_1^0 + \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_2} \Delta_2^0 = -f_1(x^{(0)}), \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial f_2(x^{(0)})}{\partial x_1} \Delta_1^0 + \frac{\partial f_2(x^{(0)})}{\partial x_2} \Delta_2^0 = -f_2(x^{(0)})$$

або в матричній формі

$$J(x^{(0)})\Delta^0 = -f(x^{(0)}), \quad (3.15)$$

де

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

Якщо $\det J(x^{(0)}) \neq 0$, то існує єдиний розв'язок $\Delta_1^{(0)}$, $\Delta_2^{(0)}$ системи (3.14) і за перше наближення в методі Ньютона береться

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \Delta_1^{(0)}, \quad x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + \Delta_2^{(0)}.$$

Аналогічно будуються наступні наближення

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де $\Delta^{(k)}$ є розв'язком системи лінійних рівнянь вигляду (3.15)

$$J(x^{(k)})\Delta^{(k)} = -f(x^{(k)}).$$

Приклад 3.2. Застосуємо метод Ньютона для системи рівнянь (3.9), наближений розв'язок якої у прикладі 3.1 знайдений методами простої ітерації та Зейделя. Значення $\Delta_1^{(k)}$ та $\Delta_2^{(k)}$ визначаються із системи лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} 2(x_1^{(k)} - 1)\Delta_1^{(k)} - \Delta_2^{(k)} &= -((x_1^{(k)})^2 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + 0.5), \\ 2x_1^{(k)}\Delta_1^{(k)} - 8x_2^{(k)}\Delta_2^{(k)} &= -((x_1^{(k)})^2 + 4(x_2^{(k)})^2 - 4). \end{aligned}$$

Після чого наступне наближення обчислюється за формулами

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \Delta_1^{(k)}, \quad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \Delta_2^{(k)}.$$

Результати уточнення розв'язку, що відповідає точці M_1 , з початковим значенням $(-0.2, 0.75)$, що є центром прямокутника, в якому локалізована точка M_1 (рис. 3.1), наведені в табл. 3.2.

Таблиця 3.2. Застосування методу Ньютона для системи (3.9)

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\ \Delta^{(k)}\ _\infty$	$\ f(x^{(k)})\ _\infty$
0	-0,2	0,75	0.2824324	1.71
1	-0.2385135	1.0324324	0.0378926	0.3205556
2	-0.2226170	0.9945398	0.0007311	0.0059961
3	-0.2222147	0.9938087	0.0000003	0.0000023
4	-0.2222146	0.9938084		$3.63 \cdot 10^{-12}$

Як видно, вже на четвертій ітерації збігаються шість значущих цифр.

3.4.2. Метод Ньютона для системи n рівнянь. Розглянемо систему рівнянь (3.1). Припустимо, що елементи матриці $J(x)$ неперервні в G і $\det J(x^{(0)}) \neq 0$, де $J(x)$ – матриця Якобі для вектор-функції f , $x^{(0)}$ – початкове наближення із G .

Аналогічно, як і у випадку двох рівнянь перше наближення обчислюється за формулою

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta^{(0)},$$

де Δ_i^0 – розв’язок системи лінійних рівнянь (3.15).

Знаходження одного наближення вимагає обчислення n значень функцій $f_i(x)$ і n^2 частинних похідних $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ та розв’язання системи лінійних рівнянь порядку n .

Наведемо алгоритм методу Ньютона.

Крок 0. Задати початкове наближення $x^{(0)}$, $k := 0$.

Крок 1. Обчислити $f(x^{(k)})$.

Крок 2. Якщо $\det J(x^{(k)}) \neq 0$, то розв’язати систему лінійних рівнянь

$$J(x^{(k)})\Delta^{(k)} = -f(x^{(k)}),$$

інакше припинити ітерації або змінити $x^{(0)}$.

Крок 3. Обчислити наступне наближення $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta^{(k)}$.

Крок 4. Завершити ітераційний процес, якщо виконується заданий критерій точності або вичерпано вказану кількість ітерацій, $x^* := x^{(k+1)}$. Інакше, $k := k + 1$ і повернутись на виконання кроку 1.

Приклад 3.3. Застосуємо метод Ньютона для знаходження одного із розв’язків системи рівнянь

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1, \\x_1^2 + x_2^2 + x_3 &= 0, \\x_1^2 + x_2 + x_3^2 &= 0.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Результати обчислень із точністю 10^{-5} наведені в табл. 3.3.

Таблиця 3.3. Метод Ньютона для системи рівнянь (3.16)

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ \Delta^{(k)}\ _\infty$	$\ f(x^{(k)})\ _\infty$
0	-0,3	-0,3	-0,3	0,45416666	0,73
1	-0,7541667	-0,68125	-0,68125	0,21833125	0,49697048
2	-0,53583542	-0,61972553	-0,61972553	0,04763501	0,05523905
3	-0,48820040	-0,61803527	-0,61803527	0,00232655	0,00227480
4	-0,48587384	-0,61803399	-0,61803399	0,00000557	0,00000541
5	-0,48586827	-0,61803399	-0,61803399		$3,27 \cdot 10^{-11}$

При невдалому виборі початкового наближення метод Ньютона може розбігатись. Наприклад, для початкових значень $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = -1$, $x_3^{(0)} = 1$ метод Ньютона для системи (3.16) є розбіжний (табл. 3.4).

Таблиця 3.4. Розбіжність методу Ньютона для системи рівнянь (3.16)

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ \Delta^{(k)}\ _\infty$	$\ f(x^{(k)})\ _\infty$
0	1	-1	1	1,47886221	3
10	-0,43247362	-0,61803399	1,61803399	1,90263183	2,18703343
20	-1,27288500	-0,61803399	1,61803399	3,62422534	3,62023621
30	-3,33691614	-0,61803399	1,61803399	1,61490717	0,13135009
40	0,77969557	-0,61803399	1,61803399	2,11187511	2,60792518
50	-1,56844339	-0,61803399	1,61803399		4,46001652

3.4.3. Метод Бroyдена. При реалізації методу Ньютона на кожній ітерації обчислюється n значень функцій $f_i(x)$ і n^2 частинних похідних $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, які утворюють матрицю Якобі. Обчислювати тільки n значень функцій $f_i(x^{(k)})$, можна шляхом заміни значень частинних похідних їх різницевиими аналогами вигляду

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \approx \frac{f_i(x + e_j h) - f_i(x)}{h}, \quad (3.17)$$

де h – крок, e_j – вектор, j -та компонента якого дорівнює 1, а всі інші – нулі. Розглянемо аналог методу січних (1.34), який для скалярних рівнянь має швидкість збіжності $(\sqrt{5} + 1)/2$. Наслідком використання формул (3.17) є надлінійна швидкість збіжності замість квадратичної,

тобто $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x^*\|}{\|x^{(k)} - x^*\|} = 0$, де x^* – точний розв'язок системи рівнянь (3.1).

Розглянемо метод, який володіє надлінійною швидкістю збіжності, відомий як метод Бройдена [22, 24]. Кількість арифметичних операцій на кожній ітерації у цьому методі складає $O(n^2)$ і він є найбільш вдалим перенесенням методу січних на системи нелінійних рівнянь.

Задамо початкове наближення $x^{(0)}$ і обчислимо наступне наближення $x^{(1)}$ згідно з методом. У методі січних похідна $f'(x_1)$ заміняється різницевою похідною $(f(x_1) - f(x_0))/(x_1 - x_0)$. Для систем рівнянь така різниця не визначена, оскільки $x^{(1)} - x^{(0)}$ – вектор. Тому замінимо матрицю $J(x^{(1)})$ матрицею A_1 із такою властивістю

$$A_1(x^{(1)} - x^{(0)}) = f(x^{(1)}) - f(x^{(0)}). \quad (3.18)$$

Відомо [24], що матрицю A_1 можна єдиним чином записати у вигляді

$$A_1 = J(x^{(0)}) + \frac{[f(x^{(1)}) - f(x^{(0)}) - J(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)})](x^{(1)} - x^{(0)})}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_2^2}.$$

Тоді наближення $x^{(2)}$ обчислюється за формулою

$$x^{(2)} = x^{(1)} - A_1^{-1} f(x^{(1)}).$$

Аналогічно, замінивши $x^{(0)}$ на $x^{(1)}$, $x^{(1)}$ на $x^{(2)}$ і на місце $A_0 = J(x^{(0)})$, записавши A_1 , побудуємо наближення $x^{(3)}$. У загальному випадку

$$A_i = A_{i-1} + \frac{y_i - A_{i-1} s_i}{\|s_i\|_2^2} s_i^T, \quad (3.19)$$

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - A_i^{-1} f(x^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.20)$$

де $y_i = f(x^{(i)}) - f(x^{(i-1)})$ і $s_i = x^{(i)} - x^{(i-1)}$.

Матрицю A_i^{-1} у формулі (3.20) можна не обчислювати, натомість розв'язувати систему лінійних рівнянь

$$A_i s_{i+1} = -f(x^{(i)}). \quad (3.21)$$

Після чого знаходимо $x^{(i+1)} = x^{(i)} + s_{i+1}$.

Розв'язання системи лінійних рівнянь (3.21), наприклад за методом Гаусса, вимагає $O(n^3)$ арифметичних операцій. Можна також скористатись формулою Шермана–Моррісона [24]

$$(A + xy^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}xy^T A^{-1}}{1 + y^T A^{-1}x}, \quad (3.22)$$

де A – невироджена матриця, вектори x і y такі, що $(A + xy^T)$ – невироджена. Нехай $A = A_{i-1}$, $x = (y_i - A_{i-1} s_i) / \|s_i\|_2^2$ і $y = s_i$. Тоді з (3.19) і (3.22) одержується вираз для оберненої матриці

$$A_i^{-1} = A_{i-1}^{-1} + \frac{(s_i - A_{i-1}^{-1} y_i) s_i^T A_{i-1}^{-1}}{s_i^T A_{i-1}^{-1} y_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.23)$$

де $A_0 = J(x^{(0)})$. Знаходження A_i^{-1} згідно з (3.23) вимагає обчислення добутків і додавання відповідних матриць, тому обчислювальні затрати складають $O(n^2)$ арифметичних операцій.

3.5. Комбіновані методи

У таких методах здійснюється ітерація (зовнішня) одним із методів, а уточнення знайдених значень однією або невеликим числом ітерацій – іншим методом.

3.5.1. Ітерації Зейделя-Ньютона. Зовнішні ітерації виконуються методом Зейделя, а для знаходження внутрішніх ітерацій $x_i^{(k+1)}$ застосовується метод Ньютона. Найчастіше виконується одна ітерація з початковим значенням $x_i^{(k)}$. Тоді для $x_i^{(k+1)}$ маємо рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})(x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}) &= -f_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}) &= -f_i(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad (3.24) \\ i &= 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Нехай $n = 2$. Тоді система (3.24) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})(x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}) &= -f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}), \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)})(x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}) &= -f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}). \end{aligned}$$

3.5.2. Ітерації Ньютона-Зейделя. Зовнішні ітерації будуються за методом Ньютона, а внутрішні – за методом Зейделя. Запишемо метод Ньютона для системи рівнянь n рівнянь:

$$J(x^{(k)})\Delta^{(k)} = -f(x^{(k)}), \quad \Delta^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}, \quad (3.25)$$

де $J(x)$ – матриця Якобі, $x = (x_1, x_2)$.

Нехай $n = 2$. Система (3.25) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^{(k)})\Delta_1^{(k)} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^{(k)})\Delta_2^{(k)} &= -f_1(x_1^{(k)}), \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^{(k)})\Delta_1^{(k)} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^{(k)})\Delta_2^{(k)} &= -f_2(x_1^{(k)}). \end{aligned}$$

Щоб розв'язати її методом Зейделя задамо в першому рівнянні $\Delta_2^{(k)} = 0$, а $(k+1)$ -е наближення знайдемо із системи

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^{(k)})\Delta_1^{(k)} &= -f_1(x^{(k)}), \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^{(k)})\Delta_1^{(k+1)} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^{(k)})\Delta_2^{(k+1)} &= -f_2(x^{(k)}). \end{aligned}$$

3.6. Градієнтні методи

3.6.1. Методи градієнтного та покординатного спуску.

Розглянемо систему нелінійних рівнянь

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.26)$$

де $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$, $f_i \in C_i^1(G)$. Знаходження наближеного розв'язку методом простої ітерації або методом Зейделя вимагає зведення системи рівнянь до вигляду

$$x_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

так, щоб $\varphi: G \rightarrow G$ і виконувалась умова (3.8). Досягнути цього вже при $n = 2$ буває досить складно. При цьому збіжність методів тільки лінійна. Метод Ньютона має квадратичну швидкість збіжності, але характер її локальний. Тобто метод збіжний для початкового

наближення, близького до точного розв'язку. Глобальної збіжності можна досягнути, якщо замінити розв'язування системи рівнянь (3.26) оптимізаційною задачею

$$\Phi(x) \rightarrow \min, \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^n f_i^2(x). \quad (3.27)$$

Нехай система (3.26) має розв'язок $x^* \in G$. Оскільки $\Phi(x) \geq 0$, то мінімум функції Φ досягається, коли $f_i(x) = 0$ і $x = x^*$ є розв'язком системи рівнянь (3.26). Навпаки, якщо $f_i(x^*) = 0$, $i = 1, \dots, n$, то $\Phi(x^*) = 0$ і x^* – точка мінімуму.

Послідовність наближень в градієнтних методах будується за формулою

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k \rho^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.28)$$

де вектор $\rho^{(k)}$ задає напрям мінімізації, а коефіцієнт α_k – величину кроку мінімізації. Отже, на кожній ітерації потрібно вибрати напрям $\rho^{(k)}$ і крок $\alpha_k > 0$ мінімізації. Найшвидше функція спадає в напрямі, протилежному до градієнта функції в цій точці. Тому в методі найшвидшого спуску за напрям береться вектор

$$\rho^{(k)} = -grad \Phi(x^{(k)}), \quad (3.29)$$

де $grad f(x) = \left(\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_n} \right)^T$. Оптимальною величиною кроку є

таке α_k , при якому $\Phi(x^{(k)} - \alpha_k \rho^{(k)})$ досягає найменшого значення.

Тобто

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \rho^{(k)} \quad (3.30)$$

є точкою мінімуму скалярної функції $F(\alpha) = \Phi(x^{(k)} - \alpha_k \rho^{(k)})$. Із
необхідної умови екстремуму скалярної функції $F(\alpha)$ випливає, що
 $\alpha = \alpha_k$ є розв'язком рівняння

$$F'(\alpha) = 0. \quad (3.31)$$

Отже, ітерації в методі найшвидшого спуску виконуються згідно
з рекурентною формулою (3.30), де вектор $\rho^{(k)}$ визначений рівністю
(3.29), а коефіцієнт α_k є розв'язком рівняння (3.31). Геометрична
ілюстрація показана на рис. 3.2.

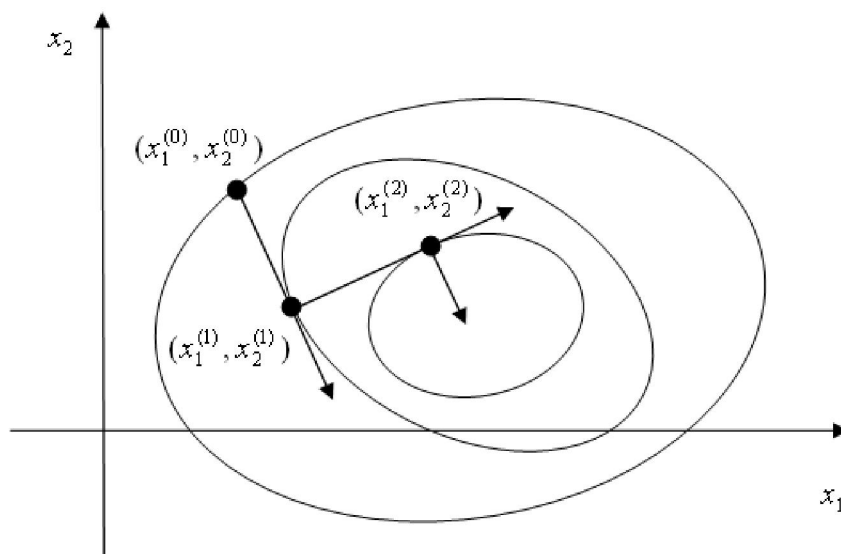


Рис. 3.2. Ілюстрація методу найшвидшого спуску

У деяких випадках, аналогічно як для спрощеного методу
Ньютона, множник α_k береться одразу досить малим і сталим.
Множник α_k можна зменшувати, наприклад удвічі, при переході до
наступного кроку, якщо виконується умова релаксації
 $\Phi(x^{(k)} + \alpha_k \rho^{(k)}) < \Phi(x^{(k)})$.

Критерієм зупинки ітераційного процесу може бути виконання нерівності $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$, де ε – задана точність, або $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| / \|x^{(k)}\| \leq \delta$, або малість нев'язки $|\Phi(x^{(k+1)})|$.

У методі покоординатного спуску задається початкове наближення $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ і мінімізується функція Φ у напрямі x_1 при фіксованих інших аргументах. Відтак мінімізація відбувається в точці $(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ у напрямі x_2 і т.д. Цикл завершується мінімізацією по x_n в точці $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{n-1}^{(1)}, x_n^{(0)})$. Наступний цикл ітерацій розпочинається з точки $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$.

Такий ітераційний процес для лінійної системи $Ax = b$ з додатно визначеною матрицею A реалізується за допомогою методу Зейделя. Процес циклічно повторюється. Послідовність змінних, за якими здійснюється покоординатний спуск, може змінюватись в кожному з циклів. Доцільно обирати напрямок уздовж тієї осі координат, яка відповідає максимальній за абсолютною величиною частинній похідній функції $\Phi(x)$ у відповідній точці. Зокрема, номер чергової координати, за якою здійснюється спуск може вибиратись випадково. У цьому випадку кажуть про *випадковий покоординатний спуск*.

3.6.2. Обчислення параметра спуску. У кожному з методів спуску виникає задача мінімізації функції однієї змінної. За одним із способів за наближене значення α_k береться абсциса точки перетину дотичної до кривої

$$y = F_k(\alpha) = \Phi(x^{(k)} - \alpha \cdot \text{grad} \Phi(x^{(k)}))$$

у точці $(0, F_k(0))$ з віссю α . Тобто значення, одержане на першій ітерації методу Ньютона з початковим значенням $\alpha_0 = 0$. У підсумку маємо

$$\alpha_k \approx -\frac{F_k(0)}{F'_k(0)} = \frac{\Phi(x^{(k)})}{\sum_{v=1}^n \left(\frac{\partial \Phi(x^{(k)})}{\partial x_v} \right)^2}. \quad (3.32)$$

Тоді послідовні наближення у методі градієнтного спуску обчислюються за формулою

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\Phi(x^{(k)})}{\sum_{v=1}^n \left(\frac{\partial \Phi(x^{(k)})}{\partial x_v} \right)^2} \text{grad} \Phi(x^{(k)}).$$

Знайдене згідно з (3.32) значення α_k можна уточнити. За відомим α_k обчислимо

$$F_k\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) = \Phi\left(x^{(k)} - \frac{\alpha_k}{2} \cdot \text{grad} \Phi(x^{(k)})\right),$$

$$F_k(\alpha_k) = \Phi\left(x^{(k)} - \alpha_k \cdot \text{grad} \Phi(x^{(k)})\right).$$

За значеннями функції $F_k(\alpha)$ у точках $\alpha = 0, \frac{\alpha_k}{2}$ і α_k побудуємо інтерполяційний многочлен

$$L_2(\alpha) = \frac{1}{\alpha_k^2} (F_k(0)(2\alpha - \alpha_k)(\alpha - \alpha_k) - 4F_k\left(\frac{\alpha_k}{2}\right)(\alpha - \alpha_k)\alpha + F_k(\alpha_k)(2\alpha - \alpha_k)\alpha).$$

Тоді уточнене значення $\tilde{\alpha}_k$ знаходиться із умови $L_2'(\tilde{\alpha}_k) = 0$.

Оскільки

$$L'_2(\alpha) = \frac{1}{\alpha_k^2} \left(F_k(0)(4\alpha - 3\alpha_k) - 4F_k\left(\frac{\alpha_k}{2}\right)(2\alpha - \alpha_k) + F_k(\alpha_k)(4\alpha - \alpha_k) \right),$$

то одержимо

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{3F_k(0) - 4F_k\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) + F_k(\alpha_k)}{4\left(F_k(0) - 2F_k\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) + F_k(\alpha_k)\right)}.$$

3.6.3. Оцінка градієнтних методів та їх модифікація.

Перевагою градієнтних методів є глобальна збіжність. Можна довести, що процес градієнтного спуску приведе до однієї з точок мінімуму функції із довільної початкової точки. Якщо знайдений таким чином мінімум відповідає мінімуму функції $\Phi(x)$, то він буде розв'язком системи нелінійних рівнянь. Недоліком цих методів є повільна збіжність. Показано, що швидкість збіжності сповільнюється при наближенні до екстремальної точки. Градієнтний метод не дає бажаного результату, якщо $grad\Phi(x) = 0$ для деякого k [1, 9].

Доцільним є застосування гібридних алгоритмів: спочатку застосовується градієнтний метод, а в малому околі точки мінімуму розв'язок уточнюється, наприклад, методом Ньютона, який володіє квадратичною збіжністю. Розроблено ряд методів розв'язування екстремальних задач, які поєднують в собі низькі вимоги щодо вибору початкової точки $x^{(0)}$ і високу швидкість збіжності. До таких методів, які називаються *квазіньютонівськими*, відносяться, зокрема, *метод змінної метрики* (Девіда–Флетчера–Пауелла), симетричний і додатно визначений методи січних, метод спряжених градієнтів.

Якщо функції $f_i(x)$ недиференційовні, то потрібно відмовитись від використання похідних або їх апроксимації. У цьому випадку застосовуються методи прямого пошуку (циклічного покоординатного спуску, Хука і Джівса, Розенброка [1, 9]).

Завдання для самостійної роботи

Запитання для контролю

1. Пояснити реалізацію методів простої ітерації та Зейделя для системи нелінійних рівнянь. У чому перевага програмування методу Зейделя?
2. Які достатні умови збіжності методу простої ітерації? Як перевірити досягнення заданої точності ε на $(k + 1)$ -й ітерації?
3. Пояснити алгоритми нелінійних методів Якобі і Гаусса–Зейделя, в яких скалярні рівняння розв'язуються методом Ньютона.
4. Пояснити реалізацію методу Ньютона для системи n нелінійних рівнянь із n невідомими. Чому зростає складність алгоритму зі зростанням n ?
5. Які переваги реалізації методу Бroyдена порівняно з методом Ньютона? Сформулювати кроки реалізації цього методу.
6. Порівняти складність методів Ньютона і Бroyдена за кількістю обчислень значень функції на одній ітерації.
7. У чому відмінність для системи нелінійних рівнянь ітерацій Ньютона–Зейделя від ітерації Зейделя–Ньютона?
8. Проілюструвати методи градієнтного і покоординатного спуску при розв'язуванні системи нелінійних рівнянь.
9. Яка геометрична ілюстрація методу Ньютона для системи двох нелінійних рівнянь?
10. Які ресурси для розв'язування систем нелінійних рівнянь є в комп'ютерних системах Mathematica, Maple, MathCad?

Задачі

1. Коефіцієнти A_1, A_2 і вузли x_1 і x_2 двоточнової квадратурної формули Гаусса знаходяться із системи рівнянь

$$A_1 + A_2 = 2,$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 = 0,$$

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 = \frac{2}{3},$$

$$A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 = 0.$$

Розв'язати систему рівнянь за допомогою методу Ньютона, виконавши 2–5 ітерацій з початковим значенням $A_1 = A_2 = 0.8$, $x_1 = -x_2 = 0.5$. Порівняти із точним розв'язком: $x_1 = -x_2 = 1/\sqrt{3}$, $A_1 = A_2 = 1$.

2. Система рівнянь

$$x^4 + xy^3 + y^4 = 1,$$

$$x^2 + xy - y^2 = 1$$

має 4 розв'язки. Одержати наближений розв'язок системи в околі точки $(0.9, 0.6)$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ методом простої ітерації і методом Зейделя. Проаналізувати збіжність методів для таких перетворених систем: $x = (1 - xy^3 - y^4)^{1/4}$, $y = (x + \sqrt{5x^2 - 4})/2$

і $x = (1 - xy^3 - y^4)^{1/4} / x^3$, $y = (x^2 + xy - 1) / y$.

Побудувати наближений розв'язок цієї ж системи методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

3. З точністю $\varepsilon = 10^{-6}$ розв'язати систему рівнянь

$$x = 0.1x^2 + \sin y,$$

$$y = 0.1y^2 + \cos x,$$

де $x \in [0.5, 1]$, $y \in [0.5, 1]$. Застосувати метод простої ітерації та Ньютона. Дослідити збіжність методу простої ітерації в нормі $\|\cdot\|_1$ або $\|\cdot\|_\infty$.

4. Методом Ньютона розв'язати систему нелінійних рівнянь

$$x_1^3 + x_1^2 x_2 - x_1 x_3 + 6 = 0,$$

$$e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0,$$

$$x_2^2 - 2x_1 x_3 = 4.$$

з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$ і $\varepsilon = 10^{-6}$. Початкове наближення $x^{(0)} = (-1, -2, 1)^T$.

5. Який результат одержиться при застосуванні методу Ньютона до системи лінійних рівнянь $Ax = b$ із невиродженою матрицею A ?

7. Методом Ньютона із точністю 0.001 знайти наближений додатний розв'язок системи рівнянь

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

$$2x^2 + y^2 - 4z^2 = 0,$$

$$3x^2 - 4y^2 + z^2 = 0.$$

8. Нелінійна система рівнянь

$$3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 0.5 = 0,$$

$$x_1^2 - 625x_2^2 - 0.25 = 0,$$

$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + (10\pi - 3)/3 = 0$$

має вироджений якобіан для точного розв'язку. Застосувати метод Ньютона з початковим значенням $x^{(0)} = (1, 1, -1)^T$. Проаналізувати швидкість збіжності. Чи буде вона квадратичною?

9. Нехай y системі рівнянь $f(x) = 0$ вектор-функція $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Розглянути ітераційний метод

$$\frac{1}{\tau}(x^{(k+\frac{1}{2})} - x^{(k)}) + f_1(x^{(k+\frac{1}{2})}) + f_2(x^{(k)}) = 0,$$

$$\frac{1}{\tau}(x^{(k+1)} - x^{(k+\frac{1}{2})}) + f_1(x^{(k+\frac{1}{2})}) + f_2(x^{(k+1)}) = 0,$$

який ґрунтується на послідовному розв'язування двох нелінійних систем рівнянь.

10. Написати програму розв'язування системи нелінійних рівнянь шляхом її зведення до мінімізації суми квадратів функцій, які задають цю систему. Тестом для програми може бути система рівнянь

$$x^2 - y^2 - 1 = 0,$$

$$x^3 y^2 - 1 = 0$$

з початковою точкою $(1.2, 0.7)$ або $(0.12, 0.01)$.

11. Методом Ньютона і нелінійним методом Якобі або Гаусса–Зейделя знайти наближений розв'язок систем рівнянь:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

і

$$x^2 - y^2 - y = 0$$

$$10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0,$$

$$8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0,$$

$$2x_2x_3 + 1 = 0,$$

із точністю 10^{-3} і 10^{-6} . Порівняти швидкість збіжності ітераційних методів.

12. З точністю $\varepsilon = 10^{-6}$ розв'язати систему рівнянь

$$\begin{aligned}x &= 0.1x^2 + \sin y, \\y &= 0.1y^2 + \cos x,\end{aligned}$$

де $x \in [0.5, 1]$, $y \in [0.5, 1]$. Застосувати метод простої ітерації та Ньютона. Дослідити збіжність методу простої ітерації в нормах $\|\cdot\|_1$ або $\|\cdot\|_\infty$.

Завдання для лабораторної роботи

- I. Відокремити розв'язки систем.
- II. Скласти програму для уточнення розв'язків із заданою точністю вказаним методом або методами.
- III. Порівняти одержаний результат із результатом розв'язування системи рівнянь в одному із математичних пакетів (Mathematica, Maple, MathCad).
- IV. Оформити звіт з аналізом одержаних результатів.

1. $\sin(x_1 + 1) - x_2 = 1.2,$
 $2x_1 + \cos x_2 = 2.$

8. $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0,$
 $x_1^3 x_2^2 - 1 = 0$

2. $\ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1 x_2) = \ln 2 + \ln \pi,$
 $e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1 x_2) = 0.$

9. $\cos(x_1 - 1) + x_2 = 0.5,$
 $x_1 - \cos x_2 = 3.$

3. $5x_1^2 - x_2^2 = 0,$
 $x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0.$

10. $x_1^3 - x_2^3 + 0.1 = 0,$
 $x_1 x_2 - 0.95 = 0$

4. $4x_1^2 - 20x_1 + 0.25x_2^2 + 8 = 0,$
 $0.5x_1 x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0.$

11. $\sin(x_1 - x_2) - x_1 x_2 = -1,$
 $x_1^2 - x_2^2 = 0.75$

5. $x_1 = 0.1 \sin x_1 + 0.3 \cos x_2 - 0.4,$
 $x_2 = 0.2 \cos x_1 - 0.1 \sin x_2 - 0.3$

12. $x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0,$
 $x_1 x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0.$

6. $\sin(x_1 + 0.5) - x_2 = 1,$
 $\cos(x_2 - 2) + x_1 = 0.$

13. $7x_1^3 - 10x_1 - x_2 - 1 = 0,$
 $8x_2^3 - 11x_2 + x_1 - 1 = 0.$

7. $x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12,$
 $(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25.$

14. $\cos x_1 + x_2 = 1.5,$
 $2x_1 - \sin(x_2 - 0.5) = 1.$

$$15. \quad \begin{aligned} \operatorname{tg}(x_1 x_2 + 0.1) &= x_1^2, \\ x_1^2 + 2x_2^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$16. \quad \begin{aligned} 20 \ln(x_1 - x_2) - x_1 - x_2 - 6 &= 0, \\ 20 \sin(0.7x_1 - 0.7x_2) + 7x_1 + 7x_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$17. \quad \begin{aligned} \ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1 x_2) &= \ln 2 + \ln \pi, \\ e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1 x_2) &= 0. \end{aligned}$$

$$18. \quad \begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) &= 0.5, \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 &= -1.06, \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 &= (3 - 10\pi)/3. \end{aligned}$$

$$19. \quad \begin{aligned} 10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 &= 0, \\ 8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 &= 0, \\ 2x_2 x_3 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

$$20. \quad \begin{aligned} \sin(4\pi x_1 x_2) - 2x_2 - x_1 &= 0, \\ \frac{4\pi - 1}{4\pi} (e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 &= 0. \end{aligned}$$

$$21. \quad \begin{aligned} 3x_1^2 - x_2^2 &= 0, \\ 3x_1 x_2^2 - x_1^3 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

$$22. \quad \begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 &= 0, \\ 2x_1 + x_2^2 - 6 &= 0. \end{aligned}$$

$$23. \quad \begin{aligned} \sin(x_1 + 2) - x_2 &= 1.5, \\ \cos(x_2 - 2) + x_1 &= 0.5. \end{aligned}$$

$$24. \quad \begin{aligned} 15x_1 + x_2^2 - 4x_3 &= 13, \\ x_1^2 + 10x_2 - x_3 &= 11, \\ x_2^3 - 25x_3 &= -22. \end{aligned}$$

$$25. \quad \begin{aligned} x_1^2 + x_2 - 37 &= 0, \\ x_1 - x_2^2 - 5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Перелік посилань

1. Банди Б. Методы оптимизации. Вводной курс. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ, 2003. – 632 с.
3. Бахвалов Н.С., Лапин Е.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 2000. – 190 с.
4. Бігун Я.Й., Сергєєва Л.М. Числові методи. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2008. – 152 с.
5. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 400 с.
6. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2005. – 840 с.
7. Гаврилюк І.С., Макаров Л.В. Методи обчислень. – К.: Вища школа, 1995. – Ч.1. – 456 с.
8. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
9. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решение нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 367 с.
10. Дьяконов В.П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления. – М.: ДМК Пресс, 2008. – 576 с.
11. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
12. Кнут Д. Искусство программирования. – М.; С-Пб.: Вильямс. – Т.2, 2002. – 820 с.
13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функцио-нального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.
14. Курош А.Г. Алгебраические уравнения произвольных степеней. – М.: Наука, 1983. – 332с.
15. Маценко В.Г. Комп'ютерна графіка: Навчальних посібник. – Чернівці: Чернівецький національний університет, 2009. – 343 с.
16. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладной математики. Алгебра, приближение функций, обыкновенные дифференциальные уравнения. – К.: Наук. думка, 2007. – 552 с.
17. Островский А.М. Решение уравнений и систем уравнений. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 219 с.
18. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 430с.
19. Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений. – М.: Мир, 1985. – 464 с.
20. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. – К.: Видавнична група ВНУ, 2006. – 480 с.
21. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 279 с.
22. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. – М.: Мир, 1986. – 448 с.
23. Цегелик Г.Г. Чисельні методи. – Львів: Видавничий центр Львівського національного університету, 2004. – 407 с.
24. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis. – London: PWS Pub. Co, 2002. – 840 p.
25. MsNamee J.M. Numerical Methods for Roots of Polynomials. – Part 1. – Elsevier Science, 2007. – 356 p.

Навчальне видання

**Ярослав Йосипович Бігун
Інеса Володимирівна Березовська**

**ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ**

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск *Черевко І.М.*

Комп'ютерний набір та літературне редагування авторів

Підписано до друку 06.05.2011. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Друк різнографічний. Умов.-друк. арк. 5,7.
Обл.-вид. арк. 6,1. Тираж 100. Зам. Н-244.

Видавництво та друкарня Чернівецького національного університету.
58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 891 від 08.04.2002.