МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. В. Третиник, Н. Д. Любашенко

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ:
Частина 1. Чисельні методи алгебри

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 113 «Прикладна математика»,
спеціалізацією «Наука про дані (Data Science) та математичне моделювання»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Методи обчислень: Частина 1. Чисельні методи алгебри [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика», спеціалізації «Наука про дані (Data Science) та математичне моделювання» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В. В. Третиник, Н. Д. Любашенко. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,94 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 138 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 25.04.2019 р.) за поданням Вченої ради факультету прикладної математики (протокол № 9 від 22.04.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ: ЧАСТИНА 1. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ АЛГЕБРИ

Укладачі: *Третиник Віолета Вікентіївна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Любашенко Наталія Дмитрівна, ст. викладач

Відповідальний редактор: *Сирота С.В.*, канд. техн. наук, доц.

Рецензенти: *Скляренко О.В.,* канд. фіз.-мат. наук, доц.
Жабіна В.В., канд. техн. наук, доц.

Посібник призначений для використання студентами вузів зі спеціальності «Прикладна математика». Матеріал викладено у зрозумілій та доступній формі. У кінці кожного розділу наведені контрольні питання, тести для самоконтролю, приклади розв’язання задач, задачі для самостійного розв’язання. Щоб підготувати студентів до самостійної наукової роботи у додатку посібника автори пропонують перелік творчих проектів. З точки зору доцільності використання комп’ютера для розв’язання реальних задач з методів обчислень у додатку дається огляд комп’ютерних пакетів для розв’язування задач чисельними методами.

Викладений матеріал відповідає діючим стандартам та навчальним програмам з дисципліни «Методи обчислень-1» для природничих спеціальностей.

Стислий Зміст

ЗМІСТ

Передмова

Цей навчальний посібник написано на основі лекцій та практичних занять, які читають студентам денної форми навчання спеціальності 113 «Прикладна математика» освітньо-кваліфікаційного рівня “Бакалавр”.

Структура посібника така, що дозволяє студенту вивчати методи обчислень як самостійно, так і під керівництвом викладача.

Кожний розділ містить теоретичний матеріал, який викладено у зрозумілій та доступній формі. Основні поняття, терміни та визначення виділені жирним шрифтом або курсивом. У кінці кожного розділу наведені контрольні запитання та тести для самоконтролю (з відповідями). Контрольні питання дають огляд основних тем, що вивчались у розділі і є важливими для засвоєння. Виконання тестів корисне для самоперевірки знань студентів. Запропоновані задачі для самостійного розв’язання (26 варіантів до кожного завдання) вчать студентів застосовувати методи обчислень на практиці. Наведені зразки виконання завдань допомагають студентам самостійно виконувати свій варіант, якщо виникають труднощі. Щоб підготувати студентів до самостійної наукової роботи у додатку посібника автори пропонують перелік творчих проектів. Проекти покликані проявити у студентів інтерес до предмету та розуміння важливості застосування методів обчислень у різних сферах науки та техніки. Крім запропонованих десяти проектів, студенти можуть обирати свою задачу, керуючись своїм досвідом або інтересами. З точки зору доцільності використання комп’ютера для розв’язання реальних задач з методів обчислень у додатку дається огляд комп’ютерних пакетів для розв’язування задач чисельними методами. Автори залишають викладачам можливість керувати студентами і визначати степінь залучення комп’ютера на практичних заняттях: чи давати можливість використовувати готові пакети програм, чи розробляти самостійно програмне забезпечення для тієї чи іншої задачі. Але перш ніж використовувати комп’ютер студент повинен аналітично розв'язати задачу, так би мовити «пропустити задачу через себе»: зрозуміти всі кроки алгоритму, обмеження методу, виконати декілька ітерацій, проаналізувати умови стійкості, одержаний результат. Саме за такою методикою рекомендується проводити практичні заняття з методів обчислень.

Розділ 1. Вступ

1.1 Особливості чисельних методів

Прості математичні задачі, що вивчаються в курсі вищої математики, в багатьох випадках допускають можливість одержання точних аналітичних розв'язків. Реальні інженерні задачі, що призводять до складних математичних моделей великої розмірності, вимагають застосування чисельних методів.

Чисельні методи – це математичний інструментарій, за допомогою якого математична задача формулюється у вигляді, зручному для розв'язання на комп'ютері. Тоді математичну задачу називають обчислювальною задачею. Більшість чисельних методів є наближеними методами розв'язання задачі, які дають змогу знайти наближений до точного розв'язок з деякою похибкою.

Роль чисельних методів у науці та інженерній практиці значно зросла з появою швидких та потужних комп'ютерів. Не зважаючи на те, що основні рутинні обчислення виконує комп'ютер, від фахівця у галузі комп'ютерно-системної інженерії та прикладної математики вимагаються глибокі знання, навички а також і деяка частка мистецтва оскільки для розв'язання кожної математичної задачі існує декілька чисельних методів та їх програмних реалізацій на різних типах комп'ютерів.

Грунтовне вивчення чисельних методів поряд з володінням навичками програмування дозволить успішно налагоджувати пакети сучасних обчислювальних програм для конкретної задачі а також програмно реалізувати той чи інший алгоритм методів обчислень. Вірно застосувавши чисельні методи майбутній фахівець зможе пересвідчитись у тому, що комп'ютер успішно розв'язує його професійні задачі.

Всі чисельні методи мають специфічні властивості і характеристики, що відрізняє їх від точних аналітичних методів. Ефективність чисельного методу оцінюється такими характеристиками як збіжність методу, стійкість чисельного процесу та похибка апроксимації.

Швидкість збіжності – це число ітерацій, тобто повторюваних циклів обчислень, виконання яких необхідне для отримання заданої точності розв'язку.

Мала похибка в початкових умовах має викликати малі зміни в кінцевому результаті. Алгоритм з такою властивістю називається **стійким.**

Похибка апроксимації – це різниця між точним та наближеним значенням розв’язку задачі.

Чисельні методи:

- передбачають проведення великої кількості рутинних арифметичних обчислень за допомогою рекурсивних співвідношень, що використовуються для організації ітерацій, зі зміненими початковими умовами для поліпшення результату;
- направлені на локальне спрощення задачі, коли, наприклад, використовувані нелінійні залежності лінеаризуються або похідні замінюються різницевими апроксимаціями;
- значно залежать від близкості початкового наближення (або декількох наближень), необхідного для початку обчислень до розв'язку, від властивостей нелінійних функцій, які використовуються в математичних моделях, що накладає обмеження (для забезпечення єдиного розв'язку) на їх диференційованість, на швидкість зміни функцій та ін.;

Чисельні методи розрізняються:

- за широтою і легкістю застосування, тобто за ступенем своєї універсальності та інваріантності для розв'язання різних математичних задач;
- за складністю їх програмування;

- за ступенем чутливості до погано обумовлених (або некоректних) математичних задач, коли малим змінам вхідних даних можуть відповідати великі зміни розв'язку.

Вивчення кредитного модуля "Методи обчислень-1.Числові методи алгебри" дозволяє сформувати у студентів компетенції, необхідні для розв'язання практичних задач професійної діяльності, пов'язаної з математичним моделюванням.

Кредитний модуль "Методи обчислень-1.Числові методи алгебри" забезпечує вивчення кредитних модулів "Моделювання складних систем", "Чисельно-аналітичне моделювання", "Рівняння математичної фізики" навчального ОКР "Магістр" та навчального ОКР "Спеціаліст".

Метою кредитного модуля є формування у студентів здатностей:

- розв'язувати (доводити до чисельного результату) задачі алгебри;
- розуміти значення методів обчислень з використанням комп'ютерних технологій для моделювання.

Згідно з вимогами програми навчальної дисципліни студенти після засвоєння кредитного модуля мають продемонструвати такі результати навчання:

знання:

- методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь;
- методів розв'язання нелінійних рівнянь і систем;
- методів розв'язання повної і часткової проблеми власних чисел і власних векторів матриці;

уміння:

- визначати зв'язок між формальною математичною постановкою задачі та обчислювальними методами її розв'язку;
- оцінити похибки отриманого результату обчислень;

досвід:

– наближеного розв’язання задач алгебри.

1.2 Основні поняття теорії похибок

Під час розв’язування прикладних задач важливо мати уяву про точність одержаних результатів. Похибки, які виникають у таких результатах, зумовлені наступними причинами:

- математичний опис задачі є неточним внаслідок неточності задання числових даних або через невідповідність математичного опису задачі реальності;
- для розв’язування задачі використовують наближені методи;
- при вводі даних, під час виконання арифметичних операцій та виводу результатів обчислень здійснюють округлення.

Похибки, викликані цими причинами, називають, відповідно:

- неусунена похибка;
- похибка методу;
- похибка обчислень.

Неусунену похибку часто класифікують як:

a) *неусунену похибку обчислень,* що є наслідком неточності задання параметрів математичної моделі задачі;

b) *похибку математичного моделювання*, що є наслідком заміни реальної задачі її математичною моделлю.

Розглянемо, наприклад, вільний рух пружинного маятника маси m, що описується другим законом Ньютона:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \qquad (1.1)$$

де k - жорсткість пружини; $x(t)$ - закон зміщення x з часом t.

Оскільки лінійна залежність сили пружності F від зміщення x, тобто $F = -kx$, є припущенням моделі, то виникне неусунена похибка (*похибка математичного моделювання*). Іншим джерелом неусуненої похибки (*неусунена похибка обчислення*) є неточність визначення параметрів моделі m та k. Якщо задачу (1.1) розв'язати наближеними методами, то виникне похибка методу. Похибка обчислення може виникнути під час округлення розв'язків задачі.

Розрізняють пряму та обернену задачу теорії похибок. *Пряма задача* полягає у оцінюванні похибки результату обчислень, якщо відомі оцінки похибок вхідних даних. *Обернена задача* полягає у визначенні необхідної точності вхідних даних, що забезпечує *задану* точність результату обчислень.

Розглянемо математичний формалізм теорії похибок.

Нехай a - точне значення деякої величини, a^* - наближене значення цієї величини.

Тоді *похибка* (ε), *абсолютна похибка* ($|\varepsilon|$) та *гранична абсолютна похибка* (Δ) наближеного значення величини визначаються, відповідно, формулами:

$$a - a^* = \varepsilon \tag{1.2}$$

$$|a - a^*| = |\varepsilon| \tag{1.3}$$

$$|a - a^*| = |\varepsilon| \le \Delta \tag{1.4}$$

Як правило, точне значення a величини та абсолютна похибка $|\varepsilon|$ є невідомими. Тому, на практиці задають граничну абсолютну похибку Δ, користуючись правилом (якщо невідомі інші дані про Δ):

Якщо наближене значення деякої величини записане у десятковій системі числення, то гранична абсолютна похибка Δ дорівнює одиниці останнього знаку (якщо значення одержане без округлення) та половині одиниці останнього знаку (якщо значення одержане з округленням). Останнім знаком вважають перший справа.

Приклад 1.1

В результаті деякого вимірювання одержали наближене значення довжини

$l = 3{,}56\ см$. З точністю до одиниці останнього знаку можна вважати, що гранична абсолютна похибка становить $\Delta = 0{,}01\ см$. Для округленого з надлишком значення довжини $l = 3{,}6\ см$ гранична абсолютна похибка дорівнює $\Delta = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 = 0{,}05\ см$.

Значення абсолютної похибки не є інформативним з точки зору оцінювання якості відхилення від точного значення величини. Наприклад, похибка $2^o C \div 3^o C$(градуси Цельсія) прийнятна для прогнозу погоди, але зовсім неприйнятна під час вимірювання температури тіла людини! Тому вводиться ще одна характеристика наближених величин – *відносна похибка.* *Відносна похибка* наближеного значення величини визначається як відношення абсолютної похибки до модуля точного або наближеного значення (якщо a та a^* не дорівнюють нулю), тобто:

$$\frac{|\varepsilon|}{|a|}\ \textit{або}\ \frac{|\varepsilon|}{|a^*|} \tag{1.5}$$

Граничною відносною похибкою називають величину δ, що задовольняє умову:

$$\frac{|\varepsilon|}{|a|} \le \delta \ \text{ або } \ \frac{|\varepsilon|}{|a^*|} \le \delta \tag{1.6}$$

Відносну похибку часто подають у відсотках.

Приклад 1.2

Нехай, відома точна вага студента Васєчкіна $a = 68\ кг$. В результаті вимірювання ваги того ж Васєчкіна після відвідування кафе одержано значення $a^* = 70\ кг$. Абсолютна похибка згідно (1.3) складає:

$$|\varepsilon| = |68 - 70| = 2\ кг$$

Значення відносної похибки знайдемо за формулою (1.5) :

$$\frac{2}{70} = 0.029$$

За граничну відносну похибку можна вибрати значення $\delta = 0.03$ або $\delta = 3\%$ ●

Взагалі інформацію про те, що a^* є наближеним значенням числа a з граничними абсолютною (Δ) та відносною (δ) похибками записують у вигляді:

$$a = a^* \pm \Delta \tag{1.7}$$

$$a = a^*(1 \pm \delta) \tag{1.8}$$

або

$$a^* - \Delta \le a \le a^* + \Delta \tag{1.9}$$

$$a^*(1-\delta) \le a \le a^*(1+\delta) \tag{1.10}$$

Приклад 1.3

Нехай точна вага студента Васєчкіна невідома, але контрольне вимірювання його ваги склало $a^* = 68\,кг$. Вважаючи, що гранична абсолютна похибка дорівнює $\Delta = 0{,}5\,кг$, знайдемо відносну похибку:

$$\delta = \frac{\Delta}{a*} = \frac{0{,}5}{68} = 0{,}0074(0{,}74\%)$$

Згідно (1.7) - (1.10) точна вага Васєчкіна, коливається в межах:

$$68 - 0{,}5 \le a \le 68 + 0{,}5$$

$$68 \cdot (1 - 0{,}0074) \le a \le 68 \cdot (1 + 0{,}0074)$$

Тобто, $67{,}5 \le a \le 68{,}5$ ●

При оперуванні наближеними числами важливо вміти визначати, які цифри числа є значущими або вірними.

Правило визначення значущих цифр:

Число a^* є наближеним до числа a з d значущими цифрами, якщо d є найбільшим додатнім цілим числом, для якого виконується умова:

$$\frac{|a - a^*|}{|a|} < \frac{10^{-d}}{2}$$

Приклад 1.4

Нехай $a = 3{,}56438$ та $a^* = 3{,}56$. Тоді відносна похибка дорівнюватиме:

$$\frac{|a - a^*|}{|a|} < \frac{|3{,}56438 - 3{,}56|}{|3{,}56438|} = 0{,}00122 < \frac{10^{-2}}{2}.$$

Отже, оскільки $d = -2$, то a^* має дві значущі цифри●

Означення 1.1. Цифра наближеного числа називається *вірною в широкому сенсі*, якщо гранична абсолютна похибка цього числа не перевищує одиниці десяткового розряду, що відповідає цій цифрі.

В іншому випадку цифра називається *сумнівною в широкому сенсі*.

Означення 1.2. Цифра наближеного числа називається *вірною у вузькому сенсі*, якщо гранична абсолютна похибка цього числа не перевищує *половини* одиниці десяткового розряду, що відповідає цій цифрі.

В іншому випадку цифра називається *сумнівною у вузькому сенсі*.

Приклад 1.5

Нехай a^*=7,158. Гранична абсолютна похибка складає 0, 009. Визначимо вірні та сумнівні в широкому та вузькому сенсі цифри даного наближеного числа. Наприклад, для цифри 7 одиниця десяткового розряду дорівнює 1, для цифри 1 одиниця десяткового розряду дорівнює 0,1 і т.д. Проведемо порівняння цих чисел з заданою граничною абсолютною похибкою.

Оскільки 0,009<1, то цифра 7 вірна в широкому сенсі;

оскільки 0,009<0,1, то цифра 1 вірна в широкому сенсі;

оскільки 0,009<0,01, то цифра 5 вірна в широкому сенсі;

оскільки 0,009>0,001, то цифра 8 сумнівна в широкому сенсі;

оскільки 0,009<0,5, то цифра 7 вірна у вузькому сенсі;

оскільки 0,009<0,05, то цифра 1 вірна у вузькому сенсі;

оскільки 0,009>0,005, то цифра 5 сумнівна у вузькому сенсі;

оскільки 0,009>0,0005, то цифра 8 сумнівна у вузькому сенсі.

Зауваження 1.

Сумнівні цифри замінюють у *цілому* числі нулями.

Зауваження 2.

Якщо наближене число записується без вказівки його граничної абсолютної похибки, то записуються тільки вірні його цифри (як у широкому так і у вузькому сенсі). При цьому вірні нулі у кінці числа не відкидаються. Наприклад, числа 0,0564 та 0,05640 як наближені різні, оскільки гранична абсолютна похибка першого числа складає 0, 0001, а другого – 0, 00001.

Для того, щоб визначити скільки знаків треба залишити у наближеного числа під час виконання з ним арифметичних операцій користуються також **правилом підрахунку цифр,** які сформульовані В. М. Брадисом:

Під час додавання та віднімання наближених чисел у результаті потрібно зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх є у наближеному числі з найменшою кількістю десяткових знаків.

Під час множення та ділення наближених чисел у результаті потрібно зберігати стільки значущих цифр, скільки їх є у наближеному числі з найменшою кількістю значущих цифр.

Під час піднесення наближеного числа до степеня s, в результаті потрібно зберігати стільки значущих цифр, скільки їх є в основі степеня.

Зауваження 3.

У проміжних обчисленнях потрібно брати на одну цифру більше ніж рекомендують попередні правила (для зменшення накопичення похибки округлення). В остаточному результаті запасна (сумнівна) цифра відкидається.

Правила підрахунку цифр показують, як проводити округлення проміжних результатів, щоб, по-перше, отримати остаточний результат з тією точністю, яку забезпечують початкові дані, і, по-друге, не обчислювати і не виписувати (!) зайвих (що не підвищують точність) цифр, як в проміжних, так і в остаточному результатах. Ці правила не дають оцінки похибки результату, а лише забезпечують високу вірогідність того, що похибка результату приблизно така, яку забезпечують початкові дані.

1.3 Оцінка похибки результату основних арифметичних дій

Результатом дій над наближеними числами є також наближене число. Розглянемо задачу накопичення похибок під час виконання арифметичних операцій над наближеними числами.

Нехай відомі граничні абсолютні або відносні похибки чисел, з якими виконують додавання, віднімання, множення та ділення. Визначимо похибку результату обчислень. Для простоти розглянемо задачу з двома числами.

Нехай

$$a = a_1 + a_2, \tag{1.11}$$

Вважаючи, що відомо:

a_1^* - наближене значення числа a_1;

a_2^* - наближене значення числа a_2;

Δ_1 - гранична абсолютна похибка a_1^*;

Δ_2 - гранична абсолютна похибка a_2^*.

Знайдемо граничну абсолютну похибку (Δ) суми (1.11).

Оскільки

$$a_1 = a_1^* + \varepsilon_1$$

$$a_2 = a_2^* + \varepsilon_2$$

$$a = a^* + \varepsilon$$

$$a^* = a_1^* + a_2^*$$

то:

$$a = a_1 + a_2 = (a_1^* + \varepsilon_1) + (a_2^* + \varepsilon_2) = (a_1^* + a_2^*) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = a^* + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Звідки:

$$|\varepsilon| \le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|, \tag{1.12}$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - похибки обчислень a_1 та a_2 відповідно; ε - похибка обчислення суми a.

Замінюючи у (1.12) модулі похибок граничними абсолютними похибками і враховуючи, що $|\varepsilon_1| \le \Delta_1$, $\varepsilon_2 \le \Delta_2$, одержимо:

$$|\varepsilon| = \Delta_1 + \Delta_2 \tag{1.13}$$

Верхню границю модуля абсолютної похибки (1.13) будемо вважати граничною абсолютною похибкою суми (1.11).

Отже,

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 \tag{1.14}$$

Формула (1.14) легко узагальнюється на суму будь-якої кількості доданків:

Якщо

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

то

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n. \tag{1.15}$$

Віднімання можна вважати алгебраїчним додаванням, тому для оцінювання похибки різниці користуються формулами (1.14) або (1.15).

Отже, гранична абсолютна похибка суми або різниці деяких чисел дорівнює сумі граничних абсолютних похибок цих чисел.

Приклад 1.6

Середній бал згідно кредитно-модульної системи першої, другої та третьої групи студентів І курсу складає $a_1^* = 74$; $a_2^* = 81$; $a_3^* = 69$ відповідно. Значення a_1^*, a_2^*, a_3^* одержані з точністю до $\Delta = 1$. Знайдемо середній бал І курсу загалом:

$$a^* = \frac{a_1^* + a_2^* + a_3^*}{3} = \frac{74 + 81 + 69}{3} = 74{,}6$$

Згідно (1.14) абсолютна похибка обчислення a^* *не перевищує* величини:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 1 + 1 + 1 = 3 \bullet$$

Граничні відносні похибки суми та різниці двох наближених чисел визначаються формулами:

$$\delta(a_1 + a_2) \le \frac{\Delta(a_1) + \Delta(a_2)}{|a_1 + a_2|}, \qquad \delta(a_1 - a_2) \le \frac{\Delta(a_1) + \Delta(a_2)}{|a_1 - a_2|}.$$

Тому якщо числа a_1 і a_2 близькі, то відносна похибка їх *різниці* може виявитися дуже великою, і різниця не міститиме вірних цифр. Нехай, наприклад, $a = 0{,}5628 \cdot 10^4$; $b = 0{,}5631 \cdot 10^4$; $\Delta_a = 10^{-4} < 0{,}02\%$; $\Delta_b = 10^{-4} < 0{,}02\%$, тоді різниця $a - b = -0{,}0003 \cdot 10^4$ і $\delta_{a-b} \le \frac{2}{0{,}0003} \cdot 10^{-4} = 67\%$, тобто різниця не містить вірних цифр (втрата точності). Це потрібно враховувати при побудові обчислювальних алгоритмів : адже велика помилка різниці поширюватиметься в ході подальших обчислень. Тому, по можливості, варто уникати віднімання двох майже рівних чисел. Формули, що містять віднімання двох близьких чисел, часто можна перетворити так, щоб уникнути цієї операції. Наприклад, при обчисленні величини $1 - \cos x$

для значень x, близьких до нуля, треба скористатися рівністю $1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$, а при знаходженні меншого за абсолютною величиною кореня квадратного рівняння $a\mathrm{x}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}=0$, усі коефіцієнти якого додатні і $\mathrm{b} \gg 4\mathrm{ac}$, більш високу точність має формула [13]:

$$x=\frac{-2\mathrm{c}}{\mathrm{b}+\sqrt{\mathrm{b}^2-4\mathrm{ac}}}\quad .$$

Таким чином, ми бачимо, що вид математичної формули, що використовується в обчисленнях, має значення: математично еквівалентні формули часто виявляються нерівноцінними з точки зору практики обчислень.

Знайдемо граничні абсолютну та відносну похибки добутку двох наближених чисел. Аналогічно попередньому запишемо:

$$a=a_1\cdot a_2=(a_1^*+\varepsilon_1)(a_2^*+\varepsilon_2)=a_1^*a_2^*+\varepsilon_1 a_2^*+\varepsilon_2 a_1^*+\varepsilon_1\varepsilon_2.$$

Оскільки $a^*=a_1^*a_2^*$ та $a=a^*+\varepsilon$, то:

$\varepsilon=a_1^*\varepsilon_2+a_2^*\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2.$

Останній доданок є більш високого порядку малості ніж перші два, тому ним можна знехтувати. Тоді:

$\varepsilon\approx a_1^*\varepsilon_2+a_2^*\varepsilon_1.$

Перейдемо до абсолютних значень похибок та одержимо:

$$|\varepsilon|\le|a_1^*\varepsilon_2|+|a_2^*\varepsilon_1|$$

Замінюючи у останній нерівності модулі похибок граничними абсолютними похибками і враховуючи, що $|\varepsilon_1|\le\Delta_1,\quad \varepsilon_2\le\Delta_2,$

одержимо:

$\Delta\le|a_1^*|\Delta_2+|a_2^*|\Delta_1.$

Більш простим є правило оцінки відносної похибки добутку двох наближених чисел. Дійсно:

$$\frac{\varepsilon}{a_1^*a_2^*}\approx\frac{\varepsilon_1}{a_1^*}+\frac{\varepsilon_2}{a_2^*}$$

Враховуючи, що :

$\left|\frac{\varepsilon}{a_1^*a_2^*}\right|\le\delta,\ \left|\frac{\varepsilon_1}{a_1^*}\right|\le\delta_1,\quad \left|\frac{\varepsilon_2}{a_2^*}\right|\le\delta_2,$

одержимо:

$\delta\le\delta_1+\delta_2.$

Знайдемо граничні абсолютну та відносну похибки відношення двох наближених чисел:

$\varepsilon = a - a^* = \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_1^*}{a_2^*} = \frac{1}{a_2^*(a_2^* + \varepsilon_2)}(\varepsilon_1 a_2^* - \varepsilon_2 a_1^*).$

Оцінюючи зверху останній вираз, одержимо:

$|\varepsilon| \leq \Delta \leq \frac{1}{|a_2^*|(|a_2^*| - \Delta_2)}(\Delta_1 |a_2^*| + \Delta_2 |a_1^*|).$

Враховуючи, що значення Δ_2 значно менше ніж $|a_2^*|$, ним можна знехтувати:

$\Delta \leq \frac{1}{|a_2^*|^2}(\Delta_1 |a_2^*| + \Delta_2 |a_1^*|).$

Що стосується відносної похибки, то її вираз та оцінка є більш простими:

$\frac{\varepsilon}{a^*} = \varepsilon \frac{a_2^*}{a_1^*} = \frac{a_2^*}{a_2^* + \varepsilon_2}\left(\frac{\varepsilon_1}{a_1^*} - \frac{\varepsilon_2}{a_2^*}\right),$

$\left|\frac{\varepsilon}{a^*}\right| \leq \delta \leq \frac{|a_2^*|}{|a_2^*| - \Delta_2}(\delta_1 + \delta_2) \approx \delta_1 + \delta_2.$

Отже:

$\delta \leq \delta_1 + \delta_2.$

Таким чином для оцінки похибки добутку та відношення двох наближених чисел a_1^* та a_2^* можна користуватись формулами:

$$\delta(a_1 \cdot a_2) = \delta(a_1) + \delta(a_2) \quad (1.16)$$

$$\delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \delta(a_1) + \delta(a_2), \quad (1.17)$$

де δ - граничні відносні похибки відповідних наближених величин.

Отже, гранична відносна похибка добутку та відношення деяких чисел дорівнює сумі граничних відносних похибок цих чисел.

Приклад 1.7

Оцінити відносну похибку обчислення довжини l круглого басейну радіуса $R = 5{,}48м$, який незабаром планують побудувати у студентському містечку.

Розв'язання:

Довжина круглого басейну (кола) обчислюється за формулою:

$l = 2\pi R$

Вважаючи, що $\pi = 3{,}14$ знайдемо:

$2 \cdot \pi = 2 \cdot 3{,}14 = 6{,}28$

З точністю до одиниці останнього знаку гранична абсолютна похибка наближених значень R та 2π становить $\Delta_R = \Delta_\pi = 0{,}01$. Граничні відносні похибки визначимо як $\delta_1 = \frac{\Delta_R}{R}$, $\delta_2 = \frac{\Delta_\pi}{2\pi}$.

Отже:

$\delta_1 = \frac{0{,}01}{5{,}48} = 0{,}002$, $\delta_2 = \frac{0{,}01}{6{,}28} = 0{,}002$

Гранична відносна похибка обчислення довжини басейну згідно (1.16) дорівнює:

$\delta(2\pi R) = \delta_1 + \delta_2 = 0{,}002 + 0{,}002 = 0{,}004$.

Таким чином, відносна похибка обчислення довжини басейну *не перевищує* 0,004.

Відносна похибка s - того степеня наближеного числа в s разів більше відносної похибки основи (як для цілих, так і для дробових s).

Користуючись цим правилом, можна оцінити похибку результату будь-якої комбінації арифметичних дій над наближеними числами.

Наприклад, δ_A для $A = \sqrt{a/(a+b)}$:

$$\delta_A \le \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{a+b}) \le \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_a}{|a|} + \frac{\Delta_a + \Delta_b}{|a+b|}\right)$$

$$\Delta_A \le \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_a}{|a|} + \frac{\Delta_a + \Delta_b}{|a+b|}\right) \cdot \left|\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right|$$

Оскільки на практиці обчислення наближених значень не обмежується найпростішими арифметичними операціями розглянутими вище, поставимо загальну задачу оцінки похибки обчислення деякої функції $y = f(x)$ залежно від похибки аргументу x.

Нехай у деякій області G n – вимірного простору задана неперервна, диференційовна функція :

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1.18}$$

Якщо $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ - наближені значення аргументу $(x_1, x_2, ... x_n)$, то підставивши їх у (1.18) одержимо *наближене* значення функції :

$$y^* = f\left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\right) \tag{1.19}$$

Оцінимо похибку наближеного значення функції $y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$.

Так як

$$\varepsilon_i = x_i - x_i^*, \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{1.20}$$

є похибкою аргументу, то:

$$\Delta y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f\left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\right)$$

(1.21)

є похибкою значення функції y.

Враховуючи (1.20) для похибки Δy одержимо:

$$\Delta y = f\left(x_1^* + \varepsilon_1,\, x_2^* + \varepsilon_2, \dots, x_n^* + \varepsilon_n\right) - f\left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\right) \tag{1.22}$$

Розвинемо функцію $f\left(x_1^* + \varepsilon_1, x_2^* + \varepsilon_2, \dots, x_n^* + \varepsilon_n\right)$ у ряд Тейлора в околі точок $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ та вважаючи ε_i, $i = 1,2,\dots n$ нескінченно малими величинами, обмежилось доданками лінійними по ε_i, $i = 1,2,\dots n$:

$$f\left(x_1^* + \varepsilon_1, x_2^* + \varepsilon_2, \dots, x_n^* + \varepsilon_n\right) = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*)}{\partial x_2}\varepsilon_2 + \\ + \dots + \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_n}\varepsilon_n + \dots \tag{1.23}$$

Підставивши (1.23) у (1.22), одержимо:

$$\Delta y = f\left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varepsilon_i - f\left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\right)$$

Отже,

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varepsilon_i \tag{1.24}$$

Оцінимо похибку Δy зверху, замінивши у (1.24) $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ та ε_i їх граничними значеннями:

$$|\Delta y| \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i, \tag{1.25}$$

де $M_i = \left|\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)}{\partial x_i}\right|$, Δ_i- граничні абсолютні похибки величин x_i, $(i = 1,2...n)$.

Для функції однієї змінної $y = f(x)$ оцінка похибки Δy спрощується і має вигляд:

$$|\Delta y| \le |f'(x^*)| \cdot \Delta \tag{1.26}$$

де Δ - гранична абсолютна похибка величини x, $f'(x^*)$- значення похідної першого порядку функції $y = f(x)$ у точці x^*.

Приклад 1.8

Прискорення сили тяжіння визначається за допомогою *оборотного* маятника наступною формулою:

$$g = \pi^2 \frac{l}{T^2}, \tag{1.27}$$

де l - приведена довжина маятника, T - період коливання.

Експериментальні значення для l та T та їхні граничні похибки задані:

$l = 42{,}03 см$, $\Delta_l = 0{,}01$

$T = 0{,}6023 с$, $\Delta_T = 0{,}0001$

Знайдемо прискорення сили тяжіння g та оцінимо його граничну похибку. Значення π виберемо рівним 3,1416 і покладемо $\Delta\pi = 0{,}0001$. Оскільки g є функцією трьох змінних, а саме $g = f(\pi, l, T)$, то для нашої задачі формула (1.24) матиме вигляд:

$$\Delta g = \frac{\partial g}{\partial \pi}\varepsilon_\pi + \frac{\partial g}{\partial e}\varepsilon_e + \frac{\partial g}{\partial T}\varepsilon_T$$

Оскільки

$$\frac{\partial g}{\partial \pi} = \frac{2\pi l}{T^2}; \quad \frac{\partial g}{\partial l} = \frac{\pi^2}{T^2}; \quad \frac{\partial g}{\partial T} = -\frac{2\pi^2 l}{T^3}.$$

Окрім того

$\varepsilon_\pi \le \Delta_\pi$; $\varepsilon_l \le \Delta_l$; $\varepsilon_T \le \Delta_T$.

Для граничної абсолютної похибки $|\Delta g|$ одержимо:

$$|\Delta g| \le \left|\frac{\partial g}{\partial \pi}\right|\Delta_\pi + \left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|\Delta_l + \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\Delta_T$$

$$\Delta g \le \frac{2\pi l}{T^2}\Delta_\pi + \frac{\pi^2}{T^2}\Delta_l + \frac{2\pi^2 l}{T^3}\Delta_T \tag{1.28}$$

Підставивши задані числові значення у (1.27) та (1.28), знайдемо:

$g^* = 1143{,}5\ см/с^2$, $\Delta g \le 1{,}0\ см/с^2$.

Отже,

$g = 1143{,}5 \pm 1{,}0 (см/с^2)$ •

Контрольні запитання

1. *Що називають обчислювальною задачею?*
2. *Якими характеристиками оцінюється ефективність чисельного методу?*
3. *Який чисельний алгоритм називається стійким?*
4. *Що називають похибкою апроксимації?*
5. *Які є види похибок?*
6. *Сформулюйте пряму та обернену задачу теорії похибок.*
7. *Сформулюйте правило визначення значущих цифр наближеного числа.*
8. *Дайте визначення вірних та сумнівних цифр наближеного числа.*
9. *Як визначаються похибки обчислень під час виконання арифметичних операцій з наближеними числами?*
10. *Як оцінити похибку обчислення деякої функції залежно від похибок її аргументів?*

Тест ”Так/Ні “ для самоперевірки знань студентів

1. Число ітерацій, виконуваних для отримання заданої точності розв'язку задачі, характеризує стійкість чисельного процесу.
2. Різниця між точним та наближеним значенням розв’язку задачі є похибкою апроксимації.
3. Збіжність більшості чисельних методів гарантується коректним вибором початкового наближення.
4. Чи зменшиться похибка результату віднімання двох наближених чисел?
5. Чи збільшиться похибка результату ділення двох наближених чисел?
6. Якщо для розв’язання задачі використовують наближені методи, то виникає неусунена похибка.
7. Похибка обчислення є наслідком заміни реальної задачі її математичною моделлю.
8. Обернена задача теорії похибок полягає у визначенні необхідної точності вхідних даних, що забезпечує задану точність результату обчислень.

9. Значення абсолютної похибки є більш інформативним з точки зору оцінювання якості відхилення від точного значення величини ніж значення відносної похибки.
10. Якщо у наближеному числі $a^* = 9{,}397$ всі цифри є вірними у широкому сенсі, то гранична абсолютна похибка може складати $0{,}005$.

Відповіді

1. Ні. 2. Так. 3. Так. 4. Ні. 5. Так. 6. Ні. 7. Ні. 8. Так. 9. Ні. 10. Ні.

Задачі для самостійного розв'язування

Завдання1

1. Визначити, яка рівність точніша.
2. Округлити сумнівні цифри числа, залишивши в ньому тільки вірні знаки: а) у вузькому сенсі; б) у широкому сенсі. Визначити абсолютну похибку результату.
3. Знайти граничні абсолютні та відносні похибки чисел, якщо вони мають тільки вірні цифри: а) у вузькому сенсі; б) у широкому сенсі.

Варіант 1 1) $13/27 = 0{,}481 \quad \sqrt{15} = 3{,}87$ 2) $a)\quad 21{,}5137 \pm 0{,}0034$ $б)\quad 1{,}932(\delta = 0{,}63\%)$ 3) $a)\quad 273{,}51$ $б)\quad 16{,}93$	**Варіант 2** 1) $6/14 = 0{,}429 \quad \sqrt{84} = 9{,}17$ 2) $a)\quad 73{,}137 \pm 0{,}037$ $б)\quad 5{,}439(\delta = 0{,}15\%)$ 3) $a)\quad 8{,}284$ $б)\quad 7{,}741$
Варіант 3 1) $5/18 = 0{,}278 \quad \sqrt{34} = 5{,}83$ 2) $a)\quad 14{,}264 \pm 0{,}032$ $б)\quad 15{,}947(\delta = 0{,}07\%)$ 3) $a)\quad 82{,}3042$ $б)\quad 3{,}619$	**Варіант 4** 1) $3/65 = 0{,}046 \quad \sqrt{38} = 6{,}16$ 2) $a)\quad 0{,}3185 \pm 0{,}0009$ $б)\quad 7{,}046(\delta = 0{,}02\%)$ 3) $a)\quad 98{,}32$ $б)\quad 1{,}054$
Варіант 5 1) $8/13 = 0{,}615 \quad \sqrt{61} = 7{,}81$ 2) $a)\quad 8{,}9382 \pm 0{,}0052$ $б)\quad 5{,}0324(\delta = 0{,}67\%)$ 3) $a)\quad 12{,}924$ $б)\quad 12{,}95$	**Варіант 6** 1) $7/9 = 0{,}778 \quad \sqrt{29} = 3{,}46$ 2) $a)\quad 2{,}0943 \pm 0{,}0006$ $б)\quad 8{,}372(\delta = 0{,}54\%)$ 3) $a)\quad 82{,}053$ $б)\quad 3{,}054$

Варіант 7 1) $4/9 = 0{,}445$ $\sqrt{45} = 6{,}71$ 2) a) $1{,}3309 \pm 0{,}0007$ $б$) $7{,}035(\delta = 0{,}03\%)$ 3) a) $12{,}973$ $б$) $43{,}06$	**Варіант 8** 1) $3/14 = 0{,}214$ $\sqrt{32} = 5{,}66$ 2) a) $3{,}1362 \pm 0{,}0016$ $б$) $74{,}221(\delta = 0{,}13\%)$ 3) a) $7{,}954$ $б$) $2{,}06$
Варіант 9 1) $7/19 = 0{,}368$ $\sqrt{44} = 6{,}63$ 2) a) $5{,}3407 \pm 0{,}0016$ $б$) $5{,}123(\delta = 0{,}05\%)$ 3) a) $14{,}065$ $б$) $1{,}96$	**Варіант 10** 1) $7/17 = 0{,}412$ $\sqrt{33} = 5{,}74$ 2) a) $8{,}8612 \pm 0{,}0053$ $б$) $3{,}064(\delta = 0{,}02\%)$ 3) a) $73{,}065$ $б$) $9{,}21$
Варіант 11 1) $5/16 = 0{,}312$ $\sqrt{76} = 8{,}72$ 2) a) $4{,}2318 \pm 0{,}0003$ $б$) $83{,}234(\delta = 0{,}74\%)$ 3) a) $8{,}274$ $б$) $13{,}85$	**Варіант 12** 1) $3/11 = 0{,}273$ $\sqrt{19} = 4{,}36$ 2) a) $1{,}2316 \pm 0{,}0017$ $б$) $0{,}076(\delta = 0{,}01\%)$ 3) a) $13{,}886$ $б$) $3{,}65$
Варіант 13 1) $4/13 = 0{,}308$ $\sqrt{22} = 4{,}69$ 2) a) $3{,}0078 \pm 0{,}0012$ $б$) $82{,}334(\delta = 0{,}05\%)$ 3) a) $30{,}362$ $б$) $6{,}74$	**Варіант 14** 1) $7/12 = 0{,}583$ $\sqrt{55} = 7{,}42$ 2) a) $7{,}2836 \pm 0{,}0004$ $б$) $7{,}065(\delta = 0{,}54\%)$ 3) a) $3{,}997$ $б$) $9{,}21$
Варіант 15 1) $8/14 = 0{,}571$ $\sqrt{69} = 8{,}31$ 2) a) $0{,}9643 \pm 0{,}0042$ $б$) $7{,}241(\delta = 0{,}13\%)$ 3) a) $23{,}942$ $б$) $1{,}054$	**Варіант 16** 1) $6/17 = 0{,}353$ $\sqrt{45} = 6{,}71$ 2) a) $0{,}3976 \pm 0{,}0063$ $б$) $54{,}054(\delta = 0{,}17\%)$ 3) a) $90{,}323$ $б$) $13{,}043$
Варіант 17 1) $2/13 = 0{,}154$ $\sqrt{99} = 9{,}95$ 2) a) $9{,}3125 \pm 0{,}0008$ $б$) $10{,}054(\delta = 0{,}32\%)$ 3) a) $6{,}876$ $б$) $13{,}04$	**Варіант 18** 1) $4/17 = 0{,}235$ $\sqrt{37} = 6{,}308$ 2) a) $3{,}6049 \pm 0{,}0017$ $б$) $7{,}0965(\delta = 0{,}51\%)$ 3) a) $43{,}09$ $б$) $1{,}054$

Варіант 19 1) $11/18 = 0{,}611 \quad \sqrt{19} = 4{,}36$ 2) *а*) $0{,}3276 \pm 0{,}0005$ *б*) $8{,}542 (\delta = 0{,}43\%)$ 3) *а*) 80,221 *б*) 1,06	**Варіант 20** 1) $14/18 = 0{,}778 \quad \sqrt{71} = 8{,}43$ 2) *а*) $9{,}6109 \pm 0{,}0004$ *б*) $6{,}043 (\delta = 0{,}07\%)$ 3) *а*) 40,329 *б*) 1,065
Варіант 21 1) $11/18 = 0{,}612 \quad \sqrt{61} = 7{,}81$ 2) *а*) $1{,}3209 \pm 0{,}0005$ *б*) $0{,}0965 (\delta = 0{,}17\%)$ 3) *а*) 0,241 *б*) 1,954	**Варіант 22** 1) $13/18 = 0{,}722 \quad \sqrt{34} = 5{,}83$ 2) *а*) $1{,}3045 \pm 0{,}0003$ *б*) $0{,}8304 (\delta = 0{,}32\%)$ 3) *а*) 17,235 *б*) 0,543
Варіант 23 1) $14/19 = 0{,}737 \quad \sqrt{88} = 9{,}38$ 2) *а*) $4{,}0035 \pm 0{,}0001$ *б*) $31{,}054 (\delta = 0{,}75\%)$ 3) *а*) 9,276 *б*) 14,11	**Варіант 24** 1) $23/48 = 0{,}479 \quad \sqrt{106} = 10{,}30$ 2) *а*) $0{,}9854 \pm 0{,}0004$ *б*) $3{,}123 (\delta = 0{,}11\%)$ 3) *а*) 55,077 *б*) 2,67
Варіант 25 1) $25/36 = 0{,}694 \quad \sqrt{11} = 3{,}32$ 2) *а*) $42{,}0423 \pm 0{,}0001$ *б*) $7{,}032 (\delta = 0{,}44\%)$ 3) *а*) 33,054 *б*) 14,87	**Варіант 26** 1) $47/49 = 0{,}959 \quad \sqrt{74} = 8{,}60$ 2) *а*) $11{,}0124 \pm 0{,}0003$ *б*) $4{,}989 (\delta = 0{,}41\%)$ 3) *а*) 82,044 *б*) 0,87

Зразок виконання Завдання 1

1) $15/18 = 0{,}833 \quad \sqrt{29} = 5{,}39$

2) *а*) $4{,}5037 \pm 0{,}0014$

б) $13{,}842 (\delta = 0{,}27\%)$

3) *а*) 23,541

б) 6,05

---

1). Знайдемо значення даних виразів з більшою кількістю десяткових знаків: $15/18 = 0{,}83333, \quad \sqrt{29} = 5{,}38516$. Обчислимо граничні абсолютні похибки:

$\Delta_1 = |0{,}83333 - 0{,}833| \le 0{,}00033, \quad \Delta_2 = |5{,}38516 - 5{,}39| \le 0{,}00484.$

Граничні відносні похибки складають:

$$\delta_1 = \frac{0{,}00033}{0{,}833} = 0{,}0004 (0{,}04\%), \quad \delta_2 = \frac{0{,}00484}{5{,}39} = 0{,}0009 (0{,}09\%).$$

Оскільки $\delta_1 < \delta_2$, то рівність $15/18 = 0{,}833$ є більш точною.

2) а). Визначимо, які цифри числа $a = 4{,}5037 \pm 0{,}0014$ є вірними у вузькому сенсі. Згідно **Означення 1.2:**
оскільки $\Delta = 0{,}0014 < 0{,}5$, то цифра 4 вірна у вузькому сенсі;

оскільки $\Delta = 0{,}0014 < 0{,}05$, то цифра 5 вірна у вузькому сенсі;

оскільки $\Delta = 0{,}0014 < 0{,}005$, то цифра 0 вірна у вузькому сенсі;

оскільки $\Delta = 0{,}0014 > 0{,}0005$, то цифра 3 сумнівна у вузькому сенсі;

оскільки $\Delta = 0{,}0014 > 0{,}00005$, то цифра 7 сумнівна у вузькому сенсі.

За правилом округлення знайдемо наближене значення даного числа:

$a_1 = 4{,}5; \quad \Delta_1 = \Delta + \Delta_{окр.} = 0{,}0014 + 0{,}0037 = 0{,}0051.$

Аналогічно попередньому визначимо, які цифри числа $a_1 = 4{,}5 \pm 0{,}0051$ є вірними у вузькому сенсі:

оскільки $\Delta_1 = 0{,}0051 < 0{,}5$, то цифра 4 вірна у вузькому сенсі;

оскільки $\Delta_2 = 0{,}0051 < 0{,}05$, то цифра 5 вірна у вузькому сенсі;

Абсолютна похибка результату складає $\Delta_1 = 0{,}0051$.

2) б). Нехай $a = 13{,}842$; $\delta = 0{,}0027(0{,}27\%)$. Тоді $\Delta = a \cdot \delta = 0{,}03737$. У даному числі вірними у широкому сенсі (згідно **Означення 1.1**) є цифри 1, 3 та 8, а сумнівними є 4 та 2. Округлимо дане число, зберігаючи перші три цифри:
$a_1 = 13{,}8; \quad \Delta_1 = \Delta + \Delta_{окр.} = 0{,}03737 + 0{,}042 = 0{,}07937 < 0{,}1.$
Як бачимо, всі цифри округленого числа $a_1 = 13{,}8$ є вірними у широкому сенсі. Абсолютна похибка результату складає $\Delta_1 = 0{,}07937$.

3) а). Оскільки за умовою всі цифри числа $a = 23{,}541$ є вірними у вузькому сенсі, то гранична абсолютна похибка складає $\Delta = 0{,}0005$, а гранична відносна похибка дорівнює $\delta = \Delta / a = 0{,}0005 / 23{,}541 = 0{,}000021(0{,}0021\%)$.

3) б). Оскільки за умовою всі цифри числа $a = 6{,}05$ є вірними у широкому сенсі, то гранична абсолютна похибка складає $\Delta = 0{,}01$, а гранична відносна похибка дорівнює $\delta = \Delta / a = 0{,}01 / 6{,}05 = 0{,}0017(0{,}17\%)$.

Завдання 2

1. Обчислити значення X та визначити абсолютну та відносну похибку результату.
2. Обчислити значення X та визначити абсолютну та відносну похибку результату.
3. Обчислити, користуючись правилом підрахунку цифр.

Варіант 1	Варіант 2
1) $X = \frac{ab}{\sqrt[3]{c}}$ $a = 3{,}85 \pm 0{,}01$ $b = 2{,}0435 \pm 0{,}0004$ $c = 962{,}6 \pm 0{,}1$ 2) $X = \left(\frac{(a+b)c}{m-n}\right)^2$ $a = 4{,}3 \pm 0{,}05$ $b = 17{,}21 \pm 0{,}02$ $c = 8{,}2 \pm 0{,}05$ $m = 12{,}417 \pm 0{,}003$ $n = 8{,}37 \pm 0{,}005$ 3) $S = \frac{h^2}{18} : \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$ $a = 1{,}141$ $b = 3{,}156$ $h = 1{,}14$	1) $X = \frac{\sqrt{a} \cdot b}{c}$ $a = 228{,}6 \pm 0{,}06$ $b = 86{,}4 \pm 0{,}02$ $c = 68{,}7 \pm 0{,}05$ 2) $X = \frac{m^3(a+b)}{c-d}$ $a = 13{,}5 \pm 0{,}02$ $b = 3{,}7 \pm 0{,}02$ $m = 4{,}22 \pm 0{,}004$ $c = 34{,}5 \pm 0{,}02$ $d = 23{,}725 \pm 0{,}005$ 3) $X = \frac{(a+b)h^3}{4} + \frac{(a+b)h}{12}$ $a = 8{,}53$ $b = 6{,}271$ $h = 12{,}48$
Варіант 3 1) $X = \frac{\sqrt{ab}}{c}$ $a = 3{,}845 \pm 0{,}004$ $b = 16{,}2 \pm 0{,}05$ $c = 10{,}8 \pm 0{,}1$ 2) $X = \frac{(a+b)m}{(c-d)^2}$ $a = 2{,}754 \pm 0{,}001$ $b = 11{,}7 \pm 0{,}04$ $m = 0{,}56 \pm 0{,}005$ $c = 10{,}536 \pm 0{,}002$ $d = 6{,}32 \pm 0{,}008$ 3) $X = \frac{(a+b)^2}{2h} + \frac{(a^2+b^2)h}{5}$ $a = 0{,}562$ $b = 0{,}2518$ $h = 0{,}68$	**Варіант 4** 1) $X = \frac{a^2 b}{c}$ $a = 3{,}456 \pm 0{,}002$ $b = 0{,}642 \pm 0{,}0005$ $c = 7{,}12 \pm 0{,}004$ 2) $X = \frac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$ $a = 23{,}16 \pm 0{,}02$ $b = 8{,}23 \pm 0{,}005$ $c = 145{,}5 \pm 0{,}08$ $d = 28{,}6 \pm 0{,}1$ $m = 0{,}28 \pm 0{,}006$ 3) $V = \frac{h}{3} S(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2})$ $a = 8{,}51$ $A = 23{,}42$ $S = 45{,}8$ $h = 3{,}81$

Варіант 5	**Варіант 6**
1) $X = \frac{ab^3}{c}$ $a = 0,643 \pm 0,0005$ $b = 2,17 \pm 0,002$ $c = 5,843 \pm 0,001$ 2) $X = \frac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$ $a = 27,16 \pm 0,006$ $b = 5,03 \pm 0,01$ $c = 3,6 \pm 0,02$ $m = 12,375 \pm 0,004$ $n = 86,2 \pm 0,05$ 3) $S = \frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$ $h = 21,1$ $a = 22,08$ $b = 31,11$	1) $X = \frac{ab}{c^2}$ $a = 0,3575 \pm 0,0002$ $b = 2,63 \pm 0,01$ $c = 0,854 \pm 0,0005$ 2) $X = \frac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$ $a = 16,342 \pm 0,001$ $b = 2,5 \pm 0,03$ $c = 38,17 \pm 0,002$ $d = 9,14 \pm 0,005$ $m = 3,6 \pm 0,04$ 3) $V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$ $a = 2,456$ $h = 1,76$
Варіант 7	**Варіант 8**
1) $V = \frac{\pi^2}{4}Dd^2$ $\pi = 3,14$ $D = 54 \pm 0,5$ $d = 8,235 \pm 0,001$ 2) $S = \frac{1}{64}\pi\sqrt{D^4 - d^4}$ $D = 36,5 \pm 0,1$ $d = 26,35 \pm 0,005$ $\pi = 3,14$ 3) $a = c^2(1 + \frac{2\beta}{c} + \frac{\gamma^2}{c^2})$ $c = 2,435$ $\beta = 0,15$ $\gamma = 1,27$	1) $Y = \frac{m^2 n}{c^3}$ $m = 1,6531 \pm 0,0003$ $n = 3,78 \pm 0,002$ $c = 0,158 \pm 0,0005$ 2) $X = \frac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$ $a = 9,542 \pm 0,001$ $b = 1,767 \pm 0,004$ $m = 3,128 \pm 0,002$ $c = 0,172 \pm 0,001$ $d = 5,4 \pm 0,02$ 3) $V = \frac{1}{15}\pi h(2D^2 + Dd + 0,75d^2)$ $h = 84,2$ $D = 28,3$ $d = 42,08$

Варіант 9	**Варіант 10**
1) $X=\sqrt{\frac{cd}{b}}$ $c = 0{,}7568 \pm 0{,}0002$ $d = 21{,}7 \pm 0{,}02$ $b = 2{,}65 \pm 0{,}01$ 2) $y=\frac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$ $a = 10{,}82 \pm 0{,}03$ $b = 2{,}786 \pm 0{,}0006$ $m = 0{,}28 \pm 0{,}006$ $n = 14{,}7 \pm 0{,}06$ 3) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p=(a+b+c)/2$ $a = 46{,}3$ $b = 29{,}72$ $c = 37{,}654$	1) $f=\frac{Qe^3}{48E}$ $Q = 54{,}8 \pm 0{,}02$ $e = 2{,}45 \pm 0{,}01$ $E = 0{,}863 \pm 0{,}004$ 2) $Q=\frac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$ $n = 2{,}0435 \pm 0{,}0001$ $x = 4{,}2 \pm 0{,}05$ $y = 0{,}82 \pm 0{,}01$ 3) $\gamma=\frac{\alpha b-\beta a}{b^2}-\frac{\beta(ab-\beta a)}{b^2(b+\beta)}$ $\alpha = 5{,}27$ $\beta = 0{,}0562$ $a = 158{,}35$ $b = 61{,}21$
Варіант 11 1) $X=\frac{ab}{\sqrt[3]{c}}$ $a = 4{,}16 \pm 0{,}005$ $b = 12{,}163 \pm 0{,}002$ $c = 55{,}18 \pm 0{,}01$ 2) $X=\left(\frac{(a+b)c}{m-n}\right)^2$ $a = 5{,}2 \pm 0{,}04$ $b = 15{,}32 \pm 0{,}01$ $c = 7{,}5 \pm 0{,}05$ $m = 21{,}823 \pm 0{,}002$ $n = 7{,}56 \pm 0{,}003$ 3) $S=\frac{h^2}{18}:\frac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}$ $a = 2{,}234$ $b = 4{,}518$ $h = 4{,}48$	**Варіант 12** 1) $X=\frac{\sqrt{a}\cdot b}{c}$ $a = 315{,}6 \pm 0{,}05$ $b = 72{,}5 \pm 0{,}03$ $c = 53{,}8 \pm 0{,}03$ 2) $X=\frac{m^3(a+b)}{c-d}$ $a = 18{,}5 \pm 0{,}03$ $b = 5{,}6 \pm 0{,}02$ $m = 3{,}42 \pm 0{,}003$ $c = 26{,}3 \pm 0{,}01$ $d = 14{,}782 \pm 0{,}006$ 3) $X=\frac{(a+b)h^3}{4}+\frac{(a+b)h}{12}$ $a = 6{,}44$ $b = 5{,}323$ $h = 15{,}44$

Варіант 13

1) $X = \dfrac{\sqrt{ab}}{c}$

$a = 4{,}632 \pm 0{,}003$

$b = 23{,}3 \pm 0{,}04$

$c = 11{,}3 \pm 0{,}06$

2) $X = \dfrac{(a+b)m}{(c-d)^2}$

$a = 3{,}326 \pm 0{,}002$

$b = 15{,}8 \pm 0{,}03$

$m = 0{,}64 \pm 0{,}004$

$c = 12{,}415 \pm 0{,}003$

$d = 7{,}18 \pm 0{,}006$

3) $X = \dfrac{(a+b)^2}{2h} + \dfrac{(a^2+b^2)h}{5}$

$a = 0{,}834$

$b = 0{,}3523$

$h = 0{,}74$

Варіант 14

1) $X = \dfrac{a^2 b}{c}$

$a = 1{,}245 \pm 0{,}001$

$b = 0{,}121 \pm 0{,}0002$

$c = 2{,}34 \pm 0{,}003$

2) $X = \dfrac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$

$a = 17{,}41 \pm 0{,}01$

$b = 1{,}27 \pm 0{,}002$

$c = 342{,}3 \pm 0{,}04$

$d = 11{,}7 \pm 0{,}1$

$m = 0{,}71 \pm 0{,}003$

3) $V = \dfrac{h}{3} S(1 + \dfrac{a}{A} + \dfrac{a^2}{A^2})$

$a = 5{,}71$

$A = 32{,}17$

$S = 51{,}7$

$h = 2{,}42$

Варіант 15

1) $X = \dfrac{ab^3}{c}$

$a = 0{,}142 \pm 0{,}0003$

$b = 1{,}71 \pm 0{,}002$

$c = 3{,}727 \pm 0{,}001$

2) $X = \dfrac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$

$a = 15{,}71 \pm 0{,}005$

$b = 3{,}28 \pm 0{,}02$

$c = 7{,}2 \pm 0{,}01$

$m = 13{,}752 \pm 0{,}001$

$n = 33{,}7 \pm 0{,}03$

3) $S = \dfrac{h^2}{18} \cdot \dfrac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$

$h = 17{,}8$

$a = 32{,}47$

$b = 11{,}42$

Варіант 16

1) $X = \dfrac{ab}{c^2}$

$a = 0{,}1756 \pm 0{,}0001$

$b = 3{,}71 \pm 0{,}03$

$c = 0{,}285 \pm 0{,}0002$

2) $X = \dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$

$a = 12{,}751 \pm 0{,}001$

$b = 3{,}7 \pm 0{,}02$

$c = 23{,}76 \pm 0{,}003$

$d = 8{,}12 \pm 0{,}004$

$m = 1{,}7 \pm 0{,}01$

3) $V = \dfrac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$

$a = 7{,}751$

$h = 3{,}35$

Варіант 17 1) $V = \frac{\pi^2}{4} D d^2$ $\pi = 3{,}14$ $D = 72 \pm 0{,}3$ $d = 3{,}274 \pm 0{,}002$ 2) $S = \frac{1}{64}\pi\sqrt{D^4 - d^4}$ $D = 41{,}4 \pm 0{,}2$ $d = 31{,}75 \pm 0{,}003$ $\pi = 3{,}14$ 3) $a = c^2(1 + \frac{2\beta}{c} + \frac{\gamma^2}{c^2})$ $c = 7{,}834$ $\beta = 0{,}21$ $\gamma = 3{,}71$	**Варіант 18** 1) $Y = \frac{m^2 n}{c^3}$ $m = 2{,}348 \pm 0{,}002$ $n = 4{,}37 \pm 0{,}004$ $c = 0{,}235 \pm 0{,}0003$ 2) $X = \frac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$ $a = 8{,}357 \pm 0{,}003$ $b = 1{,}767 \pm 0{,}004$ $m = 3{,}17 \pm 0{,}001$ $c = 1{,}315 \pm 0{,}0004$ $d = 2{,}4 \pm 0{,}02$ 3) $V = \frac{1}{15}\pi h(2D^2 + Dd + 0{,}75d^2)$ $h = 76$ $D = 17{,}2$ $d = 9{,}344$
Варіант 19 1) $X = \sqrt{\frac{cd}{b}}$ $c = 0{,}8345 \pm 0{,}0004$ $d = 13{,}8 \pm 0{,}03$ $b = 1{,}84 \pm 0{,}006$ 2) $y = \frac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$ $a = 9{,}37 \pm 0{,}004$ $b = 3{,}108 \pm 0{,}0003$ $m = 0{,}46 \pm 0{,}002$ $n = 15{,}2 \pm 0{,}04$ 3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = (a+b+c)/2$ $a = 10{,}5$ $b = 34{,}18$ $c = 27{,}327$	**Варіант 20** 1) $f = \frac{Qe^3}{48E}$ $Q = 38{,}5 \pm 0{,}01$ $e = 3{,}35 \pm 0{,}02$ $E = 0{,}734 \pm 0{,}001$ 2) $Q = \frac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$ $n = 1{,}1753 \pm 0{,}0002$ $x = 5{,}8 \pm 0{,}01$ $y = 0{,}65 \pm 0{,}02$ 3) $\gamma = \frac{\alpha b - \beta a}{b^2} - \frac{\beta(ab - \beta a)}{b^2(b+\beta)}$ $\alpha = 7{,}31$ $\beta = 0{,}0761$ $a = 234{,}36$ $b = 81{,}26$

Варіант 21	Варіант 22
1) $X = \dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}$ $a = 7{,}27 \pm 0{,}01$ $b = 5{,}205 \pm 0{,}002$ $c = 87{,}32 \pm 0{,}03$ 2) $X = \left(\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right)^2$ $a = 2{,}13 \pm 0{,}01$ $b = 22{,}16 \pm 0{,}03$ $c = 6{,}3 \pm 0{,}04$ $m = 16{,}825 \pm 0{,}004$ $n = 8{,}13 \pm 0{,}002$ 3) $S = \dfrac{h^2}{18} : \dfrac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$ $a = 5{,}813$ $b = 1{,}315$ $h = 2{,}56$	1) $X = \dfrac{\sqrt{a} \cdot b}{c}$ $a = 186{,}7 \pm 0{,}04$ $b = 66{,}6 \pm 0{,}03$ $c = 72{,}3 \pm 0{,}03$ 2) $X = \dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$ $a = 11{,}8 \pm 0{,}02$ $b = 7{,}4 \pm 0{,}03$ $m = 5{,}82 \pm 0{,}005$ $c = 26{,}7 \pm 0{,}03$ $d = 11{,}234 \pm 0{,}004$ 3) $X = \dfrac{(a+b)h^3}{4} + \dfrac{(a+b)h}{12}$ $a = 9{,}05$ $b = 3{,}244$ $h = 20{,}18$
Варіант 23	**Варіант 24**
1) $X = \dfrac{\sqrt{ab}}{c}$ $a = 2{,}312 \pm 0{,}004$ $b = 18{,}4 \pm 0{,}03$ $c = 20{,}2 \pm 0{,}08$ 2) $X = \dfrac{(a+b)m}{(c-d)^2}$ $a = 4{,}523 \pm 0{,}003$ $b = 10{,}8 \pm 0{,}02$ $m = 0{,}85 \pm 0{,}003$ $c = 9{,}318 \pm 0{,}002$ $d = 4{,}17 \pm 0{,}004$ 3) $X = \dfrac{(a+b)^2}{2h} + \dfrac{(a^2+b^2)h}{5}$ $a = 0{,}445$ $b = 0{,}4834$ $h = 0{,}87$	1) $X = \dfrac{a^2 b}{c}$ $a = 0{,}327 \pm 0{,}005$ $b = 3{,}147 \pm 0{,}0001$ $c = 1{,}78 \pm 0{,}001$ 2) $X = \dfrac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$ $a = 32{,}37 \pm 0{,}02$ $b = 2{,}35 \pm 0{,}001$ $c = 128{,}7 \pm 0{,}02$ $d = 27{,}3 \pm 0{,}04$ $m = 0{,}93 \pm 0{,}001$ 3) $V = \dfrac{h}{3} S(1 + \dfrac{a}{A} + \dfrac{a^2}{A^2})$ $a = 7{,}28$ $A = 11{,}71$ $S = 21{,}8$ $h = 5{,}31$

Варіант 25	**Варіант 26**
1) $X = \dfrac{ab^3}{c}$	1) $X = \dfrac{ab}{c^2}$
$a = 0{,}258 \pm 0{,}0002$	$a = 0{,}2731 \pm 0{,}0003$
$b = 3{,}45 \pm 0{,}001$	$b = 5{,}12 \pm 0{,}02$
$c = 7{,}221 \pm 0{,}003$	$c = 0{,}374 \pm 0{,}0001$
2) $X = \dfrac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$	2) $X = \dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$
$a = 12{,}31 \pm 0{,}004$	$a = 31{,}456 \pm 0{,}002$
$b = 1{,}73 \pm 0{,}03$	$b = 7{,}3 \pm 0{,}01$
$c = 3{,}7 \pm 0{,}02$	$c = 33{,}28 \pm 0{,}003$
$m = 17{,}428 \pm 0{,}003$	$d = 6{,}71 \pm 0{,}001$
$n = 41{,}7 \pm 0{,}01$	$m = 5{,}8 \pm 0{,}02$
3) $S = \dfrac{h^2}{18} \cdot \dfrac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$	3) $V = \dfrac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$
$h = 32{,}5$	$a = 5{,}441$
$a = 27{,}51$	$h = 6{,}17$
$b = 21{,}78$	

Зразок виконання Завдання 2

1) $X = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{bc}$

$a = 1{,}342 \pm 0{,}003$

$b = 0{,}487 \pm 0{,}0012$

$c = 54{,}065 \pm 0{,}006$

2) $X = \dfrac{(a+b)e}{\sqrt{c^2 - d^2}}$

$a = 3{,}87 \pm 0{,}03$

$b = 1{,}767 \pm 0{,}004$

$c = 3{,}663 \pm 0{,}005$

$d = 0{,}117 \pm 0{,}007$

$e = 2{,}47 \pm 0{,}06$

3) $X = ab^3 - c - \dfrac{3c^2}{a+b}$

$a = 5{,}8$

$b = 13{,}74$

$c = 9{,}665$

---

1). **І спосіб**

Знайдемо наближене значення X :

$bc = 26{,}3; \quad \sqrt[3]{a} = 2{,}417; \quad X^* = 2{,}417/26{,}3 = 0{,}0919$

Далі знаходимо граничні відносні похибки:

$$\delta_a = \frac{0{,}003}{1{,}342} = 0{,}002; \quad \delta_b = \frac{0{,}0012}{0{,}487} = 0{,}0025; \quad \delta_c = \frac{0{,}006}{54{,}065} = 0{,}0001.$$

Граничну відносну похибку значення X знайдемо, використовуючи формулу:

$$\delta_X = \frac{1}{3}\delta_a + \delta_b + \delta_c = 0{,}002 + 0{,}0025 + 0{,}0001 = 0{,}005(0{,}5\%).$$

Гранична абсолютна похибка значення X дорівнюватиме:

$$\Delta_X = X^* \cdot \delta_X = 0{,}0919 \cdot 0{,}005 = 0{,}0005.$$

Отже, $X = 0{,}0919 \pm 0{,}0005\,(\delta_X = 0{,}5\%)$.

II спосіб

Згідно формули (1.25) гранична абсолютна похибка значення X дорівнює:

$$|\Delta_X| \le \left|\frac{\partial X}{\partial a}\right|\Delta_a + \left|\frac{\partial X}{\partial b}\right|\Delta_b + \left|\frac{\partial X}{\partial c}\right|\Delta_c$$

Оскільки

$$\frac{\partial X}{\partial a} = \frac{1}{3}\frac{a^{-\frac{2}{3}}}{bc}; \quad \frac{\partial X}{\partial b} = -\frac{\sqrt[3]{a}}{b^2 c}; \quad \frac{\partial X}{\partial c} = -\frac{\sqrt[3]{a}}{bc^2},$$

то:

$$|\Delta_X| \le \frac{1}{3}\frac{a^{-\frac{2}{3}}}{bc}\Delta_a + \frac{\sqrt[3]{a}}{b^2 c}\Delta_b + \frac{\sqrt[3]{a}}{bc^2}\Delta_c.$$

Підставивши числові значення у останню формулу, одержимо:

$$|\Delta_X| \le \frac{1}{3}\frac{(1{,}342)^{-\frac{2}{3}}}{0{,}487 \cdot 54{,}065} \cdot 0{,}03 + \frac{\sqrt[3]{1{,}342}}{(0{,}487)^2 \cdot 54{,}065} \cdot 0{,}0012 + \frac{\sqrt[3]{1{,}342}}{0{,}487 \cdot (54{,}065)^2} \cdot 0{,}006 \approx 0{,}0005.$$

Отже, $X = 0{,}0919 \pm 0{,}0005\,(\delta_X = 0{,}0005/0{,}0919 = 0{,}5\%)$.

2). Знайдемо $a + b = 5{,}64 \pm 0{,}034; \quad c - d = 3{,}546 \pm 0{,}012; \quad c + d = 3{,}780 \pm 0{,}012$. Тоді:

$$\delta_X = \delta_{a+b} + \delta_e + \frac{1}{2}\delta_{c-d} + \frac{1}{2}\delta_{c+d} = \frac{0{,}034}{5{,}64} + \frac{0{,}006}{2{,}47} + \frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}012}{3{,}546} + \frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}012}{3{,}780} = 0{,}029(2{,}9\%).$$

$$X^* = \frac{5{,}64 \cdot 2{,}47}{\sqrt{3{,}546 \cdot 3{,}78}} = 3{,}806.$$

Гранична абсолютна похибка значення X дорівнюватиме:

$$\Delta_X = X^* \cdot \delta_X = 3{,}806 \cdot 0{,}029 = 0{,}11.$$

Отже, $X = 3{,}806 \pm 0{,}11\,(\delta_X = 2{,}9\%)$.

3).Знаходимо:

$$X = ab^3 - c - \frac{3c^2}{a+b} = 5{,}8 \cdot (13{,}74)^3 - 9{,}665 - \frac{3 \cdot (9{,}665)^2}{5{,}8 + 13{,}74} = 5{,}8 \cdot 2594 - 9{,}665 - \frac{3 \cdot 93{,}412}{19{,}54} =$$

$$= 15045 - 9{,}665 - \frac{280{,}236}{19{,}54} = 15045 - 9{,}665 - 14{,}3417 = 15020{,}993$$

Розділ 2. Наближене розв'язування нелінійних рівнянь

2.1. Загальна постановка задачі. Аналітичний та графічний алгоритми відокремлення кореня

Нехай задано рівняння виду:

$$f(x) = 0, \tag{2.1}$$

де $f(x)$ – задана алгебраїчна або трансцендентна функція.

Обмежимо задачу пошуком лише простих ізольованих коренів рівняння (2.1), оскільки задача знаходження *всіх* коренів рівняння (2.1) складна і в загальному випадку не має надійних алгоритмів її розв'язування.

Наближене знаходження коренів рівняння (2.1) проводиться в *три* етапи: спочатку корені відокремлюються, тобто знаходяться відрізки заданої довжини, що містять лише один корінь рівняння, потім вибирають початкові наближення коренів (деякі значення із заданих відрізків) і на останньому етапі наближені значення коренів уточнюються тим чи іншим способом, поки не буде досягнуто бажаної точності.

Нехай функція $f(x)$ в рівнянні (2.1) неперервна в заданому інтервалі, і нехай рівняння (2.1) має лише ізольовані корені, та вимагається відокремити ці корені.

Існує графічний та аналітичний методи відокремлення коренів.

Аналітичний метод відокремлення коренів грунтується на наступних теоремах з аналізу:

Теорема 2.1. Якщо неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ набуває значень різних знаків на кінцях відрізку, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$, то усередині цього відрізку міститься *принаймні один* корінь рівняння (2.1), тобто існує хоча б один $\bar{x}$, такий, що $f(\bar{x}) = 0$.

Теорема 2.2. Якщо неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ набуває значень різних знаків на кінцях відрізку, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$, а похідна $f'(x)$ зберігає знак всередині даного відрізка, то всередині відрізка існує *тільки один* корінь рівняння (2.1).

Сформулюємо **алгоритм відокремлення кореня** рівняння (2.1) (аналітичний):

1. знайти область визначення функції $f(x)$
2. визначити проміжки монотонності функції $f(x)$
3. у кожному проміжку вибрати дві внутрішні точки x_1 та x_1,

знайти $f(x_1)$, $f(x_2)$ і перевірити знак виразу $f(x_1)\cdot f(x_2)$:

- якщо $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$, то у даному проміжку існує один корінь ;
- якщо $f(x_1)\cdot f(x_2)>0$, то у даному проміжку кореня нема.

На практиці, для відокремлення кореня часто доводиться визначати знак функції $f(x)$ в досить великому числі точок.

Зручнішим, як правило, виявляється *графічний метод* відокремлення кореня. Корені рівняння (2.1) є абсцисами точок перетину графіку функції $y=f(x)$ з віссю абсцис. Проте, часто буває вигідніше подати рівняння (2.1) у вигляді

$$\varphi_1(x)=\varphi_2(x) \qquad (2.2)$$

($\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ простіші, ніж $f(x)$) і знайти абсциси точок перетину кривих $y=\varphi_1(x)$ та $y=\varphi_2(x)$. Бажано вказати відрізки якомога меншої довжини, які містять абсциси точок перетину цих кривих.

Практично надійніше поєднувати ці два методи. Спочатку зробити графічний рисунок, що показує розташування і число дійсних коренів, потім перевірити аналітичним методом, чи дійсно отримані з графіку відрізки містять корені цього рівняння. Справа у тому, що будувати графік з великою точністю недоцільно, а при малій точності графіку можливі помилки.

Приклад 2.1

Графічно відокремити корені рівняння

$$f(x)=x^5-x-0{,}2=0$$

так, щоб довжина відрізку $[a,b]$, що містить корінь, не перевищувала 0,5; тобто $b-a\le 0{,}5$ та $f(a)\cdot f(b)<0$.

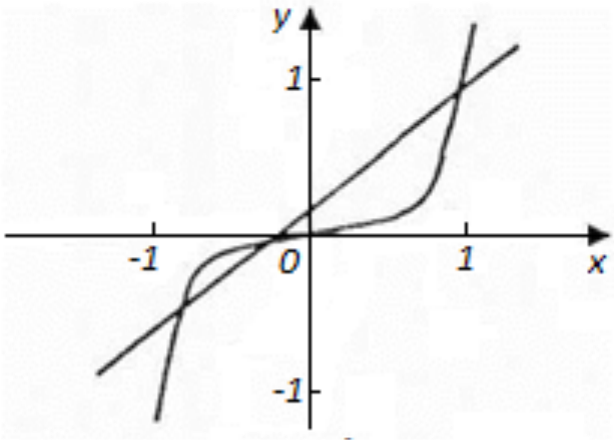


Рис.2.1 - Графіки функцій $\boldsymbol{y = x^5}$; $\boldsymbol{y = x + 0,2}$

Зводимо рівняння до вигляду (2.2): $x^5 = x + 0,2$ і будуємо графіки функцій $y = x^5$; $y = x + 0,2$. На рис. 2.1 показано, що це рівняння має три дійсні корені, приблизно $\bar{x}_1 \approx -0,2$; $\bar{x}_2 \approx -0,9$; $\bar{x}_3 \approx 1,1$; причому $\bar{x}_1 \in [-0,4; 0]$; $\bar{x}_2 \in [-1,0; -0,8]$; $\bar{x}_3 \in [1,0; 1,3]$.

Дійсно,

$f(-0,4) = (-0,4)^5 + 0,2 > 0$; $f(0) = -0,2 < 0$;

$f(-1) = (-1)^5 + 1 - 0,2 < 0$; $f(-0,8) = (-0,8)^5 + 0,6 > 0$;

$f(1) = -0,2 < 0$; $f(1,3) > 0$.

<u>Приклад 2.2</u>

Аналітично відокремити корені рівняння:

$x^3 - 5x + 4 = 0.$

Областю визначення функції $f(x) = x^3 - 5x + 4$ є вся числова вісь OX. Визначимо проміжки монотонності функції:

$f'(x) = 3x^2 - 5;\quad 3x^2 - 5 = 0;\quad x_1 = 1,29;\quad x_2 = -1,29.$

Стаціонарні точки $x_1 = 1,29$; $x_2 = -1,29$ розбивають числову вісь OX на три проміжки: $(-\infty, -1,29]$; $[-1,29, 1,29]$; $[1,29, +\infty)$. У кожному проміжку виберемо дві внутрішні точки x_1, x_2, обчислимо $f(x_1), f(x_2)$ і перевіримо знак виразу $f(x_1) \cdot f(x_2)$. Всі розрахунки занесемо у Таблицю 1:

Таблиця 1

Проміжок	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_1) \cdot f(x_2)$
$(-\infty, -1,29]$	-4	-2	-40	6	-240
$[-1,29; 1,29]$	-1	1,2	8	-0,272	-2,176
$[1,29, +\infty)$	1,4	2	-0,256	2	-0,512

Оскільки всі елементи останнього стовпчика Таблиці 1 є від’ємними, то робимо висновок, що задане рівняння має три дійсних корені на проміжках: $[-4;-2]$, $[-1;1,2]$, $[1,4;2]$.

Теорема (про загальну оцінку похибки наближеного значення кореня)

Абсолютна гранична похибка наближеного значення кореня рівняння (2.1) визначається формулою:

$$|\xi - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{\mu}, \quad \mu = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|, \quad f'(x) \ne 0, \tag{2.3}$$

де ξ - точне значення кореня, x_n - наближене значення кореня після n-ої ітерації.

Доведення:

Застосуємо теорему Лагранжа:

$f(x_n) - f(\xi) = (x_n - \xi)f'(c), \quad c \in [a,b].$

Враховуючи, що $f(\xi) = 0$, одержимо:

$|f(x_n) - f(\xi)| = |f(x_n)| \ge \mu|x_n - \xi|,\ \mu = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|$.

Отже:

$$|\xi - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{\mu}, \qquad f'(x) \ne 0 .$$

Теорема доведена.

У наступних параграфах розглянемо детально методи уточнення коренів рівняння (2.1):

1. Метод ділення відрізка навпіл (метод діхотомії);
2. Метод січних (метод хорд);
3. Метод дотичних (метод Ньютона);
4. Метод простої ітерації.

Всі методи дають змогу знаходити тільки *дійсні* корені рівняння (2.1).

2.2. Метод ділення відрізка навпіл (метод діхотомії)

Нехай треба знайти з заданою точністю ε дійсний корінь рівняння (2.1), що міститься в інтервалі (a,b).

Найпростішим методом уточнення коренів є метод ділення відрізка навпіл. Для цього проміжок $[a, b]$, що містить корінь, ділиться точкою $x = \frac{a+b}{2}$ навпіл, і надалі розглядається та його половина, яка містить корінь, тобто функція $f(x)$ на її кінцях має різні знаки. Для знаходження наближеного до точного кореня значення x_n з точністю ε процес ділення відрізка навпіл продовжуємо до тих пір, поки не виконуватиметься нерівність $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$, де $[a_n, b_n]$ - відрізок після n-го ділення, що містить корінь, тобто $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$. За наближене значення кореня можна вибрати будь-яку точку отриманого проміжку $[a_n, b_n]$, наприклад $x_n = (a_n + b_n)/2$.

Збіжність методу ділення відрізка навпіл повільна. На практиці цей метод зручно застосовувати для грубої оцінки кореня рівняння (2.1).

2.3. Метод хорд (січних)

Розглянемо більш швидкий метод знаходження кореня рівняння (2.1) на заданому відрізку $[a, b]$.

Геометрична інтерпретація методу хорд:

замість точки перетину осі OX та графіку функції $f(x)$ (ξ - точний корінь) розглядається точка перетину осі OX та відрізку прямої (січної), що з’єднує кінці дуг графіка (x_{n+1} - наближений корінь) (Рис.2.2).

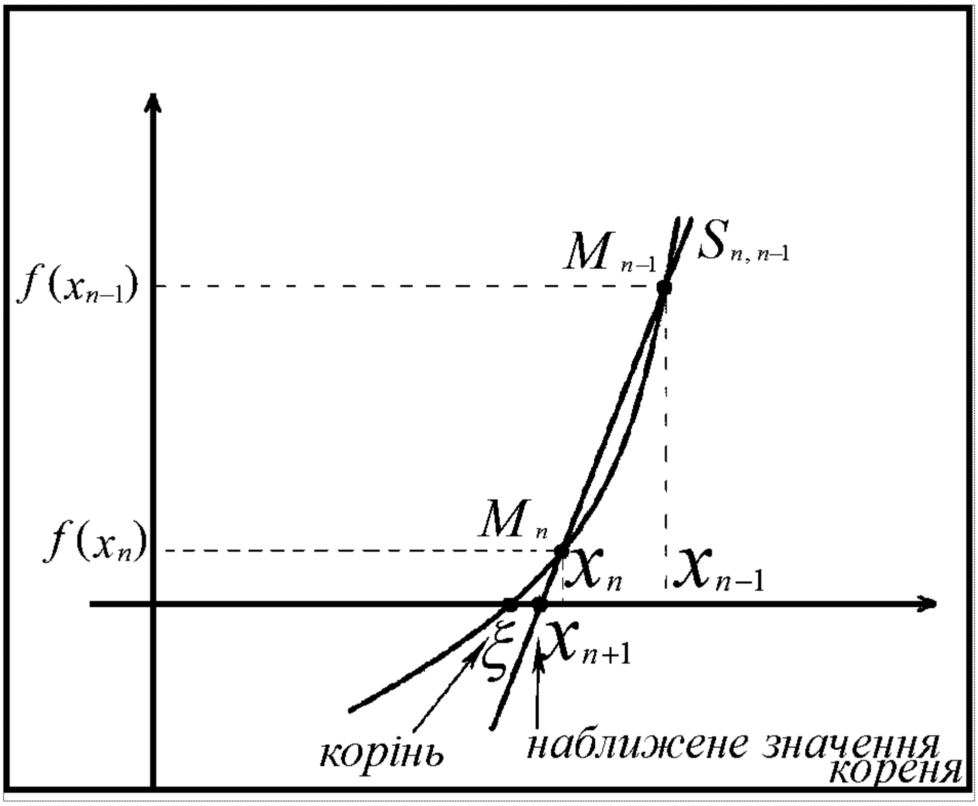


Рис.2.2

Знайдемо рівняння січної $S_{n,n-1}$, що проходить через дві точки $M_n(x_n, f(x_n))$ та $M_{n-1}(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$:

$$\frac{x - x_n}{x_{n-1} - x_n} = \frac{y - f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \tag{2.4}$$

Підставимо у (2.4) замість x та y координати точки $O(x_{n+1}, 0)$, яка належить січній:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n-1} - x_n} = \frac{-f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

Виразивши з останньої формули x_{n+1} одержимо **формулу січних**:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{2.5}$$

Метод січних є *двокроковим*: для знаходження наближення x_{n+1} потрібно знати два попередніх значення x_n та x_{n-1}.

Для збіжності ітераційного процесу методу хорд потрібно коректно вибирати початкове наближення. Якщо $f(b)\cdot f''(x) > 0$, то за початкове наближення вибирається точка $x_0 = a$, а **ітераційна формула січних** матиме вигляд:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(b) - b f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}. \tag{2.6}$$

Якщо $f(a)\cdot f''(x) > 0$, то за початкове наближення вибирається точка $x_0 = b$, а **ітераційна формула січних** матиме вигляд:

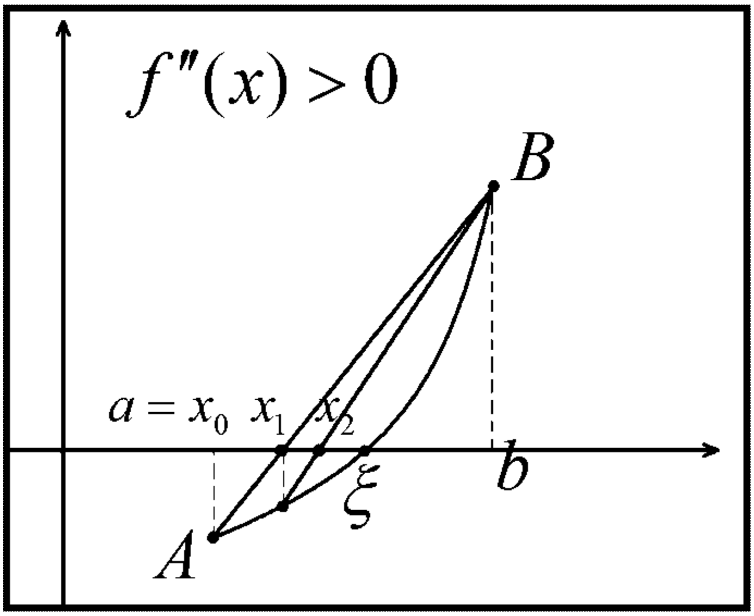
$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(a) - a f(x_{n-1})}{f(a) - f(x_{n-1})}. \tag{2.7}$$

У першому випадку точка b лишається нерухома, а послідовні наближення (2.6) утворюють обмежену монотонно зростаючу послідовність (Рис.2.3), таку, що:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < \xi < b$$

У другому випадку точка a лишається нерухома, а послідовні наближення (2.7) утворюють обмежену монотонно спадну послідовність (Рис.2.4), таку, що:

$$a < \xi < \ldots < x_{n+1} < x_n < \ldots < x_1 < x_0.$$



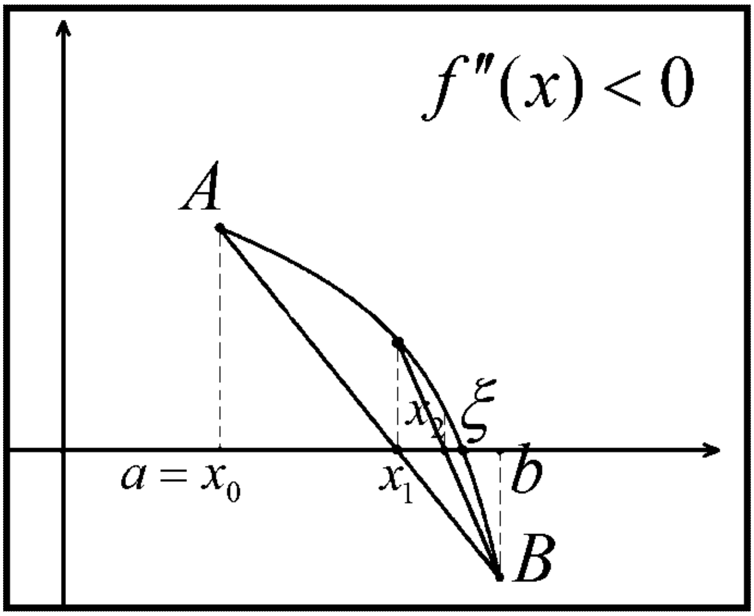


Рис.2.3

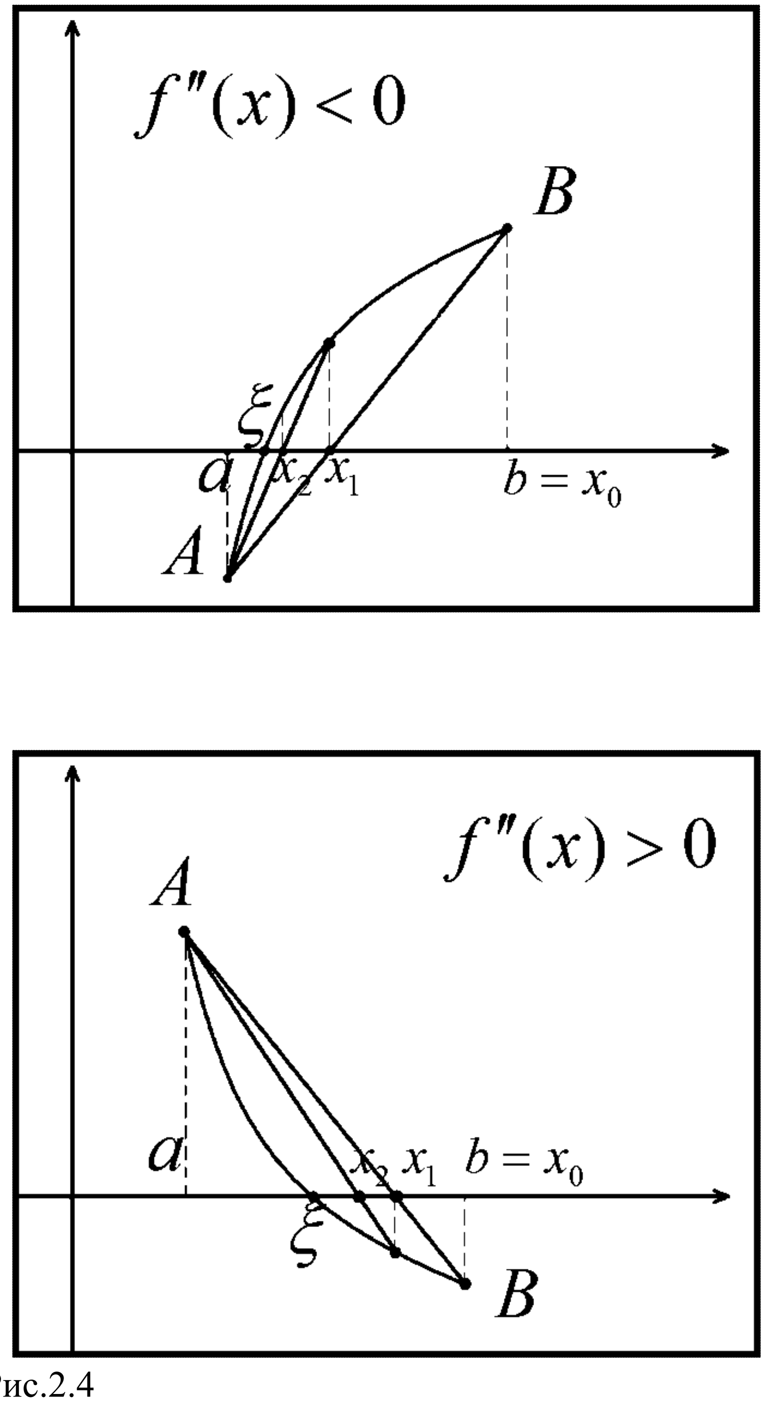


Рис.2.4

Наведемо формулу, яку можна використовувати як критерій закінчення ітерацій у методі хорд:

$$\frac{M_1 - m_1}{m_1}\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon, \tag{2.8}$$

де $M_1 = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|, \quad m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|,$

ε - задана гранична абсолютна похибка.

Якщо відрізок $[a, b]$ настільки малий, що справедливо:

$M_1 \leq 2m_1$,

то формула (2.8) спрощується:

$\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon$.

2.4. Метод Ньютона (дотичних)

Метод Ньютона застосовують для розв’язку широкого класу нелінійних рівнянь.

Геометрична інтерпретація методу Ньютона:

дуга АВ графіка функції замінюється дотичною до АВ; точка перетину дотичної з віссю ОХ є наближеним значенням кореня (Рис.2.5).

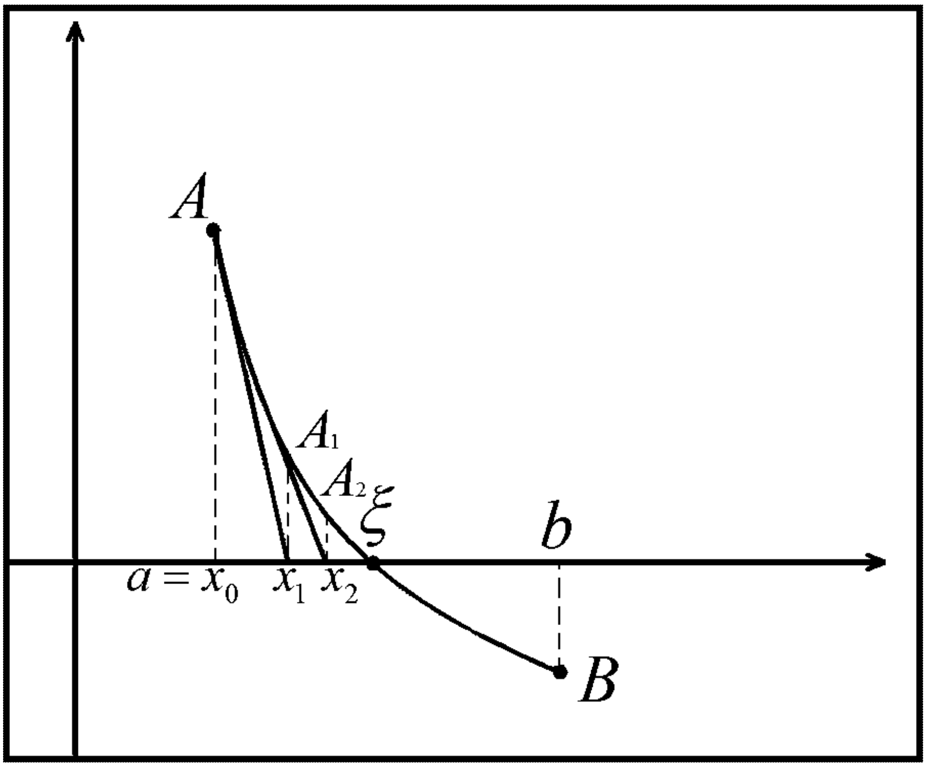


Рис.2.5

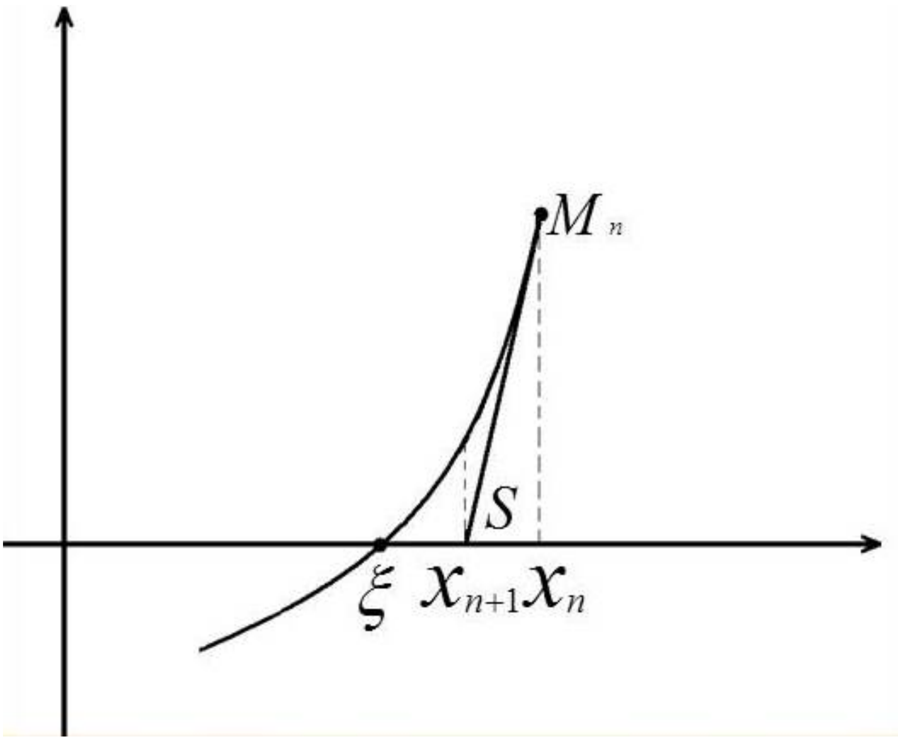


Рис.2.6

Запишемо рівняння дотичної у точці M_n (рис. 2.6):

$$y - f(x_n) = f'(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) .$$

У точці S з координатами $(x_{n+1,} 0)$ знаходиться $n+1$– наближення кореня:

$$-f(x_n) = f'(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) .$$

Ітераційна формула $n+1$- наближення кореня:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0,1,2\ldots \qquad (2.9)$$

<u>**Зауваження**.</u>

У формулі (2.9) за нульове наближення x_0 вибирають значення з проміжку $[a,b]$, для якого виконується умова:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 .$$

Іншими словами, за початкове наближення вибирають той кінець проміжку $[a,b]$, ордината якого має однаковий знак з $f''(x)$.

Згідно формули (2.9) метод Ньютона є *однокроковим* – для знаходження наближення x_{n+1} потрібно знати одне попереднє значення x_n.

Збіжність обчислень методу Ньютона гарантується лише для монотонних та обмежених за крутістю нелінійних функцій а також коректного вибору початкового наближення.

Теорема 2.3 (про достатні умови збіжності методу Ньютона)

Якщо на проміжку $[a,b]$ похідні $f'(x)$ та $f''(x)$ відмінні від нуля та знакосталі, крім того $f(a) \cdot f(b) < 0$ і початкове наближення x_0задовольняє умову:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0,$$

то ітерації (2.9) методу Ньютона збігаються до єдиного кореня ξ рівняння (2.1).

Оцінимо похибку i-ої ітерації методу Ньютона. Скористаємось загальною оцінкою (див. формулу (2.3)) :

$$|\xi - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{\mu}, \quad \mu = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|, \quad f'(x) \ne 0.$$

Оцінювання $|f(x_n)|$ здійснюється з використанням ряду Тейлора, де як x та x_0 вибираються x_n та x_{n-1}, відповідно:

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2} f''(c)(x_n - x_{n-1})^2.$$

Сума перших двох доданків у правій частині формули дорівнює нулю згідно (2.9), тому, оцінюючи зверху останній вираз, одержимо:

$$|f(x_n)| \le \frac{M_2}{2}(x_n - x_{n-1})^2,$$

де $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Таким чином, метод Ньютона має квадратичну збіжність:

$$|\xi - x_n| \le \frac{M_2}{2}(x_n - x_{n-1})^2,$$

де $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Умова закінчення ітерацій:

$$\frac{M_2}{2}(x_n - x_{n-1})^2 < \varepsilon,$$

ε - задана гранична абсолютна похибка.

2.5. Метод простої ітерації

Уточнення дійсного кореня рівняння (2.1) методом простої ітерації відбувається за наступним алгоритмом:

1 крок привести вихідне рівняння $f(x) = 0$ до *канонічного* виду:

$$x = \varphi(x) \qquad (2.10)$$

(це завжди можна зробити заміною: $x = x + cf(x)$, де с – невідома константа;

2 крок перевірити *умову збіжності* методу (константу с підібрати таким чином, щоб виконувалась умова збіжності): $|\varphi'(x)| \le q < 1$ на проміжку $[a,b]$;

3 крок (n+1) наближення кореня визначити за формулою:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

Геометрична інтерпретація методу ітерацій (Рис.2.7)

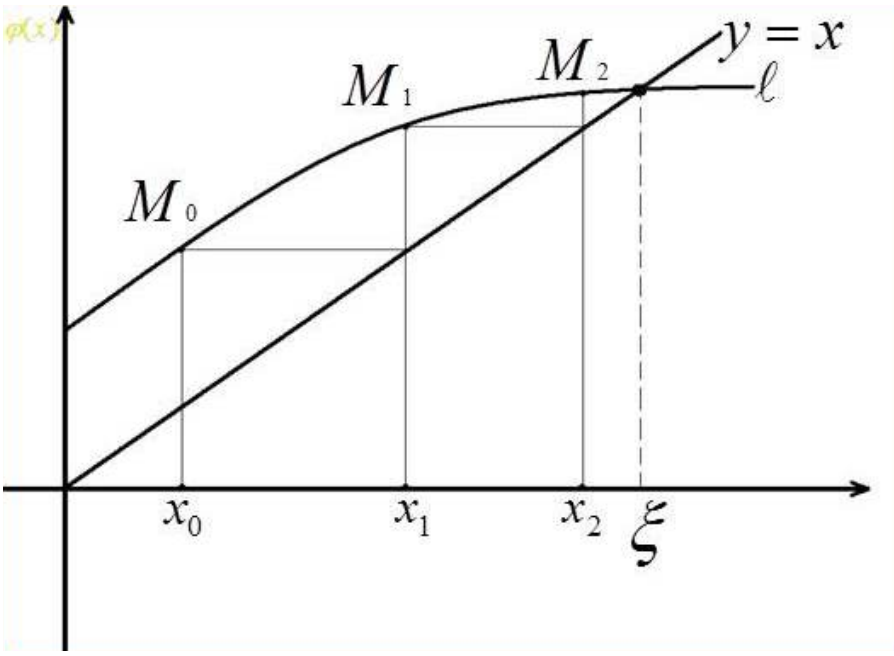


Рис. 2.7

Зобразимо графіки лівої та правої частини рівняння (2.10): $y = x$ та $y = \varphi(x)$ (крива l). *Точним* розв'язком рівняння (2.10) є абсциса точки перетину бісектриси $y = x$ та кривої l (точка ξ). Зауважимо, що точок перетину може бути декілька. Ітераційна процедура наближення до точного значення кореня відбувається наступним чином:

- за початковим наближенням x_0 знаходять на кривій l точку $M_0(x_0, \varphi(x_0))$;
- через точку $M_0(x_0, \varphi(x_0))$ проводять пряму, паралельну осі OX;
- знаходять точку перетину прямої з бісектрисою $y = x$;
- абсциса знайденої точки вибирається за наступне наближення x_1;
- процес продовжують до досягнення бажаної точності (*умова закінчення ітерацій*):

$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon,$ де ε - задана гранична абсолютна похибка.

Теорема 2.4 (про достатні умови збіжності методу простої ітерації)

Нехай функція $\varphi(x)$ визначена та диференційована на відрізку $[a,b]$. Тоді, якщо існує таке число q, що $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ для $a < x < b$, то:

1. процес ітерації

$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1,2, \dots$

збіжний, незалежно від початкового значення $x_0 \in [a, b]$;

2. граничне значення $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$ є єдиним коренем рівняння $x = \varphi(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Доведення:

Розглянемо два послідовних наближення:

$x_n = \varphi(x_{n-1})$ та $x_{n+1} = \varphi(x_n)$
$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})$

Застосуємо теорему Лагранжа та одержимо:

$$x_{n+1} - x_n = (x_n - x_{n-1})\varphi'(c), \quad c \in [x_{n-1}, x_n]$$

На основі умови $|\varphi'(x)| \le q < 1, \quad a < x < b$, одержимо:

$$|x_{n+1} - x_n| \le q|x_n - x_{n-1}|$$

Покладаючи *n=1,2,3,...,* одержимо:

$|x_2 - x_1| \le q|x_1 - x_0|$
$|x_3 - x_2| \le q|x_2 - x_1| \le q^2|x_1 - x_0|$
……………………………………………………………………..…
$|x_{n+1} - x_n| \le q^n|x_1 - x_0|$

Розглянемо ряд:

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots$$

для якого наші послідовні наближення x_n є *(n+1)*-ми частковими сумами:

$$x_n = S_{n+1}$$

За ознакою Д'Аламбера ряд абсолютно збіжний, отже:

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = \xi, \quad \xi \in [a, b]$$

З іншого боку, так як $x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1,2, ...$, то:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}), \qquad \xi = \varphi(\xi).$$

Таким чином, ξ є коренем рівняння $x = \varphi(x)$. Цей корінь єдиний. Дійсно, нехай існує ще один корінь μ. Тоді:

$\mu = \varphi(\mu), \quad \mu - \xi = \varphi(\mu) - \varphi(\xi).$

Згідно теореми Лагранжа:

$$\mu - \xi = (\mu - \xi)\cdot\varphi'(c), \quad (\mu - \xi)\cdot(1 - \varphi'(c)) = 0, \quad c \in [a, b].$$

Оскільки $1 - \varphi'(c) \ne 0$, то $\mu = \xi$. Теорема доведена.

Зауваження

В умовах **Теореми 2.4** метод ітерацій збіжний для будь-якого вибору початкового наближення.

Контрольні запитання

1. *Що означає процес відокремлення кореня рівняння?*
2. *В чому суть графічного методу відокремлення кореня?*
3. *В чому суть аналітичного методу відокремлення кореня?*
4. *Сформулюйте теорему про загальну оцінку похибки наближеного значення кореня.*
5. *Назвіть методи уточнення коренів нелінійних рівнянь.*
6. *Дайте геометричну інтерпретацію методу хорд.*
7. *Дайте геометричну інтерпретацію методу Ньютона.*
8. *Дайте геометричну інтерпретацію методу простої ітерації.*
9. *Сформулюйте теорему про достатні умови збіжності методу Ньютона.*
10. *Сформулюйте теорему про достатні умови збіжності методу простої ітерації.*

Тест "Так/Ні " для самоперевірки знань студентів

1. Наближені методи дають змогу знаходити тільки дійсні корені нелінійних рівнянь.
2. Уточнювати наближене значення кореня необхідно на проміжку де є хоча б один корінь рівняння.
3. Якщо неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ набуває значень різних знаків на кінцях відрізку, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$, то усередині цього відрізку міститься тільки один корінь рівняння.
4. Метод дотичних та метод простої ітерації є одно кроковими.
5. Метод хорд завжди збіжний.
6. Метод Ньютона має квадратичну збіжність.
7. У методі простої ітерації вихідне рівняння не завжди можна привести до канонічного виду $x = \varphi(x)$.
8. Метод ітерацій збіжний для будь-якого вибору початкового значення.
9. Збіжність методу ділення відрізка навпіл повільна.
10. Для неперервних функцій абсолютну граничну похибку можна оцінити за формулою: $|\xi - x_n| \le \frac{|f'(x_n)|}{\mu}, \quad \mu = \min\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|, \quad f'(x) \ne 0.$

Відповіді

1.Так. 2. Ні. 3. Ні. 4. Так. 5. Ні. 6. Так. 7. Ні. 8. Ні. 9. Так. 10. Ні.

Задачі для самостійного розв'язування

Завдання3

1. Відокремити корені аналітично.
2. Відокремити корені аналітично та уточнити один з них методом дихотомії з точністю до $\varepsilon = 0{,}01$.

Варіант 1 1) $2^x + 5x - 3 = 0$ 2) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$	**Варіант 2** 1) $arctg\,x - \frac{1}{3x^3} = 0$ 2) $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$
Варіант 3 1) $5^x + 3x = 0$ 2) $x^4 - x - 1 = 0$	**Варіант 4** 1) $2e^x = 5x$ 2) $2x^4 - x^2 - 10 = 0$
Варіант 5 1) $3^{x-1} - 2 - x = 0$ 2) $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$	**Варіант 6** 1) $2arctg\,x - \frac{1}{2x^3} = 0$ 2) $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$
Варіант 7 1) $e^{2x} - 2x + 1 = 0$ 2) $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$	**Варіант 8** 1) $5^x - 6x - 3 = 0$ 2) $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$
Варіант 9 1) $arctg(x-1) + 2x = 0$ 2) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$	**Варіант 10** 1) $2arcctg\,x - x + 3 = 0$ 2) $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0$
Варіант 11 1) $3^x + 2x - 2 = 0$ 2) $2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0$	**Варіант 12** 1) $2arcctg\,x - 3x + 2 = 0$ 2) $2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0$
Варіант 13 1) $3^x + 2x - 5 = 0$ 2) $x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$	**Варіант 14** 1) $2e^x + 3x + 1 = 0$ 2) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$
Варіант 15 1) $3^{x-1} - 4 - x = 0$ 2) $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$	**Варіант 16** 1) $arctg\,x - \frac{1}{3x^3} = 0$ 2) $x^4 - x - 1 = 0$
Варіант 17 1) $e^x + x + 1 = 0$ 2) $2x^4 - x^2 - 10 = 0$	**Варіант 18** 1) $3^x - 2x + 5 = 0$ 2) $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$
Варіант 19 1) $arctg(x-1) + 3x - 2 = 0$ 2) $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$	**Варіант 20** 1) $2arcctg\,x - x + 3 = 0$ 2) $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$
Варіант 21 1) $2^x - 3x - 2 = 0$ 2) $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$	**Варіант 22** 1) $arcctg\,x + 2x - 1 = 0$ 2) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$

Варіант 23	**Варіант 24**
1) $3^x + 2x - 3 = 0$ 2) $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0$	1) $2e^x - 2x - 3 = 0$ 2) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$
Варіант 25 1) $3^x + 2 + x = 0$ 2) $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$	**Варіант 26** 1) $arcctg(x-1) + 2x - 3 = 0$ 2) $x^4 - x - 1 = 0$

Зразок виконання Завдання 3

1). $2^x - 3x - 1 = 0$
2). $x^4 - 12x^2 + 2 = 0$

---

1). Областю визначення функції $f(x) = 2^x - 3x - 1$ є вся числова вісь OX. Визначимо проміжки монотонності функції:

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 3; \quad 2^x \ln 2 - 3 = 0; \quad 2^x = \frac{3}{\ln 2} \approx 4{,}328; \quad x \ln 2 = \ln 4{,}328; \quad x = \frac{\ln 4{,}328}{\ln 2} \approx 2{,}114.$$

Стаціонарна точка $x = 2{,}114$ розбиває числову вісь ОХ на два проміжки: $(-\infty, 2{,}114]$; $[2{,}114, +\infty)$. У кожному проміжку виберемо дві внутрішні точки x_1, x_2, обчислимо $f(x_1)$, $f(x_2)$ і перевіримо знак виразу $f(x_1)\cdot f(x_2)$. Всі розрахунки занесемо у Таблицю 2:

Таблиця 2

Проміжок	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_1)\cdot f(x_2)$
$(-\infty; 2{,}114]$	-1	2	2,5	-3	-7,5
$[2{,}114; +\infty)$	3	4	-2	3	-6

Оскільки всі елементи останнього стовпчика Таблиці 2 є від'ємними, то робимо висновок, що задане рівняння має два дійсних корені на проміжках: $[-1; 2]$, $[3; 4]$.

2). Областю визначення функції $f(x) = x^4 - 12x^2 + 2$ є вся числова вісь OX. Визначимо проміжки монотонності функції:

$$f'(x) = 4x^3 - 24x; \quad 4x^3 - 24x = 0; \quad 4x(x^2 - 6) = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = -\sqrt{6} \approx -2{,}45; \quad x_2 = \sqrt{6} \approx 2{,}45.$$

Стаціонарні точки $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{6} \approx -2{,}45$, $x_2 = \sqrt{6} \approx 2{,}45$ розбивають числову вісь ОХ на чотири проміжки: $(-\infty; -2{,}45]$; $[-2{,}45; 0]$; $[0; 2{,}45]$; $[2{,}45; +\infty)$. У кожному проміжку виберемо дві внутрішні точки x_1, x_2, обчислимо $f(x_1)$, $f(x_2)$ і перевіримо знак виразу

$f(x_1)\cdot f(x_2)$. Всі розрахунки занесемо у Таблицю 3:

Таблиця 3

Проміжок	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_1)\cdot f(x_2)$
$(-\infty;-2{,}45]$	-4	-3	66	-25	-1650
$[-2{,}45;0]$	-1	-0,1	-9	1,8801	-16,9209
$[0;2{,}45]$	0,1	1	1,8801	-9	-16,9209
$[2{,}45;+\infty)$	3	4	-25	66	-1650

Оскільки всі елементи останнього стовпчика Таблиці 3 є від'ємними, то робимо висновок, що задане рівняння має чотири дійсних корені на проміжках: $[-4;-3]$; $[-1;-0{,}1]$; $[0{,}1;1]$; $[3;4]$.

Уточнимо методом дихотомії один з коренів, наприклад, $x_4=[3;4]$.

Для цього проміжок $[3;4]$, що містить корінь, ділимо точкою $x=\dfrac{3+4}{2}=3{,}5$навпіл. Знаходимо $f(3)=-25;\ f(3{,}5)=5{,}06;\ f(4)=66.$ Оскільки $f(3)\cdot f(3{,}5)<0,$ то наступне уточнення кореня проводимо на проміжку $[3;3{,}5]$. Ітерації продовжуємо до тих пір, поки не виконуватиметься нерівність $\dfrac{4-3}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}<0{,}01$, n – кількість ітерацій. Всі розрахунки занесемо у Таблицю 4.

Таблиця 4

n	a	b	$x=\dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$\dfrac{1}{2^n}$
1	3	4	3,50	-25	66	5,0625	0,5
2	3	3,5	3,25	-25	5,0625	-13,1836	0,25
3	3,25	3,50	3,38	-13,1836	5,0625	-4,94116	0,13
4	3,38	3,50	3,44	-4,94116	5,0625	-0,16942	0,06
5	3,44	3,50	3,47	-0,20939	5,0625	2,366837	0,03
6	3,44	3,47	3,45	-0,20939	2,408685	1,084405	0,02
7	3,44	3,45	3,45	-0,20939	1,084405	0,433717	0,008

Як бачимо, бажаної точності досягнуто на сьомій ітерації $0{,}008<0{,}01$. Наближене значення кореня дорівнює $x_4=3{,}45$.

Завдання 4

1. Відокремити аналітично хоча б один дійсний корінь та уточнити його з точністю до $\varepsilon=0{,}001$ а) методом хорд; б) методом Ньютона.

Варіант 1	**Варіант 2**
$x^3-3x^2+9x-8=0$	$x^3-6x-8=0$

Варіант 3 $x^3-3x^2+6x+3=0$	**Варіант 4** $x^3-0.1x^2+0.4x-1.5=0$
Варіант 5 $x^3-3x^2+9x+2=0$	**Варіант 6** $x^3+x-5=0$
Варіант 7 $x^3+0.2x^2+0.5x-1.2=0$	**Варіант 8** $x^3+3x+1=0$
Варіант 9 $x^3+0.2x^2+0.5x-2=0$	**Варіант 10** $x^3-3x^2+12x-9=0$
Варіант 11 $x^3-0.2x^2+0.3x-1.2=0$	**Варіант 12** $x^3-3x^2+6x-2=0$
Варіант 13 $x^3-0.1x^2+0.4x-1.5=0$	**Варіант 14** $x^3+3x^2+6x-1=0$
Варіант 15 $x^3+0.1x^2+0.4x-1.2=0$	**Варіант 16** $x^3+4x-6=0$
Варіант 17 $x^3+0.2x^2+0.5x+0.8=0$	**Варіант 18** $x^3-3x^2+12x-12=0$
Варіант 19 $x^3-0.2x^2+0.3x+1.2=0$	**Варіант 20** $x^3-2x+4=0$
Варіант 21 $x^3-0.2x^2+0.5x-1.4=0$	**Варіант 22** $x^3-3x^2+6x-5=0$
Варіант 23 $x^3-0.1x^2+0.4x+1.2=0$	**Варіант 24** $x^3-0.2x^2+0.5x-1=0$
Варіант 25 $x^3+3x^2+12x+3=0$	**Варіант 26** $x^3-0.1x^2+0.4x+2=0$

Зразок виконання Завдання 4

$x^3-2x^2+2x-4=0$

1) а). Областю визначення функції $f(x)=x^3-2x^2+2x-4$ є вся числова вісь OX .

Визначимо проміжки монотонності функції:

$f'(x)=3x^2-4x+2;\quad 3x^2-4x+2=0;\quad (D<0)$

Оскільки стаціонарних точок немає і $f'(x)>0$ на інтервалі $(-\infty;+\infty)$, то функція $f(x)$ монотонно зростає на всій числовій осі OX . Для $a=1$ та $b=3$ виконується умова $f(a)\cdot f(b)<0$, отже, дійсний корінь знаходиться на проміжку [1,3]. Так як $f''(x)=6x-4$ і $f(3)\cdot f''(x)>0$, то за початкове наближення виберемо $x_0=a=1$ і використаємо ітераційну формулу (2.6). Покладаючи $n=0,1,2,\ldots$, обчислюємо:

$$x_1 = \frac{x_0 f(b) - bf(x_0)}{f(b) - f(x_0)} = \frac{1 \cdot 11 - 3 \cdot (-3)}{11 - (-3)} = 1{,}4286;$$

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - bf(x_1)}{f(b) - f(x_1)} = \frac{1{,}4286 \cdot 11 - 3 \cdot (-2{,}309)}{11 - (-2{,}309)} = 1{,}7012;$$

…………………………….

Аналогічно знаходимо:
$x_3 = 1{,}8536$; $x_4 = 1{,}9309$; $x_5 = 1{,}9681$; $x_6 = 1{,}9854$; $x_7 = 1{,}9933$; $x_8 = 1{,}9969$; $x_9 = 1{,}9969$.

На кожній ітерації перевіряємо виконання умови:
$|x_n - x_{n-1}| < 0{,}001$

Бажаної точності досягнуто на дев'ятій ітерації. Наближене значення кореня дорівнює $x = 1{,}9969$.

б). Раніше було визначено, що дійсний корінь знаходиться на проміжку [1,3]. Так як $f(3) \cdot f''(x) > 0,$ то за початкове наближення виберемо $x_0 = b = 3$ і використаємо ітераційну формулу (2.9). Покладаючи $n = 0,1,2,...$, обчислюємо:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2{,}3529;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} == 2{,}0637;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} == 2{,}0026;$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} == 2.$$

Бажаної точності досягнуто на четвертій ітерації так як справедливо:
$\frac{M_2}{2}(x_4 - x_3)^2 = 0{,}00005 < 0{,}001,$
де $M_2 = \max\limits_{x \in [1,3]} |f''(x)| = \max\limits_{x \in [1,3]} |6x - 4| = 14.$
Крім того, легко перевірити, що $x = 2$ є точним коренем заданого рівняння.
Також можна зробити висновок, що метод Ньютона має кращу збіжність.

Завдання 5

Відокремити аналітично хоча б один дійсний корінь та уточнити його методом простої ітерації, виконавши п'ять ітерацій. Оцінити похибку методу.

Варіант 1 $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$	**Варіант 2** $x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$
Варіант 3 $x^3 - 2x + 2 = 0$	**Варіант 4** $x^3 + 3x - 1 = 0$
Варіант 5 $x^3 + x - 3 = 0$	**Варіант 6** $x^3 + 0.4x^2 + 0.6x - 1.6 = 0$

Варіант 7 $x^3 - 0.2x^2 + 0.4x - 1.4 = 0$	**Варіант 8** $x^3 - 0.1x^2 + 0.4x + 2 = 0$
Варіант 9 $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$	**Варіант 10** $x^3 - 0.2x^2 + 0.5x - 1 = 0$
Варіант 11 $x^3 - 0.1x^2 + 0.4x + 1.2 = 0$	**Варіант 12** $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$
Варіант 13 $x^3 - 0.2x^2 + 0.5x - 1.4 = 0$	**Варіант 14** $x^3 + 2x + 4 = 0$
Варіант 15 $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$	**Варіант 16** $x^3 + 0.2x^2 + 0.5x + 0.8 = 0$
Варіант 17 $x^3 + 4x - 6 = 0$	**Варіант 18** $x^3 + 0.1x^2 + 0.4x - 1.2 = 0$
Варіант 19 $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$	**Варіант 20** $x^3 - 0.1x^2 + 0.4x - 1.5 = 0$
Варіант 21 $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$	**Варіант 22** $x^3 - 0.2x^2 + 0.3x - 1.2 = 0$
Варіант 23 $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$	**Варіант 24** $x^3 + 0.2x^2 + 0.5x - 2 = 0$
Варіант 25 $x^3 + 3x + 1 = 0$	**Варіант 26** $x^3 + 0.2x^2 + 0.5x - 1.2 = 0$

Зразок виконання Завдання 5

$$x^3 - x + 7 = 0$$

Аналогічно попередньому знайдемо, що на проміжку $[-3,-1]$ знаходиться один дійсний корінь заданого рівняння. Запишемо рівняння у канонічній формі:
$x = x^3 + 7, \quad \varphi(x) = x^3 + 7$. Перевіримо умову збіжності методу простої ітерації:
$\max\limits_{[-3,-1]} |\varphi'(x)| = \max\limits_{[-3,-1]} |3x^2| = 27 > 1$.
Оскільки умова збіжності не виконується, виберемо для функції інше представлення: $\varphi(x) = x + cf(x) = x + c(x^3 - x + 7)$.
Знайдемо:
$$|\varphi'(x)| = \left|1 + c(3x^2 - 1)\right|_{[-3,-1]} < 1, \quad -1 < 1 + 11c < 1, \quad -0{,}182 < c < 0.$$
Виберемо $c = -0{,}1$.Тоді $\varphi(x) = x - 0{,}1(x^3 - x + 7)$. За початкове наближення візьмемо довільну точку з проміжку $[-3,-1]$, наприклад $x_0 = -1$. Виконаємо п'ять ітерацій за формулою $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ та одержимо:
$$x_1 = \varphi(x_0) = -1 - 0{,}1((-1)^3 - (-0{,}1) + 7) = -1{,}7; \quad x_2 = \varphi(x_1) = -2{,}0787;$$
$$x_3 = \varphi(x_2) = -2{,}0884; \quad x_4 = \varphi(x_3) = -2{,}0864; \quad x_5 = \varphi(x_4) = -2{,}0868.$$
Оцінимо похибку методу за формулою (2.3):
$$|\xi - x_5| \le \frac{|f(x_5)|}{\mu},$$

$f(x) = x^3 - x + 7; \quad f(x_5) = -0,00066; \quad \mu = \min\limits_{-3 \le x \le -1} |f'(x)| = \min\limits_{-3 \le x \le -1} |3x^2 - 1| = 2.$

Отже:

$$|\xi - x_5| \le \frac{|-0,00066|}{2} = 0,00033.$$

Таким чином, після п’ятої ітерації гранична абсолютна похибка методу простої ітерації не перевищує $0,00033$.

Розділ 3. Прямі методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

3.1. Огляд основних методів

Числові методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) поділяються на дві групи:

- *прямі методи* – точні методи розв'язання СЛАР для яких всі арифметичні операції виконуються точно;
- *ітераційні методи* – наближені методи розв'язання СЛАР за певними рекурентними співвідношеннями з наперед заданою точністю.

Ефективне застосування ітераційних методів суттєво залежить від коректного вибору початкового наближення а також від швидкості збіжності процесу.

До прямих методів розв'язання СЛАР належать:

1. Методи виключення Гауса, Жордана-Гауса, відображень;
2. Методи на основі обернення матриць (блочний метод, метод обведення);
3. Методи прогонки;
4. Методи факторизації (метод Халецького, метод квадратного кореня);
5. Методи ортогоналізації.

До ітераційних методів розв'язання СЛАР належать:

1. Метод простої ітерації;
2. Метод Зейделя;
3. Метод покоординатного спуску;
4. Метод Річардсона;
5. Метод верхньої релаксації.

При виборі того чи іншого методу для розв'язку СЛАР треба брати до уваги розмірність задачі. Кількість арифметичних операцій необхідна для розв'язку СЛАР з n невідомими різними методами подана у Таблиці 5:

Таблиця 5

Метод	кількість операцій	кількість операцій n=20	доцільність застосування ЕОМ для СЛАР з n > 20
метод Крамера	$n^2 \cdot n!$	10^{21}	не доцільно
метод Гауса	$\frac{2n^3 + 9n^2 + n}{6}$	3270	доцільно, можлива похибка обчислень
метод Жордана – Гауса	$\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}$	3080	доцільно, можлива похибка обчислень
метод відображень	$\frac{2n^3}{3}$	5333	доцільно, стійкий до похибки обчислень

3.2. Метод Жордана – Гауса

Розглянемо СЛАР з m лінійних рівнянь та n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.1}$$

Алгоритм методу Жордана – Гауса:

<u>1 крок </u>запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{21} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{3.2}$$

2 крок серед елементів a_{ij} вибирається ведучий елемент, який знаходиться на перетині ведучого рядка та ведучого стовпчика;

(для зменшення чутливості розв'язку до похибки обчислень рекомендується за ведучий елемент вибрати максимальний за абсолютною величиною елемент матриці А)

3 крок перераховуємо елементи ведучого рядка за формулою:

$$a'_{qk} = \frac{a_{qk}}{a_{qp}}, \tag{3.3}$$

де q - номер ведучого рядка; p - номер ведучого стовпчика;

4 крок елементи інших рядків розширеної матриці (3.2) обчислюються за правилом прямокутника:

$$a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{qk} \cdot a_{ip}}{a_{qp}}, \quad i \neq q, \quad i = 1,2,...,m; \quad k = 1,2,...,n \tag{3.4}$$

(після обчислень (3.3), (3.4) ведучий стовпчик перетворюється на одиничний – елемент a'_{qp} *дорівнює одиниці, а всі решта елементів ведучого стовпчика дорівнюють нулю)*;

5 крок повторити кроки 2-4 вибравши за ведучий елемент інший (*інший* ведучий рядок та *інший* ведучий стовпчик);

(коли нема можливості вибрати ведучий елемент алгоритм закінчується);

6 крок проаналізувати кількість розв'язків системи; визначити базисні та вільні змінні;

(змінні, які відповідають лінійно незалежним одиничним стовпчикам називають базисними, решта змінних - вільні);

7 крок знайти базисний розв'язок системи, прирівнявши всі вільні змінні до нуля;

8 крок перевірити розв'язок підстановкою у вихідну систему.

3.3. Метод Халецького

Метод Халецького (або метод факторизації, декомпозиції, LU-розклад) застосовують до розв'язання СЛАР виду (3.1), коли $m = n$. Запишемо систему (3.1), коли $m = n$, у матричній формі:

$$AX = B, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (3.5)$$

Теорема 3.1. Якщо всі головні мінори основної матриці системи (3.5) відмінні від нуля, то існує єдина нижня трикутна матриця L та єдина верхня трикутна матриця U такі, що $A = L \cdot U$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3.6)$$

З рівняння (3.6) визначаються елементи матриць L та U. Після обчислення елементів матриць L та U розв'язування СЛАР здійснюється через послідовне розв'язування двох систем лінійних рівнянь з трикутними матрицями:

$$LY = B, \quad UX = Y \qquad (3.7)$$

Спочатку знаходимо Y з першого рівняння (3.7), потім знаходимо X з другого рівняння (3.7). Запишемо розв'язки систем (3.7) у явній рекурентній формі:

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} m_{ik} y_k, \quad i = 1,2,\dots,n;$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k}{u_{ii}}, \quad i = n, n-1,\dots,1.$$

Частковим випадком методу Халецького є метод квадратних коренів. Цей метод використовується для розв'язання лінійних систем (3.5) з симетричною матрицею. Тоді матрицю A можна подати у вигляді добутку двох транспонованих між собою трикутних матриць:

$$A = T^T T$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

СЛАР має єдиний розв'язок, якщо діагональні елементи матриці T відмінні від нуля. Дійсно,

$$\det A = \det T^T \det T = (\det T)^2 = (t_{11} t_{22} \dots t_{nn})^2 \neq 0 \quad \Rightarrow t_{ii} \neq 0.$$

Розглянуті методи розв'язання СЛАР можна застосовувати для обчислення визначників і обернення невироджених матриць.

3.4. Метод прогонки

Метод прогонки зручно застосовувати для тридіагональних систем, які часто виникають при розв'язанні диференціальних рівнянь різницевими методами, для СЛАР з розрідженими матрицями, що мають переважну кількість нульових елементів. Обчислення у цьому методі здійснюються поетапно: спочатку прямою прогонкою знаходять прогоночні коефіцієнти системи, а потім оберненою прогонкою знаходять розв'язок системи.

Нехай матриця A у (3.5) – тридіагональна. СЛАР матиме вигляд:

$$\begin{cases} c_1 x_1 + b_1 x_2 = f_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_i x_{i-1} + c_i x_i + b_i x_{i+1} = f_i, \quad i = \overline{2, n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n. \end{cases} \tag{3.8}$$

Щоб здійснити пряму прогонку, потрібно у кожному рівнянні системи (3.8) виразити змінну x_i через змінну x_{i+1}:

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad i = \overline{1, n-1}$$

Легко пересвідчитись, що рекурентні співвідношення для прогоночних коефіцієнтів матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \beta_0 = 0, \\ \alpha_i = \dfrac{-b_i}{c_i + \alpha_{i-1} a_i}, \quad \beta_i = \dfrac{f_i - a_i \beta_{i-1}}{c_i + \alpha_{i-1} a_i}, \quad i = \overline{1, n-1}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Обернену прогонку реалізуємо обчислюючи невідомі x_i, починаючи з невідомої x_n, яку знайдемо з системи:

$$\begin{cases} a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n, \\ x_{n-1} = \alpha_{n-1} x_n + \beta_{n-1}, \end{cases}$$

Таким чином, одержимо рекурентні співвідношення для знаходження шуканого вектора:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{f_n - a_n \beta_{n-1}}{c_n + \alpha_{n-1} a_n}, \\ x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \end{cases}$$

Розглянемо питання про коректність методу прогонки. Наприклад, існування розв'язку системи (3.8) залежить від того, чи не набуває нульового значення знаменник дробових виразів при обчисленні прогоночних коефіцієнтів за формулами (3.9). Стійкість методу прогонки щодо помилок заокруглення залежить від того, чи не набувають абсолютні значення прогоночних коефіцієнтів $\propto_i$ значень, більших за одиницю. Наступна теорема дає відповідь на ці питання.

Теорема 3.2.(про коректність методу прогонки)

Якщо коефіцієнти СЛАР (3.8) задовольняють наступні умови:

1) $|c_i| > 0, \quad i = \overline{1, n};$

2) $|a_i| > 0, \quad |b_i| > 0, \quad i = \overline{2, n-1};$

3) $|c_1| \geq |b_1|;$

4) $|c_i| \geq |a_i| + |b_i|, \quad i = \overline{2, n-1};$

5) $|c_n| \geq |a_n|,$

причому хоча б одна з нерівностей 3).-5). виконується строго, то метод прогонки коректний.

Контрольні запитання

1. *Чим відрізняються прямі та ітераційні методи розв'язання СЛАР?*
2. *Який метод розв'язання СЛАР є стійким до похибки обчислень?*
3. *Які основні кроки алгоритму Жордана-Гауса?*
4. *Коли можна застосовувати метод декомпозиції?*
5. *В чому суть методу квадратних коренів.*
6. *Який метод використовують для розв'язання три діагональних систем?*
7. *Сформулюйте теорему про коректність методу прогонки.*
8. *Виведіть з системи (3.8) рекурентні співвідношення для прогоночних коефіцієнтів*
9. *Який метод використовують для знаходження оберненої матриці?*
10. *Як коректно вибирати ведучий елемент у методі Жордана-Гауса?*

Тест "Так/Ні " для самоперевірки знань студентів

1. Метод прогонки відноситься до ітераційних методів розв'язання СЛАР.
2. Метод Жордана-Гауса можна застосовувати для СЛАР з m лінійних рівнянь та n невідомих ($m \neq n$).
3. Для зменшення чутливості розв'язку до похибки обчислень у методі Жордана-Гауса рекомендується за ведучий елемент вибрати мінімальний за абсолютною величиною елемент матриці A:.
4. Якщо всі головні мінори квадратної матриці A:відмінні від нуля, то можливий $L \cdot U$:- розклад цієї матриці.
5. Метод квадратних коренів застосовують до кососиметричних матриць.
6. Метод прогонки завжди коректний.
7. Метод прогонки застосовують для СЛАР з m лінійних рівнянь та n невідомих ($m \neq n$).
8. Метод прогонки відноситься до прямих методів розв'язання СЛАР.
9. Метод Зейделя відноситься до ітераційних методів розв'язання СЛАР.
10. У методі Жордана-Гауса на кожній ітерації ведучий рядок перетворюється на одиничний.

Відповіді

1.Ні. 2. Так. 3. Так. 4. Так. 5. Ні. 6. Ні. 7. Ні. 8. Так. 9. Так. 10. Ні.

Задачі для самостійного розв'язування

Завдання 6

Розв'язати СЛАР методом Жордана-Гауса з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$.

Варіант 1 $\begin{cases} 0{,}34x_1 + 0{,}71x_2 + 0{,}63x_3 = 2{,}08 \\ 0{,}71x_1 - 0{,}65x_2 - 0{,}18x_3 = 0{,}17 \\ 1{,}17x_1 - 2{,}35x_2 + 0{,}75x_3 = 1{,}28 \end{cases}$	**Варіант 2** $\begin{cases} 3{,}75x_1 - 0{,}28x_2 + 0{,}17x_3 = 0{,}75 \\ 2{,}11x_1 - 0{,}11x_2 - 0{,}12x_3 = 1{,}11 \\ 0{,}22x_1 - 3{,}17x_2 + 1{,}81x_3 = 0{,}05 \end{cases}$
Варіант 3 $\begin{cases} 0{,}21x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}75x_3 = 0{,}11 \\ 0{,}13x_1 + 0{,}75x_2 - 0{,}11x_3 = 2{,}00 \\ 3{,}01x_1 - 0{,}33x_2 + 0{,}11x_3 = 0{,}13 \end{cases}$	**Варіант 4** $\begin{cases} 0{,}1x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}75x_3 = 0{,}11 \\ 0{,}13x_1 + 0{,}75x_2 - 0{,}11x_3 = 2{,}00 \\ 3{,}01x_1 - 0{,}33x_2 + 0{,}11x_3 = 0{,}13 \end{cases}$
Варіант 5 $\begin{cases} 3{,}01x_1 - 0{,}14x_2 - 0{,}15x_3 = 1{,}00 \\ 1{,}11x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}75x_3 = 0{,}13 \\ 0{,}17x_1 - 2{,}11x_2 + 0{,}71x_3 = 0{,}17 \end{cases}$	**Варіант 6** $\begin{cases} 0{,}92x_1 - 0{,}83x_2 + 0{,}62x_3 = 2{,}15 \\ 0{,}24x_1 - 0{,}54x_2 + 0{,}43x_3 = 0{,}62 \\ 0{,}73x_1 - 0{,}81x_2 - 0{,}67x_3 = 0{,}88 \end{cases}$
Варіант 7 $\begin{cases} 1{,}24x_1 - 0{,}87x_2 - 3{,}17x_3 = 0{,}46 \\ 2{,}11x_1 - 0{,}45x_2 + 1{,}44x_3 = 1{,}50 \\ 0{,}48x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}63x_3 = 0{,}35 \end{cases}$	**Варіант 8** $\begin{cases} 0{,}64x_1 - 0{,}83x_2 + 4{,}20x_3 = 2{,}23 \\ 0{,}58x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}43x_3 = 1{,}71 \\ 0{,}86x_1 + 0{,}77x_2 + 0{,}88x_3 = -0{,}54 \end{cases}$
Варіант 9 $\begin{cases} 0{,}32x_1 - 0{,}42x_2 + 0{,}85x_3 = 1{,}32 \\ 0{,}63x_1 - 1{,}43x_2 - 0{,}58x_3 = -0{,}44 \\ 0{,}84x_1 - 2{,}23x_2 - 0{,}52x_3 = 0{,}64 \end{cases}$	**Варіант 10** $\begin{cases} 0{,}73x_1 + 1{,}24x_2 - 0{,}38x_3 = 0{,}58 \\ 1{,}25x_1 + 0{,}66x_2 - 0{,}78x_3 = 0{,}66 \\ 0{,}75x_1 + 1{,}22x_2 - 0{,}83x_3 = 0{,}92 \end{cases}$
Варіант 11 $\begin{cases} 0{,}62x_1 - 0{,}44x_2 - 0{,}86x_3 = 0{,}68 \\ 0{,}83x_1 + 0{,}42x_2 - 0{,}56x_3 = 1{,}24 \\ 0{,}58x_1 - 0{,}37x_2 - 0{,}62x_3 = 0{,}87 \end{cases}$	**Варіант 12** $\begin{cases} 1{,}26x_1 - 2{,}34x_2 + 1{,}17x_3 = 3{,}14 \\ 0{,}75x_1 + 1{,}24x_2 - 0{,}48x_3 = -1{,}17 \\ 3{,}44x_1 - 1{,}85x_2 + 1{,}16x_3 = 1{,}83 \end{cases}$
Варіант 13 $\begin{cases} 0{,}46x_1 + 1{,}72x_2 + 2{,}53x_3 = 2{,}44 \\ 1{,}53x_1 - 2{,}32x_2 - 1{,}83x_3 = 2{,}83 \\ 0{,}75x_1 + 0{,}86x_2 + 3{,}72x_3 = 1{,}06 \end{cases}$	**Варіант 14** $\begin{cases} 2{,}47x_1 + 0{,}65x_2 - 1{,}88x_3 = 1{,}24 \\ 1{,}34x_1 + 1{,}17x_2 + 2{,}54x_3 = 2{,}35 \\ 0{,}86x_1 - 1{,}73x_2 - 1{,}08x_3 = 3{,}15 \end{cases}$
Варіант 15 $\begin{cases} 4{,}24x_1 + 2{,}73x_2 - 1{,}55x_3 = 1{,}24 \\ 2{,}34x_1 + 1{,}27x_2 + 3{,}15x_3 = 2{,}35 \\ 3{,}05x_1 - 1{,}05x_2 - 0{,}63x_3 = -1{,}25 \end{cases}$	**Варіант 16** $\begin{cases} 0{,}43x_1 + 1{,}24x_2 - 0{,}58x_3 = 2{,}71 \\ 0{,}74x_1 + 0{,}83x_2 + 1{,}17x_3 = 1{,}26 \\ 1{,}43x_1 - 1{,}58x_2 + 0{,}83x_3 = 1{,}03 \end{cases}$
Варіант 17 $\begin{cases} 0{,}43x_1 + 0{,}63x_2 + 1{,}44x_3 = 2{,}18 \\ 1{,}64x_1 - 0{,}83x_2 - 2{,}45x_3 = 1{,}84 \\ 0{,}58x_1 + 1{,}55x_2 + 3{,}18x_3 = 0{,}74 \end{cases}$	**Варіант 18** $\begin{cases} 1{,}24x_1 + 0{,}62x_2 - 0{,}95x_3 = 1{,}43 \\ 2{,}15x_1 - 1{,}18x_2 + 0{,}57x_3 = 2{,}43 \\ 1{,}72x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}57x_3 = 3{,}88 \end{cases}$

Варіант 19 $\begin{cases} 0{,}62x_1 + 0{,}56x_2 - 0{,}43x_3 = 1{,}16 \\ 1{,}32x_1 - 0{,}88x_2 + 1{,}76x_3 = 2{,}07 \\ 0{,}73x_1 + 1{,}42x_2 - 0{,}34x_3 = 2{,}18 \end{cases}$	**Варіант 20** $\begin{cases} 1{,}06x_1 + 0{,}34x_2 + 1{,}26x_3 = 1{,}17 \\ 2{,}54x_1 - 1{,}16x_2 + 0{,}55x_3 = 2{,}23 \\ 1{,}34x_1 - 0{,}47x_2 - 0{,}83x_3 = 3{,}26 \end{cases}$
Варіант 21 $\begin{cases} 3{,}15x_1 - 1{,}72x_2 - 1{,}23x_3 = 2{,}15 \\ 0{,}72x_1 + 0{,}67x_2 + 1{,}18x_3 = 1{,}43 \\ 2{,}57x_1 - 1{,}34x_2 - 0{,}68x_3 = 1{,}03 \end{cases}$	**Варіант 22** $\begin{cases} 1{,}72x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}82x_3 = 0{,}36 \\ 0{,}27x_1 + 0{,}53x_2 - 0{,}64x_3 = 1{,}23 \\ 0{,}56x_1 - 0{,}48x_2 + 1{,}95x_3 = -0{,}76 \end{cases}$
Варіант 23 $\begin{cases} 0{,}95x_1 + 0{,}72x_2 - 1{,}14x_3 = 2{,}15 \\ 0{,}63x_1 + 0{,}24x_2 + 0{,}38x_3 = 0{,}74 \\ 1{,}23x_1 - 1{,}08x_2 - 1{,}16x_3 = 0{,}97 \end{cases}$	**Варіант 24** $\begin{cases} 2{,}18x_1 + 1{,}72x_2 - 0{,}93x_3 = 1{,}06 \\ 1{,}42x_1 + 0{,}18x_2 + 1{,}12x_3 = 2{,}07 \\ 0{,}92x_1 - 1{,}14x_2 - 2{,}53x_3 = -0{,}45 \end{cases}$
Варіант 25 $\begin{cases} 2{,}23x_1 - 0{,}73x_2 + 1{,}27x_3 = 2{,}43 \\ 2{,}15x_1 + 3{,}17x_2 - 1{,}43x_3 = -0{,}73 \\ 0{,}83x_1 + 0{,}72x_2 + 2{,}12x_3 = 1{,}42 \end{cases}$	**Варіант 26** $\begin{cases} 0{,}65x_1 - 0{,}93x_2 + 0{,}45x_3 = -0{,}72 \\ 1{,}15x_1 + 0{,}43x_2 - 0{,}72x_3 = 1{,}24 \\ 0{,}56x_1 - 0{,}18x_2 + 1{,}03x_3 = 2{,}15 \end{cases}$

Зразок виконання Завдання 6

$$\begin{cases} 0{,}25x_1 + 0{,}61x_2 + 0{,}53x_3 = 2{,}04 \\ 0{,}28x_1 - 0{,}36x_2 + 0{,}18x_3 = 1{,}03 \\ 1{,}12x_1 - 2{,}31x_2 - 3{,}41x_3 = 4{,}26 \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}25 & 0{,}61 & 0{,}53 & 2{,}04 \\ 0{,}28 & 0{,}36 & 0{,}18 & 1{,}03 \\ 1{,}12 & 2{,}31 & 3{,}41 & 4{,}26 \end{array}\right)$$

Виберемо ведучий елемент $\max(|a_{ij}|) = 3{,}41$. Перерахуємо елементи розширеної матриці за формулами (3.3), (3.4). Знову виберемо ведучий елемент і повторимо кроки алгоритму. Всі розрахунки занесемо у Таблицю 6 (ведучий елемент у кожній матриці підкреслений):

Таблиця 6

0,25	0,61	0,53	2,04
0,28	0,36	0,18	1,03
1,12	2,31	$\underline{3{,}41}$	4,26

0,075924	$\underline{0{,}250968}$	0	1,377889
0,22088	0,238065	0	0,805132

0,328446	0,677419	1	1,249267

0,302524	1	0	5,490301
0,14886	0	0	-0,50191
0,12351	0	1	-2,46997

0	1	0	6,51033
1	0	0	-3,37173
0	0	1	-2,05353

Оскільки всі стовпчики основної матриці системи перетворились в одиничні, то система має єдиний розв'язок. З останньої ітерації генеруємо розв'язок системи:

$x_1 = -3{,}372; \quad x_2 = 6{,}510; \quad x_3 = -2{,}054.$

Завдання 7

Розв'язати СЛАР методом Халецького з точністю до $\varepsilon = 0{,}01$.

Варіант 1 $\begin{cases} 0{,}63x_1 + 1{,}00x_2 + 0{,}71x_3 + 0{,}34x_4 = 2{,}08 \\ 1{,}17x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}65x_3 + 0{,}71x_4 = 0{,}17 \\ 2{,}71x_1 - 0{,}75x_2 + 1{,}17x_3 - 2{,}35x_4 = 1{,}28 \\ 3{,}58x_1 + 0{,}21x_2 - 3{,}45x_3 - 1{,}18x_4 = 0{,}05 \end{cases}$	**Варіант 2** $\begin{cases} 3{,}51x_1 + 0{,}17x_2 + 3{,}75x_3 - 0{,}28x_4 = 0{,}75 \\ 4{,}75x_1 + 2{,}11x_2 - 0{,}11x_3 - 0{,}12x_4 = 1{,}11 \\ -2{,}11x_1 + 3{,}17x_2 + 0{,}12x_3 - 0{,}15x_4 = 0{,}21 \\ 3{,}17x_1 + 1{,}81x_2 - 3{,}17x_3 + 0{,}22x_4 = 0{,}05 \end{cases}$
Варіант 3 $\begin{cases} 0{,}17x_1 + 0{,}75x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}21x_4 = 0{,}11 \\ 0{,}75x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}11x_3 + 1{,}00x_4 = 2{,}00 \\ -0{,}33x_1 + 0{,}11x_2 + 3{,}01x_3 - 2{,}01x_4 = 0{,}11 \\ 0{,}11x_1 + 0{,}12x_2 + 1{,}11x_3 - 1{,}31x_4 = 0{,}13 \end{cases}$	**Варіант 4** $\begin{cases} -1{,}00x_1 + 0{,}13x_2 - 2{,}00x_3 - 0{,}14x_4 = 0{,}15 \\ 0{,}75x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}21x_3 - 0{,}77x_4 = 0{,}11 \\ 0{,}28x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}39x_3 + 0{,}48x_4 = 0{,}12 \\ 1{,}00x_1 + 3{,}14x_2 - 0{,}21x_3 - 1{,}00x_4 = -0{,}11 \end{cases}$
Варіант 5 $\begin{cases} 3{,}01x_1 - 0{,}14x_2 + 1{,}00x_3 - 0{,}15x_4 = 1{,}00 \\ -1{,}75x_1 + 1{,}11x_2 + 0{,}13x_3 - 0{,}75x_4 = 0{,}13 \\ 0{,}17x_1 - 2{,}11x_2 + 0{,}71x_3 - 1{,}71x_4 = 1{,}00 \\ 0{,}21x_1 + 0{,}21x_2 + 0{,}35x_3 + 0{,}33x_4 = 0{,}17 \end{cases}$	**Варіант 6** $\begin{cases} 1{,}15x_1 + 0{,}62x_2 - 0{,}83x_3 + 0{,}92x_4 = 2{,}15 \\ 0{,}82x_1 - 0{,}54x_2 + 0{,}43x_3 - 0{,}25x_4 = 0{,}62 \\ 0{,}24x_1 + 1{,}15x_2 - 0{,}33x_3 + 1{,}42x_4 = -0{,}62 \\ 0{,}73x_1 - 0{,}81x_2 + 1{,}27x_3 - 0{,}67x_4 = 0{,}88 \end{cases}$
Варіант 7 $\begin{cases} 2{,}20x_1 - 3{,}17x_2 + 1{,}24x_3 - 0{,}87x_4 = 0{,}46 \\ 1{,}50x_1 + 2{,}11x_2 - 0{,}45x_3 + 1{,}44x_4 = 1{,}50 \\ 0{,}86x_1 - 1{,}44x_2 + 0{,}62x_3 + 0{,}28x_4 = -0{,}12 \\ 0{,}48x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}63x_3 - 0{,}97x_4 = 0{,}35 \end{cases}$	**Варіант 8** $\begin{cases} 0{,}64x_1 + 0{,}72x_2 - 0{,}83x_3 + 4{,}20x_4 = 2{,}23 \\ 0{,}58x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}43x_3 - 0{,}62x_4 = 1{,}71 \\ 0{,}86x_1 + 0{,}77x_2 - 1{,}83x_3 + 0{,}88x_4 = -0{,}54 \\ 1{,}32x_1 - 0{,}52x_2 - 0{,}65x_3 + 1{,}22x_4 = 0{,}65 \end{cases}$
Варіант 9	**Варіант 10**

$\begin{cases} 1,42x_1 + 0,32x_2 - 0,42x_3 + 0,85x_4 = 1,32 \\ 0,63x_1 - 0,43x_2 + 1,27x_3 - 0,58x_4 = -0,44 \\ 0,84x_1 - 2,23x_2 - 0,52x_3 + 0,47x_4 = 0,64 \\ 0,27x_1 + 1,37x_2 + 0,64x_3 - 1,27x_4 = 0,85 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,73x_1 + 1,24x_2 - 0,38x - 1,43x_4 = 0,58 \\ 1,07x_1 - 0,77x_2 + 1,25x_3 + 0,66x_4 = -0,66 \\ 1,56x_1 + 0,66x_2 + 1,44x_3 - 0,87x_4 = 1,24 \\ 0,75x_1 + 1,22x_2 - 0,83x_3 + 0,37x_4 = 0,92 \end{cases}$
Варіант 11 $\begin{cases} 1,32x_1 - 0,83x_2 - 0,44x_3 + 0,62x_4 = 0,68 \\ 0,83x_1 + 0,42x_2 - 0,56x_3 + 0,77x_4 = 1,24 \\ 0,58x_1 - 0,37x_2 + 1,24x_3 - 0,62x_4 = 0,87 \\ 0,35x_1 + 0,66x_2 - 1,38x_3 - 0,93x_4 = -1,08 \end{cases}$	**Варіант 12** $\begin{cases} 0,11x_1 - 0,17x_2 + 0,72x_3 - 0,34x_4 = 0,17 \\ 0,81x_1 + 0,12x_2 - 0,91x_3 + 0,17x_4 = 1,00 \\ 0,17x_1 - 0,18x_2 + 1,00x_3 + 0,23x_4 = 0,21 \\ 0,13x_1 + 0,17x_2 - 0,99x_3 + 0,35x_4 = 2,71 \end{cases}$
Варіант 13 $\begin{cases} 0,18x_1 + 2,11x_2 + 0,13x_3 - 0,22x_4 = 0,22 \\ 0,33x_1 - 0,22x_2 - 1,00x_3 + 0,17x_4 = 0,11 \\ -1,00x_1 + 0,11x_2 + 2,00x_3 - 0,45x_4 = 1,00 \\ 7,00x_1 - 0,17x_2 - 0,22x_3 + 0,33x_4 = 0,21 \end{cases}$	**Варіант 14** $\begin{cases} 2,00x_1 + 0,05x_2 - 3,01x_3 - 0,11x_4 = 0,21 \\ 1,00x_1 - 2,00x_2 + 3,02x_3 + 0,05x_4 = 0,18 \\ 0,17x_1 + 0,99x_2 - 2,00x_3 - 0,17x_4 = 0,17 \\ 0,33x_1 - 0,07x_2 + 0,33x_3 + 2,00x_4 = 0,17 \end{cases}$
Варіант 15 $\begin{cases} 0,17x_1 - 0,13x_2 - 0,11x_3 - 0,12x_4 = 0,22 \\ 1,00x_1 - 1,00x_2 - 0,13x_3 + 0,13x_4 = 0,11 \\ 0,35x_1 + 0,33x_2 + 0,12x_3 + 0,13x_4 = 0,12 \\ 0,13x_1 + 0,11x_2 - 0,13x_3 - 0,11x_4 = 1,00 \end{cases}$	**Варіант 16** $\begin{cases} 0,11x_1 + 1,13x_2 - 0,17x_3 + 0,18x_4 = 1,00 \\ 0,13x_1 - 1,17x_2 + 0,18x_3 + 0,14x_4 = 0,13 \\ 0,11x_1 - 1,05x_2 - 0,17x_3 - 0,15x_4 = 0,11 \\ 0,15x_1 - 0,05x_2 + 0,18x_3 - 0,11x_4 = 1,00 \end{cases}$
Варіант 17 $\begin{cases} 1,00x_1 - 0,17x_2 + 0,11x_3 - 0,15x_4 = 0,17 \\ 0,14x_1 + 0,21x_2 - 0,33x_3 + 0,11x_4 = 1,00 \\ 0,22x_1 + 3,44x_2 - 0,11x_3 + 0,12x_4 = 2,00 \\ 0,11x_1 + 0,13x_2 + 0,12x_3 + 0,14x_4 = 0,13 \end{cases}$	**Варіант 18** $\begin{cases} 1,00x_1 + 0,55x_2 - 0,13x_3 + 0,34x_4 = 0,13 \\ 0,13x_1 - 0,17x_2 + 0,33x_3 + 0,17x_4 = 0,11 \\ 0,11x_1 + 0,18x_2 - 0,22x_3 - 0,11x_4 = 1,00 \\ 0,13x_1 - 0,12x_2 + 0,21x_3 + 0,22x_4 = 0,18 \end{cases}$
Варіант 19 $\begin{cases} 1,00x_1 - 0,51x_2 + 0,12x_3 + 0,55x_4 = 0,12 \\ 0,12x_1 + 0,18x_2 - 0,22x_3 - 0,41x_4 = 0,13 \\ 0,22x_1 - 3,01x_2 + 0,31x_3 + 0,58x_4 = 1,00 \\ 1,00x_1 + 0,24x_2 - 3,05x_3 - 0,22x_4 = 3,41 \end{cases}$	**Варіант 20** $\begin{cases} 0,13x_1 + 0,22x_2 - 0,14x_3 + 0,15x_4 = 1,00 \\ 0,22x_1 - 0,31x_2 + 0,42x_3 - 5,10x_4 = 6,01 \\ 0,62x_1 - 0,74x_2 + 0,85x_3 - 0,96x_4 = 0,11 \\ 0,12x_1 + 0,13x_2 + 0,14x_3 + 0,45x_4 = 0,16 \end{cases}$
Варіант 21 $\begin{cases} 0,18x_1 + 0,19x_2 + 0,20x_3 - 0,21x_4 = 0,22 \\ 0,51x_1 - 0,50x_2 + 0,49x_3 - 0,48x_4 = 0,47 \\ 0,61x_1 + 0,62x_2 - 0,63x_3 + 0,64x_4 = 0,65 \\ 0,11x_1 - 0,15x_2 + 0,22x_3 - 0,38x_4 = 0,42 \end{cases}$	**Варіант 22** $\begin{cases} 0,17x_1 - 0,18x_2 + 0,19x_3 - 5,74x_4 = 1,00 \\ 0,11x_1 - 0,43x_2 + 0,15x_3 - 0,17x_4 = 1,90 \\ 0,12x_1 + 0,14x_2 + 0,16x_3 + 0,18x_4 = 2,00 \\ 0,71x_1 - 0,13x_2 - 0,41x_3 + 0,52x_4 = 1,00 \end{cases}$
Варіант 23 $\begin{cases} 1,00x_1 - 2,01x_2 + 2,04x_3 + 0,17x_4 = 0,18 \\ 0,33x_1 - 0,77x_2 + 0,44x_3 - 0,51x_4 = 0,19 \\ 0,31x_1 + 0,17x_2 - 0,21x_3 + 0,54x_4 = 0,21 \\ 0,17x_1 + 1,00x_2 - 0,13x_3 + 0,21x_4 = 0,31 \end{cases}$	**Варіант 24** $\begin{cases} 2,34x_1 - 1,42x_2 - 0,54x_3 + 0,21x_4 = 0,66 \\ 1,44x_1 - 0,53x_2 + 1,43x_3 - 1,27x_4 = -1,44 \\ 0,63x_1 - 1,32x_2 - 0,65x_3 + 1,43x_4 = 0,94 \\ 0,56x_1 + 0,88x_2 - 0,67x_3 - 2,38x_4 = 0,73 \end{cases}$

Варіант 25	**Варіант 26**
$\begin{cases} 0,63x_1 - 0,76x_2 + 1,34x_3 + 0,37x_4 = 1,21 \\ 0,54x_1 + 0,83x_2 - 0,74x_3 - 1,27x_4 = 0,86 \\ 0,24x_1 - 0,44x_2 + 0,35x_3 + 0,55x_4 = 0,25 \\ 0,43x_1 - 1,21x_2 + 2,32x_3 - 1,41x_4 = 1,55 \end{cases}$	$\begin{cases} 1,43x_1 + 0,87x_2 - 1,57x_3 - 0,58x_4 = 2,34 \\ 0,63x_1 - 0,57x_2 - 2,34x_3 + 0,66x_4 = 0,77 \\ 1,57x_1 + 0,66x_2 - 0,57x_3 + 1,15x_4 = -0,24 \\ 0,88x_1 - 0,67x_2 + 0,55x_3 - 0,45x_4 = 0,56 \end{cases}$

Зразок виконання Завдання 7

$$\begin{cases} 1,42x_1 + 2,34x_2 - 0,88x_3 + 0,53x_4 = 0,72 \\ 0,71x_1 - 1,15x_2 + 0,53x_3 - 0,67x_4 = -0,18 \\ 0,55x_1 - 0,93x_2 - 1,42x_3 + 1,32x_4 = 0,68 \\ 0,44x_1 - 0,25x_2 + 1,92x_3 - 1,08x_4 = 0,43 \end{cases}$$

Вважаємо, що всі головні мінори основної матриці системи відмінні від нуля, тобто можливий $L \cdot U$ розклад.

$$\begin{pmatrix} 1,42 & 2,34 & -0,88 & 0,53 \\ 0,71 & -1,15 & 0,53 & -0,67 \\ 0,55 & -0,93 & -1,42 & 1,32 \\ 0,44 & -0,25 & 1,92 & -1,08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix} \qquad (3.10)$$

Прирівнюючи відповідні елементи зліва та справа у (3.10), знайдемо:

$$u_{11} = 1,42; \quad u_{12} = 2,34; \quad u_{13} = -0,88; \quad u_{14} = 0,53;$$
$$m_{21}u_{11} = 0,71; \quad m_{21}u_{12} + u_{22} = -1,15; \quad m_{21}u_{13} + u_{23} = 0,53; \quad m_{21}u_{14} + u_{24} = -0,67;$$
$$m_{31}u_{11} = 0,55; m_{31}u_{12} + m_{32}u_{22} = -0,93; m_{31}u_{13} + m_{32}u_{23} + u_{33} = -1,42; m_{31}u_{14} + m_{32}u_{24} + u_{34} = 1,3$$
$$m_{41}u_{11} = 0,44; \quad m_{41}u_{12} + m_{42}u_{22} = -0,25; \quad m_{41}u_{13} + m_{42}u_{23} + m_{43}u_{33} = 1,92;$$
$$m_{41}u_{14} + m_{42}u_{24} + m_{43}u_{34} + u_{44} = -1,08; \qquad (3.11)$$

Розв'язавши рівняння (3.11), знайдемо елементи матриць L та U:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0,39 & 0,79 & 1 & 0 \\ 0,31 & 0,42 & -0,97 & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1,42 & 2,34 & -0,88 & 0,53 \\ 0 & -2,32 & 0,97 & -0,94 \\ 0 & 0 & -1,84 & 1,86 \\ 0 & 0 & 0 & 0,95 \end{pmatrix}$$

За формулами (3.7) визначимо значення Y та X :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0,39 & 0,79 & 1 & 0 \\ 0,31 & 0,42 & -0,97 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,72 \\ -0,18 \\ 0,68 \\ 0,43 \end{pmatrix}; y_1 = 0,72; y_2 = -0,54; y_3 = 0,83; y_4 = 1,24;$$

$$\begin{pmatrix} 1,42 & 2,34 & -0,88 & 0,53 \\ 0 & -2,32 & 0,97 & -0,94 \\ 0 & 0 & -1,84 & 1,86 \\ 0 & 0 & 0 & 0,95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,72 \\ -0,54 \\ 0,83 \\ 1,24 \end{pmatrix}; x_1 = 0,44; x_2 = 0,07; x_3 = 0,87; x_4 = 1,31.$$

Завдання 8

Розв'язати СЛАР методом прогонки.

Варіант 1 $\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 2,0 \\ 2x_1 + 4,6x_2 - x_3 = 3,3 \\ 2x_2 + 3,6x_3 - 0,8x_4 = 2,6 \\ 3x_3 + 4,4x_4 = 7,2 \end{cases}$	**Варіант 2** $\begin{cases} 5,1x_1 - 1,1x_2 = 2,1 \\ 2,2x_1 + 4,6x_2 - x_3 = 3,4 \\ 2x_2 + 3,7x_3 - 0,9x_4 = 2,7 \\ 3x_3 + 4,4x_4 = 7,3 \end{cases}$
Варіант 3 $\begin{cases} 6,1x_1 - 1,1x_2 = 3,2 \\ 2,3x_1 + 4,8x_2 - 1,1x_3 = 3,5 \\ 2x_2 + 3,7x_3 - 0,9x_4 = 2,8 \\ 3x_3 + 4,4x_4 = 7,4 \end{cases}$	**Варіант 4** $\begin{cases} 6,2x_1 - 1,1x_2 = 4,2 \\ 3,3x_1 + 5,7x_2 - 1,2x_3 = 3,5 \\ 2x_2 + 3,8x_3 - 0,9x_4 = 3,8 \\ 3x_3 + 4,4x_4 = 7,1 \end{cases}$
Варіант 5 $\begin{cases} 6,3x_1 - 1,2x_2 = 4,3 \\ 3,4x_1 + 5,8x_2 - 1,3x_3 = 3,6 \\ 2,1x_2 + 4,1x_3 - 0,7x_4 = 3,9 \\ 3x_3 + 4,5x_4 = 7,6 \end{cases}$	**Варіант 6** $\begin{cases} 6,5x_1 - 1,4x_2 = 4,6 \\ 3,6x_1 + 5,9x_2 - 1,5x_3 = 3,7 \\ 2,2x_2 + 4,3x_3 - 0,6x_4 = 3,1 \\ 3x_3 + 4,7x_4 = 7,7 \end{cases}$
Варіант 7 $\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 = 4,0 \\ 4x_1 + 9,2x_2 - 2x_3 = 6,6 \\ 4x_2 + 7,2x_3 - 1,6x_4 = 5,2 \\ 6x_3 + 8,8x_4 = 14,4 \end{cases}$	**Варіант 8** $\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 = 5,0 \\ 6x_1 + 9,9x_2 - 2x_3 = 6,5 \\ 4x_2 + 7,3x_3 - 1,5x_4 = 5,5 \\ 6x_3 + 8,8x_4 = 14,3 \end{cases}$
Варіант 9	**Варіант 10**

$\begin{cases}10{,}5x_1-2{,}5x_2=4{,}5\\ 4{,}5x_1+9{,}2x_2-2{,}5x_3=6{,}5\\ 4{,}5x_2+7{,}2x_3-1{,}6x_4=5{,}5\\ 6{,}5x_3+8{,}8x_4=14{,}5\end{cases}$	$\begin{cases}9{,}5x_1-3{,}5x_2=5{,}5\\ 3{,}5x_1+9{,}9x_2-3{,}5x_3=6{,}5\\ 3{,}5x_2+9{,}2x_3-2{,}6x_4=5{,}5\\ 5{,}5x_3+9{,}8x_4=16{,}5\end{cases}$
Варіант 11 $\begin{cases}7{,}5x_1-1{,}5x_2=3{,}0\\ 3{,}5x_1+6{,}9x_2-1{,}5x_3=4{,}9\\ 3{,}5x_2+5{,}9x_3-1{,}2x_4=3{,}9\\ 4{,}5x_3+6{,}6x_4=11{,}2\end{cases}$	**Варіант 12** $\begin{cases}1{,}5x_1-0{,}3x_2=0{,}6\\ 0{,}6x_1+1{,}4x_2-0{,}3x_3=1{,}0\\ 0{,}6x_2+1{,}1x_3-0{,}2x_4=0{,}8\\ 0{,}9x_3+1{,}3x_4=2{,}2\end{cases}$
Варіант 13 $\begin{cases}2{,}5x_1-0{,}3x_2=0{,}6\\ 0{,}7x_1+2{,}4x_2-0{,}3x_3=0{,}9\\ 1{,}1x_2+2{,}8x_3-0{,}2x_4=0{,}8\\ 0{,}9x_3+2{,}5x_4=1{,}2\end{cases}$	**Варіант 14** $\begin{cases}3{,}75x_1-0{,}75x_2=1{,}50\\ 1{,}50x_1+3{,}5x_2-0{,}75x_3=2{,}50\\ 1{,}50x_2+2{,}75x_3-0{,}50x_4=2{,}00\\ 2{,}25x_3+3{,}25x_4=5{,}50\end{cases}$
Варіант 15 $\begin{cases}4{,}35x_1-0{,}45x_2=1{,}40\\ 1{,}50x_1+4{,}5x_2-0{,}75x_3=2{,}90\\ 1{,}50x_2+3{,}75x_3-0{,}50x_4=2{,}50\\ 2{,}25x_3+4{,}25x_4=5{,}50\end{cases}$	**Варіант 16** $\begin{cases}11{,}5x_1-2{,}8x_2=6{,}8\\ 3{,}5x_1+9{,}9x_2-3{,}5x_3=7{,}5\\ 4{,}6x_2+9{,}3x_3-1{,}7x_4=5{,}6\\ 6{,}6x_3+8{,}7x_4=12{,}2\end{cases}$
Варіант 17 $\begin{cases}5{,}8x_1-2{,}1x_2=2{,}7\\ 2{,}6x_1+5{,}1x_2-1{,}2x_3=3{,}8\\ 2{,}3x_2+4{,}8x_3-0{,}9x_4=2{,}9\\ 3{,}1x_3+4{,}6x_4=7{,}3\end{cases}$	**Варіант 18** $\begin{cases}10{,}45x_1-2{,}52x_2=4{,}15\\ 4{,}85x_1+9{,}82x_2-2{,}25x_3=6{,}31\\ 4{,}15x_2+8{,}02x_3-1{,}26x_4=5{,}25\\ 6{,}49x_3+8{,}78x_4=14{,}15\end{cases}$
Варіант 19 $\begin{cases}8{,}5x_1-1{,}5x_2=3{,}5\\ 3{,}3x_1+7{,}9x_2-1{,}5x_3=4{,}8\\ 3{,}4x_2+6{,}9x_3-1{,}3x_4=3{,}8\\ 4{,}1x_3+7{,}6x_4=10{,}8\end{cases}$	**Варіант 20** $\begin{cases}7{,}75x_1-1{,}75x_2=2{,}55\\ 2{,}50x_1+7{,}55x_2-0{,}75x_3=3{,}50\\ 1{,}50x_2+5{,}75x_3-2{,}50x_4=2{,}45\\ 2{,}25x_3+5{,}25x_4=5{,}65\end{cases}$
Варіант 21 $\begin{cases}17{,}5x_1-5{,}5x_2=4{,}2\\ 6{,}5x_1+16{,}9x_2-1{,}5x_3=4{,}9\\ 4{,}5x_2+15{,}9x_3-3{,}3x_4=3{,}9\\ 6{,}3x_3+16{,}6x_4=12{,}1\end{cases}$	**Варіант 22** $\begin{cases}13{,}7x_1-4{,}7x_2=2{,}5\\ 5{,}5x_1+15{,}5x_2-4{,}6x_3=8{,}5\\ 3{,}9x_2+12{,}5x_3-2{,}7x_4=4{,}4\\ 2{,}25x_3+10{,}2x_4=5{,}6\end{cases}$
Варіант 23 $\begin{cases}18{,}5x_1-12{,}5x_2=5{,}4\\ 6{,}5x_1+19{,}2x_2-4{,}5x_3=8{,}3\\ 3{,}5x_2+9{,}2x_3-3{,}8x_4=5{,}2\\ 6{,}5x_3+18{,}9x_4=15{,}1\end{cases}$	**Варіант 24** $\begin{cases}4{,}28x_1-1{,}49x_2=1{,}63\\ 2{,}55x_1+6{,}51x_2-0{,}85x_3=3{,}91\\ 1{,}59x_2+7{,}79x_3-2{,}58x_4=2{,}54\\ 2{,}29x_3+6{,}24x_4=5{,}55\end{cases}$

Варіант 25	**Варіант 26**
$\begin{cases} 12{,}4x_1 - 3{,}3x_2 = 5{,}9 \\ 6{,}6x_1 + 11{,}9x_2 - 2{,}8x_3 = 6{,}9 \\ 4{,}5x_2 + 9{,}3x_3 - 1{,}8x_4 = 5{,}9 \\ 6{,}1x_3 + 8{,}9x_4 = 12{,}2 \end{cases}$	$\begin{cases} 8{,}15x_1 - 1{,}25x_2 = 3{,}35 \\ 3{,}13x_1 + 7{,}19x_2 - 1{,}35x_3 = 4{,}28 \\ 3{,}14x_2 + 6{,}79x_3 - 1{,}23x_4 = 3{,}18 \\ 4{,}41x_3 + 7{,}86x_4 = 10{,}63 \end{cases}$

Зразок виконання Завдання 8

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 + 10x_2 - 5x_3 = -9 \\ x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -20 \\ x_3 + 4x_4 = -27 \end{cases}$$

Спочатку перевіримо чи коректно застосовувати метод прогонки для розв’язання даної задачі згідно умовам Теореми 3.2.

$|2| > |1|, |2| > 0, |1| > 0, |-5| > 0, |4| > 0,$

$|10| > |1| + |-5|, |-5| > |1| + |2|, |4| > |1|.$

Всі умови Теореми 3.2. виконуються, отже метод прогонки є коректним.

Розв’язуючи рівняння на комп’ютері бажано знаходити прогоночні коефіцієнти за формулами (3.9), а вручну зручніше виконувати алгебраїчні перетворення з вихідною системою. Виразимо з першого рівняння x_1 через x_2, з другого рівняння x_2 через x_3 і т.д. В результаті одержимо:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-5 - x_2}{2} \\ x_2 = \dfrac{-13 + 10x_3}{19} \\ x_3 = \dfrac{367 + 38x_4}{85} \\ x_3 = -27 - 4x_4 \end{cases}$$

Прирівнюючи останні два рівняння знаходимо x_4, а потім послідовно x_3, x_2, x_1 (рухаємось по системі знизу вгору):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+0{,}1}{2} = -2{,}45 \\ x_2 = \dfrac{-13+10\cdot 1{,}17}{19} = -0{,}1 \\ x_3 = \dfrac{367+38\cdot(-7{,}04)}{85} = 1{,}17 \\ x_4 = -7{,}04 \end{cases}$$

Розділ 4. Ітераційні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

4.1.Збіжність ітераційного процесу. Норма вектора, матриці

Для СЛАР з великою кількістю невідомих прямі методи є громіздкими, тому зручніше користуватись наближеними методами розв'язання таких систем.

Нехай задано СЛАР виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ...., \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (4.1)$$

<u>Означення 4.1.</u> Ітераційний процес розв'язання СЛАР (4.1) називається збіжним, якщо:

$$\lim_{k \to \infty} \left\| X^k - X \right\| = 0,$$

де X – точний розв'язок СЛАР (4.1), X^k - наближений розв'язок СЛАР після *к*-ої ітерації.

Нагадаємо формули для визначення норми вектора та матриці, які необхідні для аналізу збіжності ітераційних методів.

Кубічна норма вектора $\vec{u}$:

$$\left\| \vec{u} \right\|_1 = \max_i |u_i|,$$

Октаедрична норма вектора $\vec{u}$:

$$\left\| \vec{u} \right\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|,$$

Сферична норма вектора $\vec{u}$:

$$\left\| \vec{u} \right\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2}.$$

Кубічна норма матриці A:

$$\left\| A \right\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

Октаедрична норма матриці A:

$\|A\|_2 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$

Сферична норма матриці A:

$\|A\|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$

4.2. Метод простої ітерації

Нехай діагональні елементи матриці A у (4.1) відмінні від нуля і матриця A невироджена.

Виразимо i-е рівняння системи (4.1) через x_i Для цього розділимо перше рівняння на a_{11} і залишимо ліворуч тільки x_1, виразимо з першого рівняння x_1 через x_2, x_3, ... , x_n; аналогічно виразимо x_2 з другого рівняння і так далі. Тим самим ми зведемо систему до вигляду:

$x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \cdots + \alpha_{1n}x_n$

$x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \cdots + \alpha_{2n}x_n$

… …

$x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_3 + \cdots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}$

де:

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}},$$

коли $i \neq j$, $\alpha_{ij} = 0$, коли $i = j$, $i, j = 1,2, \dots, n$

Запишемо останню систему у матричній формі:

$$X = \alpha X + \beta \tag{4.2}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Покладаючи у правій частині системи (4.2) всі x_i рівними нулю одержимо нульове наближення:

$X^0 = \beta$

Перше наближення:

$X^1 = \alpha X^0 + \beta$

Друге наближення:

$X^2 = \alpha X^1 + \beta$

$(k+1)$-е наближення (**ітераційна формула методу простої ітерації**):

$$X^{k+1} = \alpha X^k + \beta, \quad k = 0,1,2 \qquad (4.3)$$

Визначимо умови збіжності ітераційного процесу (4.3) наступними теоремами.

Теорема 4.1. (про достатні умови збіжності методу простої ітерації)

Якщо $\|\alpha\|_3 < 1$, то метод простої ітерації збіжний.

Доведення:

Перетворимо алгебраїчно ітераційну формулу (4.3) до виду:

$$X^k = \alpha X^{k-1} + \beta = \alpha^2 X^{k-2} + (\alpha + E)\beta + \dots = \alpha^k X^0 + (\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} + \dots + E)\beta \qquad (4.4)$$

Врахуємо відомі твердження теорії матриць:

$\|\alpha\|_3 < 1 \ \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}(\alpha^k + \alpha^{k-1} + \dots + E) = (E - \alpha)^{-1}$

$\|\alpha\|_3 < 1 \ \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \alpha^k = 0$

Перейдемо до границі виразу (4.4):

$\lim\limits_{k\to\infty} X^k = (E - \alpha)^{-1}\beta \equiv X$. Теорема доведена.

Теорема 4.2. (про необхідні умови збіжності методу простої ітерації)

Якщо метод простої ітерації збігається при будь-якому початковому наближенні, то $\|\alpha\|_3 < 1$.

Доведення:

$X = \alpha X + \beta$

$X^k = \alpha X^{k-1} + \beta$

знайдемо різницю:

$X^k - X = \alpha(X^{k-1} - X) = \alpha^2(X^{k-2} - X) = \dots = \alpha^k(X^0 - X)$

перейдемо до границі виразу, врахуємо умови теореми та одержимо:

$\lim_{k\to\infty}(X^k - X) = 0 = \lim_{k\to\infty}\alpha^k$

Остання рівність, на підставі відомого твердження теорії матриць

$\|\alpha\|_3 < 1 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\alpha^k = 0$

приводить до оцінки:

$\|\alpha\|_3 < 1$. Теорема доведена.

Висновки (із теореми про достатні умови збіжності методу простої ітерації).

Якщо $\|\alpha\| < 1$, то метод простої ітерації збіжний. Отже для аналізу збіжності методу простої ітерації можна використовувати будь-яку формулу норми матриці α.

Крім того, можна перевірити ітераційний процес на збіжність виходячи з властивостей матриці A системи (4.1). Матриця A має бути з діагональним переважанням. Діагональне переважання в системі (4.1) є достатньою умовою збіжності методу простої ітерації. Проте цю умову можна значно послабити, а саме, повинна виконуватися умова

$$|a_{kk}| \geq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|, \quad k = 1,2,\dots,n,$$

причому принаймні для одного k (в одному рівнянні) має бути строга нерівність.

Умова закінчення ітерацій методу простої ітерації визначається нерівністю:

$$\|X^k - X\| \leq \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|}\|\beta\| < \varepsilon. \qquad (4.5)$$

4.3. Метод Зейделя

Метод Зейделя є модифікацією методу простої ітерації. При знаходженні координати $x_i^{(k+1)}$ $(k+1)$-го наближення використовуються вже знайдені координати $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$ цього наближення, тобто:

$x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + \dots + b_{1n}x_n^{(k)} + c_1$

$x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k+1)} + b_{22}x_2^{(k)} + \cdots + b_{2n}x_n^{(k)} + c_2$

. . . .

$x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k+1)} + b_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + b_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + b_{nn}x_n^{(k)} + c_n$

Метод Зейделя дає кращу збіжність ніж метод простої ітерації. Для методу Зейделя гарних оцінок точності немає, тому наближення будують до тих пір, поки дві сусідні ітерації $\vec{x}^{(k)}$ та $\vec{x}^{(k+1)}$ не співпадуть із заданою точністю. Теореми про збіжність методу простої ітерації застосовують також для дослідження збіжності методу Зейделя.

Контрольні запитання

1. *Для яких СЛАР (прямокутних чи квадратних) застосовують ітераційні методи?*
2. *Дайте означення збіжності ітераційного процесу.*
3. *Як визначити норму вектора?*
4. *Як визначити норму матриці?*
5. *В чому суть методу простої ітерації розв'язання СЛАР?*
6. *В чому суть методу Зейделя розв'язання СЛАР?*
7. *Який ітераційний метод дає кращу збіжність?*
8. *Сформулюйте теорему про достатні умови збіжності методу простої ітерації для СЛАР.*
9. *Сформулюйте теорему про необхідні умови збіжності методу простої ітерації для СЛАР.*
10. *Яка умова закінчення ітерацій у методі Зейделя?*

Тест "Так/Ні " для самоперевірки знань студентів

1. Метод Зейделя відноситься до ітераційних методів розв'язання СЛАР.
2. Метод Зейделя можна застосовувати для СЛАР з m лінійних рівнянь та n невідомих ($m \neq n$).
3. Метод простої ітерації дає кращу збіжність ніж метод Зейделя.
4. Матриця A СЛАР з діагональним переважанням забезпечує збіжність ітераційного процесу.
5. Якщо $\|\alpha\|_3 < 1$, то метод простої ітерації збіжний.
6. Якщо метод простої ітерації збіжний, то початкове наближення можна вибирати довільним чином.

7. Щоб оцінити необхідну кількість ітерацій у методі простої ітерації для досягнення бажаної точності достатньо визначити норму матриці α.
8. Метод простої ітерації є модифікацією методу Зейделя.
9. Теореми про збіжність методу простої ітерації застосовують для дослідження збіжності методу Зейделя.
10. Для аналізу збіжності методу Зейделя та простої ітерації можна користуватись не тільки формулою для сферичної норми матриці.

Відповіді

1.Так. 2. Ні. 3. Ні. 4. Так. 5. Так. 6. Так. 7. Ні. 8. Ні. 9. Так. 10. Так.

Задачі для самостійного розв'язування

Завдання 9

Методом простої ітерації розв'язати СЛАР, перевіривши метод на збіжність. Визначити необхідну кількість ітерацій та виконати три ітерації.

Варіант 1 $\begin{cases} x_1 = 0{,}23x_1 - 0{,}04x_2 + 0{,}21x_3 - 0{,}18x_4 + 1{,}24 \\ x_2 = 0{,}45x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}06x_3 - 0{,}88 \\ x_3 = 0{,}26x_1 + 0{,}34x_2 - 0{,}11x_3 + 0{,}62 \\ x_4 = 0{,}05x_1 - 0{,}26x_2 + 0{,}34x_3 - 0{,}12x_4 - 1{,}17 \end{cases}$	**Варіант 2** $\begin{cases} x_1 = 0{,}21x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}34x_3 - 0{,}16x_4 - 0{,}64 \\ x_2 = 0{,}34x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}17x_3 - 0{,}18x_4 + 1{,}42 \\ x_3 = 0{,}16x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}15x_3 - 0{,}31x_4 - 0{,}42 \\ x_4 = 0{,}12x_1 - 0{,}26x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}25x_4 + 0{,}83 \end{cases}$
Варіант 3 $\begin{cases} x_1 = 0{,}32x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}02x_3 + 0{,}21x_4 + 1{,}83 \\ x_2 = 0{,}16x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}14x_3 + 0{,}27x_4 - 0{,}65 \\ x_3 = 0{,}37x_1 + 0{,}27x_2 - 0{,}02x_3 - 0{,}24x_4 + 2{,}23 \\ x_4 = 0{,}12x_1 + 0{,}21x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}25x_4 - 1{,}13 \end{cases}$	**Варіант 4** $\begin{cases} x_1 = 0{,}42x_1 - 0{,}32x_2 + 0{,}03x_3 + 0{,}44 \\ x_2 = 0{,}11x_1 - 0{,}26x_2 - 0{,}36x_3 + 1{,}42 \\ x_3 = 0{,}12x_1 + 0{,}08x_2 - 0{,}14x_3 - 0{,}24x_4 - 0{,}83 \\ x_4 = 0{,}15x_1 - 0{,}35x_2 - 0{,}18x_3 - 1{,}42 \end{cases}$
Варіант 5 $\begin{cases} x_1 = 0{,}18x_1 - 0{,}34x_2 - 0{,}12x_3 + 0{,}15x_4 - 1{,}33 \\ x_2 = 0{,}11x_1 + 0{,}23x_2 - 0{,}15x_3 + 0{,}32x_4 + 0{,}84 \\ x_3 = 0{,}05x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}14x_3 - 0{,}18x_4 - 1{,}16 \\ x_4 = 0{,}12x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}06x_3 + 0{,}57 \end{cases}$	**Варіант 6** $\begin{cases} x_1 = 0{,}13x_1 + 0{,}23x_2 - 0{,}44x_3 - 0{,}05x_4 + 2{,}13 \\ x_2 = 0{,}24x_1 - 0{,}31x_3 + 0{,}15x_4 - 0{,}18 \\ x_3 = 0{,}06x_1 + 0{,}15x_2 - 0{,}23x_4 + 1{,}44 \\ x_4 = 0{,}72x_1 - 0{,}08x_2 - 0{,}05x_3 + 2{,}42 \end{cases}$
Варіант 7 $\begin{cases} x_1 = 0{,}17x_1 + 0{,}31x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}22x_4 - 1{,}71 \\ x_2 = -0{,}21x_1 + 0{,}33x_3 + 0{,}22x_4 + 0{,}62 \\ x_3 = 0{,}32x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}05x_3 - 0{,}19x_4 - 0{,}89 \\ x_4 = 0{,}12x_1 + 0{,}28x_2 - 0{,}14x_3 + 0{,}94 \end{cases}$	**Варіант 8** $\begin{cases} x_1 = 0{,}13x_1 + 0{,}27x_2 - 0{,}22x_3 - 0{,}18x_4 + 1{,}21 \\ x_2 = -0{,}21x_1 - 0{,}45x_3 + 0{,}18x_4 - 0{,}33 \\ x_3 = 0{,}12x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}33x_3 + 0{,}18x_4 - 0{,}48 \\ x_4 = 0{,}33x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}06x_3 - 0{,}28x_4 - 0{,}17 \end{cases}$

Варіант 9 $\begin{cases} x_1 = 0{,}19x_1 - 0{,}07x_2 + 0{,}38x_3 - 0{,}21x_4 - 0{,}81 \\ x_2 = -0{,}22x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}11x_3 + 0{,}33x_4 - 0{,}64 \\ x_3 = 0{,}51x_1 - 0{,}07x_2 + 0{,}09x_3 - 0{,}11x_4 + 1{,}71 \\ x_4 = 0{,}33x_1 - 0{,}41x_2 - 1{,}21 \end{cases}$	**Варіант 10** $\begin{cases} x_1 = 0{,}22x_2 - 0{,}11x_3 + 0{,}31x_4 + 2{,}70 \\ x_2 = 0{,}38x_1 - 0{,}12x_3 + 0{,}22x_4 - 1{,}50 \\ x_3 = 0{,}11x_1 + 0{,}23x_2 - 0{,}51x_4 + 1{,}20 \\ x_4 = 0{,}17x_1 - 0{,}21x_2 + 0{,}31x_3 - 0{,}17 \end{cases}$
Варіант 11 $\begin{cases} x_1 = 0{,}07x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}18x_4 - 0{,}51 \\ x_2 = 0{,}18x_1 + 0{,}52x_2 + 0{,}21x_4 + 1{,}17 \\ x_3 = 0{,}13x_1 + 0{,}31x_2 - 0{,}21x_4 - 1{,}02 \\ x_4 = 0{,}08x_1 - 0{,}33x_3 + 0{,}28x_4 - 0{,}28 \end{cases}$	**Варіант 12** $\begin{cases} x_1 = 0{,}05x_1 - 0{,}06x_2 - 0{,}12x_3 + 0{,}14x_4 - 2{,}17 \\ x_2 = 0{,}04x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}11x_4 + 1{,}40 \\ x_3 = 0{,}34x_1 + 0{,}08x_2 - 0{,}06x_3 + 0{,}14x_4 - 2{,}10 \\ x_4 = 0{,}11x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}03x_4 - 0{,}80 \end{cases}$
Варіант 13 $\begin{cases} x_1 = 0{,}08x_1 - 0{,}03x_2 - 0{,}04x_4 - 1{,}20 \\ x_2 = 0{,}31x_2 + 0{,}27x_3 - 0{,}08x_4 + 0{,}81 \\ x_3 = 0{,}33x_1 - 0{,}07x_3 + 0{,}21x_4 - 0{,}92 \\ x_4 = 0{,}11x_1 + 0{,}03x_3 + 0{,}58x_4 + 0{,}17 \end{cases}$	**Варіант 14** $\begin{cases} x_1 = 0{,}12x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}25x_3 - 0{,}16x_4 + 1{,}24 \\ x_2 = 0{,}14x_1 + 0{,}34x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}24x_4 - 0{,}89 \\ x_3 = 0{,}33x_1 + 0{,}03x_2 + 0{,}16x_3 - 0{,}32x_4 + 1{,}15 \\ x_4 = 0{,}12x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}15x_4 - 0{,}57 \end{cases}$
Варіант 15 $\begin{cases} x_1 = 0{,}23x_1 - 0{,}14x_2 + 0{,}06x_3 - 0{,}12x_4 + 1{,}21 \\ x_2 = 0{,}12x_1 + 0{,}32x_2 - 0{,}18x_4 - 0{,}72 \\ x_3 = 0{,}08x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}23x_3 + 0{,}32x_4 - 0{,}58 \\ x_4 = 0{,}25x_1 + 0{,}22x_2 + 0{,}14x_3 + 1{,}56 \end{cases}$	**Варіант 16** $\begin{cases} x_1 = 0{,}14x_1 + 0{,}23x_2 + 0{,}18x_3 + 0{,}17x_4 - 1{,}42 \\ x_2 = 0{,}12x_1 - 0{,}14x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}09x_4 - 0{,}83 \\ x_3 = 0{,}16x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}35x_4 + 1{,}21 \\ x_4 = 0{,}23x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}25x_4 + 0{,}65 \end{cases}$
Варіант 17 $\begin{cases} x_1 = 0{,}24x_1 + 0{,}21x_2 + 0{,}06x_3 - 0{,}34x_4 + 1{,}42 \\ x_2 = 0{,}05x_1 + 0{,}32x_3 + 0{,}12x_4 - 0{,}57 \\ x_3 = 0{,}35x_1 - 0{,}27x_2 - 0{,}05x_4 + 0{,}68 \\ x_4 = 0{,}12x_1 - 0{,}43x_2 + 0{,}04x_3 - 0{,}21x_4 - 2{,}14 \end{cases}$	**Варіант 18** $\begin{cases} x_1 = 0{,}17x_1 + 0{,}27x_2 - 0{,}13x_3 - 0{,}11x_4 - 1{,}42 \\ x_2 = 0{,}13x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}09x_3 - 0{,}06x_4 + 0{,}48 \\ x_3 = 0{,}11x_1 + 0{,}05x_2 - 0{,}02x_3 + 0{,}12x_4 - 2{,}34 \\ x_4 = 0{,}13x_1 + 0{,}18x_2 + 0{,}24x_3 + 0{,}43x_4 + 0{,}72 \end{cases}$
Варіант 19 $\begin{cases} x_1 = 0{,}15x_1 + 0{,}05x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}14x_4 - 0{,}48 \\ x_2 = 0{,}32x_1 - 0{,}13x_2 - 0{,}12x_3 + 0{,}11x_4 + 1{,}24 \\ x_3 = 0{,}17x_1 + 0{,}06x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}12x_4 + 1{,}15 \\ x_4 = 0{,}21x_1 - 0{,}16x_2 + 0{,}36x_3 - 0{,}88 \end{cases}$	**Варіант 20** $\begin{cases} x_1 = 0{,}28x_2 - 0{,}17x_3 + 0{,}06x_4 + 0{,}21 \\ x_2 = 0{,}52x_1 + 0{,}12x_3 + 0{,}17x_4 - 1{,}17 \\ x_3 = 0{,}17x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}21x_3 - 0{,}81 \\ x_4 = 0{,}11x_1 + 0{,}22x_2 + 0{,}03x_3 + 0{,}05x_4 + 0{,}72 \end{cases}$
Варіант 21 $\begin{cases} x_1 = 0{,}52x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}13x_4 - 0{,}22 \\ x_2 = 0{,}07x_1 - 0{,}38x_2 - 0{,}05x_3 + 0{,}41x_4 + 1{,}80 \\ x_3 = 0{,}04x_1 + 0{,}42x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}07x_4 - 1{,}30 \\ x_4 = 0{,}17x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}13x_3 + 0{,}19x_4 + 0{,}33 \end{cases}$	**Варіант 22** $\begin{cases} x_1 = 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2 - 0{,}62x_3 + 0{,}08x_4 - 1{,}30 \\ x_2 = 0{,}03x_1 + 0{,}28x_2 + 0{,}33x_3 - 0{,}07x_4 + 1{,}10 \\ x_3 = 0{,}09x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}42x_3 + 0{,}28x_4 - 1{,}70 \\ x_4 = 0{,}19x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}37x_4 + 1{,}50 \end{cases}$

Варіант 23 $\begin{cases} x_1 = 0{,}17x_2 - 0{,}33x_3 + 0{,}18x_4 - 1{,}20 \\ x_2 = 0{,}18x_2 + 0{,}43x_3 - 0{,}08x_4 + 0{,}33 \\ x_3 = 0{,}22x_1 + 0{,}18x_2 + 0{,}21x_3 + 0{,}07x_4 + 0{,}48 \\ x_4 = 0{,}08x_1 - 0{,}07x_2 - 0{,}21x_3 + 0{,}04x_4 - 1{,}20 \end{cases}$	**Варіант 24** $\begin{cases} x_1 = 0{,}03x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}22x_3 - 0{,}33x_4 + 0{,}43 \\ x_2 = 0{,}22x_1 + 0{,}55x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}07x_4 - 1{,}80 \\ x_3 = 0{,}33x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}08x_3 - 0{,}08x_4 - 0{,}80 \\ x_4 = 0{,}08x_1 + 0{,}17x_2 + 0{,}29x_3 + 0{,}33x_4 + 1{,}70 \end{cases}$
Варіант 25 $\begin{cases} x_1 = 0{,}13x_1 + 0{,}22x_2 - 0{,}33x_3 + 0{,}07x_4 + 0{,}11 \\ x_2 = 0{,}45x_2 - 0{,}23x_3 + 0{,}07x_4 - 1{,}33 \\ x_3 = 0{,}11x_1 - 0{,}08x_3 + 0{,}18x_4 + 0{,}85 \\ x_4 = 0{,}08x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}33x_3 + 0{,}21x_4 - 1{,}70 \end{cases}$	**Варіант 26** $\begin{cases} x_1 = 0{,}32x_1 - 0{,}16x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}15x_4 + 2{,}42 \\ x_2 = 0{,}16x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}21x_4 + 1{,}43 \\ x_3 = 0{,}05x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}34x_4 - 0{,}16 \\ x_4 = 0{,}12x_1 + 0{,}14x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}06x_4 + 1{,}62 \end{cases}$

Зразок виконання Завдання 9

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}22x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}31x_3 - 0{,}12x_4 + 1{,}31 \\ x_2 = 0{,}44x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}07x_3 - 0{,}92 \\ x_3 = 0{,}25x_1 - 0{,}37x_2 + 0{,}12x_3 + 0{,}73 \\ x_4 = 0{,}02x_1 - 0{,}13x_2 + 0{,}47x_3 - 0{,}91 \end{cases}$$

Задамо бажану точність, наприклад, $\varepsilon = 0{,}01$. Перевіримо метод на збіжність, обчисливши кубічну норму матриці α:

$\|\alpha\|_1 = \max\{0{,}7;\ 0{,}64;\ 0{,}74;\ 0{,}62\} = 0{,}74 < 1$

Отже, метод простої ітерації збіжний.

Визначимо необхідну кількість ітерацій, користуючись формулою (4.5):

$\|\beta\|_1 = \max\{1{,}31;\ 0{,}92;\ 0{,}73;\ 0{,}91\} = 1{,}31,$

$\left\|X^k - X\right\| \le \dfrac{0{,}74^{k+1}}{1-0{,}74} \cdot 1{,}31 \le 0{,}01,$

$0{,}74^{k+1} \le \dfrac{0{,}01 \cdot 0{,}26}{1{,}31},$

$0{,}74^{k+1} \le 0{,}00198,$

$(k+1) \cdot \ln 0{,}74 \le \ln 0{,}00198,$

$-(k+1) \cdot 0{,}301 \le -6{,}225,$

$(k+1) \ge 20{,}68 \quad k \ge 20.$

Отже, для досягнення заданої точності необхідно виконати не менше 20 ітерацій.
Вибираємо початкове наближення (можна взяти вільні члени):

$x_1{}^{(0)} = 1{,}31;\ x_2{}^{(0)} = -0{,}92;\ x_3{}^{(0)} = 0{,}73,\ x_4{}^{(0)} = -0{,}91.$

Поклавши у формулі (4.3) $k = 0{,}1{,}2$, знайдемо перші три наближення розв'язку заданої системи:

$X^1 = \alpha X^0 + \beta,\ \ X^2 = \alpha X^1 + \beta, X^3 = \alpha X^2 + \beta,$

$$\alpha=\begin{pmatrix}0{,}22 & -0{,}05 & -0{,}31 & -0{,}12\\ 0{,}44 & 0{,}13 & -0{,}07 & 0\\ 0{,}25 & -0{,}37 & 0{,}12 & 0\\ 0{,}02 & -0{,}13 & 0{,}47 & 0\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1{,}31\\ -0{,}92\\ 0{,}73\\ -0{,}91\end{pmatrix},\quad X^0=\begin{pmatrix}1{,}31\\ -0{,}92\\ 0{,}73\\ -0{,}91\end{pmatrix}$$

$$X^1=\begin{pmatrix}0{,}22 & -0{,}05 & -0{,}31 & -0{,}12\\ 0{,}44 & 0{,}13 & -0{,}07 & 0\\ 0{,}25 & -0{,}37 & 0{,}12 & 0\\ 0{,}02 & -0{,}13 & 0{,}47 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1{,}31\\ -0{,}92\\ 0{,}73\\ -0{,}91\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1{,}31\\ -0{,}92\\ 0{,}73\\ -0{,}91\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}53\\ -0{,}51\\ 1{,}49\\ -0{,}42\end{pmatrix},$$

$$X^2=\begin{pmatrix}1{,}26\\ -0{,}42\\ 1{,}48\\ -0{,}11\end{pmatrix},\quad X^3=\begin{pmatrix}1{,}16\\ -0{,}52\\ 1{,}38\\ -0{,}13\end{pmatrix}.$$

Завдання 10

Перетворити систему, щоб домогтися діагонального переважання в матриці A. Методом Зейделя розв’язати СЛАР. Виконати три ітерації.

Варіант 1 $\begin{cases}2{,}7x_1+3{,}3x_2+1{,}3x_3=2{,}1\\ 3{,}5x_1-1{,}7x_2+2{,}8x_3=1{,}7\\ 4{,}1x_1+5{,}8x_2-1{,}7x_3=0{,}8\end{cases}$	**Варіант 2** $\begin{cases}1{,}7x_1+2{,}8x_2+1{,}9x_3=0{,}7\\ 2{,}1x_1+3{,}4x_2+1{,}8x_3=1{,}1\\ 4{,}2x_1-1{,}7x_2+1{,}3x_3=2{,}8\end{cases}$
Варіант 3 $\begin{cases}3{,}7x_1+2{,}8x_2+1{,}9x_3=0{,}2\\ 1{,}9x_1+3{,}1x_2+2{,}1x_3=1{,}7\\ 7{,}5x_1+3{,}8x_2+4{,}8x_3=5{,}6\end{cases}$	**Варіант 4** $\begin{cases}9{,}1x_1+5{,}6x_2+7{,}8x_3=9{,}8\\ 3{,}8x_1+5{,}1x_2+2{,}8x_3=6{,}7\\ 4{,}1x_1+5{,}7x_2+1{,}2x_3=5{,}8\end{cases}$
Варіант 5 $\begin{cases}3{,}3x_1+2{,}1x_2+2{,}8x_3=0{,}8\\ 4{,}1x_1+3{,}7x_2+4{,}8x_3=5{,}7\\ 2{,}7x_1+1{,}8x_2+1{,}1x_3=3{,}2\end{cases}$	**Варіант 6** $\begin{cases}7{,}6x_1+5{,}8x_2+4{,}7x_3=10{,}1\\ 3{,}8x_1+4{,}1x_2+2{,}7x_3=9{,}7\\ 2{,}9x_1+2{,}1x_2+3{,}8x_3=7{,}8\end{cases}$
Варіант 7 $\begin{cases}3{,}2x_1-2{,}5x_2+3{,}7x_3=6{,}5\\ 0{,}5x_1+0{,}34x_2+1{,}7x_3=-0{,}24\\ 1{,}6x_1+2{,}3x_2-1{,}5x_3=4{,}3\end{cases}$	**Варіант 8** $\begin{cases}5{,}4x_1-2{,}3x_2+3{,}4x_3=-3{,}5\\ 4{,}2x_1+1{,}7x_2-2{,}3x_3=2{,}7\\ 3{,}4x_1+2{,}4x_2+7{,}4x_3=1{,}9\end{cases}$
Варіант 9 $\begin{cases}3{,}6x_1+1{,}8x_2-4{,}7x_3=3{,}8\\ 2{,}7x_1-3{,}6x_2+1{,}9x_3=0{,}4\\ 1{,}5x_1+4{,}5x_2+3{,}3x_3=-1{,}6\end{cases}$	**Варіант 10** $\begin{cases}5{,}6x_1+2{,}7x_2-1{,}7x_3=1{,}9\\ 3{,}4x_1-3{,}6x_2-6{,}7x_3=-2{,}4\\ 0{,}8x_1+1{,}3x_2+3{,}7x_3=1{,}2\end{cases}$
Варіант 11 $\begin{cases}2{,}7x_1+0{,}9x_2-1{,}5x_3=3{,}5\\ 4{,}5x_1-2{,}8x_2+6{,}7x_3=2{,}6\\ 5{,}1x_1+3{,}7x_2-1{,}4x_3=-0{,}14\end{cases}$	**Варіант 12** $\begin{cases}4{,}5x_1-3{,}5x_2+7{,}4x_3=2{,}5\\ 3{,}1x_1-0{,}6x_2-2{,}3x_3=-1{,}5\\ 0{,}8x_1+7{,}4x_2-0{,}5x_3=6{,}4\end{cases}$

Варіант 13 $\begin{cases}3{,}8x_1+6{,}7x_2-1{,}2x_3=5{,}2\\6{,}4x_1+1{,}3x_2-2{,}7x_3=3{,}8\\2{,}4x_1-4{,}5x_2+3{,}5x_3=-0{,}6\end{cases}$	**Варіант 14** $\begin{cases}5{,}4x_1-6{,}2x_2-0{,}5x_3=0{,}52\\3{,}4x_1+2{,}3x_2+0{,}8x_3=-0{,}8\\2{,}4x_1-1{,}1x_2+3{,}8x_3=1{,}8\end{cases}$
Варіант 15 $\begin{cases}7{,}8x_1+5{,}3x_2+4{,}8x_3=1{,}8\\3{,}3x_1+1{,}1x_2+1{,}8x_3=2{,}3\\4{,}5x_1+3{,}3x_2+2{,}8x_3=3{,}4\end{cases}$	**Варіант 16** $\begin{cases}3{,}8x_1+4{,}1x_2-2{,}3x_3=4{,}8\\-2{,}1x_1+3{,}9x_2-5{,}8x_3=3{,}3\\1{,}8x_1+1{,}1x_2-2{,}1x_3=5{,}8\end{cases}$
Варіант 17 $\begin{cases}1{,}7x_1-2{,}2x_2+3{,}0x_3=1{,}8\\2{,}1x_1+1{,}9x_2-2{,}3x_3=2{,}8\\4{,}2x_1+3{,}9x_2-3{,}1x_3=5{,}1\end{cases}$	**Варіант 18** $\begin{cases}2{,}8x_1+3{,}8x_2-3{,}2x_3=4{,}5\\2{,}5x_1-2{,}8x_2+3{,}3x_3=7{,}1\\6{,}5x_1-7{,}1x_2+4{,}8x_3=6{,}3\end{cases}$
Варіант 19 $\begin{cases}3{,}3x_1+3{,}7x_2+4{,}2x_3=5{,}8\\2{,}7x_1+2{,}3x_2-2{,}9x_3=6{,}1\\4{,}1x_1+4{,}8x_2-5{,}0x_3=7{,}0\end{cases}$	**Варіант 20** $\begin{cases}7{,}1x_1+6{,}8x_2+6{,}1x_3=7{,}0\\5{,}0x_1+4{,}8x_2+5{,}3x_3=6{,}1\\8{,}2x_1+7{,}8x_2+7{,}1x_3=5{,}8\end{cases}$
Варіант 21 $\begin{cases}3{,}7x_1+3{,}1x_2+4{,}0x_3=5{,}0\\4{,}1x_1+4{,}5x_2-4{,}8x_3=4{,}9\\-2{,}1x_1-3{,}7x_2+1{,}8x_3=2{,}7\end{cases}$	**Варіант 22** $\begin{cases}4{,}1x_1+5{,}2x_2-5{,}8x_3=7{,}0\\3{,}8x_1-3{,}1x_2+4{,}0x_3=5{,}3\\7{,}8x_1+5{,}3x_2-6{,}3x_3=5{,}8\end{cases}$
Варіант 23 $\begin{cases}3{,}7x_1-2{,}3x_2+4{,}5x_3=2{,}4\\2{,}5x_1+4{,}7x_2-7{,}8x_3=3{,}5\\1{,}6x_1+5{,}3x_2+1{,}3x_3=-2{,}4\end{cases}$	**Варіант 24** $\begin{cases}6{,}3x_1+5{,}2x_2-0{,}6x_3=1{,}5\\3{,}4x_1-2{,}3x_2+3{,}4x_3=2{,}7\\0{,}8x_1+1{,}4x_2+3{,}5x_3=-2{,}3\end{cases}$
Варіант 25 $\begin{cases}1{,}5x_1+2{,}3x_2-3{,}7x_3=4{,}5\\2{,}8x_1+3{,}4x_2+5{,}8x_3=-3{,}2\\1{,}2x_1+7{,}3x_2-2{,}3x_3=5{,}6\end{cases}$	**Варіант 26** $\begin{cases}0{,}9x_1+2{,}7x_2-3{,}8x_3=2{,}4\\2{,}5x_1+5{,}8x_2-0{,}5x_3=3{,}5\\4{,}5x_1-2{,}1x_2+3{,}2x_3=-1{,}2\end{cases}$

<u>Зразок виконання Завдання 10</u>

$$\begin{cases}12x_1-2x_2+3x_3=-6\\10x_1+14x_2+2x_3=-3\\x_1+15x_2+14x_3=-1\end{cases}$$

Будуємо спочатку систему, рівносильну даній системі, з діагональним переважанням, рівняння якої є лінійними комбінаціями рівнянь даної системи.:

$$\left.\begin{array}{r}94x_1+23x_3=-45\\94x_2-3x_3=12\\3x_1-x_2+15x_3=-4\end{array}\right\}.$$

Звідси

$x_1 = -0{,}2447x_3 - 0{,}4787$

$x_2 = 0{,}0319x_3 + 0{,}1277$

$x_3 = -0{,}2000x_1 + 0{,}0667x_2 - 0{,}2667$

$\max(0{,}2447;\ \ 0{,}0319;\ \ 0{,}2000 + 0{,}0667) \leq 0{,}27 < 1$

Отже, процес Зейделя збіжний.
Вибираємо початкове наближення (можна взяти вільні члени):

${x_1}^{(0)} = -0{,}5;\ {x_2}^{(0)} = 0{,}1;\ {x_3}^{(0)} = -0{,}3.$

Ітерації за методом Зейделя будуть наступними:

$$X^1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}2447 \cdot x_3^{(0)} - 0{,}4787 \\ 0{,}0319 \cdot x_3^{(0)} + 0{,}1277 \\ -0{,}2000 \cdot x_1^{(1)} + 0{,}0667 \cdot x_2^{(1)} - 0{,}2667 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}2447 \cdot (-0{,}3) - 0{,}4787 = \mathbf{-0{,}4053} \\ 0{,}0319 \cdot (-0{,}3) + 0{,}1277 = \mathbf{0{,}1181} \\ -0{,}2000 \cdot (\mathbf{-0{,}4053}) + 0{,}0667 \cdot (\mathbf{0{,}1181}) - 0{,}2667 = -0{,}1778 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4053 \\ 0{,}1181 \\ -0{,}1778 \end{pmatrix}$$

Отже:

$$X^1 = \begin{pmatrix} -0{,}4053 \\ 0{,}1181 \\ -0{,}1778 \end{pmatrix}.$$

Аналогічним чином одержимо:

$$X^2 = \begin{pmatrix} -0{,}4352 \\ 0{,}1220 \\ -0{,}1715 \end{pmatrix};\ X^3 = \begin{pmatrix} -0{,}4367 \\ 0{,}1222 \\ -0{,}1719 \end{pmatrix}.$$

Розділ 5. Чисельні методи розв'язання систем нелінійних рівнянь

5.1. Постановка задачі

Розглянемо систему нелінійних рівнянь з дійсними лівими частинами:

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ u_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ u_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Запишемо систему (5.1) у матричній формі:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}; \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \boldsymbol{n} - \text{вимірний вектор;} \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} - \boldsymbol{n} - \text{вимірна вектор} - \text{функція.}$$

Необхідно знайти прості ізольовані корені рівняння (5.2) або нулі вектор-функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. Для розв'язання системи нелінійних рівнянь (5.2) використовують ітераційні методи: метод простої ітерації та метод Ньютона.

5.2. Метод Ньютона

Нехай знайдено *k*-е наближення одного з ізольованих коренів векторного рівняння (5.2):

$$x^k = \left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right)$$

Тоді, точний корінь рівняння (5.2) можна подати у вигляді:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\varepsilon}^k, \tag{5.3}$$

де $\boldsymbol{\varepsilon}^k = (\varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k, \dots, \varepsilon_n^k)$ – похибка кореня.

Підставимо (5.3) у (5.2) та одержимо:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\varepsilon}^k) = \boldsymbol{0}$$

Вважаючи, що функція $\boldsymbol{u(x)}$ неперервно диференційовна у деякій опуклій області, що містить **x**, розвинемо її у багатовимірний ряд Тейлора по степеням малого вектора $\boldsymbol{\varepsilon}^k$, обмежуючись лінійними доданками:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\varepsilon}^k) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^k) + u'\left(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0} \tag{5.4}$$

Запишемо розгорнуту форму рівняння (5.4):

$$u_1\left(x_1^k + \varepsilon_1^k, x_2^k + \varepsilon_2^k, \dots, x_n^k + \varepsilon_n^k\right) =$$
$$= u_1\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right) + u'_{1,x1}\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right)\varepsilon_1^k$$
$$+ u'_{1,x2}\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right)\varepsilon_2^k + \dots + u'_{1,xn}\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right)\varepsilon_n^k = 0,$$
$$u_2\left(x_1^k + \varepsilon_1^k, x_2^k + \varepsilon_2^k, \dots, x_n^k + \varepsilon_n^k\right) =$$
$$= u_2\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right) + u'_{2,x1}\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right)\varepsilon_1^k$$
$$+ u'_{2,x2}\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right)\varepsilon_2^k + \dots + u'_{2,xn}\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right)\varepsilon_n^k = 0,$$

… ..

$$u_n\left(x_1^k + \varepsilon_1^k, x_2^k + \varepsilon_2^k, \dots, x_n^k + \varepsilon_n^k\right) == u_n\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right) +$$
$$u'_{n,x1}\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right)\varepsilon_1^k + u'_{n,x2}\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right)\varepsilon_2^k + \dots +$$
$$u'_{n,xn}\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right)\varepsilon_n^k = 0. \qquad (5.5)$$

Похідна вектор-функції ***u(x)*** по змінній ***x*** формує матрицю Якобі:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}) = \left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\}_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad (5.6)$$

З урахуванням матриці Якобі формулу (5.4) перепишемо у вигляді:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^k) + W\left(\boldsymbol{x^k}\right)\varepsilon^{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}$$

Враховуючи, що матриця Якобі невироджена, одержимо:

$$\boldsymbol{\varepsilon^k} = -W^{-\mathbf{1}}\left(\boldsymbol{x^k}\right)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x^k})$$

Беручи до уваги (5.3), одержимо **ітераційну формулу методу Ньютона**:

$$\boldsymbol{x^{k+1}} = \boldsymbol{x^k} - W^{-\mathbf{1}}\left(\boldsymbol{x^k}\right)\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{x^k}\right), \quad k = 0,1,2,\dots \qquad (5.7)$$

Теорема 5.1.(про достатні умови збіжності методу Ньютона)

Нехай дано систему нелінійних рівнянь із дійсними коефіцієнтами, де вектор-функція $u(x) \in C^2(X)$ та $\mathbf{x}^0 \in \Delta = \{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \le r\} \subset X$, причому виконуються такі умови:

1). Матриця Якобі $W(\mathbf{x})$, коли $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ має обернену $\Gamma_0 = W^{-1}(x^0)$, де $\|\Gamma_0\| \le a$;

2). $\left\| \Gamma_0 u(x^0) \right\| \leq b \leq \dfrac{r}{2}$;

3). $\sum\limits_{k=1}^{n} \left| \dfrac{\partial^2 u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq c, \quad i, j = 1,2,...,n, \quad \mathbf{x} \in \Delta$;

4). сталі a, b, c задовольняють нерівність $2nabc \leq 1$.

Тоді процес Ньютона (5.7) з початковим наближенням $\mathbf{x}^0$ збіжний.

Зауваження У наведеній теоремі використовується кубічна норма.

5.3. Метод простої ітерації

Нехай задана система нелінійних рівнянь у канонічній формі:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \tag{5.8}$$

де функції $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ - дійсні, визначені та неперервні у деякому околі M ізольованого розв'язку $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ цієї системи.

Запишемо матричну фому системи (5.8):

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \tag{5.9}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{n} - \text{вимірний вектор;}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\boldsymbol{x}) \\ \varphi_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \varphi_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} - \text{n} - \text{вимірна вектор} - \text{функція.}$$

Ітераційна формула методу простої ітерації:

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\right), \quad k = 0,1,2 \dots$$

Якщо процес ітерації збіжний, то граничне значення $\boldsymbol{\xi} = \lim\limits_{k \to \infty} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}$ є коренем рівняння (5.9). Дійсно, якщо границя існує, з ітераційної формули одержимо:

$$\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{\varphi}(\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}})$$

тобто:

$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi})$.

Розглянемо неявну форму запису системи нелінійних рівнянь:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}, \tag{5.10}$$

де $\mathbf{f}(\boldsymbol{x})$ - вектор-функція, що визначена та неперервна в околі *M* ізольованого кореня $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Приведемо (5.10) до канонічного виду:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

де A – невироджена матриця.

Введемо позначення:

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{5.11}$$

Отже:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \tag{5.12}$$

Якщо функція $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ має неперервну похідну $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ у *M*, то продиференціювавши праву та ліву частину рівняння (5.11), одержимо:

$$\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \tag{5.13}$$

Процес ітерації для рівняння (5.12) збіжний, якщо $\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})$ мала по нормі. Тому, вибираємо матрицю *A* так, щоб:

$$\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}) = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}) = \mathbf{0}$$

Якщо матриця $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})$ невироджена, то:

$$\boldsymbol{A} = -(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}))^{-\mathbf{1}}. \tag{5.14}$$

Врахувавши (5.14) з (5.11) та (5.12) одержимо ітераційну формулу методу простої ітерації:

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} - \left(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})\right)^{-\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}). \tag{5.15}$$

Зауваження 1. Якщо $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})) = \mathbf{0}$, то потрібно вибрати інше початкове наближення.

Зауваження 2. У формулі (5.13) похідна вектор-функцій розуміється у сенсі відповідних матриць Якобі.

Теорема 5.2. (про достатні умови збіжності методу простої ітерації для систем нелінійних рівнянь)

Якщо вектор-функція $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ та її матриця Якобі $W(\boldsymbol{x})$ неперервні в деякій області M, у якій справджується нерівність:

$\|W(\boldsymbol{x})\| \le \boldsymbol{q} < \mathbf{1}$

і всі ітерації $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} \epsilon M,\quad k = 0,1,2,\ldots$, то ітераційний процес $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k+1}} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}})$ збігається до розв'язку системи рівнянь (5.12).

Висновки з **Теореми 5.2.** при застосуванні кубічної та октаедричної норм: процес ітерації $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k+1}} = \boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\right)$ збігається, якщо:

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i(x)}{\partial x_j}\right| \le q_i < 1, \quad i = 1,2,\ldots$$

або

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i(x)}{\partial x_j}\right| \le q_j < 1, \quad j = 1,2,\ldots$$

Контрольні запитання

1. *Які ітераційні методи використовують для розв'язання систем нелінійних рівнянь?*
2. *Дайте означення матриці Якобі.*
3. *Які властивості матриці Якобі?*
4. *В чому суть методу простої ітерації розв'язання систем нелінійних рівнянь?*
5. *В чому суть методу Ньютона розв'язання систем нелінійних рівнянь?*
6. *Який ітераційний метод дає кращу збіжність?*
7. *Сформулюйте теорему про достатні умови збіжності методу Ньютона для систем нелінійних рівнянь.*
8. *Сформулюйте теорему про достатні умови збіжності методу простої ітерації для систем нелінійних рівнянь.*
9. *Як вибирається початкове наближення у методі простої ітерації?*

Тест "Так/Ні " для самоперевірки знань студентів

1. Елементи матриці Якобі є частковими похідними вектор-функції.
2. Матриця Якобі симетрична.
3. Матриця Якобі має обернену.
4. Матриця Якобі прямокутна.
5. Метод Ньютона збіжний завжди.

6. Якщо $\|W(x)\| < 1$ і виконуються умови неперервності функцій, то метод простої ітерації збіжний.
7. Якщо метод простої ітерації збіжний, то початкове наближення можна вибирати довільним чином.
8. Для розв'язання системи нелінійних рівнянь методом простої ітерації її треба привести до канонічного виду.
9. Процес ітерації для рівняння $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ розбіжний, якщо $\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})$ мала по нормі.
10. Якщо у методі простої ітерації матриця $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{0}})$ вироджена, то потрібно вибрати інше початкове наближення.

Відповіді

1.Так. 2. Ні. 3. Так. 4. Ні. 5. Ні. 6. Так. 7. Так. 8. Так. 9. Ні. 10. Так.

Задачі для самостійного розв'язування

Завдання 11

Методом ітерацій розв'язати систему нелінійних рівнянь з точністю до 0,01, перевіривши метод на збіжність.

Варіант 1 $\begin{cases}\sin(x+1) - y = 1{,}2\\ 2x + \cos y = 2\end{cases}$	**Варіант 2** $\begin{cases}\cos(x-1) + y = 0{,}5\\ x - \cos y = 3\end{cases}$
Варіант 3 $\begin{cases}\sin x + 2y = 2\\ \cos(y-1) + x = 0{,}7\end{cases}$	**Варіант 4** $\begin{cases}\cos x + y = 1{,}5\\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 1\end{cases}$
Варіант 5 $\begin{cases}\sin(x+0{,}5) - y = 1\\ \cos(y-2) + x = 0\end{cases}$	**Варіант 6** $\begin{cases}\cos(x+0{,}5) + y = 0{,}8\\ \sin y - 2x = 1{,}6\end{cases}$
Варіант 7 $\begin{cases}\sin(x-1) = 1{,}3 - y\\ x - \sin(y+1) = 0{,}8\end{cases}$	**Варіант 8** $\begin{cases}2y - \cos(x+1) = 0\\ x + \sin y = -0{,}4\end{cases}$
Варіант 9 $\begin{cases}\cos(x+0{,}5) - y = 2\\ \sin y - 2x = 1\end{cases}$	**Варіант 10** $\begin{cases}\sin(x+2) - y = 1{,}5\\ x + \cos(y-2) = 0{,}5\end{cases}$
Варіант 11 $\begin{cases}\sin(y+1) - x = 1{,}2\\ 2y + \cos x = 2\end{cases}$	**Варіант 12** $\begin{cases}\cos(y-1) + x = 0{,}5\\ y - \cos x = 3\end{cases}$

Варіант 13 $\begin{cases}\sin y + 2x = 2\\ \cos(x-1) + y = 0{,}7\end{cases}$	**Варіант 14** $\begin{cases}\cos y + x = 1{,}5\\ 2y - \sin(x-0{,}5) = 1\end{cases}$
Варіант 15 $\begin{cases}\sin(y+0{,}5) - x = 1\\ \cos(x-2) + y = 0\end{cases}$	**Варіант 16** $\begin{cases}\cos(y+0{,}5) + x = 0{,}8\\ \sin x - 2y = 1{,}6\end{cases}$
Варіант 17 $\begin{cases}\sin(y-1) + x = 1{,}3\\ y - \sin(x+1) = 0{,}8\end{cases}$	**Варіант 18** $\begin{cases}2x - \cos(y+1) = 0\\ y + \sin x = -0{,}4\end{cases}$
Варіант 19 $\begin{cases}\cos(y+0{,}5) - x = 2\\ \sin x - 2y = 1\end{cases}$	**Варіант 20** $\begin{cases}\sin(y+2) - x = 1{,}5\\ y + \cos(x-2) = 0{,}5\end{cases}$
Варіант 21 $\begin{cases}\sin(x+1) - y = 1\\ 2x + \cos y = 2\end{cases}$	**Варіант 22** $\begin{cases}\cos(x-1) + y = 0{,}8\\ x - \cos y = 2\end{cases}$
Варіант 23 $\begin{cases}\sin x + 2y = 1{,}6\\ \cos(y-1) + x = 1\end{cases}$	**Варіант 24** $\begin{cases}\cos x + y = 1{,}2\\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 2\end{cases}$
Варіант 25 $\begin{cases}\sin(x+0{,}5) - y = 1{,}2\\ \cos(y-2) + x = 0\end{cases}$	**Варіант 26** $\begin{cases}\cos(x+0{,}5) + y = 1\\ \sin y - 2x = 2\end{cases}$

<u>Зразок виконання Завдання 11</u>

$$\begin{cases}\cos(y+3) + 2x = 0{,}3\\ \sin x - y = 1{,}5\end{cases}$$

Запишемо систему у канонічній формі:

$$\begin{cases}x = u_1(x,y) = \dfrac{0{,}3 - \cos(y+3)}{2}\\ y = u_2(x,y) = \sin x - 1{,}5\end{cases}$$

Відокремимо корені графічно (Рис.5.1). З графіку видно, що система має розв’язок у області D:

$0 < x < 0{,}5; \quad -2 < y < -1.$

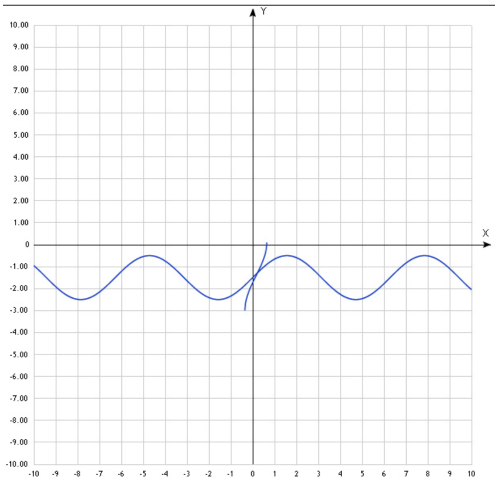


Рис.5.1

Для уточнення кореня системи переконаємось, що метод ітерацій збіжний. Побудуємо матрицю Якобі:

$$W(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin(y-2) \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначимо норму матриці Якобі у області D:

$$W(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(-3{,}1) \\ \cos(0{,}1) & 0 \end{pmatrix}, \quad \|W(\mathbf{x})\| = \max\{|\sin(-3{,}1)|, |\cos(0{,}1)|\} = \max\{0{,}04;\ 0{,}99\} = 0{,}99 < 1.$$

Отже, згідно Теореми 5.2. даний метод збіжний.

За початкове наближення виберемо будь-яку внутрішню точку області D, наприклад, $x_0 = 0{,}1; \quad y_0 = -1{,}1.$

Наступні наближення знайдемо за ітераційними формулами:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{0{,}3 - \cos(y_n - 2)}{2} \\ y_{n+1} = \sin x_n - 1{,}5 \end{cases}, \quad n = 0{,}1{,}2.$$

Всі розрахунки занесемо у таблицю:

X	Y
0,100	- 1,100
0,312	- 1,400
0,165	- 1,193
0,267	- 1,336
0,196	- 1,236
0,246	- 1,305
0,212	- 1,257
0,236	- 1,290
0,220	- 1,266
0,231	- 1,282
0,223	- 1,271
0,229	- 1,279

Як бачимо з таблиці, бажана точність досягнута. Наближений розв’язок даної системи: $x_0 = 0{,}229; \quad y_0 = -1{,}279.$

Завдання 12

Методом Ньютона розв'язати систему нелінійних рівнянь з точністю до 0,001.

Варіант 1 $\begin{cases} tg(xy+0{,}4)=x^2 \\ 0{,}6x^2+2y^2=1,\ x>0,\ y>0 \end{cases}$	**Варіант 2** $\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}6x=0 \\ x^2+y^2=1,\ x>0,\ y>0 \end{cases}$
Варіант 3 $\begin{cases} tg(xy+0{,}1)=x^2 \\ x^2+2y^2=1 \end{cases}$	**Варіант 4** $\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}2x=0{,}2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$
Варіант 5 $\begin{cases} tg(xy+0{,}3)=x^2 \\ 0{,}9x^2+2y^2=1 \end{cases}$	**Варіант 6** $\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}3x=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$
Варіант 7 $\begin{cases} tgxy=x^2 \\ 0{,}8x^2+2y^2=1 \end{cases}$	**Варіант 8** $\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}5x=0{,}1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$
Варіант 9 $\begin{cases} tgxy=x^2 \\ 0{,}7x^2+2y^2=1 \end{cases}$	**Варіант 10** $\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}2x=0{,}1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$
Варіант 11 $\begin{cases} tg(xy+0{,}2)=x^2 \\ 0{,}6x^2+2y^2=1 \end{cases}$	**Варіант 12** $\begin{cases} \sin(x+y)=1{,}5x-0{,}1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$
Варіант 13 $\begin{cases} tg(xy+0{,}4)=x^2 \\ 0{,}8x^2+2y^2=1 \end{cases}$	**Варіант 14** $\begin{cases} \sin(x+y)=1{,}2x-0{,}1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$
Варіант 15 $\begin{cases} tg(xy+0{,}1)=x^2 \\ 0{,}9x^2+2y^2=1 \end{cases}$	**Варіант 16** $\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}4x=0{,}1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$
Варіант 17 $\begin{cases} tg(xy+0{,}1)=x^2 \\ 0{,}5x^2+2y^2=1 \end{cases}$	**Варіант 18** $\begin{cases} \sin(x+y)=1{,}1x-0{,}1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$
Варіант 19 $\begin{cases} tg(x-y)-xy=0 \\ x^2+2y^2=1 \end{cases}$	**Варіант 20** $\begin{cases} \sin(x-y)-xy=-1 \\ x^2-y^2=\frac{3}{4} \end{cases}$
Варіант 21	**Варіант 22** $\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}5x=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

$\begin{cases} tg(xy+0{,}2)=x^2 \\ x^2+2y^2=1 \end{cases}$	
Варіант 23 $\begin{cases} tgxy=x^2 \\ 0{,}5x^2+2y^2=1 \end{cases}$	**Варіант 24** $\begin{cases} \sin(x+y)=1{,}2x-0{,}2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$
Варіант 25 $\begin{cases} tg(xy+0{,}1)=x^2 \\ 0{,}7x^2+2y^2=1 \end{cases}$	**Варіант 26** $\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}5x=0{,}2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

Зразок виконання Завдання 12

$$\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}1x=0{,}1 \\ 2x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Відокремимо корені графічно (Рис.5.2). З графіку видно, що система має два розв'язки. Уточнимо один з них в області D:

$0{,}5<x<0{,}8; \quad 0{,}2<y<0{,}4.$

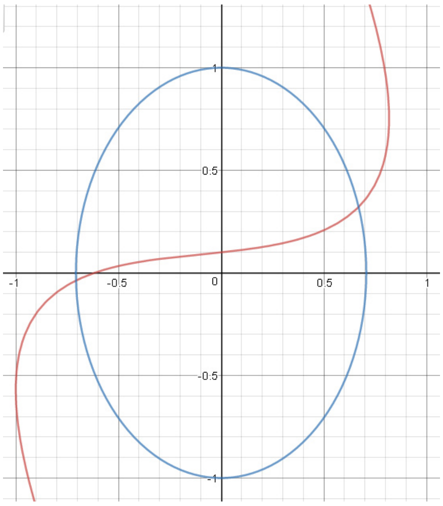


Рис.5.2

За початкове наближення виберемо будь-яку внутрішню точку області D, наприклад, $x_0=0{,}6; \quad y_0=0{,}25.$

Покладемо:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} \sin(x+y)-1{,}1x-0{,}1 \\ 2x^2+y^2-1 \end{pmatrix}$$

Побудуємо матрицю Якобі:

$$W(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(x+y)-1{,}1 & \cos(x+y) \\ 4x & 2y \end{pmatrix}.$$

Знайдемо значення $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ та $W(\mathbf{x})$ у початковій точці $x_0=0{,}6; \quad y_0=0{,}25$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} -0{,}009 \\ -0{,}218 \end{pmatrix},$$

$$W(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} -0{,}44 & 0{,}66 \\ 2{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Матриця Якобі невироджена, оскільки $\det W(\mathbf{x}^0) = -1{,}804 \neq 0$.

Знайдемо обернену до $W(\mathbf{x}^0)$ матрицю:

$$W^{-1}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} -0{,}277 & 0{,}366 \\ 1{,}330 & 0{,}244 \end{pmatrix}.$$

Наступні наближення розв'язку системи знайдемо за допомогою ітераційної формули (5.7):

$$x^1 = x^0 - W^{-1}(x^0)u(x^0) = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0{,}277 & 0{,}366 \\ 1{,}330 & 0{,}244 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}009 \\ -0{,}217 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}677 \\ 0{,}315 \end{pmatrix},$$

$$x^2 = x^1 - W^{-1}(x^1)u(x^1) = \begin{pmatrix} 0{,}677 \\ 0{,}315 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0{,}553 & 0{,}547 \\ 2{,}708 & 0{,}630 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}008 \\ 0{,}016 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}670 \\ 0{,}321 \end{pmatrix},$$

$$x^3 = x^2 - W^{-1}(x^2)u(x^2) = \begin{pmatrix} 0{,}670 \\ 0{,}321 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0{,}352 & 0{,}301 \\ 1{,}470 & 0{,}303 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}670 \\ 0{,}321 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, бажаної точності досягнуто на третій ітерації.

Розділ 6.Алгебраїчна проблема власних значень матриці

6.1. Постановка задачі. Огляд основних методів

Задача знаходження власних значень та власних векторів матриць називається алгебраїчною проблемою власних значень. Її класифікують наступним чином:

- Алгебраїчна проблема власних значень називається *самоспряженою (несамоспряженою)*, якщо матриця, що досліджується **є** (**не є**) ермітовою.
- Алгебраїчна проблема власних значень називається *повною (частковою)*, якщо знаходяться **всі** (**окремі**) власні значення і відповідні власні вектори матриць.

Для знаходження власних значень матриці A складається характеристичне (вікове) рівняння:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \qquad (6.1)$$

де E – одинична матриця, λ – власне значення.

Ліва частина рівняння (6.1) називається характеристичним визначником.

Рівняння (6.1) алгебраїчне, тому має n коренів.

Відповідні власні вектори матриці A є нетривіальними розв'язками однорідної СЛАР:

$$A\overline{u} = \lambda_i \overline{u}, \quad i = 1,2,...n$$

Розгортання характеристичного визначника – це перетворення рівняння (6.1) в алгебраїчне рівняння у канонічній формі:

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + ... + p_n = 0$$

Ця задача значно ускладнюється з ростом порядку матриці. Кількість арифметичних операцій для розгортання характеристичного визначника 8-го порядку, наприклад, методом Крилова становить 5897, а для безпосереднього розгортання цього ж визначника необхідно 1712158 операцій!

Тому актуально використовувати наступні методи розгортання характеристичного визначника: Данилевського, Крилова, Левер'є, Фадеєва, невизначених коефіцієнтів. До ітераційних методів, які дають змогу розв’язувати повну або часткову алгебраїчну проблему власних значень відносяться методи обертань та степенів.

6.2. Метод Левер’є

Основна ідея цього методу полягає у використанні рекурентних формул Ньютона для сум степенів коренів алгебраїчного рівняння, що приводить до відповідних рекурентних формул для коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Запишемо характеристичний поліном матриці А n-го порядку у вигляді:

$$Q_n(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n) \qquad (6.2)$$

Покладемо:

$$S_k = SpA^k, \quad k = 1,2,\ldots,n,$$

де SpA^k- слід матриці A^k (k – степінь).

Тоді для $k \le n$ справедливі формули Ньютона:

$$S_k - p_1S_{k-1} - p_2S_{k-2} - \ldots - p_{k-1}S_1 - kp_k = 0, \quad k = 1,2,\ldots,n. \qquad (6.3)$$

З формул Ньютона (6.3) знаходимо коефіцієнти характеристичного полінома (6.2):

$$\begin{cases} p_1 = S_1, \\ p_2 = \dfrac{1}{2}(S_2 - p_1S_1), \\ p_k = \dfrac{1}{k}(S_k - p_1S_{k-1} - \ldots - p_{k-1}S_1). \end{cases} \qquad (6.4)$$

<u>Алгоритм методу Левер’є</u>

1. Обчислити степені матриці *А* (*остання степінь дорівнює порядку матриці*).
2. Знайти відповідні суми елементів головних діагоналей (сліди) матриць A^k.

3. За формулами (6.4) визначити шукані коефіцієнти характеристичного полінома.

6.3. Метод Крилова

<u>І спосіб.</u>

Суть цього методу Крилова полягає у перетворенні визначника $D(\lambda) = |A - \lambda E|$ до еквівалентного вигляду:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} - \lambda^2 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} - \lambda^n & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \quad (6.5)$$

Перетворення $D(\lambda)$ до вигляду (6.5) відбувається наступним чином.

Розглянемо перше з рівнянь системи $A\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}$:

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n = \lambda u_1$$

Помноживши його на λ, одержимо нове рівняння:

$$b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2n}u_n = \lambda^2 u_1 \quad (6.6)$$

де :

$$b_{2i} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{ki}, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Аналогічно помноживши рівняння (6.6) на λ, одержимо нове рівняння:

$$b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + \dots + b_{3n}u_n = \lambda^3 u_1,$$

де

$$b_{3i} = \sum_{k=1}^{n} b_{2k}a_{ki}, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Продовжуємо цей процес, поки не одержимо рівняння:

$$b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nn}u_n = \lambda^n u_1$$

<u>Позначимо:</u>

$$b_{1i} = a_{1i}.$$

Таким чином, замість системи $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ одержимо систему:

$$\begin{cases} b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1n}u_n = \lambda u_1 \\ b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2n}u_n = \lambda^2 u_1 \\ b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + \dots + b_{3n}u_n = \lambda^3 u_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nn}u_n = \lambda^n u_1 \end{cases}$$

<u>ІІ спосіб.</u>

Цей спосіб не потребує розкриття визначника (6.5).

Застосуємо теорему Гамільтона-Келі до матриці А:

$$A^n + p_1A^{n-1} + p_2A^{n-2} + \dots + p_{n-1}A + p_nE = 0 \quad (6.7)$$

Виберемо довільний n-компонентний початковий вектор $c_0 = (1,0, \dots ,0)$. Покладемо $c_i = A^i c_0, \quad i = 1,2, . . n.$
Помноживши (6.7) справа на c_0, одержимо систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів $p_i, \quad i = 1,2, . . n.$:

$$c_n + p_1 c_{n-1} + p_2 c_{n-2} + \dots + p_{n-1} c_1 + p_n c_0 = 0 \qquad (6.8)$$

Розв'язавши систему (6.8) одним з чисельних методів, знайдемо явний вигляд рівняння $\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_n = 0$, підставивши в нього коефіцієнти p_i.

6.4. Метод степенів

Цей ітераційний метод дає змогу розв'язати часткову проблему власних значень.

Означення 6.1. Якщо λ – власне значення матриці *A* більше по абсолютній величині ніж інші власні значення, то воно називається мажорантним власним значенням або спектральним радіусом.

Означення 6.2. Власний вектор матриці *A* є нормалізованим, якщо його найбільша координата дорівнює одиниці.

Означення 6.3. Мажорантною парою називається мажорантне власне значення та відповідний йому нормалізований власний вектор.

Метод степенів дає змогу визначити мажорантну пару.

Теорема 6.4. Нехай квадратна матриця *A* *n*-го порядку має *n* різних власних значень $\lambda_1, \lambda_2, \dots , \lambda_n$ і таких, що:

$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.

Починаючи з вектора $X_0 = (1,1,...,1)'$рекурентно генеруємо послідовність $\{X_k\}$

згідно формулам:

$$Y_k = AX_k, \quad X_{k+1} = \frac{1}{c_{k+1}} Y_k,$$

де c_{k+1} – найбільша по абсолютній величині координата вектора Y_k

Послідовності $\{X_k\}$ та$\{c_k\}$ збіжні так, що:

$$\lim_{k \to \infty} X_k = u_1, \quad \lim_{k \to \infty} c_k = \lambda_1.$$

<u>Доведення</u>:

Оскільки матриця A має n різних власних значень, то існує n власних векторів u_i, $i = 1,2,...,n$, які лінійно незалежні, нормалізовані і утворюють базис в n – вимірному просторі. Отже:

$X_0 = b_1 u_1 + b_1 u_1 + ... b_n u_n$.

Виберемо X_0 так, що:

$b_1 \neq 0, \quad \max\limits_{1 \le i \le n} \{|x_i|\} = 1.$

Тоді:

$$Y_0 = AX_0 = A(b_1 u_1 + b_2 u_2 + ... b_n u_n) = b_1 A u_1 + b_2 A u_2 + ... b_n A u_n =$$

$$= b_1 \lambda_1 u_1 + b_2 \lambda_2 u_2 + ... b_n \lambda_n u_n = \lambda_1 (b_1 u_1 + b_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) u_2 + ... b_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) u_n).$$

Нормалізуємо вектор Y_0 та одержимо:

$$X_1 = Y_0 / c_1 = \frac{\lambda_1}{c_1} (b_1 u_1 + b_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) u_2 + ... b_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) u_n).$$

Після k-ої ітерації знаходимо:

$$Y_{k-1} = AX_{k-1} = A \frac{\lambda_1^{k-1}}{c_1 c_2 ... c_{k-1}} (b_1 u_1 + b_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k-1} u_2 + ... b_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k-1} u_n) =$$

$$= \frac{\lambda_1^{k-1}}{c_1 c_2 ... c_{k-1}} (b_1 A u_1 + b_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k-1} A u_2 + ... b_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k-1} A u_n) =$$

$$= \frac{\lambda_1^{k-1}}{c_1 c_2 ... c_{k-1}} (b_1 \lambda_1 u_1 + b_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k-1} \lambda_2 u_2 + ... b_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k-1} \lambda_n u_n) =$$

$$= \frac{\lambda_1^{k}}{c_1 c_2 ... c_{k-1}} (b_1 u_1 + b_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k} u_2 + ... b_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k} u_n)$$

Для нормалізованого вектора після k –ої ітерації одержимо:

$$\frac{\boldsymbol{Y}_{k-1}}{c_k} = \boldsymbol{X}_k = \frac{\lambda_1^k}{c_1 c_2 \dots c_k} \left(b_1 \boldsymbol{u}_1 + b_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \boldsymbol{u}_2 + \dots + b_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \boldsymbol{u}_n\right)$$

оскільки для кожного $i = 2,3,...n$ справедливо:

$$\frac{|\lambda_i|}{|\lambda_1|} < 1,$$

то:

$$\lim_{k\to\infty} b_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k u_i = 0.$$

Таким чином:

$$\lim_{k\to\infty} X_k = \lim_{k\to\infty} \frac{b_1\lambda_1^{\ k}}{c_1 c_2 \ldots c_k} u_1. \qquad (6.9)$$

Так як за умовою вектори X_k та u_1 нормалізовані, то границя скалярного множника u_1 у правій частині (6.9) існує і дорівнює одиниці, тобто:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_1\lambda_1^{\ k}}{c_1 c_2 \ldots c_k} = 1. \qquad (6.10)$$

Отже:

$$\lim_{k\to\infty} X_k = u_1.$$

Замінивши k на $k-1$ у формулі (6.10) одержимо:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_1\lambda_1^{\ k-1}}{c_1 c_2 \ldots c_{k-1}} = 1.$$

Якщо розділити обидві частини формули (6.10) до та після заміни, можна одержати:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_1}{c_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{b_1\lambda_1^{\ k} /(c_1 c_2 \ldots c_k)}{b_1\lambda_1^{\ k-1} /(c_1 c_2 \ldots c_{k-1})} = \frac{1}{1} = 1.$$

Таким чином:

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lambda_1.$$

Теорему доведено.

Зауваження.

1. Швидкість збіжності лінійна і може бути повільна.
2. Для прискорення ітераційного процесу застосовують алгоритм Ейткена.
3. Якщо матриця A симетрична, то збіжність процесу підвищується.
4. Метод можна використовувати і у випадку коли мажорантне власне значення є кратним.

6.5. Метод обертань

Цей метод використовується для розв'язання повної проблеми власних значень симетричної матриці та базується на перетворенні подібності вихідної матриці *A* за допомогою деякої ортогональної матриці *H*. При такому перетворенні початкова матриця зводиться до діагональної, а спектр власних значень початкової матриці зберігається.

Нагадаємо з лінійної алгебри, що дві матриці *A* та $A^{(i)}$ називаються подібними, якщо:

$$A^{(i)} = H^{-1}AH,$$

де *H* деяка неособлива матриця.

Матриця *H* називається ортогональною, якщо:

$$H^T H = HH^T = E.$$

Для перетвореної матриці $A^{(i)}$ зберігається її слід та власні значення:

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) = trA^{(i)}.$$

Під час реалізації методу обертань перетворення подібності застосовується до вихідної матриці *A* багаторазово:

$$A^{(k+1)} = (H^{(k)})^{-1} A^{(k)} H^{(k)} = (H^{(k)})^T A^{(k)} H^{(k)}, \quad k = 0,1,2,... \qquad (6.11)$$

Формула (6.11) визначає **ітераційний процес методу обертань**, де початкове наближення визначається наступним чином:

$$A^{(0)} = A.$$

Ітераційний процес полягає в тому, що на кожній k – їй ітерації знаходять таку ортогональну матрицю $H^{(k)}$, яка перетворює абсолютний за максимальною величиною недіагональний елемент матриці *A* у нуль.

Матриця $H^{(k)}$ називається матрицею обертань Якобі і залежить від кута повороту φ^k :

$$H^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \cos\varphi^{(k)} & 0 & \ldots & 0 & -\sin\varphi^{(k)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \sin\varphi^{(k)} & 0 & \ldots & 0 & \cos\varphi^{(k)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

У даній ортогональній матриці елементи головної діагоналі одиничні, крім:

$h_{ii}^{(k)} = \cos\varphi^{(k)}, \quad h_{jj}^{(k)} = \cos\varphi^{(k)}.$

Решта елементів нульові, крім:

$h_{ij}^{(k)} = -\sin\varphi^{(k)}, \quad h_{ji}^{(k)} = \sin\varphi^{(k)}.$

Виведемо формули методу обертань для одного k – го кроку перетворень. Запишемо цей крок із двох послідовних процедур:

$B = AH_{ij}(\varphi), \quad \widetilde{A} = H_{ij}^{T}(\varphi)B.$

Очевидно всі елементи матриці B співпадатимуть з відповідними елементами матриці A, крім елементів i-го та j-го стовпців, для яких легко одержимо розрахункові формули:

$$\begin{cases} b_{\beta i} = a_{\beta i}\cos\varphi + a_{\beta j}\sin\varphi \\ b_{\beta j} = -a_{\beta i}\sin\varphi + a_{\beta j}\cos\varphi \end{cases}, \quad \beta = 1,2,\ldots n. \tag{6.12}$$

Аналогічно всі елементи матриці $\widetilde{A}$ співпадатимуть з відповідними елементами матриці B, крім елементів i-го та j-го рядків, для яких легко одержимо розрахункові формули:

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{i\alpha} = b_{i\alpha}\cos\varphi + b_{j\alpha}\sin\varphi \\ \widetilde{a}_{j\alpha} = -b_{i\alpha}\sin\varphi + b_{j\alpha}\cos\varphi \end{cases}, \quad \alpha = 1,2,\ldots n. \tag{6.13}$$

Обчислюючи $\widetilde{a}_{ij}$ за формулами (6.12) та (6.13) а також використовуючи симетричність матриці A , одержимо:

$$\widetilde{a}_{ij} = b_{ij}\cos\varphi + b_{jj}\sin\varphi = (-a_{ii}\sin\varphi + a_{ij}\cos\varphi)\cos\varphi + (-a_{ji}\sin\varphi + a_{jj}\cos\varphi)\sin\varphi =$$

$$= a_{ij}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + (a_{jj} - a_{ii})\sin\varphi\cos\varphi = a_{ij}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{jj} - a_{ii})\sin 2\varphi.$$

Оскільки під час перетворення подібності коефіцієнт $\widetilde{a}_{ij}$ має дорівнювати нулю то, одержимо наступну умову для визначення кута φ:

$$a_{ij}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{jj} - a_{ii})\sin 2\varphi = 0$$

Розв’язавши останнє рівняння відносно φ, одержимо:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{1}{2} arctg \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}, & a_{ii} \neq a_{jj} \\ \frac{\pi}{4}, & a_{ii} = a_{jj} \end{cases}$$

Метод обертань збіжний зі швидкістю геометричної прогресії

Алгоритм методу обертань

1. Покласти $k = 0,\quad A^{(0)} = A$ та задати бажану точність $\varepsilon > 0$.
2. Виділити у верхній трикутній наддіагональній частині матриці A максимальний за модулем елемент $a_{ij}^{(k)},\quad i < j$.
3. Якщо $\left|a_{ij}^{(k)}\right| \le \varepsilon$ для всіх недіагональних елементів, то алгоритм закінчено.

Власні значення матриці А визначаються формулами:

$$\lambda_i(A^{(k)}) = a_{ii}^{(k)},\quad i = 1,2,..,n.$$

Власні вектори знаходять як відповідні і-ті стовпчики матриці:

$$V_k = H^{(0)} \cdot H^{(1)} \cdot \ldots \cdot H^{(k-1)} = (X^1, X^2, \ldots X^n)$$

4. Якщо $\left|a_{ij}^{(k)}\right| > \varepsilon$, то процес продовжується.

5. Знайти кут повороту за формулою:

$$\varphi^{(k)} = \frac{1}{2} arctg \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}} \tag{6.14}$$

6. Побудувати матрицю обертань Якобі $H^{(k)}$.

7. Обчислити наступне наближення за формулою:

$$A^{(k+1)} = (H^{(k)})^T A^{(k)} H^{(k)}, \quad k = 0,1,2,...$$

8. Покласти $k = k + 1$ і перейти до кроку 2.

Контрольні запитання

1. *Дайте класифікацію алгебраїчної проблеми власних значень.*
2. *У чому полягає процес розгортання характеристичного визначника?*
3. *Перелічіть методи розгортання характеристичного визначника.*
4. *Які є ітераційні методи розв'язання алгебраїчної проблеми власних значень?*
5. *Яка основна ідея методу Левер'є?*
6. *В чому суть методу Крилова?*
7. *Сформулюйте теорему про збіжність ітераційного процесу методу степенів.*
8. *Дайте визначення спектрального радіусу матриці.*
9. *Дайте визначення мажорантної пари.*
10. *Опишіть алгоритм методу обертань.*

Тест "Так/Ні " для самоперевірки знань студентів

1. Алгебраїчна проблема власних значень називається самоспряженою, якщо матриця, що досліджується є ермітовою..
2. Метод обертань відноситься до методів розгортання характеристичного визначника:
3. .Метод Крилова дає змогу знайти мажорантну пару.
4. Метод степенів відноситься до ітераційних методів розв'язання алгебраїчної проблеми власних значень.
5. Метод Левер'є дає змогу розв'язати часткову проблему власних значень.
6. .Спектральним радіусом називають всі власні числа матриці.
7. Власний вектор матриці є нормалізованим, якщо його найбільша координата дорівнює одиниці.
8. Мажорантною парою називається мажорантне власне значення та відповідний йому нормалізований власний вектор.
9. Метод обертань збіжний зі швидкістю геометричної прогресії
10. Метод степенів дає змогу визначити тільки мажорантну пару.

Відповіді

1.Так. 2. Ні. 3. Ні. 4. Так. 5. Ні. 6. Ні. 7. Так. 8. Так. 9. Так. 10. Ні.

Задачі для самостійного розв'язування

Завдання 13

Розгорнути характеристичний визначник матриці методом Левер'є.

Варіант 1 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	**Варіант 2** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
Варіант 3 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$	**Варіант 4** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
Варіант 5 $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & -8 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$	**Варіант 6** $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
Варіант 7 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	**Варіант 8** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$
Варіант 9 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$	**Варіант 10** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
Варіант 11 $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	**Варіант 12** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Варіант 13 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	**Варіант 14** $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$
Варіант 15 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	**Варіант 16** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & -6 & -4 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
Варіант 17 $\begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$	**Варіант 18** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Варіант 19	**Варіант 20**
$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
Варіант 21	**Варіант 22**
$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
Варіант 23	**Варіант 24**
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -6 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Варіант 25	**Варіант 26**
$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Зразок виконання Завдання 13

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -7 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Знайдемо першу, другу та третю степінь заданої матриці. Обчислимо сліди відповідних матриць. За формулами (6.4) розрахуємо коефіцієнти характеристичного полінома (6.2). Всі розрахунки занесемо у таблицю:

k	A^k			SpA^k	p_k
1	-4	3	2	7	$p_1 = S_1 = 7$
	4	1	-7		
	0	8	9		
2	28	7	-11	10	$p_2 = \frac{1}{2}\left(S_2 - p_1 S_1\right) = \frac{1}{2}\left(10 - 7\cdot 7\right) = -19{,}5$
	-12	-43	-62		
	32	80	25		
3	-84	3	-92	-762	$p_3 = \frac{1}{3}\left(S_3 - p_1 S_2 - p_2 S_1\right) =$
	-124	-575	-281		$= \frac{1}{3}\left(-762 - 7\cdot 10 + 19{,}5\cdot 7\right) = -231{,}8$
	192	376	-271		

Отже, характеристичний многочлен має вигляд:

$Q_3(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - p_1\lambda^2 - p_2\lambda - p_3) = -(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 19{,}5\lambda + 231{,}8)$

Завдання 14

Розгорнути характеристичний визначник матриці методом Крилова.

Варіант 1 $\begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 2{,}5 & 3{,}5 \\ 1{,}5 & 1 & 2 & 1{,}6 \\ 2{,}5 & 2 & 1 & 1{,}7 \\ 3{,}5 & 1{,}6 & 1{,}7 & 1 \end{pmatrix}$	**Варіант 2** $\begin{pmatrix} 1 & 1{,}2 & 2 & 0{,}5 \\ 1{,}2 & 1 & 0{,}4 & 1{,}2 \\ 2 & 0{,}4 & 2 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}2 & 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}$
Варіант 3 $\begin{pmatrix} 1 & 1{,}2 & 2 & 0{,}5 \\ 1{,}2 & 1 & 0.5 & 1 \\ 2 & 0{,}5 & 2 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 1 & 1{,}5 & 0.5 \end{pmatrix}$	**Варіант 4** $\begin{pmatrix} 2{,}5 & 1 & -0{,}5 & 2 \\ 1 & 2 & 1{,}2 & 0{,}4 \\ -0{,}5 & 1{,}2 & -1 & 1{,}5 \\ 2 & 0{,}4 & 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}$
Варіант 5 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1{,}4 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 0.5 & 1 \\ 1{,}4 & 0.5 & 2 & 1{,}2 \\ 0{,}5 & 1 & 1{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$	**Варіант 6** $\begin{pmatrix} 2 & 1{,}2 & -1 & 1 \\ 1{,}2 & 0{,}5 & 2 & -1 \\ -1{,}1 & 2 & -1{,}5 & 0{,}2 \\ 1 & -1 & 0{,}2 & 1{,}5 \end{pmatrix}$
Варіант 7 $\begin{pmatrix} 2 & 1{,}5 & 3{,}5 & 4{,}5 \\ 1{,}5 & 2 & 2 & 1{,}6 \\ 3{,}5 & 2 & 2 & 1{,}7 \\ 4{,}5 & 1{,}6 & 1{,}7 & 2 \end{pmatrix}$	**Варіант 8** $\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 1{,}2 & -1 \\ 0{,}5 & 2 & -0{,}5 & 0 \\ 1{,}2 & -0{,}5 & -1 & 1{,}4 \\ -1 & 0 & 1{,}4 & 1 \end{pmatrix}$
Варіант 9 $\begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}5 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}8 & 2 \\ 2 & 0{,}8 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	**Варіант 10** $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}2 & 1 & 0{,}9 \\ 1{,}2 & 2 & 0{,}5 & 1{,}2 \\ 1 & 0{,}5 & 1 & 1 \\ 0{,}5 & 1{,}2 & 1 & 2{,}2 \end{pmatrix}$
Варіант 11 $\begin{pmatrix} 1{,}6 & 0{,}4 & 1 & 2 \\ 0{,}4 & 1 & 0{,}5 & 1 \\ 1 & 0{,}5 & 0 & 0{,}2 \\ 2 & 1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$	**Варіант 12** $\begin{pmatrix} 2 & 1{,}5 & 4{,}5 & 5{,}5 \\ 1{,}5 & 3 & 2 & 1{,}6 \\ 4{,}5 & 2 & 3 & 1{,}7 \\ 5{,}5 & 1{,}6 & 1{,}7 & 3 \end{pmatrix}$
Варіант 13 $\begin{pmatrix} 1{,}6 & 1 & 1{,}4 & 1 \\ 1 & 1 & 0{,}5 & 2 \\ 1{,}4 & 0{,}5 & 2 & 1{,}2 \\ 1 & 2 & 1{,}2 & 0.5 \end{pmatrix}$	**Варіант 14** $\begin{pmatrix} 2{,}4 & 0{,}5 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}8 & 2 \\ 2 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 2 & 0{,}5 & 1{,}2 \end{pmatrix}$
Варіант 15 $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}2 & 2 & 1 \\ 1{,}2 & 2 & 0{,}5 & 1{,}2 \\ 2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1{,}2 & 0{,}5 & 1{,}6 \end{pmatrix}$	**Варіант 16** $\begin{pmatrix} 1{,}8 & 1{,}6 & 1{,}7 & 1{,}8 \\ 1{,}6 & 2{,}8 & 1{,}5 & 1{,}3 \\ 1{,}7 & 1{,}5 & 3{,}8 & 1{,}4 \\ 1{,}8 & 1{,}3 & 1{,}4 & 4{,}8 \end{pmatrix}$

Варіант 17 $\begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 1,2 & 0,5 \\ 1,5 & 2 & 0,4 & 2 \\ 1,2 & 0,4 & 1,5 & 1,4 \\ 0,5 & 2 & 1,4 & 1,3 \end{pmatrix}$	**Варіант 18** $\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & -0,5 & 1 \\ 0,5 & -1 & 2 & 0 \\ -0,5 & 2 & 1 & -1,5 \\ 1 & 0 & -1,5 & 2 \end{pmatrix}$
Варіант 19 $\begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 0,4 & 2 \\ 1,5 & -1,2 & 1 & -0,5 \\ 0,4 & 1 & 2 & 1,2 \\ 2 & -0,5 & 1,2 & 2,5 \end{pmatrix}$	**Варіант 20** $\begin{pmatrix} 1,9 & 1,6 & 1,7 & 1,8 \\ 1,6 & 2,9 & 1,6 & 1,3 \\ 1,7 & 1,6 & 3,9 & 1,4 \\ 1,8 & 1,3 & 1,4 & 4,9 \end{pmatrix}$
Варіант 21 $\begin{pmatrix} 1,5 & 1,6 & 1,7 & 1,8 \\ 1,6 & 2,5 & 1,2 & 1,3 \\ 1,7 & 1,2 & 3,5 & 1,4 \\ 1,8 & 1,3 & 1,4 & 4,5 \end{pmatrix}$	**Варіант 22** $\begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 1,2 & 2 \\ 1 & 1,2 & -0,5 & 0,6 \\ 1,2 & -0,5 & 1 & -1 \\ 3 & 0,6 & -1 & 1,2 \end{pmatrix}$
Варіант 23 $\begin{pmatrix} 1,6 & 1,6 & 1,7 & 1,8 \\ 1,6 & 2,6 & 1,3 & 1,3 \\ 1,7 & 1,3 & 3,6 & 1,4 \\ 1,8 & 1,3 & 1,4 & 4,6 \end{pmatrix}$	**Варіант 24** $\begin{pmatrix} 2 & 1,6 & 1,7 & 1,8 \\ 1,6 & 3 & 1,7 & 1,3 \\ 1,7 & 1,7 & 4 & 1,4 \\ 1,8 & 1,3 & 1,4 & 5 \end{pmatrix}$
Варіант 25 $\begin{pmatrix} 0,5 & 1,4 & 2 & 1 \\ 1,4 & 1 & 0 & 1,5 \\ 2 & 0 & 2,5 & 2 \\ 1 & 1,5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	**Варіант 26** $\begin{pmatrix} 1 & 1,2 & 0,3 & 2 \\ 1,2 & 0,5 & 1 & 0,7 \\ 0,3 & 1 & -0,4 & 1 \\ 2 & 0,7 & 1 & 1,5 \end{pmatrix}$

Зразок виконання Завдання 14

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв’яжемо задачу другим способом. Розрахунки занесемо у таблицю:

c_0	Ac_0	A^2c_0	A^3c_0	A^4c_0
1	1	26	194	1973
0	2	17	174	1651
0	3	33	337	3260
0	4	21	230	2095

Згідно (6.8) система для визначення коефіцієнтів характеристичного многочлена матиме вигляд:

$c_4 + p_1c_3 + p_2c_2 + p_3c_1 + p_4c_0 = 0$

Підставимо у останнє рівняння дані з таблиці та одержимо:

$$\begin{cases} 1973 + 194p_1 + 26p_2 + p_3 + p_4 = 0 \\ 1651 + 174p_1 + 17p_2 + 2p_3 = 0 \\ 3260 + 337p_1 + 33p_2 + 3p_3 = 0 \\ 2095 + 230p_1 + 21p_2 + 4p_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему одним з чисельних методів, знайдемо:

$p_1 = -11; \quad p_2 = 7; \quad p_3 = 72; \quad p_4 = -93.$

Отже, характеристичний многочлен матиме вигляд:

$Q_3(\lambda) = (\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4) = (\lambda^4 - 11\lambda^3 + 7\lambda^2 + 72\lambda - 93)$

Звертаємо увагу на різну форму запису характеристичного многочлена у методі Левер'є та Крилова.

Завдання 15

Знайти власні значення та власні вектори матриці методом обертань (виконати 3 ітерації).

Варіант 1 $\begin{pmatrix} 1,7 & 2,8 & 0,3 \\ 2,8 & 1,2 & 0,6 \\ 0,3 & 0,6 & 1,5 \end{pmatrix}$	**Варіант 2** $\begin{pmatrix} 1,7 & 0,4 & 2,8 \\ 0,4 & 3,2 & 1,2 \\ 2,8 & 1,2 & 0,5 \end{pmatrix}$
Варіант 3 $\begin{pmatrix} 2,3 & 1,4 & 0,6 \\ 1,4 & 1,7 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 & 1,3 \end{pmatrix}$	**Варіант 4** $\begin{pmatrix} 2,3 & 3,5 & 1,4 \\ 3,5 & 0,4 & 0,6 \\ 1,4 & 0,6 & 1,3 \end{pmatrix}$
Варіант 5 $\begin{pmatrix} 0,6 & 1,3 & 1,7 \\ 1,3 & 2,5 & 0,8 \\ 1,7 & 0,8 & 1,4 \end{pmatrix}$	**Варіант 6** $\begin{pmatrix} 3,7 & 0,3 & 1,2 \\ 0,3 & 2,4 & 0,8 \\ 1,2 & 0,8 & 1,5 \end{pmatrix}$
Варіант 7 $\begin{pmatrix} 3,2 & 0,5 & 1,2 \\ 0,5 & 1,4 & 2,3 \\ 1,2 & 2,3 & 0,6 \end{pmatrix}$	**Варіант 8** $\begin{pmatrix} 4,1 & 0,4 & 1,3 \\ 0,4 & 2,2 & 1,7 \\ 1,3 & 1,7 & 0,5 \end{pmatrix}$
Варіант 9 $\begin{pmatrix} 2,3 & 0,7 & 0,6 \\ 0,7 & 3,4 & 1,2 \\ 0,6 & 1,2 & 1,7 \end{pmatrix}$	**Варіант 10** $\begin{pmatrix} 1,5 & 0,8 & 2,9 \\ 0,8 & 3,4 & 2,2 \\ 2,9 & 2,2 & 0,4 \end{pmatrix}$
Варіант 11 $\begin{pmatrix} 1,8 & 2,4 & 0,5 \\ 2,4 & 1,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,7 & 1,6 \end{pmatrix}$	**Варіант 12** $\begin{pmatrix} 0,7 & 1,5 & 3,2 \\ 1,5 & 2,3 & 1,3 \\ 3,2 & 1,3 & 0,4 \end{pmatrix}$

Варіант 13 $\begin{pmatrix} 2{,}4 & 3{,}5 & 0{,}7 \\ 3{,}5 & 1{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 1{,}3 \end{pmatrix}$	**Варіант 14** $\begin{pmatrix} 2{,}3 & 1{,}7 & 0{,}8 \\ 1{,}7 & 0{,}5 & 1{,}2 \\ 0{,}8 & 1{,}2 & 1{,}9 \end{pmatrix}$
Варіант 15 $\begin{pmatrix} 2{,}4 & 1{,}3 & 0{,}5 \\ 1{,}3 & 0{,}8 & 2{,}4 \\ 0{,}5 & 2{,}4 & 3{,}3 \end{pmatrix}$	**Варіант 16** $\begin{pmatrix} 1{,}5 & 2{,}3 & 0{,}4 \\ 2{,}3 & 1{,}4 & 2{,}5 \\ 0{,}4 & 2{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix}$
Варіант 17 $\begin{pmatrix} 3{,}4 & 1{,}3 & 2{,}3 \\ 1{,}3 & 0{,}6 & 1{,}2 \\ 2{,}3 & 1{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$	**Варіант 18** $\begin{pmatrix} 2{,}5 & 1{,}2 & 0{,}8 \\ 1{,}2 & 3{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 1{,}2 \end{pmatrix}$
Варіант 19 $\begin{pmatrix} 2{,}6 & 1{,}4 & 0{,}7 \\ 1{,}4 & 0{,}9 & 1{,}5 \\ 0{,}7 & 1{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$	**Варіант 20** $\begin{pmatrix} 3{,}6 & 0{,}5 & 1{,}2 \\ 5{,}0 & 0{,}8 & 2{,}3 \\ 1{,}2 & 2{,}3 & 1{,}6 \end{pmatrix}$
Варіант 21 $\begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}3 & 1{,}7 \\ 0{,}3 & 2{,}4 & 1{,}3 \\ 1{,}7 & 1{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$	**Варіант 22** $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 1{,}3 & 3{,}2 \\ 1{,}3 & 4{,}2 & 0{,}5 \\ 3{,}2 & 0{,}5 & 0{,}7 \end{pmatrix}$
Варіант 23 $\begin{pmatrix} 2{,}5 & 1{,}3 & 0{,}5 \\ 1{,}3 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 2{,}3 \end{pmatrix}$	**Варіант 24** $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 1{,}5 & 2{,}7 \\ 1{,}5 & 2{,}4 & 1{,}3 \\ 2{,}7 & 1{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$
Варіант 25 $\begin{pmatrix} 1{,}6 & 2{,}7 & 0{,}9 \\ 2{,}7 & 3{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}9 & 0{,}5 & 1{,}3 \end{pmatrix}$	**Варіант 26** $\begin{pmatrix} 1{,}3 & 2{,}7 & 0{,}5 \\ 2{,}7 & 3{,}2 & 4{,}1 \\ 0.5 & 4{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

Зразок виконання Завдання 15

$$A = \begin{pmatrix} 2{,}4 & 2{,}5 & 0{,}7 \\ 2{,}5 & 1{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 3{,}5 \end{pmatrix}$$

Покладемо $k = 0, \quad A^{(0)} = A$ та задамо точність $\varepsilon = 0{,}01$.

Виділимо у верхній трикутній наддіагональній частині матриці A максимальний за модулем елемент: $a_{12}^{(0)} = 2{,}5$.

Оскільки $\left|a_{12}^{(0)}\right| = 2{,}5 > 0{,}01$, то знайдемо кут повороту за формулою (6.14):

$$\varphi^{(0)} = \frac{1}{2} arctg \frac{2a_{12}{}^{(0)}}{a_{11}{}^{(0)} - a_{22}{}^{(0)}} = \frac{1}{2} arctg \frac{2 \cdot 2{,}5}{2{,}4 - 1{,}2} = 0{,}668(\textit{радіан}) \approx 38^0$$

Побудуємо матрицю обертань Якобі:

$$H^{(0)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi^{(0)} & -\sin\varphi^{(0)} & 0 \\ \sin\varphi^{(0)} & \cos\varphi^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 38^0 & -\sin 38^0 & 0 \\ \sin 38^0 & \cos 38^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}785 & -0{,}620 & 0 \\ 0{,}620 & 0{,}785 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обчислимо наступне наближення за формулою:

$$A^{(1)} = (H^{(0)})^T A^{(0)} H^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}785 & 0{,}620 & 0 \\ -0{,}620 & 0{,}785 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}4 & 2{,}5 & 0{,}7 \\ 2{,}5 & 1{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 3{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}785 & -0{,}620 & 0 \\ 0{,}620 & 0{,}785 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4{,}374 & -0{,}004 & 0{,}736 \\ -0{,}004 & -0{,}771 & -0{,}199 \\ 0{,}736 & -0{,}199 & 3{,}500 \end{pmatrix}$$

Як бачимо, елемент a_{12} матриці A значно зменшився, що говорить про коректність розрахунків.

Покладемо $k = 1$. Виберемо елемент $a_{13}{}^{(1)} = 0{,}736$.

Оскільки $\left| a_{13}{}^{(1)} \right| = 0{,}736 > 0{,}01$, то знайдемо кут повороту за формулою (6.14):

$$\varphi^{(1)} = \frac{1}{2} arctg \frac{2a_{13}{}^{(1)}}{a_{11}{}^{(1)} - a_{33}{}^{(1)}} = \frac{1}{2} arctg \frac{2 \cdot 0{,}736}{4{,}374 - 3{,}500} = 0{,}517(\textit{радіан}) \approx 29^0$$

Побудуємо матрицю обертань Якобі:

$$H^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi^{(0)} & 0 & -\sin\varphi^{(0)} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi^{(0)} & 0 & \cos\varphi^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 29^0 & 0 & -\sin 29^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 29^0 & 0 & \cos 29^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}869 & 0 & -0{,}495 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}495 & 0 & 0{,}869 \end{pmatrix}$$

Обчислимо наступне наближення за формулою:

$$A^{(2)} = (H^{(1)})^T A^{(1)} H^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}869 & 0 & 0{,}495 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0{,}495 & 0 & 0{,}869 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4{,}374 & -0{,}004 & 0{,}736 \\ -0{,}004 & -0{,}771 & -0{,}199 \\ 0{,}736 & -0{,}199 & 3{,}500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}869 & 0 & -0{,}495 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}495 & 0 & 0{,}869 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4{,}793 & -0{,}102 & 0 \\ -0{,}102 & -0{,}771 & -0{,}170 \\ 0 & -0{,}170 & 3{,}082 \end{pmatrix}$$

Виконаємо останню ітерацію.

Покладемо $k = 2$. Виберемо елемент $a_{23}{}^{(2)} = -0{,}170$.

Оскільки $\left| a_{23}{}^{(2)} \right| = 0{,}170 > 0{,}01$, то знайдемо кут повороту за формулою (6.14):

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} arctg \frac{2a_{23}{}^{(2)}}{a_{22}{}^{(2)} - a_{33}{}^{(2)}} = \frac{1}{2} arctg \frac{2 \cdot (-0{,}170)}{-0{,}771 - 3{,}082} = 0{,}044(\textit{радіан}) \approx 2{,}5^0$$

Побудуємо матрицю обертань Якобі:

$$H^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi^{(2)} & -\sin\varphi^{(2)} \\ 0 & \sin\varphi^{(2)} & \cos\varphi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2{,}5^0 & -\sin 2{,}5^0 \\ 0 & \sin 2{,}5^0 & \cos 2{,}5^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}999 & -0{,}044 \\ 0 & 0{,}044 & 0{,}999 \end{pmatrix}$$

Обчислимо наступне наближення за формулою:

$$A^{(3)} = (H^{(2)})^T A^{(2)} H^{(2)} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}999 & 0{,}044 \\ 0 & -0{,}044 & 0{,}999 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 4{,}793 & -0{,}102 & 0 \\ -0{,}102 & -0{,}771 & -0{,}170 \\ 0 & -0{,}170 & 3{,}082 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}999 & -0{,}044 \\ 0 & 0{,}044 & 0{,}999 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 4{,}793 & -0{,}102 & 0{,}004 \\ -0{,}102 & -0{,}779 & 0 \\ 0{,}004 & 0 & 3{,}089 \end{pmatrix}$$

Таким чином, після третьої ітерації власні числа матриці A дорівнюють (*діагональні елементи матриці* $A^{(3)}$):

$\lambda_1 = 4{,}793; \quad \lambda_2 = -0{,}779; \quad \lambda_3 = 3{,}089.$

Власні вектори знаходимо за формулою:

$$V_2 = H^{(0)} \cdot H^{(1)} = (X^1, X^2, X^3) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}785 & -0{,}620 & 0 \\ 0{,}620 & 0{,}785 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}869 & 0 & -0{,}495 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}495 & 0 & 0{,}869 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}682 & -0{,}620 & -0{,}289 \\ 0{,}539 & 0{,}785 & -0{,}307 \\ 0{,}495 & 0 & 0{,}869 \end{pmatrix}$$

Отже:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0{,}682 \\ 0{,}539 \\ 0{,}495 \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} -0{,}620 \\ 0{,}785 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_3 = \begin{pmatrix} -0{,}289 \\ -0{,}307 \\ 0{,}869 \end{pmatrix}.$$

Для досягнення бажаної точності ітераційний процес треба продовжувати, оскільки умова $\left|a_{ij}{}^{(3)}\right| \le 0{,}01$ виконується не для всіх недіагональних елементів матриці $A^{(3)}$.

Завдання 16

Знайти мажорантну пару методом степенів (виконати 6 ітерацій).

Варіант 1 $\begin{pmatrix} 2{,}1 & 1 & 1{,}1 \\ 1 & 2{,}6 & 1{,}1 \\ 1{,}1 & 1{,}1 & 3{,}1 \end{pmatrix}$	**Варіант 2** $\begin{pmatrix} 2{,}4 & 1 & 1{,}4 \\ 1 & 2{,}9 & 1{,}4 \\ 1{,}4 & 1{,}4 & 3{,}4 \end{pmatrix}$
Варіант 3 $\begin{pmatrix} 1{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 1{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 1{,}3 \end{pmatrix}$	**Варіант 4** $\begin{pmatrix} 1{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 1{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}3 & 1{,}6 \end{pmatrix}$

Варіант 5 $\begin{pmatrix} 2,2 & 1 & 1,2 \\ 1 & 2,7 & 1,2 \\ 1,2 & 1,2 & 3,2 \end{pmatrix}$	**Варіант 6** $\begin{pmatrix} 2,5 & 1 & 1,5 \\ 1 & 3 & 1,5 \\ 1,5 & 1,5 & 3,5 \end{pmatrix}$
Варіант 7 $\begin{pmatrix} 1,4 & 0,5 & 0,6 \\ 0,5 & 1,4 & 0,3 \\ 0,6 & 0,3 & 1,4 \end{pmatrix}$	**Варіант 8** $\begin{pmatrix} 1,7 & 0,8 & 0,9 \\ 0,8 & 0,7 & 0,3 \\ 0,9 & 0,3 & 1,7 \end{pmatrix}$
Варіант 9 $\begin{pmatrix} 2,3 & 1 & 1,3 \\ 1 & 2,8 & 1,3 \\ 1,3 & 1,3 & 3,3 \end{pmatrix}$	**Варіант 10** $\begin{pmatrix} 2,6 & 1 & 1,6 \\ 1 & 3,1 & 1,6 \\ 1,6 & 1,6 & 3,6 \end{pmatrix}$
Варіант 11 $\begin{pmatrix} 2,2 & 1 & 1,2 \\ 1 & 2,7 & 1,2 \\ 1,2 & 1,2 & 3,2 \end{pmatrix}$	**Варіант 12** $\begin{pmatrix} 1,8 & 0,9 & 1 \\ 0,9 & 1,8 & 0,3 \\ 1 & 0,3 & 1,8 \end{pmatrix}$
Варіант 13 $\begin{pmatrix} 1,5 & 0,6 & 0,7 \\ 0,6 & 1,5 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 1,5 \end{pmatrix}$	**Варіант 14** $\begin{pmatrix} 2,7 & 1 & 1,7 \\ 1 & 3,2 & 1,7 \\ 1,7 & 1,7 & 3,7 \end{pmatrix}$
Варіант 15 $\begin{pmatrix} 1,4 & 1,2 & -1,3 \\ 1,2 & 0,9 & 0,4 \\ -1,3 & 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}$	**Варіант 16** $\begin{pmatrix} 3,2 & 1 & 2,2 \\ 1 & 3,7 & 2,2 \\ 2,2 & 2,2 & 4,2 \end{pmatrix}$
Варіант 17 $\begin{pmatrix} 2,8 & 1 & 1,8 \\ 1 & 3,3 & 1,8 \\ 1,8 & 1,8 & 3,8 \end{pmatrix}$	**Варіант 18** $\begin{pmatrix} 2,4 & 1,2 & -0,3 \\ 1,2 & 1,9 & 1,4 \\ -0,3 & 1,4 & 0,8 \end{pmatrix}$
Варіант 19 $\begin{pmatrix} 1,6 & 1,2 & -1,1 \\ 1,2 & 1,1 & 0,6 \\ -1,1 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}$	**Варіант 20** $\begin{pmatrix} 3,3 & 1 & 2,3 \\ 1 & 3,8 & 2,3 \\ 2,3 & 2,3 & 4,3 \end{pmatrix}$
Варіант 21 $\begin{pmatrix} 2,9 & 1 & 1,9 \\ 1 & 3,4 & 1,9 \\ 1,9 & 1,9 & 3,9 \end{pmatrix}$	**Варіант 22** $\begin{pmatrix} 2,6 & 1,2 & -0,1 \\ 1,2 & 2,1 & 1,6 \\ -0,1 & 1,6 & 0,8 \end{pmatrix}$
Варіант 23 $\begin{pmatrix} 1,8 & 1,2 & -0,9 \\ 1,2 & 1,3 & 0,8 \\ -0,9 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix}$	**Варіант 24** $\begin{pmatrix} 3,4 & 1 & 2,4 \\ 1 & 3,9 & 2,4 \\ 2,4 & 2,4 & 4,4 \end{pmatrix}$

Варіант 25	**Варіант 26**
$\begin{pmatrix} 3,1 & 1 & 2,1 \\ 1 & 3,6 & 2,1 \\ 2,1 & 2,1 & 4,1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,8 & 1,2 & 0,1 \\ 1,2 & 2,3 & 1,8 \\ 0,1 & 1,8 & 0,8 \end{pmatrix}$

Зразок виконання Завдання 16

$$\begin{pmatrix} -2,1 & 0,3 & 1,2 \\ 4,2 & 1 & -0,7 \\ 0,4 & 2,1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задамо початковий вектор:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Перша ітерація:

$$\begin{pmatrix} -2,1 & 0,3 & 1,2 \\ 4,2 & 1 & -0,7 \\ 0,4 & 2,1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 \\ 4,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} = 4,5\begin{pmatrix} -0,13 \\ 1 \\ 0,78 \end{pmatrix} = c_1X_1$$

Друга ітерація:

$$\begin{pmatrix} -2,1 & 0,3 & 1,2 \\ 4,2 & 1 & -0,7 \\ 0,4 & 2,1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0,13 \\ 1 \\ 0,78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,51 \\ -0,10 \\ 2,82 \end{pmatrix} = 2,82\begin{pmatrix} 0,54 \\ -0,04 \\ 1 \end{pmatrix} = c_2X_2$$

Третя ітерація:

$$\begin{pmatrix} -2,1 & 0,3 & 1,2 \\ 4,2 & 1 & -0,7 \\ 0,4 & 2,1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,54 \\ -0,04 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,06 \\ 1,51 \\ 1,14 \end{pmatrix} = 1,51\begin{pmatrix} 0,04 \\ 1 \\ 0,75 \end{pmatrix} = c_3X_3$$

Четверта ітерація:

$$\begin{pmatrix} -2,1 & 0,3 & 1,2 \\ 4,2 & 1 & -0,7 \\ 0,4 & 2,1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,04 \\ 1 \\ 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,11 \\ 0,65 \\ 2,87 \end{pmatrix} = 2,87\begin{pmatrix} 0,39 \\ 0,23 \\ 1 \end{pmatrix} = c_4X_4$$

П’ята ітерація:

$$\begin{pmatrix} -2,1 & 0,3 & 1,2 \\ 4,2 & 1 & -0,7 \\ 0,4 & 2,1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,39 \\ 0,23 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 1,16 \\ 1,63 \end{pmatrix} = 1,63\begin{pmatrix} 0,28 \\ 0,71 \\ 1 \end{pmatrix} = c_5X_5$$

Шоста ітерація:

$$\begin{pmatrix} -2,1 & 0,3 & 1,2 \\ 4,2 & 1 & -0,7 \\ 0,4 & 2,1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,28 \\ 0,71 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,83 \\ 1,18 \\ 2,60 \end{pmatrix} = 2,6\begin{pmatrix} 0,34 \\ 0,45 \\ 1 \end{pmatrix} = c_6X_6$$

Отже, після шостої ітерації мажорантна пара дорівнює:

$$\lambda_1 = 2{,}6; \quad V_1 = \begin{pmatrix} 0{,}34 \\ 0{,}45 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Додаток 1. Комп'ютерні пакети для розв'язування задач чисельними методами

Чотири обчислювальні системи є найвідомішими та найвикористовуванішими. Це Maple® [https://www.maplesoft.com], Mathcad® [https://www.ptc.com], Mathematica® [https://www.wolfram.com], та Matlab® [https://www.mathworks.com]. Фактично вони є математичними "двигунами" при аналізі, вивченні, візуалізації та розв'язанні різноманітних математичних проблем. Відповідні програмні продукти містять рішення для освіти та досліджень, моделювання систем, управління обчисленнями та системного проектування.

Наразі мова програмування Python складає достойну конкуренцію вищезгаданим пакетам.

1.

Maple - флагманський продукт компанії Maplesoft. Обчислювальний двигун Maple поєднує високопродуктивні числові обчислення з потужними символьними можливостями.

2.

Mathcad – програмне рішення компанії PTC для проведення інженерних обчислень.

3.

Wolfram Mathematica (Mathematica) – головний продукт приватної компанії Wolfram Research для проведення обчислень промислового рівня.

4.

MATLAB – і потужне програмне середовище для виконання чисельних обчислень, і мова програмування. Є популярною розробкою корпорації MathWorks, Inc.

5.

Python – універсальна мова програмування високого рівня. Розроблена нідерландським програмістом Гвідо ван Россумом.Основна реалізація мови Python написана на мові C.

Який програмний інструмент обрати при розв'язанні конкретної задачі?

Всі згадані математичні пакети відповідають високому рівню сучасних запитів по обробці даних: зручний та зрозумілий інтерфейс користувача, сила-силенна функціональних можливостей, прекрасні засоби візуалізації всього, мобільність застосувань, постійне оновлення.

Загалом, MATLAB найкраще підійде для числових обчислень, Mathematica - для функціонального аналізу, з Maple найкраще створювати різні типи графіки та робити аналітичні перетворення. Mathcad вирізняється простотою використання і зручністю в колективних розробках.

MATLAB є популярним у науковому та інженерному світі, зокрема, для аналізу даних та задач чисельного моделювання.

Python - дуже приваблива альтернатива MATLAB. Основним недоліком MATLAB проти Python є витрати. Python надається безкоштовно з відкритим кодом, тоді як MATLAB може бути дуже дорогим, особливо при придбанні ліцензії бізнес-компаніями. Python постійно стає потужнішим завдяки зростаючій кількості MATLAB-подібних спеціалізованих модулів.

Розглянемо приклади використання математичних пакетів.

Математичний пакет Maple

Приклад 1. Знайти корені рівняння $\ln(1-x)+\cos(1-x)=0$ методом дихотомії.

Розв’язання.

На рис. 1 зображено використання засобів Maple для введення функції з лівої частини рівняння, вибору чисельного методу ділення відрізка навпіл (значення bisection параметру method), визначення початкового відрізку ([0,1]), якому належить один з шуканих коренів. Після виконання відповідної команди Roots отримуємо результат з точністю за замовчуванням.

```
> f := ln(1 - x) + cos(1 - x)
                    f := ln(1 - x) + cos(-1 + x)
Try the Bisection method.
> Roots(f, x = [0, 1], method = bisection)
                          0.6022644043
```

Рисунок 1 – Метод дихотомії.

Відповідь: $x \approx 0{,}602$.

Приклад 2. Методом дотичних (Ньютона) знайти корені рівняння $\ln(1-x) + \cos(1-x) = 0$.

Розв’язання.

Введення рівняння показано в прикладі 1.

На рис. 2 зображено запуск програми Roots. Користувач задає початкове наближення $x = 0{,}4$, обирає метод (значення newton параметру method), а також хоче отримати графічну ілюстрацію ітерацій (значення plot параметру output) для заданого рівняння.

```
> Roots(f, x = .4, stoppingcriterion = absolute, method = newton, output = plo
```

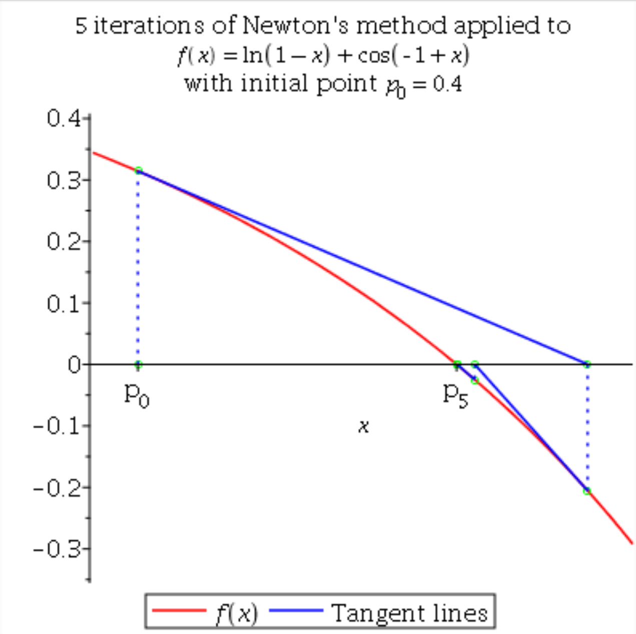


Рисунок 2 – Графіка ітераційного процесу.

Відповідь: $x \approx 0{,}602$.

Приклад 3. Методом простої ітерації знайти корінь рівняння $x - \cos x = 0$.

Розв’язання.

На рис. 3 зображено введення функції з лівої частини рівняння, вибір команди FixedPointIteration для потрібного методу, введення початкового наближення $x = 1.0$. Після виконання відповідної програми отримуємо результат .

Далі, якщо вказати значення sequence параметру output, отримаємо послідовність наближених значень шуканого кореня.

Якщо вказати значення plot параметру output, отримаємо корисну графічну інформацію про ітераційний процес знаходження кореня (рис. 4).

```
> f:=x − cos(x) :
> FixedPointIteration(f, x = 1.0, tolerance = 10^(−2))
                              0.7414250866                    (1)
> FixedPointIteration
  (f,
  x = 1.0, tolerance = 10^(−2), output = sequence,
  maxiterations = 20)
        1.0, 0.5403023059, 0.8575532158, 0.6542897905,
        0.7934803587, 0.7013687737, 0.7639596829,
        0.7221024250, 0.7504177618, 0.7314040424,
        0.7442373549, 0.7356047404, 0.7414250866
```

Рисунок 3 – Метод простої ітерації

```
> FixedPointIteration
  (f, x = 1.0, tolerance = 10^(−2), output = plot, stoppingcriterion = function_v
```

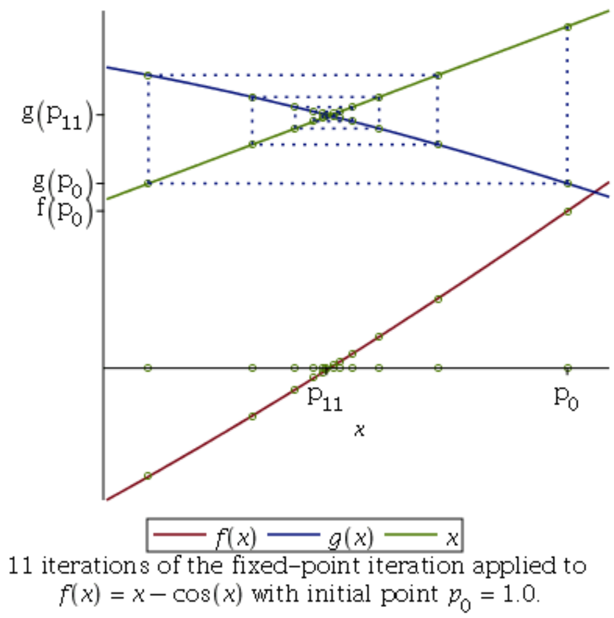


Рисунок 4 - Метод простої ітерації з графічною ілюстрацією.

Відповідь: $x \approx 0{,}741.$

Приклад 4. Методом січних знайти корінь рівняння

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0.$$

Розв’язання.

На рис. 5 та рис. 6 команда Secant виконує обчислення при заданих користувачем початковому інтервалу та інших параметрах.

> $f := x^3 - 7x^2 + 14x - 6 :$

> $\mathrm{Secant}\left(f,\ x = [2.7,\ 3.2],\ \mathrm{tolerance} = 10^{-2}\right)$

$$3.005775850 \qquad (1)$$

> Secant
$\left(f,\ x = [2.7,\ 3.2],\ \mathrm{tolerance} = 10^{-2},\ \mathrm{output} = \mathrm{sequence}\right)$

$$2.7,\ 3.2,\ 3.100884956,\ 2.858406793,\ 3.026267866,\ 3.005775850$$

Рисунок 5 – Метод січних.

> Secant
$\left(f,\ x = [2.9,\ 3.1],\ \mathrm{tolerance} = 10^{-3},\ \mathrm{output} = \mathrm{plot}\right)$

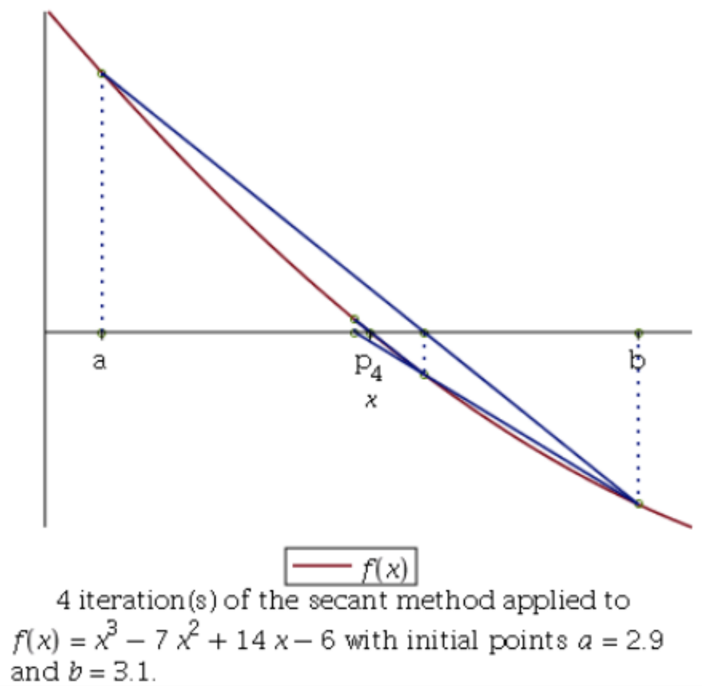


Рисунок 6 – Графіка ітераційного процесу в методі січних.

Відповідь: $x \approx 3{,}005$.

Приклад 5. Виконати LU-декомпозицію матриці

$$\begin{pmatrix} 4{,}2 & 2{,}2 & 0{,}2 \\ 1{,}0 & 5{,}3 & 2{,}1 \\ 0{,}3 & 3{,}2 & 6{,}3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

В середовищі Maple розв'язання може виглядати як на рис. 7. Там же бачимо відповідь.

```
> M1 := Matrix([[4.2, 2.2, 0.2], [1.0, 5.3, 2.1], [0.3, 3.2, 6.3]])
```

$$M1 := \begin{bmatrix} 4.2 & 2.2 & 0.2 \\ 1.0 & 5.3 & 2.1 \\ 0.3 & 3.2 & 6.3 \end{bmatrix}$$

Factor the matrix.

```
> P1, L1, U1 := MatrixDecomposition(M1, method = PLU)
```

$$P1, L1, U1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2380952381 & 1 & 0 \\ 0.07142857143 & 0.6370887339 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4.2 & 2.2 & 0.2 \\ 0 & 4.776190476 & 2.052380952 \\ 0 & 0 & 4.978165504 \end{bmatrix}$$

Рисунок 7 – LU-декомпозиція матриці.

Приклад 6. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом послідовної верхньої релаксації (SOR).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4{,}2 & 2{,}2 & 0{,}2 & 1{,}5 \\ 1{,}0 & 5{,}3 & 2{,}1 & 4{,}3 \\ 0{,}3 & 3{,}2 & 6{,}3 & 3.2 \end{array}\right).$$

Розв'язання.

Метод верхньої релаксації є одним з найуживаніших, тому є і в пакеті Maple. Для його виклику вказується значення SOR параметру method в команді LinearSolve (рис. 8).

```
> M1 := Matrix([[4.2, 2.2, 0.2], [1.0, 5.3, 2.1], [0.3, 3.2, 6.3]])
```

$$M1 := \begin{bmatrix} 4.2 & 2.2 & 0.2 \\ 1.0 & 5.3 & 2.1 \\ 0.3 & 3.2 & 6.3 \end{bmatrix}$$

Approximate the solution to a system of equations using the Successive Over-Relaxation method.

```
> V1 := Vector([1.5, 4.3, 3.2])
```

$$V1 := \begin{bmatrix} 1.5 \\ 4.3 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

```
> LinearSolve(M1, V1, method = SOR(1.25))
```

$$\begin{bmatrix} -0.05457376692 \\ 0.7753875611 \\ 0.1166895821 \end{bmatrix}$$

Рисунок 8 – Метод верхньої релаксації.

Відповідь: $\begin{pmatrix} -0{,}055 \\ 0{,}775 \\ 0{,}117 \end{pmatrix}$.

Приклад 7. Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Якобі.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ -1 & 11 & -1 & 3 & 25 \\ 2 & -1 & 10 & -1 & -11 \\ 0 & 3 & -1 & 8 & 15 \end{array}\right).$$

Розв’язання.

Ітерації починаються з заданого користувачем нульового вектора. Програма дозволяє отримати тільки відповідь або іще показати результати проміжних ітерацій (рис. 9).

На рис. 10 програма побудувала графік відносних похибок ітераційного процесу (потрібне для цього значення параметру output=[approximates,distances] команди IterativeApproximate на рис. 10 не показано).

> $A := \text{Matrix}([[10, -1, 2, 0], [-1, 11, -1, 3], [2, -1, 10, -1], [0, 3, -1, 8]])$:

> $b := \text{Vector}([6, 25, -11, 15])$:

View the approximate solution using the Jacobi method.

> IterativeApproximate$\left(A, b, \text{initialapprox} = \text{Vector}([0., 0., 0., 0.]), \text{tolerance} = 10^{-3}, \text{maxiteration}\right.$

$$\begin{bmatrix} 0.9996741452 \\ 2.000447672 \\ -1.000369158 \\ 1.000619190 \end{bmatrix} \quad (1)$$

View the approximate solution with the error at each iteration.

> IterativeApproximate$\left(A, b, \text{initialapprox} = \text{Vector}([0., 0., 0., 0.]), \text{tolerance} = 10^{-3}, \text{maxiteration}\right.$

$$\left[\begin{bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6000000000 \\ 2.272727273 \\ -1.100000000 \\ 1.875000000 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.047272727 \\ 1.715909091 \\ -0.8052272727 \\ 0.8852272726 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.9326363636 \\ 2.053305785 \\ -1.049340909 \\ 1.130880682 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.015 \\ 1.95 \\ -0.96 \\ 0.973 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Рисунок 9 – Ітераційний метод Якобі.

> IterativeApproximate$\left(A,\ b,\ \text{initialapprox} = \text{Vector}\left(\left[0.,\ 0.,\ 0.,\ 0.\right]\right),\ \text{tolerance} = 10^{-3},\ \text{maxiteration}\right.$

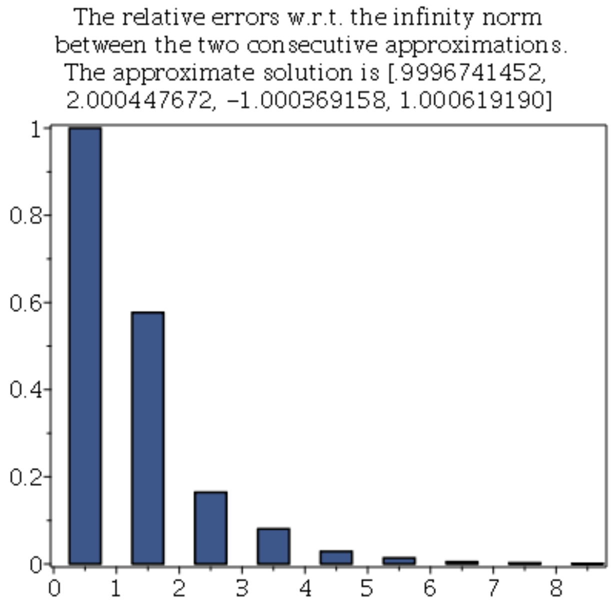


Рисунок 10 – Похибки на кожній ітерації.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1{,}000 \\ 2{,}000 \\ -1{,}000 \\ 1{,}000 \end{pmatrix}$.

Математичний пакет MATLAB

Приклад 8. Знайти власні пари матриці

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання.

Оскільки математики полюбляють MATLAB, звернемось до нього для розв’язання поставленой задачі. На рис. 11 зображено вікно програми, введена матриця, виклик потрібної функції eig.

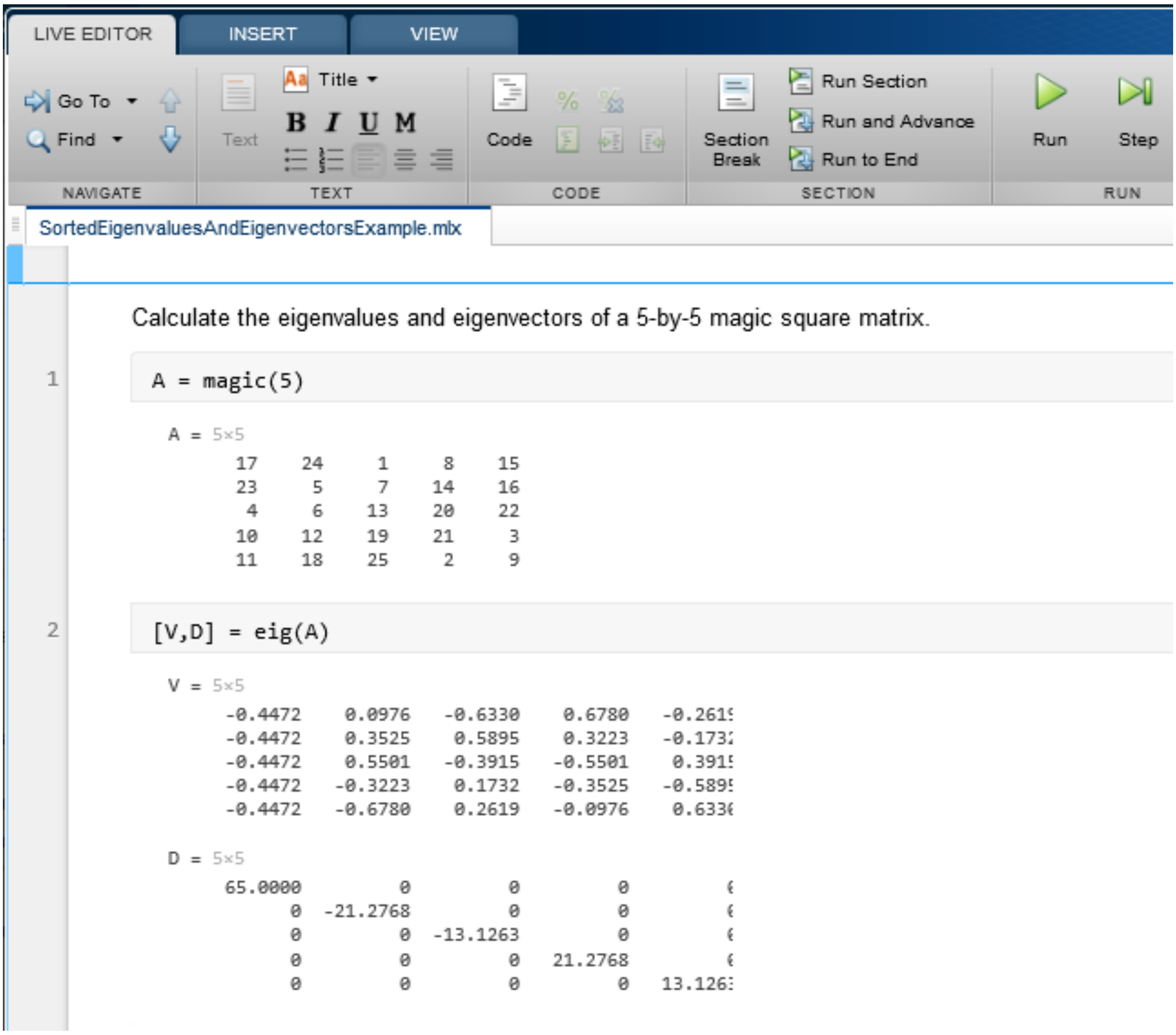


Рисунок 11 – Знаходження власних чисел і власних векторів матриці.

Відповідь: на рис. 11 матриця *D* містить власні числа заданої матриці A, а матриця V – власні вектори.

Математичний пакет Wolfram Mathematica

Приклад 9. На рис. 12 наведено приклади використання програми Nsolve з даного математичного пакету для розв’язання 3-х рівнянь:

перше – трансцендентне рівняння з логарифмами та експонентами;

друге – поліноміальне розріджене рівняння дуже високого степеня;

третє – рівняння з високостепеневими радикалами.

Exp-log equations:

```
In[1]:= NSolve[E^(2 E^x) – Log[x^2 + 1] – 20 x == 11, x, Reals]
Out[1]= {{x → –0.351627}, {x → 0.383183}}
```

High-degree sparse polynomial equations:

```
In[2]:= NSolve[x^1 000 000 – 2 x^777 777 + 3 x^12 345 + 9 x^67 – 10 == 0, x, Reals]
Out[2]= {{x → –1.}, {x → 0.999915}, {x → 1.}, {x → 1.}}
```

Algebraic equations involving high-degree radicals:

```
In[3]:= NSolve[2 x^(123 451 / 67 890) – x^2 + 4 Sqrt[x] – 4 x – 9 / 8 == 0, x, Reals]
Out[3]= {{x → 0.300293}, {x → 0.614664}, {x → 4.67046}, {x → 20.7516}}
```

Рисунок 12 – Рівняння та їх корені.

Приклад 10. На рис. 13 наведено приклади використання програми Nsolve з даного математичного пакету для розв’язання лінійної та нелінійної систем з трьох рівнянь.

Linear systems:

```
In[1]:= NSolve[2 x + 3 y – 5 z == 1 && 3 x – 4 y + 7 z == 3 && x + y – z == 8, {x, y, z}, Reals]
Out[1]= {{x → 0.0909091, y → 19.3636, z → 11.4545}}
```

Polynomial systems:

```
In[1]:= NSolve[x y == z^2 – x && x y z == 2 && x^2 + y^2 + z^2 == 5, {x, y, z}, Reals]
Out[1]= {{x → 1.15308, y → 1.11157, z → 1.56039}, {x → 1.046, y → 1.24714, z → 1.53314}}
```

Рисунок 13 – Системи рівнянь та їх розв’язки.

Наступні приклади ілюструють он-лайн сервіс даного пакету.

Приклад 11. Розв’язати з дуже високою точністю рівняння методом дотичних (Ньютона).

$x^5 - 2 = 0.$

Розв’язання.

У верхньому рядку інтерфейсного вікна користувач вводить рівняння, задає метод, початкове наближення та потрібну точність результату. На рис. 14, рис. 15 показано частину інформації, яку надає програма при виконанні ітераційного процесу методом Ньютона. Відповідь міститься в рядку Result.

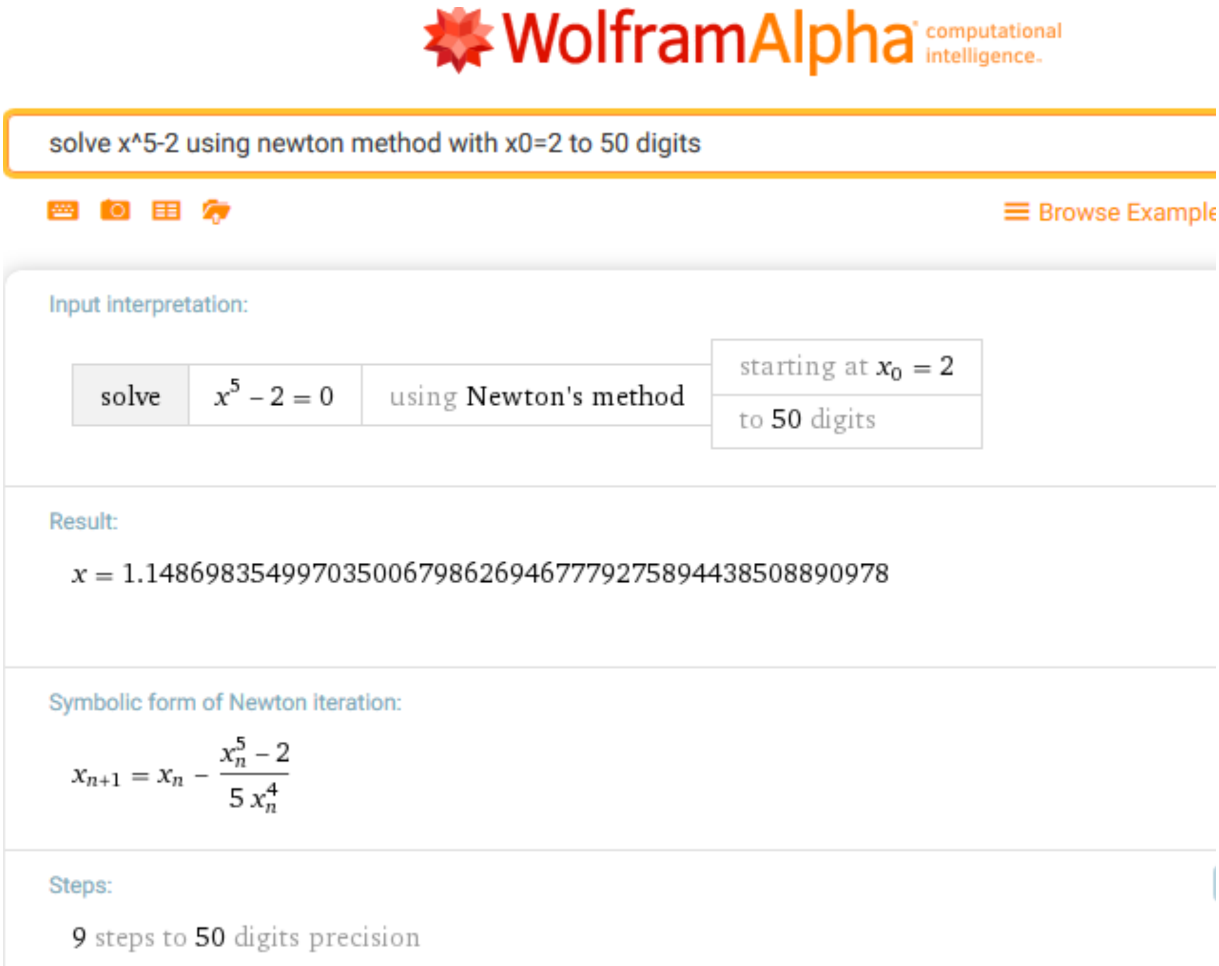


Рисунок 14 – Розв’язання рівняння методом Ньютона.

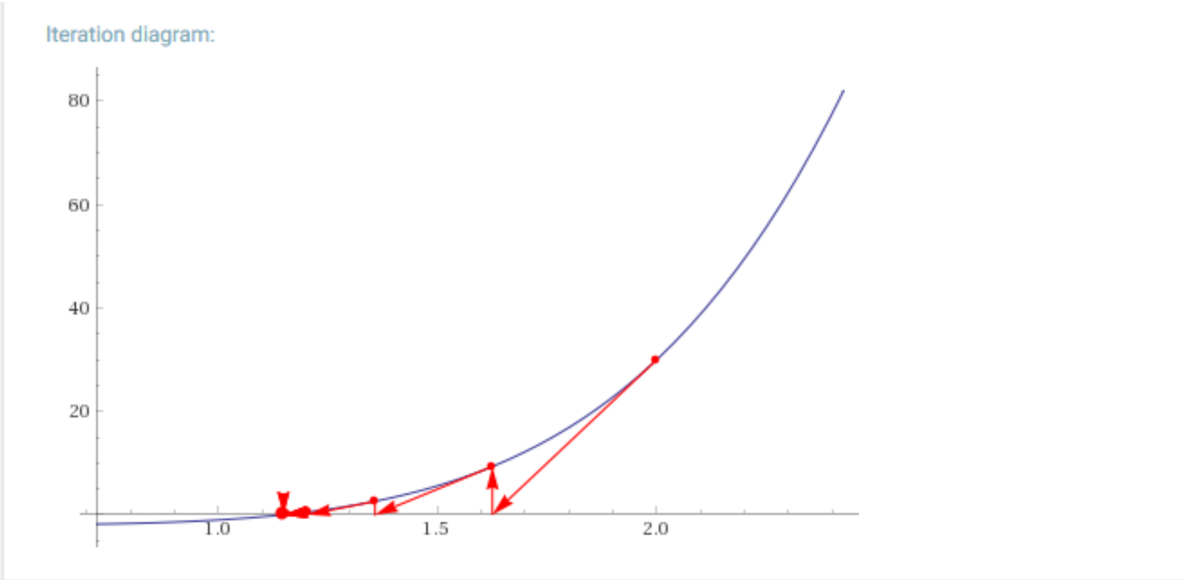


Рисунок15 – Графіка ітераційного процесу в методі Ньютона.

Приклад 12. Розв'язати рівняння методом січних.

$$x^3 - 2 = 0.$$

Розв'язання.

У верхньому рядку інтерфейсного вікна користувач вводить рівняння, задає метод, початкові наближення. Точність результату – за замовчуванням. На рис. 16, 17 показано частину інформації, яку надає програма при виконанні ітераційного процесу методом січних. Відповідь міститься в рядку Result.

Рисунок 16 - Розв’язання рівняння методом січних.

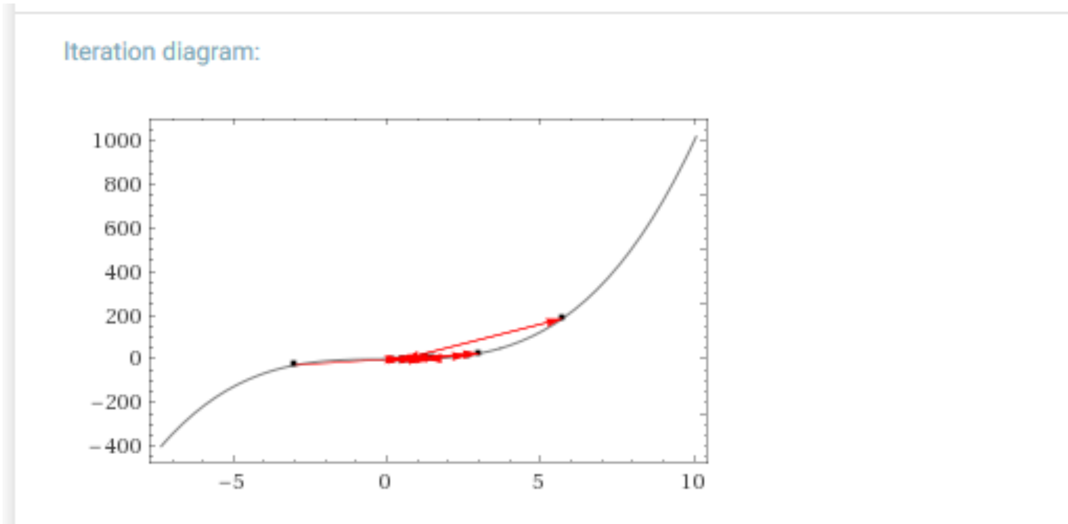


Рисунок 17 - Графіка ітераційного процесу в методі січних.

Додаток 2. Творчі проекти

1. У науковому журналі «Applied Mathematics and Computation» за останні п'ять років знайти статтю, у якій використовуються чисельні методи для розв'язку практичних задач. Підготувати аналітичний звіт по опрацюваному матеріалу.
2. Провести огляд існуючого на сьогоднішній день програмного забезпечення для задач наближеного розв'язання СЛАР.
3. Підготувати аналітичний звіт щодо застосування чисельних методів у медицині.
4. Знайти в Інтернеті інформацію про науково – практичні українські та/або міжнародні конференції присвячені проблемам застосування чисельного аналізу у медицині.
5. Ознайомитись з QR-методом знаходження всіх власних чисел тридіагональної матриці. Порівняти його з методом обертань.
6. У науковому журналі «Journal of Computational and Applied Mathematics» за останні п'ять років знайти статтю в якій застосовується метод прогонки для розв'язку практичних задач. Підготувати аналітичний звіт по опрацюваному матеріалу.
7. Одним з недоліків методів Ньютона та хорд наближеного знаходження коренів нелінійного рівняння є залежність збіжності методів від початкового наближення. Існують методи, що дозволяють істотно розширити область вибору початкового наближення. До таких методів належить метод продовження розв'язку за параметром (метод Давиденка). Знайти в літературі та описати алгоритм цього методу. Проілюструвати застосування методу Давиденка на конкретному прикладі.
8. Провести порівняльний аналіз методів Ейткена, Стеффенсена та Мюллера знаходження коренів нелінійних рівнянь.

9. Ознайомитись з реалізацією методу обертань розв’язання повної алгебраїчної проблеми власних чисел у пакеті R. Протестувати роботу програми на конкретному прикладі.
10. У зарубіжних чи вітчизняних наукових журналах за останні п’ять років знайти статті щодо застосування чисельних методів у задачах оптимізації. Підготувати аналітичний звіт по опрацьованому матеріалу.

Література

1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 636 с.
2. *Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А.* Чисельні методи в інформатиці. – К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.
3. *Джон Г. Мэтьюз, Куртис Д. Финк* Численные методы. Использование Matlab / Пер. с англ. – Вильямс: Москва - Санкт-Петербург – Киев, 2001. – 720 с.
4. *Гаєв Є.О., Нестеренко Б.М.* Універсальний математичний пакет MatLab і типові задачі обчислювальної математики, К.: НАУ, 2004. – 176 с.
5. *Попов В.В.* Методи обчислень: конспект лекцій. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. – 303 с.
6. *Вержбицкий В. М.* Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
7. *Вержбицкий В. М.* Численные методы. – М.: Высшая школа, 2001. – 382 с.
8. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
9. *Самарский А. А.* Введение в численные методы. – М.: Изд-во “Лань”, 2005. – 288 с.
10. *Воробьева Г.Н., Данилова А.Н.* Практикум по вычислительной математике. – М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.