

Міністерство освіти і науки України

**Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя**

*Кафедра технічної механіки та
сільськогосподарських машин*

ОПР МАТЕРІАЛІВ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

до виконання розрахунково-графічних робіт і
самостійної роботи

для студентів спеціальностей

131 «Прикладна механіка» 133 «Галузеве машинобудування»,
208 «Агроінженерія», 274 «Автомобільний транспорт»

Тернопіль
2022

УДК 620.10

Д 58

Автори:

Т. А. Довбуш, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин

Н. І. Хомик, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин

А.В. Бабій, доктор технічних наук, завідувач кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин

Г. Б. Цьонь, кандидат технічних наук, старший викладач кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин

А. Д. Довбуш, старший викладач кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин

Рецензенти:

Р.М. Горбатюк, к.т.н., д.пед.н., професор, завідувач кафедри машинознавства та транспорту Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

І. Б. Гевко, д.т.н., професор, професор кафедри автомобілів Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя

Розглянуто на засіданні кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин, протокол № 6 від 29.12.2021 р.

Схвалено й рекомендовано до друку та впровадження у навчальний процес на засіданні вченої ради ТНТУ імені Івана Пулюя, протокол № 4 від 19.04.2022 р.

Довбуш Т.А.

Д 58 Довбуш Т.А. Опір матеріалів: навчальний посібник до виконання розрахунково-графічних робіт і самостійної роботи / Т. А. Довбуш, Н. І. Хомик, А. В. Бабій, Г. Б. Цьонь, А. Д. Довбуш. Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2022. 220 с.

Дисципліна «Опір матеріалів» є базовою загальноінженерною для студентів спеціальностей: «Прикладна механіка», «Галузеве машинобудування», «Агроінженерія», «Автомобільний транспорт».

Розроблений навчальний посібник призначений для виконання розрахунково-графічних робіт з «Опору матеріалів». Ці роботи охоплюють основні теми дисципліни. Кожна тема має однотипну структуру, а саме: стислий виклад теоретичного матеріалу, типові завдання для виконання розрахунково-графічної роботи, поетапний приклад розв'язування типової задачі. Теоретичний матеріал подано без виведень, але вміщено аналіз необхідних аналітичних залежностей, які студенти використовують під час розв'язування задач. Типові завдання кожної теми складаються з десяти різних схем і, відповідно, такої ж кількості даних, що запобігає появі однакових варіантів. Приклади розв'язування задач містять графічну частину, необхідну під час виконання розрахунково-графічних робіт.

Посібник рекомендовано також і для самостійної роботи студентів та для студентів інших спеціальностей, які цікавляться інженерними розрахунками.

УДК 620.10

© Довбуш Т. А., Хомик Н. І.,
Бабій А.В., Цьонь Г. Б.,
Довбуш А. Д., 2022

ЗМІСТ

	стр.
ВСТУП.....	5
Вказівки до вибору завдання.....	8
Об'єм, структура і вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт.....	8
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ.....	10
2. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ І СТИСК ПРЯМОГО СТРИЖНЯ.....	27
Задача № 1 Розрахунок на міцність і визначення переміщень при розтягу і стиску.....	36
Приклад розв'язування задачі № 1 Розрахунок на міцність і визначення переміщень при розтягу (стиску).....	39
Задача № 2 Розрахунок статично невизначуваної стрижневої системи.....	43
Приклад розв'язування задачі № 2 Розрахунок статично невизначуваної стрижневої системи.....	46
3. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПОПЕРЕЧНИХ ПЕРЕТИНІВ.....	49
Задача № 3 Визначення осьових моментів інерції плоских перетинів.....	53
Приклад розв'язування задачі № 3 Визначення моментів інерції плоских перетинів.....	56
4. ЗСУВ. КРУЧЕННЯ.....	58
Задача № 4 Розрахунок вала на кручення.....	62
Приклад розв'язування задачі № 4 Розрахунок вала на міцність і жорсткість.....	65
5. СКЛАДНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН.....	69
Задача № 5 Аналіз напруженого стану.....	73
Приклад розв'язування задачі № 5 Аналіз плоского напруженого стану.....	75
6. ПРЯМИЙ ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН.....	80
Задача № 6 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для консолі.....	92
Приклад розв'язування задачі №6 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для консолі.....	95
Задача № 7 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для балки на двох опорах.....	98
Задача № 8 Розрахунок на міцність при згині балок.....	101
Задача № 9 Розрахунок на міцність і визначення переміщень при згині балок.....	101

Приклад розв'язування задач № 7 і 8 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для балки на двох опорах. Розрахунок балки на міцність.....	104
7. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ ЗГІНІ.....	109
Приклад розв'язування задачі № 9 методом початкових параметрів.....	123
Приклад розв'язування задачі № 9 методом Мора.....	125
8. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ СИСТЕМИ.....	129
Задача № 10 Розрахунок статично невизначуваної рами.....	135
Приклад розв'язування задачі № 10 методом сил.....	138
Приклад розв'язування задачі № 10 методом мінімуму потенціальної енергії деформації.....	142
9. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ КОСОМУ ЗГІНІ.....	144
Задача № 11 Підбір поперечного перетину балки при деформації косоного згину.....	148
Приклад розв'язування задачі № 11 Підбір поперечного перетину балки при деформації косоного згину.....	151
10. СУМІСНА ДІЯ ЗГІНУ З КРУЧЕННЯМ.....	157
Задача № 12 Розрахунок вала на згин з крученням.....	159
Приклад розв'язування задачі № 12 Розрахунок вала на згин з крученням.....	162
11. СТІЙКІСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СТИСНЕНИХ СТРИЖНІВ.....	166
Задача № 13 Розрахунок на стійкість стисненого стрижня.....	175
Приклад розв'язування задачі № 13 Розрахунок на стійкість стисненого стрижня.....	177
12. ДИНАМІЧНІ НАВАНТАЖЕННЯ. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ УДАРІ.....	181
Задача № 14 Визначення максимальних динамічних напружень і переміщень при ударі.....	185
Приклад розв'язування задачі № 14.1.....	188
Приклад розв'язування задачі № 14.2.....	191
Перелік використаної і рекомендованої літератури.....	194
Додатки.....	196

ВСТУП

Опір матеріалів – наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів споруд і машин.

Елементи машинобудівних і будівельних конструкцій під час експлуатації зазнають силової дії різних походжень. Ці сили або прикладені безпосередньо до елемента, або передаються через з'єднані з ним сусідні елементи. Для нормальної роботи інженерних споруд або машин кожен елемент повинен бути таких розмірів і форми, щоб витримував навантаження, які діють на нього, не руйнуючись (міцність), не давав значних змін розмірів (жорсткість), зберігав початкову форму (стійкість).

Опір матеріалів – теоретико-експериментальна наука. Дослід – теорія – дослід – така діалектика розвитку науки про опір твердих тіл деформуванню і руйнуванню. Однак наука опору матеріалів не вичерпує всіх питань механіки деформівних тіл. Цим займаються інші суміжні дисципліни: будівельна механіка стрижневих систем, теорія пружності та теорія пластичності.

Опір матеріалів є загальноінженерною наукою, в якій на основі експериментальних даних про властивості матеріалів, з одного боку, та правил теоретичної механіки, фізики і вищої математики, з другого, викладаються загальні методи розрахунку раціональних розмірів і форм елементів інженерних конструкцій з урахуванням величини і характеру навантажень, які на них діють. Задачі опору матеріалів розв'язують доволі простими математичними методами з прийняттям ряду припущень і гіпотез, а також з використанням експериментальних даних.

Значний внесок у встановлення науки про механіку твердого деформівного тіла внесли вчені: Роберт Гук, Адемар Сен-Венан, Ісаак Ньютон, Томас Юнг, Фелікс Ясинський та інші, які сформулювали основні поняття, закони, визначення та методики розрахунку елементів конструкцій на міцність і жорсткість.

Великий внесок у подальший розвиток науки «Опір матеріалів» зробив видатний український вчений 20-го століття – С. П. Тимошенко. Його монографії «Курс опору матеріалів», «Інженерна механіка», «Пластини і оболонки», «Коливання в інженерній справі» та інші сприяли значному розвитку інженерних наук та прогресу в цілому.

Опір матеріалів має самостійне значення, як дисципліна, знання якої необхідне для всіх інженерних спеціальностей, є базою для вивчення всіх розділів будівельної механіки, основою для вивчення курсу деталей машин та ін. Опір матеріалів дає наукові основи інженерних розрахунків, без яких на сучасному етапі неможливе проектування і створення всієї різноманітності конструкцій сучасного машинобудування і будівництва. Це одна із фундаментальних дисциплін для майбутніх інженерів-механіків та інженерів-будівельників. Опір матеріалів є основою для вивчення решти інженерних дисциплін.

Пропонований посібник розроблений колективом авторів – викладачів кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин. Кафедра була створена у 1963 році, тобто на початках створення нашого закладу вищої освіти для забезпечення викладання загальноінженерних дисциплін, фундаментальною з яких є «Опір матеріалів». На кафедрі накопичений значний досвід викладання цього та інших предметів, є добра лабораторна база.

Викладачі кафедри, зокрема Довбуш А.Д., починаючи з 1976 року, підтримують всеукраїнську ініціативу та постійно організовують вузівські тури олімпіад з опору матеріалів серед студентів другого та третього курсів. Переможці

перших турів олімпіад беруть участь у всеукраїнських олімпіадах, свого часу були й учасниками всесоюзних олімпіад.

Відзначимо, що учасниками олімпіад з опору матеріалів були кращі студенти, а згодом співробітники ТНТУ, а саме: Гладьо Юрій Богданович – переможець Українського та Всесоюзного турів олімпіади 1978 р., к.т.н., доцент; Зеленський Костянтин Васильович – учасник олімпіади 1984 р., к.т.н., доцент, директор Гусятинського коледжу; Дячук Степан Федорович – учасник олімпіади 1985 р. (посів третє місце), к.т.н., доцент, проректор ТНТУ; Мартов Сергій – учасник олімпіади 1990 р., колишній ст. викладач кафедри маркетингу на виробництві; Головата Ірина Михайлівна – учасниця олімпіади у 1986 р. (зайняла 6 місце), колишній викладач кафедри інформатики та математичного моделювання; Бабій Андрій Васильович – учасник олімпіад 1999, 2000, 2001 рр., сьогодні завідувач кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин; Пастернак Сергій Ігорович – учасник олімпіади у 2002 р. (увійшов у першу десятку), згодом студент Національного університету «Київський політехнічний інститут»; Костюк Мар'яна – учасниця олімпіад 2004, 2005 рр., (увійшла у першу десятку), після закінчення університету працює у бюро технічної інвентаризації м. Тернополя; Клендій Олександра Миколаївна – учасниця олімпіад 2007, 2008 рр., на даний час к.т.н., доцент Національного університету біоресурсів та природокористування; Довбуш Тарас Анатолійович – учасник олімпіади 2010 р. у Київському національному університеті будівництва та архітектури, зайняв загальне п'яте місце і третє серед технічних університетів України; а також учасник олімпіади 2012 року у Полтавському національному технічному університеті, посів перше місце (Додатки А, Б), зараз він – к.т.н., доцент кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин ТНТУ ім. І. Пулюя; Колісник Микола – учасник олімпіад 2017 р. та 2018 р. в Одеській державній академії будівництва та архітектури; у 2017 р. переможець – перше місце серед студентів других курсів (Додаток В); у 2018 р. посів третє місце серед студентів третіх курсів (Додаток Д); Биків Назарій (учасник олімпіади 2017 р. в Одеській академії будівництва та архітектури, третє місце серед студентів третіх курсів).

Розроблений посібник рекомендований для студентів, які навчаються на спеціальностях «Прикладна механіка», «Галузеве машинобудування», «Агроінженерія», «Автомобільний транспорт». Посібник призначений для виконання розрахунково-графічних робіт (надалі РГР) з опору матеріалів.

Посібник містить дванадцять тем, які охоплюють увесь курс і розрахований для вивчення протягом двох семестрів. Він є доповненням до лекційного курсу. Кожна тема має однотипну структуру, а саме: стислий виклад теоретичного матеріалу, типові завдання для виконання РГР, поетапний приклад розв'язування типової задачі. Типові завдання кожної теми складаються з десяти різних схем і, відповідно, такої ж кількості даних, що запобігає появі однакових варіантів. Приклади розв'язування задач містять графічну частину, необхідну під час виконання розрахунково-графічних робіт.

Посібник рекомендовано також і для самостійної роботи студентів та для студентів інших спеціальностей, які цікавляться інженерними розрахунками.

У додатках посібника наведено приклад оформлення титульної сторінки та зміст РГР й довідкові матеріали, необхідні для її виконання. Все це сприятиме поглибленню вивчення дисципліни.

Тимошенко Степан Прокопович (1878-1972)



Тимошенко Степан Прокопович (Stepan Prokofyevich Timoshenko; 11.12.1878 р., с. Шпотівка, Сумщина, Російська імперія – 29 травня 1972 р., Вупперталь, ФРН) – всесвітньо відомий український, американський та німецький учений у галузі механіки. Батько теоретичної механіки. Основоположник теорії міцності матеріалів, теорії пружності та коливань. Один із організаторів і перших академіків Української академії наук.

Степан Тимошенко відомий в інженерній справі за своїми фундаментальними працями з опору матеріалів, теорій пружності та коливань. Основоположник школи прикладної механіки у США.

Основні напрями наукової роботи – фундаментальні розробки і подальший розвиток актуальних проблем механіки твердого тіла:

міцності, стійкості й коливання механічних систем, будівельної механіки і теорії споруд. Його наукові праці стали основою розвитку багатьох напрямів механіки. Особливо великий внесок ним зроблений у розвиток прикладної теорії пружності, теорії стійкості пружних, оболонкових і пластинчатих систем, у тому числі підкріплених ребрами жорсткості. Важливими є дослідження щодо згину, кручення, коливання та удару сучасних інженерних конструкцій. Він розв'язав задачу щодо концентрації напружень поблизу отворів, міцності залізничних рельсів. З урахуванням новітніх досягнень науки і техніки виконав фундаментальні розробки з опору матеріалів, прикладної теорії пружності і теорії коливань, які випереджали свій час і знайшли повне практичне використання у створенні сучасної авіаційно-космічної техніки, інженерних споруд та кораблебудуванні. Поряд з точним розв'язанням актуальних задач з теорії стійкості тонкостінних пружних систем використовував розроблений ним загальний метод, широко відомий як енергетичний, або як метод Тимошенка.

Міжнародне визнання та вшанування пам'яті

Наукові досягнення Тимошенка було визнано у всьому світі. Його обрано членом академій наук і наукових товариств багатьох країн: Української (1918 р.), СРСР (1928 р.), Польської (1935 р.), Французької (1939 р.), Американської (1940 р.), Італійської (1948 р.) академій наук; почесним членом Лондонського королівського товариства (1944 р.), Товариства українських інженерів Америки (1953 р.); членом Наукового товариства ім. Шевченка (1923 р.), Української вільної академії наук (1947 р.), Спільки швейцарських інженерів. Почесні звання доктора honoris causa йому присвоїли Лехайський університет (США, 1938 р.), Мічиганський університет (1938 р.), Цюріхський вищий технічний університет (1947 р.), Болонський університет (1954 р.), Загребська політехніка (1956 р.), Туринська політехніка (1960 р.).

Його іменем названий Інститут механіки Національної Академії України.

Вказівки до вибору завдання

Завдання на РГР студенти вибирають за двома останніми цифрами номера залікової книжки; номер розрахункової схеми – за останньою цифрою; варіант (дані з таблиці умови задачі) – за передостанньою цифрою.

Об'єм, структура і вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи

РГР з опору матеріалів містить 14 задач (кількість задач може змінюватися за вказівкою викладача), які охоплюють увесь курс. Виконання її оформляти у вигляді розрахунково-пояснювальної записки на аркушах формату А4.

Титульну сторінку виконувати креслярським шрифтом або машинописним (комп'ютерним) способом на відповідному бланку.

Перша сторінка РГР – титульна (*додаток 1*); друга – зміст, який включає перелік виконаних завдань (*додаток 2*); далі – умови задач і розв'язки задач, список використаних літературних джерел. Умову кожної задачі з вибраними даними і схемою записувати на окремому аркуші. Розв'язок задачі оформляти після написання умови.

Текст РГР викладати послідовно і лаконічно. Розрахунки супроводжувати короткими поясненнями з посиланням на відповідний рисунок. Стель викладу тексту записки повинен бути коротким, чітким і без двоякого змісту. Прийнята у тексті термінологія повинна відповідати встановленій у стандартах або загальноприйнятій у науково-технічній літературі. Найдоцільніше застосовувати під час виконання РГР приклади виконання задач, наведені у даному посібнику.

Текст розрахунково-пояснювальної записки розміщувати з одного боку аркуша формату А4 (297 ммх210 мм). Відстань від країв аркуша до границь тексту справа повинна бути не менше 5 мм, зверху і знизу – 10 мм, зліва – 20 мм. Абзаци у тексті починати відступом, що дорівнює п'яти символам основного тексту записки. Текст виконувати комп'ютерним (машинописним) способом через 1,5 інтервала чітким шрифтом висотою не менше 2,5 мм (14pt, шрифт Times New Roman) або рукописним – чорним чорнилом основним креслярським шрифтом висотою букв і цифр не менше 2,5 мм. Допускається пояснювальну записку виконувати чітким розбірливим рукописним текстом чорним чорнилом.

Номера сторінок РГР проставляти знизу аркуша по центру. Відлік починати з титульної сторінки, але номер її на титульній не ставити. Нумерація сторінок – наскрізна.

Формули у тексті записувати з нової стрічки у загальному вигляді, а під формулою наводити пояснення кожного символу із зазначенням величини й розмірності. Обчислення формул виконувати у такій послідовності: записування шуканої величини в буквеному виразі, підстановка відповідних цифрових значень і записування кінцевого результату з проставлянням розмірностей.

Усі схеми та ескізи під час виконання РГР оформляти на окремій сторінці чи двох, за необхідності, з дотриманням послідовності, передбаченої ходом розв'язування. Рисунки нумерувати відповідно до номера задачі й супроводжувати підписами.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

Задачі опору матеріалів

Опір матеріалів – наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і конструкцій.

Конструкції – усі матеріальні об'єкти техніки, їх частини й деталі.

Міцність – здатність матеріалу чи конструкції витримувати механічне навантаження не руйнуючись

$$\rho_{\max} \leq [\rho],$$

де ρ_{\max} – максимальне напруження;

$[\rho]$ – допустиме напруження.

Жорсткість – здатність конструкції та її елементів протидіяти пружним деформаціям, тобто здатність сприймати зовнішнє навантаження без значної зміни геометричних розмірів та форми

$$f_{\max} \leq [f],$$

де f_{\max} – максимальна деформація (переміщення);

$[f]$ – допустима деформація (переміщення).

Стійкість – здатність конструкції або її елементів зберігати під дією заданих сил початкову форму пружної рівноваги.

Мета курсу опір матеріалів:

а) навчитися за розрахунковою схемою вірно визначати вид деформації, на який працює деталь чи конструкція;

б) визначити найнебезпечніший перетин, попередньо побудувавши епюри внутрішніх силових факторів;

в) за відповідною умовою міцності чи жорсткості визначити розміри поперечного перетину, а в деяких задачах допустиме навантаження чи максимальні напруження, і провести перевірку міцності.

Об'єкти розрахунку в опорі матеріалів

Усі елементи машинобудівних і будівельних конструкцій можна звести до таких типових спрощених елементів: стрижні (бруси), диски, оболонки, пластини, масивні тіла.

Стрижень (брус) – тіло призматичної форми (рисунок 1.1а), в якого один розмір (довжина) набагато перевищує два інших (поперечних) розміри.

Тонкостінні стержні (швелери, кутники, двотаври) – тіла, в яких товщина стінки значно менша за габаритні розміри поперечного перетину.

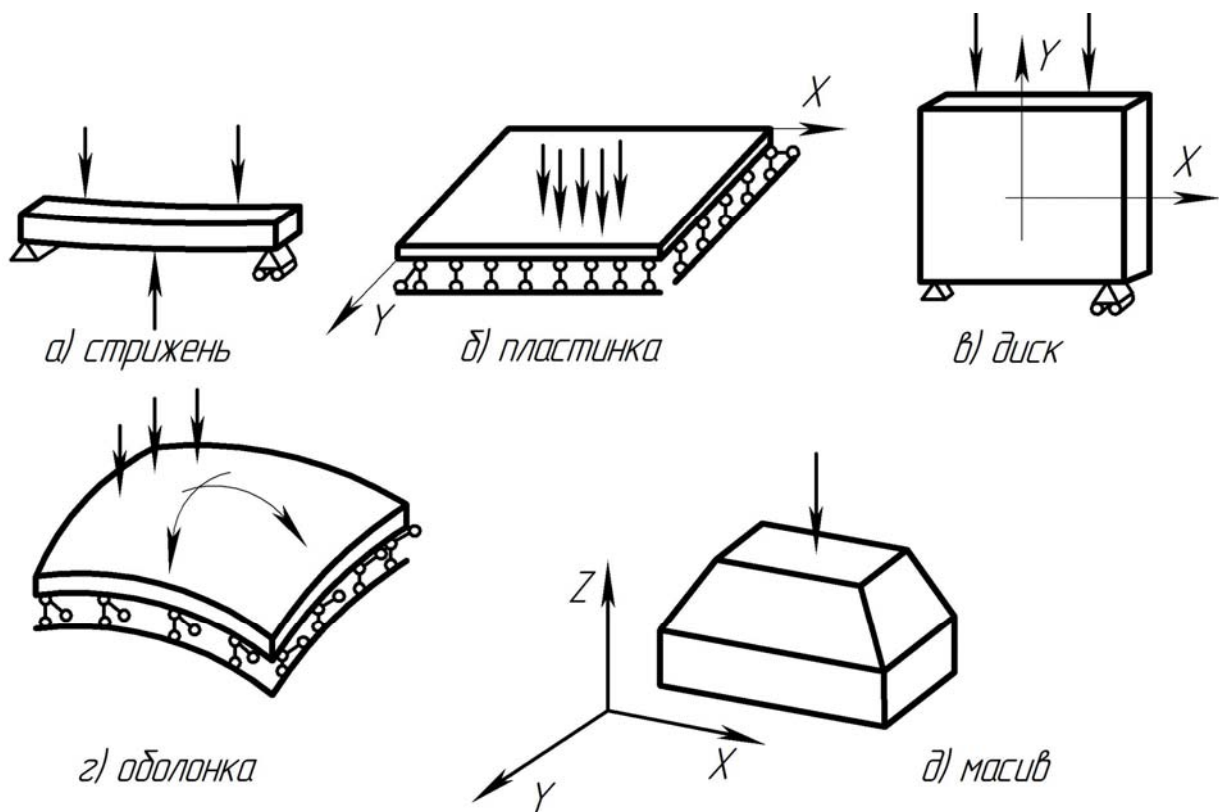


Рисунок 1.1

Приклади стрижнів: вали, осі, балки, труби, рейки, елементи криволінійної форми (гвинтові пружини, гаки, елементи ланцюгів).

Пластинка – призматичне (циліндричне) тіло (рисунок 1.1б), в якого один розмір (товщина) набагато менший за два інших. До пластин відносять і диски (рисунок 1.1в).

Приклади пластин: плоскі днища й кришки резервуарів, апаратів хімічних виробництв, плити перекриттів.

Оболонка – тіло (рисунок 1.1г), обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими (товщина) мала порівняно з іншими розмірами. Це пластинка з викривленою серединною поверхнею.

Приклади оболонок: стінки тонкостінних резервуарів, стінки котлів, куполи будівельних споруд, корпуси літаків, ракет, підводних човнів.

Масив (масивне тіло) – тіло (рисунок 1.1д), розміри якого в усіх (трьох) напрямках одного порядку. Приклади: блоки фундаментних споруд, підпирні стінки, основи потужних пресів і верстатів.

В опорі матеріалів розглядають стрижні, тобто тіла, що пролягають в одному напрямку, а в теорії пружності – складніші об'єкти, що пролягають у двох напрямках (рисунок 1б, в, г) або в трьох (рисунок 1д). Математичний апарат теорії пружності складніший, ніж в опорі матеріалів, тому що напружено-деформований стан таких тіл описують функціями двох або трьох змінних.

Класифікація зовнішніх навантажень. Розрахункова схема

Зовнішні навантаження класифікують:

1. За характером дії – статичні, динамічні.

Статичні – це навантаження, значення, напрямок і місце прикладання яких залишаються постійними.

Динамічні – це навантаження, які характеризуються швидкими змінами їх значення в часі, напрямку чи місця прикладання.

2. За характером прикладання (рисунок 1.2):

а) F , Q , R – зосереджені сили [Н, кН, МН];

б) M , T – зосереджені моменти [Нм, кНм, МНм];

в) q – розподілені на лінії [Н/м, кН/м].

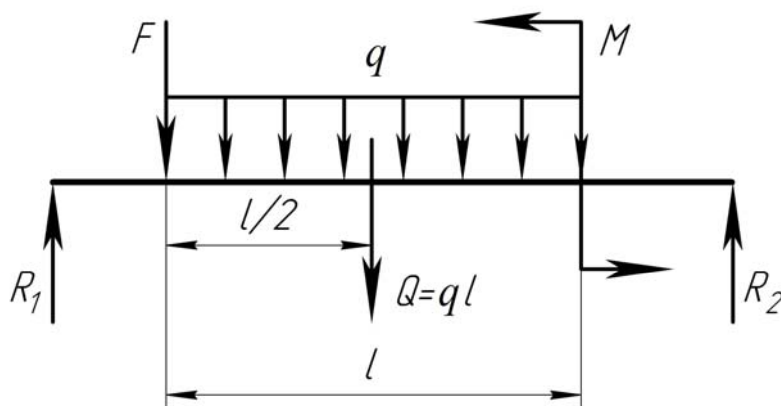


Рисунок 1.2

Розрахункова схема – це реальний об'єкт, звільнений від несуттєвих особливостей. Для одного і того ж об'єкта може бути створена не одна розрахункова схема, що залежить від особливостей навантаження і умов роботи.

Для одного і того ж об'єкту може бути запропоновано кілька розрахункових схем залежно від особливостей навантаження, умов роботи, потрібної точності і від того, яка сторона явища цікавить дослідника в конкретному випадку.

Справедливо і зворотно: *одній розрахунковій схемі може бути поставлено у відповідність багато реальних об'єктів*. Ця обставина є дуже важливою тому, що досліджуючи якусь одну схему можна отримати розв'язок для цілого класу реальних задач, які можна звести до цієї схеми. Перехід від реального об'єкту до розрахункової схеми здійснюють схематизацією властивостей матеріалу, навантажень, геометрії реального об'єкту, типів опорних пристроїв і т. ін.

Основні види деформацій

Реальні тіла (споруди) не є абсолютно твердими і тому під дією прикладених навантажень змінюють свої початкові розміри і форму, тобто **деформуються**.

Деформації бувають **пружними**, тобто такими, що зникають після припинення дії сил, які спричинили їх, та **пластичними**, або **залишковими**, – такими, що не зникають після розвантаження тіла.

Усі існуючі тіла під впливом зовнішніх сил здатні змінювати свої розміри і форму, тобто деформуватися.

В опорі матеріалів розрізняють деформації розтягу (стиску), зсуву (зрізу), кручення і згину. При різних видах деформації у поперечних перетинах тіла виникають різні внутрішні силові фактори.

1. **Розтяг-стиск** – такий вид деформації (рисунки 1.3, 1.4), при якому у поперечних перетинах прямого бруса виникає тільки **поzdовжня (осьова) сила N** . Брус, що працює на розтяг (стиск), називають стрижнем.

Розтягу зазнають такі елементи конструкцій, як канати, болти, троси, стержні ферм, штоки поршневих машин. На стиск працюють фундаменти, цегляна кладка будинків, колони, пуансони штампів.

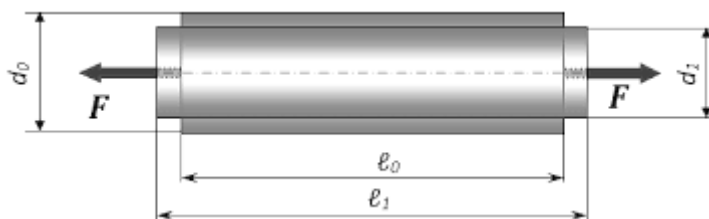
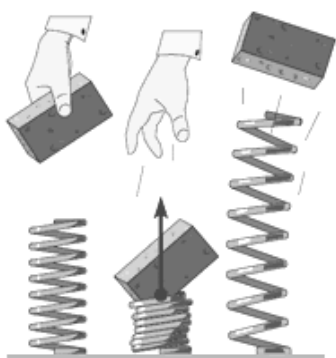
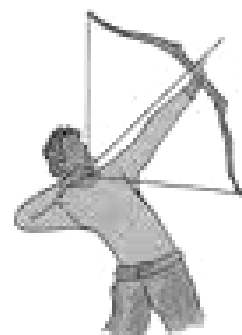
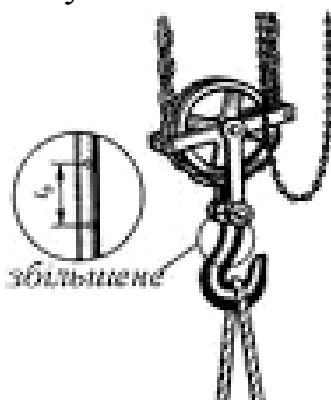
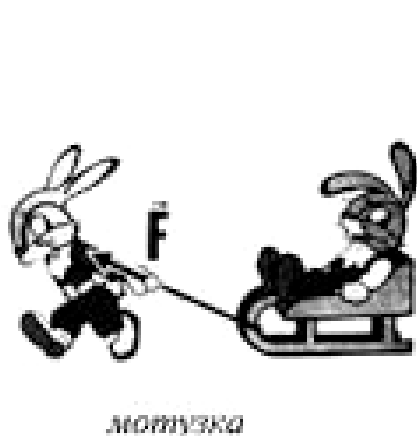


Рисунок 1.3



матеріал лука

Рисунок 1.4

2. **Зсув (зріз)** – такий вид деформації (рисунки 1.5, 1.6), при якому у поперечних перетинах бруса діє тільки *поперечна (перерізуюча) сила Q*. Деформація зсуву доведена до руйнування матеріалу – зріз.

Зсуву зазнають заклепки, болти, шпонки, шви зварних з'єднань.

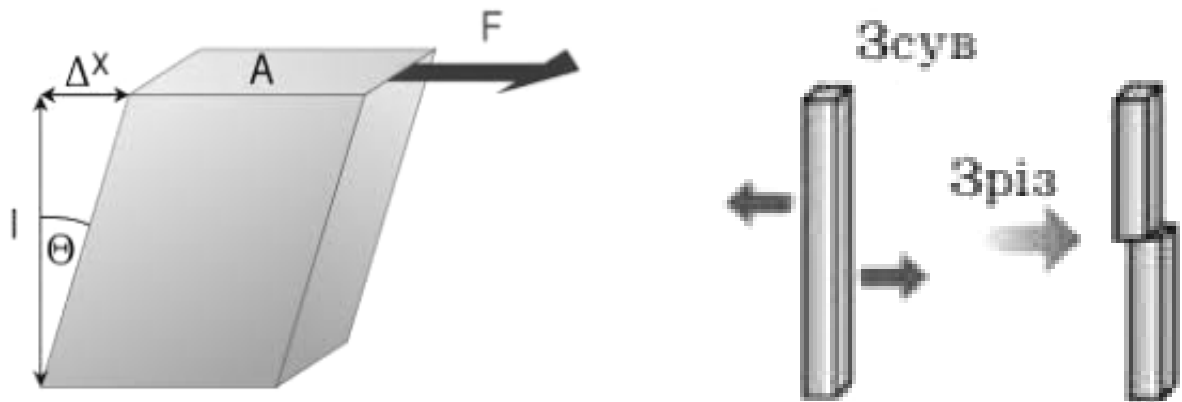


Рисунок 1.5

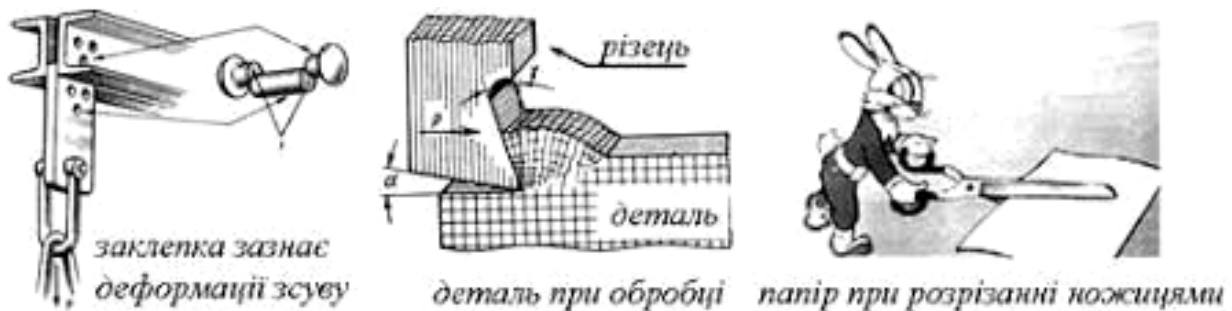


Рисунок 1.6

3. **Кручення** – такий вид деформації (рисунки 1.7, 1.8), при якому у поперечних перетинах бруса діє тільки *крутний момент $M_{кр}$* . Брус круглого поперечного перетину, який передає потужність під час обертального руху, називають валом. Кручення часто супроводжується згином або іншим видом деформації.

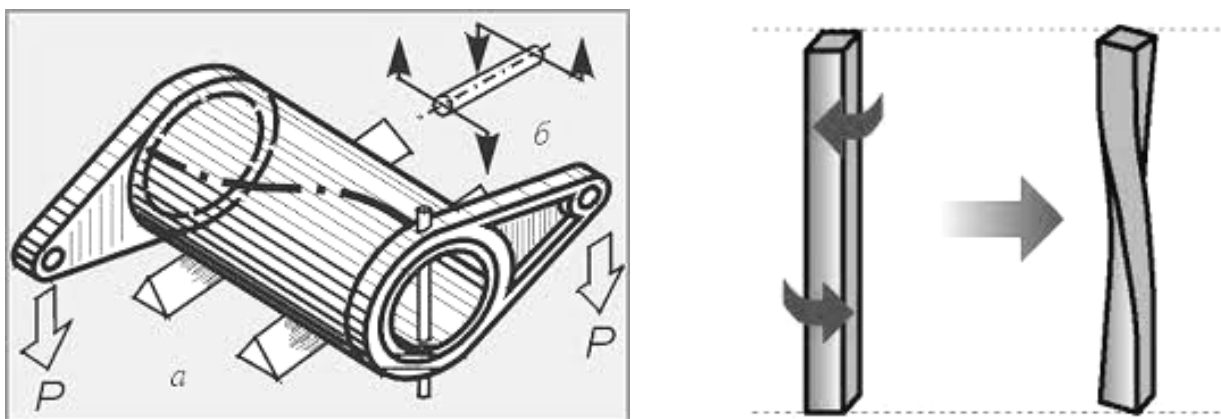


Рисунок 1.7

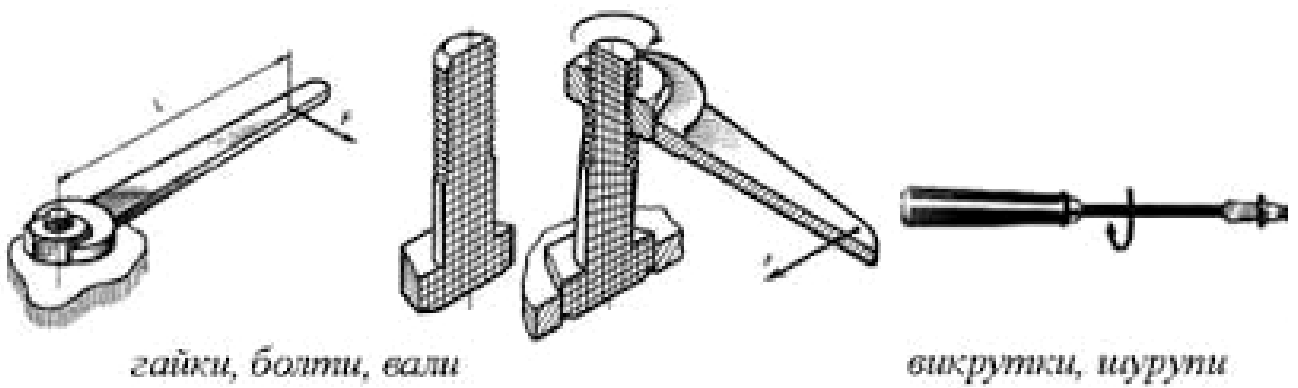


Рисунок 1.8

4. **Прямий поперечний згин** – такий вид деформації (рисунки 1.9, 1.10a), при якому у поперечних перетинах бруса виникає **згинальний момент** $M_{зГ}$ та поперечна сила Q . Брус, який працює на згин, називають балкою.

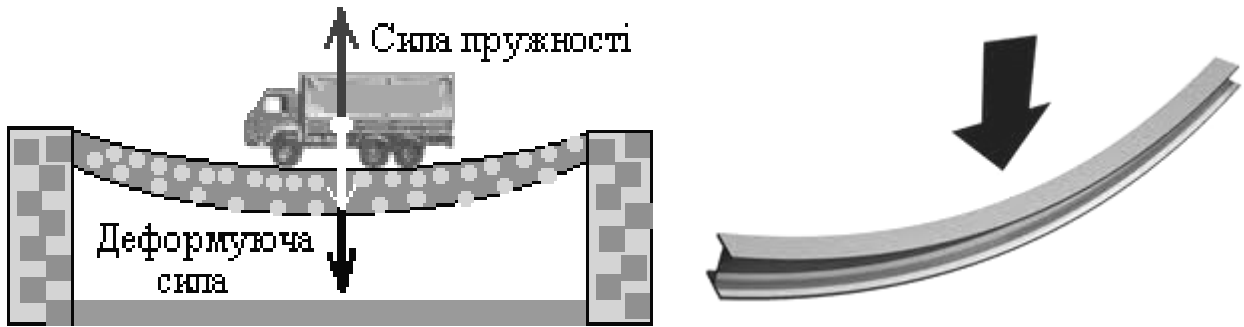
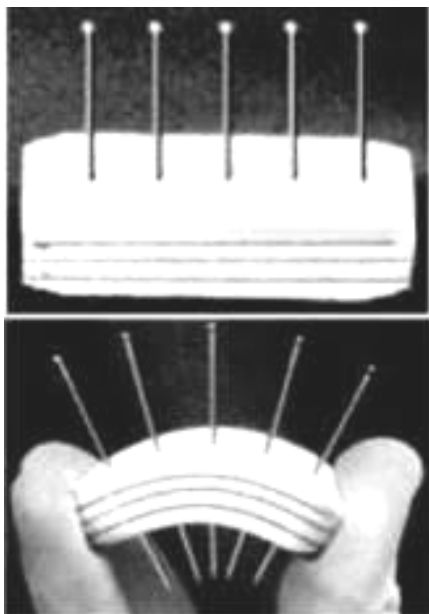
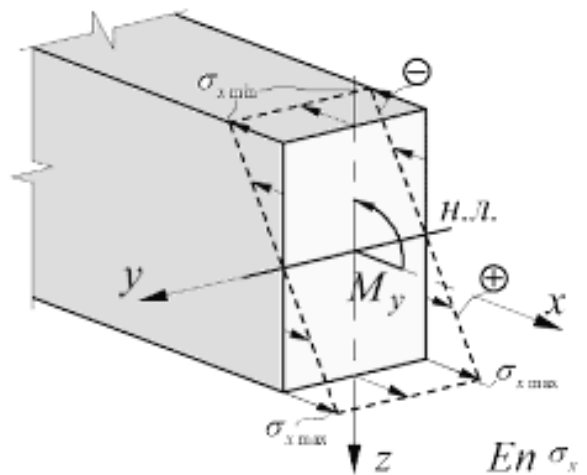


Рисунок 1.9



а)



б)

Рисунок 1.10

Згину зазнають осі, балки міжповерхових перекриттів і мостів, зуби зубчастих коліс, листові ресори.

5. **Складний опір** – це поєднання двох або більше простих видів деформацій (рисунок 1.10б), а саме: *згин + кручення*; *стиск + згин* і т.д.

Внутрішні силові фактори. Метод перетинів. Епюра

Між сусідніми частками тіла завжди діють певні сили взаємодії, тобто *внутрішні сили*. Ці сили намагаються зберегти тіло, як єдине ціле, протидіють усякій спробі змінити взаємне розташування його частин.

В опорі матеріалів не розглядають та не беруть до уваги внутрішні сили, що діють в тілі, яке перебуває в своєму природному (ненавантаженому) стані, а *вивчають і визначають тільки ті додаткові внутрішні сили, які виникають внаслідок навантажування тіла ззовні*.

Внутрішні силові фактори – це внутрішні сили взаємодії між частинками тіла, які виникають при дії на тіло зовнішніх сил, і перешкоджають зміні відстаней між частинками й руйнуванню тіла. Їх називають *зусиллями*. Зовнішні силові дії, прикладені до елемента конструкції, і реакції в місцях кріплення опор, тобто активні й реактивні сили називають *навантаженнями*.

Для встановлення величини внутрішніх зусиль (силових факторів), що виникають у перетині стержнів, застосовують метод перетинів.

Перетин, перпендикулярний до осі бруса, називають *нормальним* або *поперечним*; перетин, проведений під будь-яким іншим кутом, називають *косим* або *похилим*.

Метод перетинів полягає в тому, що пружне тіло (брус), що перебуває у рівновазі під дією системи зовнішніх сил, уявно розрізують площиною на дві частини (рисунок 1.11а). Будь-яку з них відкидають. Залишену частину розглядають як самостійне тіло, що перебуває в рівновазі, приклавши до неї внутрішні сили взаємодії (зусилля), що виникають між обома частинами тіла під впливом зовнішніх сил (рисунок 1.11б). Внутрішні сили замінюють вплив відкинutoї частини бруса на залишену. Принципово не важливо, яку із частин тіла відкинути.

У загальному випадку навантаження бруса у його поперечному перетині виникає шість внутрішніх силових факторів:

N_X – поздовжня (нормальна) сила, діє вздовж осі бруса,
перпендикулярна до площини перетину;

Q_Y, Q_Z – поперечні сили, дотичні до площини перетину, намагаються зсунути одну частину бруса відносно іншої у напрямках осей OY, OZ ;

M_Y, M_Z – моменти, що повертають перетин навколо осей OY, OZ , намагаються зігнути стрижень у площинах XZ та XY , тобто згинальні моменти, $M_Y = M_{зг.Y}$; $M_Z = M_{зг.Z}$;

M_X – момент, що діє у площині перетину і спричиняє поворот перетину відносно поздовжньої осі бруса OX , тобто скручує брус, називають його крутним моментом, $M_X = M_{кр}$.

Кожен із внутрішніх силових факторів пов'язаний з певним видом деформації.

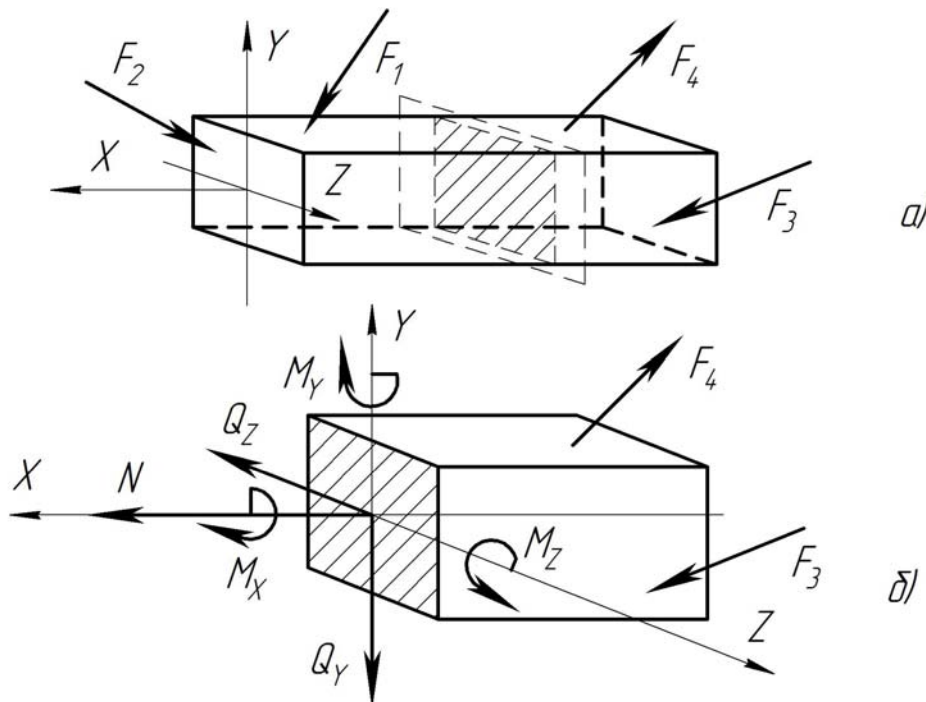


Рисунок 1.11

Для визначення внутрішніх силових факторів у загальному вигляді, відповідно до методу перетинів, записують шість умов рівноваги сил, що діють на залишену частину бруса (використовують шість рівнянь статки). Прирівнюють до нуля алгебраїчні суми проекцій усіх сил, прикладених до цієї частини на осі OX, OY, OZ , і алгебраїчні суми моментів цих сил відносно тих самих осей:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & N_X + \sum F_{iX} &= 0; \\ \sum Y &= 0; & Q_Y + \sum F_{iY} &= 0; \\ \sum Z &= 0; & Q_Z + \sum F_{iZ} &= 0; \\ \sum M_X &= 0; & M_{кр} + \sum M_X(F_i) &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_Y = 0; & & M_{3\Gamma.Y} + \sum M_Y(F_i) = 0; \\ \sum M_Z = 0; & & M_{3\Gamma.Z} + \sum M_Z(F_i) = 0. \end{aligned}$$

Епюра – це графік, який показує розподіл внутрішніх силових факторів або переміщень уздовж осі стрижня (бруса). **Епюри штрихують лініями, перпендикулярними до осі бруса.**

Правила, які застосовують при побудові епюр в стрижнях:

Вісь (базу), на якій будують епюру, завжди вибирають так, щоб вона була паралельна, або збігалася з віссю стрижня.

Ординати епюри відкладають перпендикулярно до осі епюри.

Епюри штрихують лініями перпендикулярними до осі (базу).

Для зусиль та моментів вибирають певний масштаб. Ординати відкладають в масштабі. На епюрах проставляють числа, що показують значення характерних ординат, а в полі епюри ставлять знак зусилля, який вписують у коло.

Приклад запису умов рівноваги для плоскої системи сил (рисунок 1.12). Використовуючи метод перетинів, запишемо три рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; & & N + \sum F_{1X} = 0; \\ \sum Y = 0; & & Q + \sum F_{1Y} = 0; \\ \sum M_Y = 0; & & M_{3\Gamma} + \sum M_0(F_1) = 0. \end{aligned}$$

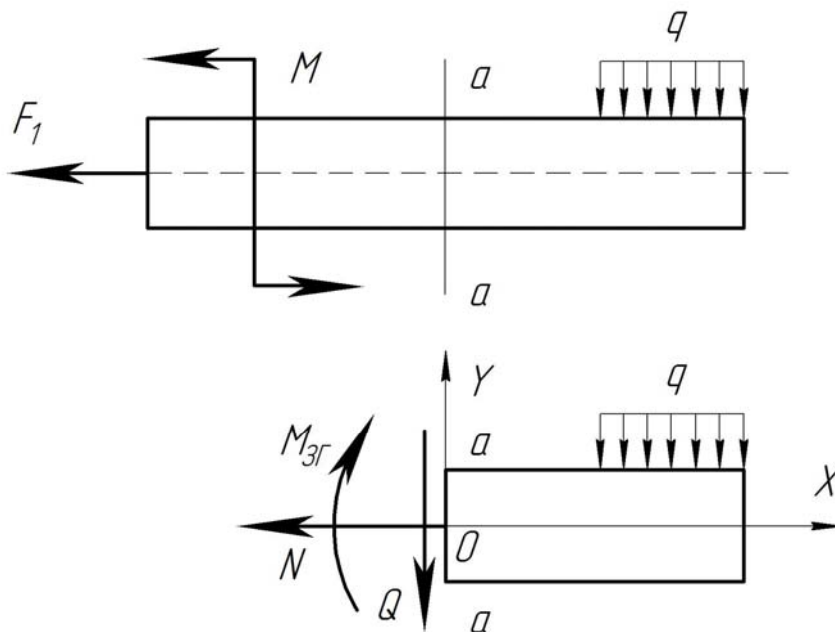


Рисунок 1.12

Напруження. Зв'язок напружень з внутрішніми силовими факторами

Напруження – величина, яка характеризує інтенсивність внутрішніх сил. Повне напруження (рисунок 1.13) визначають за формулою

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A},$$

де ΔR – внутрішня сила, тобто зусилля, прикладене до виділеної площі;
 ΔA – елементарна площа перетину, на якій виникає зусилля ΔR .

Внутрішню силу ΔR можна розкласти на дві складові: одна направлена перпендикулярно до перетину ΔN ; друга лежить у площині перетину ΔQ . Напруження, що виникають у перетині від цих складових, називають **нормальним** і **дотичним**.

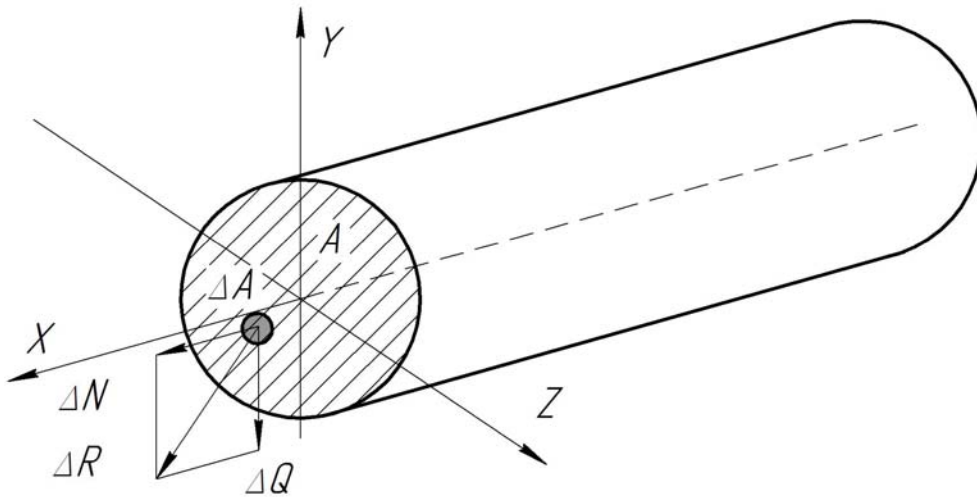


Рисунок 1.13

Дотичне напруження – це інтенсивність дотичних сил у даній точці перетину

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}.$$

Нормальне напруження – це інтенсивність нормальних сил у даній точці перетину

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}.$$

Повне напруження у точці визначають за формулою

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Розмірність напружень $1 \text{ Па} = \text{Н}/\text{м}^2$, $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н}/\text{мм}^2$.

Зв'язок напружень з внутрішніми силовими факторами

Сукупність напружень σ і τ , які діють на різних площадках елементарного кубика dA , створюють напружений стан (рисунок 1.14):

$$\sigma dA = dN; \quad \tau_Y dA = dQ_Y; \quad \tau_Z dA = dQ_Z.$$

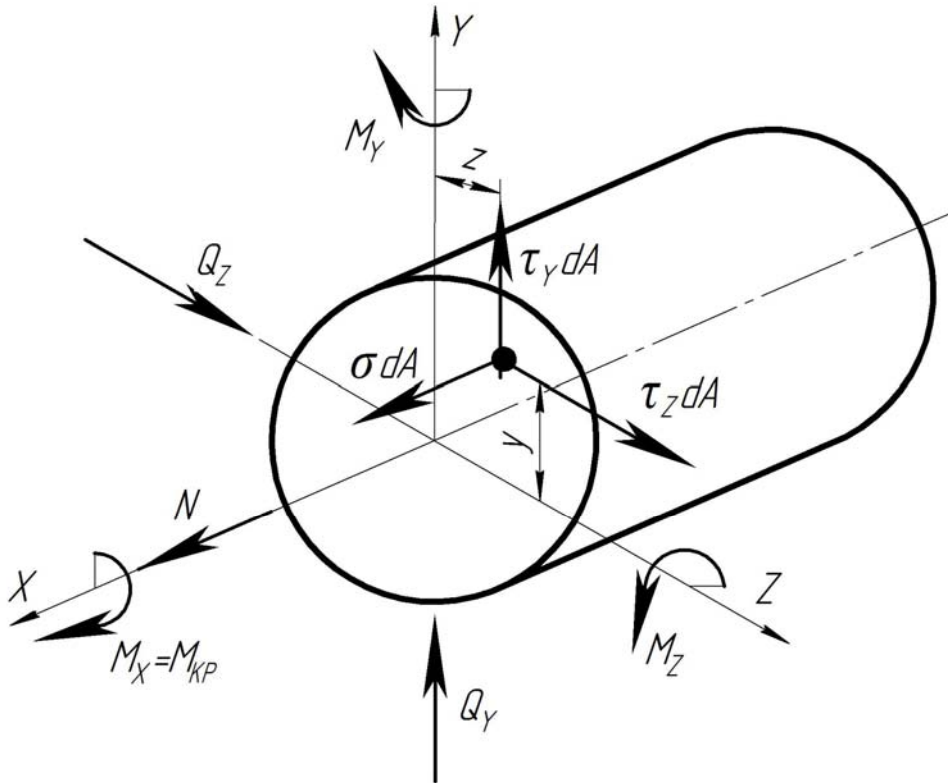


Рисунок 1.14

Нормальні і дотичні напруження безпосередньо пов'язані з внутрішніми силовими факторами, що виникають у перетині:

$$N = \int_A \sigma dA;$$

$$Q_Y = \int_A \tau_Y dA;$$

$$Q_Z = \int_A \tau_Z dA;$$

$$M_{KP} = \int_A (\tau_Y \cdot y - \tau_Y \cdot z) dA;$$

$$M_Y = \int_A \sigma \cdot z dA;$$

$$M_Z = \int_A \sigma \cdot y dA.$$

Основні гіпотези (припущення) про властивості матеріалів конструктивних елементів

В опорі матеріалів використовують ряд допущень (гіпотез), які спрощують розрахунки. Ці гіпотези, підтверджені на практиці, тому їх можна використовувати при розв'язуванні більшості задач.

Опір матеріалів (як і класична або лінійна теорія пружності) заснований на таких **гіпотезах**:

1. Матеріал конструкції є **суцільним**, тобто його властивості не залежать від форми і розмірів тіла і однакові у всіх його точках. (Ця гіпотеза не враховує дискретну структуру, зумовлену молекулярною будовою речовини і т.ін.). Суцільність передбачає відсутність розривів і пустот у процесі деформування.

2. Матеріал конструкції є **однорідним** (усі механічні властивості однакові у будь-якій точці тіла).

3. Матеріал конструкції є **ізотропним**, тобто усі його механічні властивості у всіх напрямках однакові (виняток дерево).

4. Матеріал конструкції має властивість **ідеальної лінійної пружності**, тобто повністю відновлювати свою форму і розміри після зняття навантаження (підкоряється закону Гука). Або деформація матеріалу конструкції в кожній точці прямо пропорційна напруженню у цій точці. Ця гіпотеза вперше сформульована Робертом Гуком (Ця гіпотеза має свої обмеження).

5. **Переміщення точок тіла дуже малі** порівняно з його розмірами. Деформації тіла малі порівняно з одиницею. Ця гіпотеза разом із четвертою дозволяє застосовувати принцип незалежності дії сил.

6. Матеріал конструкції має **початковий напружений стан**. При відсутності зовнішніх навантажень відсутні напруження і деформації (початкові напруження, які виникають при виготовленні конструкції, не враховують).

Під час розв'язування окремих задач застосовують додаткові припущення опору матеріалів.

Принцип незалежності дії сил (принцип накладання або принцип суперпозиції).

Принцип незалежності дії сил (ПНДС) є справедливим за умови, що переміщення точок тіла, яке навантажується зовнішніми силами, є малими порівняно з його розмірами, матеріал тіла працює пружно, всі параметри напружено-деформівного стану (НДС) тіла – переміщення, деформації, внутрішні зусилля, напруження – пов'язані між собою лінійною залежністю.

Згідно з ПНДС – результат одночасної дії на тіло кількох зовнішніх навантажень дорівнює сумі результатів дії кожного з цих навантажень.

Принцип Сен-Венана (принцип локальності ефекту самозрівноважених навантажень)

Сен-Венан у 1855 р. для спрощення розрахунків на міцність запропонував положення, яке в сучасній інженерній практиці використовують у такому формулюванні:

Якщо тіло навантажеться статично еквівалентними системами сил, тобто такими, в яких головний вектор та головний момент однакові, й при цьому розміри зони прикладання навантаження невеликі порівняно з розмірами тіла, то в перерізах, які достатньо віддалені від місць прикладання сил, компоненти напружено-деформованого стану (напруження, деформації, переміщення) мало залежать від способу навантажування.

Інакше кажучи, принцип Сен-Венана або принцип локальності полягає в тому, що на достатній відстані від місця прикладання навантаження конкретний спосіб здійснення цього навантажування можна не враховувати.

Відповідно до цього принципу результат дії самозрівноважених навантажень прикладених до малої ділянки тіл, швидко зникає при віддаленні від цієї ділянки.

Точне дослідження локальних напружень і деформацій навколо зони прикладання навантаження є досить складною задачею. Принцип Сен-Венана дозволяє уникнути розв'язання цієї задачі і отримати прийнятне рішення без детального вивчення локальних особливостей навантажування.

Принцип початкових розмірів

При складанні умов рівноваги реального тіла його вважають абсолютно твердим.

У дійсності при навантажуванні форма і розміри тіла змінюються, тому точки прикладання навантажень і лінії їх дії теж змінюються. Врахування цих змін дає поправку у четвертому-п'ятому знаках чисельного результату, тому цим можна знехтувати.

Якщо відмовитись від однієї з декількох гіпотез, отримаємо дуже складні варіанти. Наприклад, відмова від четвертої гіпотези може привести до теорії пластичності або повзучості, відмова від п'ятої гіпотези – до геометрично нелінійної теорії пружності і т.ін.

Лінійна теорія пружності – найбільш простий варіант механіки твердого деформівного тіла.

Гук Роберт (1635 – 1703)



Гук Роберт (англ. Robert Hooke; 18.07.1635 – 3.03.1703) – англійський натураліст, учений-енциклопедист, який відіграв важливу роль у науковій революції XVII століття.

Роберт Гук став відомим завдяки винайденому ним закону пружності (закон Гука). Також його часто згадують як «батька мікроскопії» – саме Гук увів термін клітина для визначення найменшої частини живого. Гук разом із Робертом Бойлем створив вакуумний насос, що використовувався в експериментах Бойля з газами. Він також був відомим архітектором свого часу, головним помічником Крістофера Рена при відновленні Лондона після великої пожежі 1666 р, як архітектор побудував багато споруд, зокрема, Грінвічську обсерваторію, церкву Вілленської парафії в Мілтон Кисні, Лондонський Собор св. Павла, (купол якого побудований з використанням методу, придуманого Гуком), а також зробив значний внесок у містобудування, запропонувавши нову схему планування вулиць при відновленні Лондона. Гук збудував один із перших григоріанських телескопів, спостерігав за обертаннями Марса та Юпітера і, спираючись на свої досліди викопних решток, був прихильником теорії біологічної еволюції. На основі досліджень заломлення світла, розробив хвильову теорію світла. Гук був першим, хто припустив, що тіла розширюються при нагріванні і що повітря складається із дрібних частинок, які розділені порівняно великими відстанями.

Відкриття. Відкриття пропорційності між деформаціями і напруженнями, що їх спричиняють (закон Гука). В наш час цей закон Гука в узагальненому вигляді є основою математичної теорії пружності.

Правильне формулювання закону всесвітнього тяжіння (пріоритет Гука оспорювався Ньютоном).

Відкриття кольорів тонких пластинок (тобто інтерференції світла).

Ідея про хвилеподібне розповсюдження світла (більш-менш одночасно з Гюйгенсом).

Гіпотеза про поперечний характер світлових хвиль.

Відкриття в акустиці, наприклад, демонстрація того, що висота звуку визначається частотою коливань.

Теоретичне положення про сутність тепла як рухів частинок тіла.

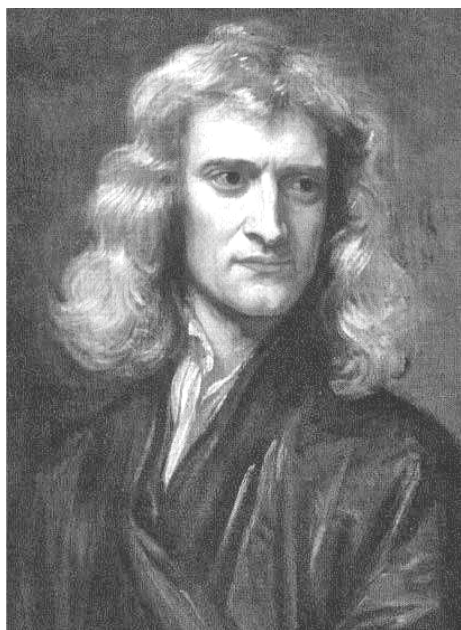
Відкриття постійності температури танення льоду і кипіння води.

Закон Бойля (особистий внесок Гука, Бойля і його учня Річарда Таунлі (Richard Townley) не з'ясовані).

Жива клітина (за допомогою вдосконаленого ним мікроскопа, Гуку ж належить сам термін «клітина» – англ. cell).

Безпосередній доказ обертання Землі навколо Сонця.

Ньютон Ісаак (1643 – 1727)



Сер Ісаак Нью́тон (англ. Sir Isaac Newton; 4.01.1643 – 31.03.1727) – англійський науковець, який заклав основи сучасного природознавства, творець класичної фізики та один із засновників числення нескінченно малих величин. У 1661 році Ньютон успішно закінчив школу і продовжив освіту в оплоті англіканської віри й ученості – Кембриджському університеті, після закінчення якого працював у ньому професором математики. Ньютон був президентом Королівського наукового товариства і членом парламенту, служив уряду Королівства Англії з 1696 по 1727 рік як директор Королівського монетного двору, заклав принципи, які на сторіччя вперед забезпечили валютну стабільність та фінансову могутність Англії,

перетворили Лондон на фінансовий центр світу. Ньютон сформулював основні закони класичної механіки, відкрив закон всесвітнього тяжіння, дисперсію світла, розвив корпускулярну теорію світла, розробив (незалежно від Готфріда Лейбніца) диференціальне та інтегральне числення.

Узагальнивши результати досліджень своїх попередників і своїх власних у галузі механіки, Ньютон написав фундаментальну працю «Математичні начала натуральної філософії», видану 1687 року. Книга містила основні поняття й аксіоматику класичної механіки, зокрема: «маса» (якій Ньютон надавав великого значення як основному поняттю у механічних процесах), «кількість руху», «сила», «прискорення», відцентрова сила і три закони руху (закони Ньютона): закон інерції, закон пропорційності сили прискоренню і закон дії та протидії. У цій праці вміщений відкритий ним закон всесвітнього тяжіння, виходячи з якого, Ньютон пояснив рух небесних тіл (планет, їхніх супутників, комет). Відкриття цього закону знаменувало перехід від кінематичного опису Сонячної системи до динамічного пояснення явищ і кінцево затвердило перемогу вчення Коперніка. Ньютон показав, що з закону всесвітнього тяжіння випливають три закони Кеплера. Ньютон пояснив особливості руху Місяця, явище прецесії; розвинув теорію форми Земної кулі, відзначивши, що вона повинна бути стиснута на полюсах, теорію припливів та відпливів; розглянув проблему створення штучного супутника Землі тощо.

1704 року вийшла в світ його монографія «Оптика», що визначила розвиток цієї науки до початку ХІХ століття.

1707 року вийшов збірник математичних робіт Ньютона «Універсальна арифметика». Наведені у цій книзі числові методи ознаменували народження нової перспективної дисципліни – числового аналізу.

На честь Ісаака Ньютона в Міжнародній системі одиниць названо одиницю сили – **Ньютон**.

Паскаль Блез (1623 – 1662)



Блез Паскаль (фр. Blaise Pascal; (9.06.1623-19.08.1662) – французький математик, фізик, винахідник, письменник і католицький богослов. Він був вундеркіндом, якого навчав батько, збирач податків у Руані.

У 1640 році виходить перший друкований твір Паскаля – «Есе про конічні перетини», результат дослідження робіт Декарта. У цей твір автор включив теореми, три визначення, три леми і вказав розділи запланованої праці про конічні перетини. Третя лема з «Досвіду...» є теоремою Паскаля: якщо вершини шестикутника лежать на

певному конічному перерізі, то три точки перетину прямих, що містять протилежні сторони, лежать на одній прямій. Цей результат і 400 наслідків з нього Паскаль виклав у «Повній праці про конічні перетини», про завершення якої Паскаль повідомив п'ятнадцять років по тому. Зараз ця праця відносилася б до проективної геометрії. «Повна праця...» так і не була опублікована.

У 1642 році (у 19 років) Паскаль почав створення своєї лічильної машини «Паскаліни». Машина Паскаля виглядала як скринька, наповнена численними, пов'язаними одна з одною шестернями (зубчастими передачами). Числа, які потрібно було додати або відняти, вводили відповідним поворотом коліщат, принцип роботи ґрунтувався на рахуванні обертів. До 1652 року під його наглядом було створено близько 50 варіантів «паскаліни». У 1649 році він отримав королівський привілей на лічильну машину. Винайдений Паскалем принцип пов'язаних коліщат майже на три століття став основою створення більшості арифмометрів.

Розвиваючи результати досліджень Стевіна і Галілея в сфері гідростатики у своєму «Трактаті про рівновагу рідин», Паскаль підійшов до встановлення закону розподілу тиску в рідинах. Він сформулював ідею гідравлічного преса: «посудина, заповнена водою, є новим принципом механіки і новою машиною для збільшення сил до бажаного ступеня, тому що за допомогою цього засобу людина зможе підняти будь-який запропонований їй тягар» і зазначає, що принцип його дії підпорядковується тому ж закону, що і принцип дії важеля, блоку, нескінченного гвинта. Почавши з простого повторення досліду Торрічеллі, Паскаль спростував одну з основних аксіом старої фізики і встановив основний закон гідростатики. Паскаль підтвердив припущення Еванджеліста Торрічеллі про існування атмосферного тиску.

Розроблена Паскалем теорія ймовірностей – це його найважливіший внесок у математику. Спочатку застосована до азартних ігор, сьогодні вона надзвичайно важлива в економіці. Роботи Паскаля стоять в основі створення математичних розділів диференціального та інтегрального числення та теорії ймовірностей.

На честь Блеза Паскаля в Міжнародній системі одиниць названо одиницю тиску і напруження – **Паскаль**.

Сен-Венан Жан-Клод Барре (1797 – 1886)



Сен-Венан Адемар Жан-Клод Барре (фр. Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant; 23.08.1797 р. – січень 1886 р.) – французький механік і математик, член Французької АН (1868 р.), зробив великий внесок у розвиток теорії пружності (ввів так званий напівзворотний метод розв'язання задач у теорії пружності) і побудував загальну теорію кручення і згину призматичних стрижнів (1855 р.), записав рівняння для нестационарного одновимірного руху рідини, відомі як рівняння Сен-Венана, одні з фундаментальних у сучасній гідравліці. Також його іменем названий принцип пом'якшення граничних

умов – принцип Сен-Венана, теорема Сен-Венана і умова сумісності Сен-Венана.

У вступі до свого курсу опору матеріалів він обговорює гіпотези, що стосуються молекулярної будови твердих тіл і сил міжмолекулярної взаємодії. Користуючись цією гіпотезою, він вводить поняття напруження. Він веде мову про дотичне напруження і деформацію зсуву і показує, що розтягування в одному напрямі у поєднанні зі стиском, який дорівнює перпендикулярному напрямі еквівалентній чистому зсуву. Звертаючись до згину балки, Сен-Венан зосереджує увагу на дотичних напруженнях; не маючи даних про те, як вони розподілені у поперечному перерізі, він приймає гіпотезу рівномірного їх розподілу. Поєднуючи це дотичне напруження з напруженням розтягу-стиску у поздовжніх волокнах балки, він визначає головне напруження. При виборі безпечних розмірів балок, він вважає, що критерієм для призначення допустимих напружень потрібно приймати найбільшу деформацію.

До теми пластичності його увага була привернута експериментальними дослідженнями Треска (Tresca) з пластичної течії металів під великим тиском. У той час це було абсолютно новим полем дослідження, і Сен-Венан перший сформулював основні рівняння теорії пластичності і користувався ними для розв'язання деяких практичних задач, заклавши цим основи теорії пластичності ідеально пластичного тіла.

Різноманітність його праць можна оцінити хоч би вже за тим, що у книзі Тодгента і Пірсона «Історія теорії пружності» («A history of the theory of elasticity»), що складається з двох томів (т. I, 1886 р., т. II, 1893 р.), короткий виклад робіт Сен-Венана займає понад 300 сторінок. Він також видав лекції Нав'є «Resume des Leçons» (1864 р.) зі своїми примітками і доповненнями, що займають значну частину цієї книги (850 стор.). Сен-Венан переклав (1883 р.) французькою мовою книгу Клебша (Clebsch) «Теорія пружності твердих тіл» («Theorie de l'elasticite des corps solides»), збагативши її своїми доповненнями, від чого вона у обсязі зросла втричі. Суттєвими і важливим є також його роботи з гідравліки та гідродинаміки (витікання газів з отворів і рух рідин у відкритих руслах), про поширення хвиль при зіткненні пружних стрижнів, про тертя у рідинах та ін.

2. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ І СТИСК ПРЯМОГО СТРИЖНЯ

Центральний розтяг і стиск. Побудова епюр нормальних сил

Центральний (осьовий) розтяг або стиск виникає від сил, прикладених уздовж центральної осі бруса. Напружений стан, викликаний такими силами, називають простим або лінійним.

Розтяг (стиск) – це такий вид деформації (вид опору), при якому в поперечних перетинах бруса виникає тільки **поздовжня (осьова, нормальна) сила** – N або N_X , спрямована вздовж осі бруса і прикладена в центрі ваги перетину. Визначають її з умови рівноваги, використовуючи **метод перетинів**, починаючи з вільного кінця стрижня.

Поздовжня сила у довільному поперечному перетині бруса дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на його поздовжню вісь OX усіх зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини.

При розтягу поздовжня сила направлена від перетину і вважається **додатною**, при стиску вона спрямована до перетину і вважається **від'ємною**.

Для оцінювання навантаженості бруса, у випадку, коли поздовжні сили у різних поперечних перетинах бруса неоднакові, будують епюри. При побудові епюр брус розділяють на ділянки. Епюру будують для того, щоб використати її при розрахунку на міцність. Вона дає можливість визначити найбільше значення поздовжньої сили і перетин, у якому вона виникає, тобто небезпечний (щодо міцності) перетин.

Приклад. Побудувати епюру нормальних сил для бруса зображеного на рисунок 2.1а (власною вагою бруса знехтувати).

Розбиваємо брус на ділянки. Границі ділянок: початок та закріплення бруса; перетини, в яких прикладені зосередженні сили.

Використовуючи метод перетинів, визначаємо значення нормальних сил на кожній ділянці, починаючи з вільного кінця.

Нормальна сила – це алгебраїчна сума всіх зовнішніх сил з одного боку перетину. Запишемо їх значення (рисунок 2.1б) на кожній з ділянок, розглядаючи стрижень з вільного кінця:

$$N_1 = F_1 = 20 \text{ кН};$$

$$N_2 = F_1 - F_2 = 20 - 50 = -30 \text{ кН};$$

$$N_3 = F_1 - F_2 + F_3 = -30 + 40 = 10 \text{ кН}.$$

За отриманими результатами будують епюру нормальних сил N (рисунок 2.1в).

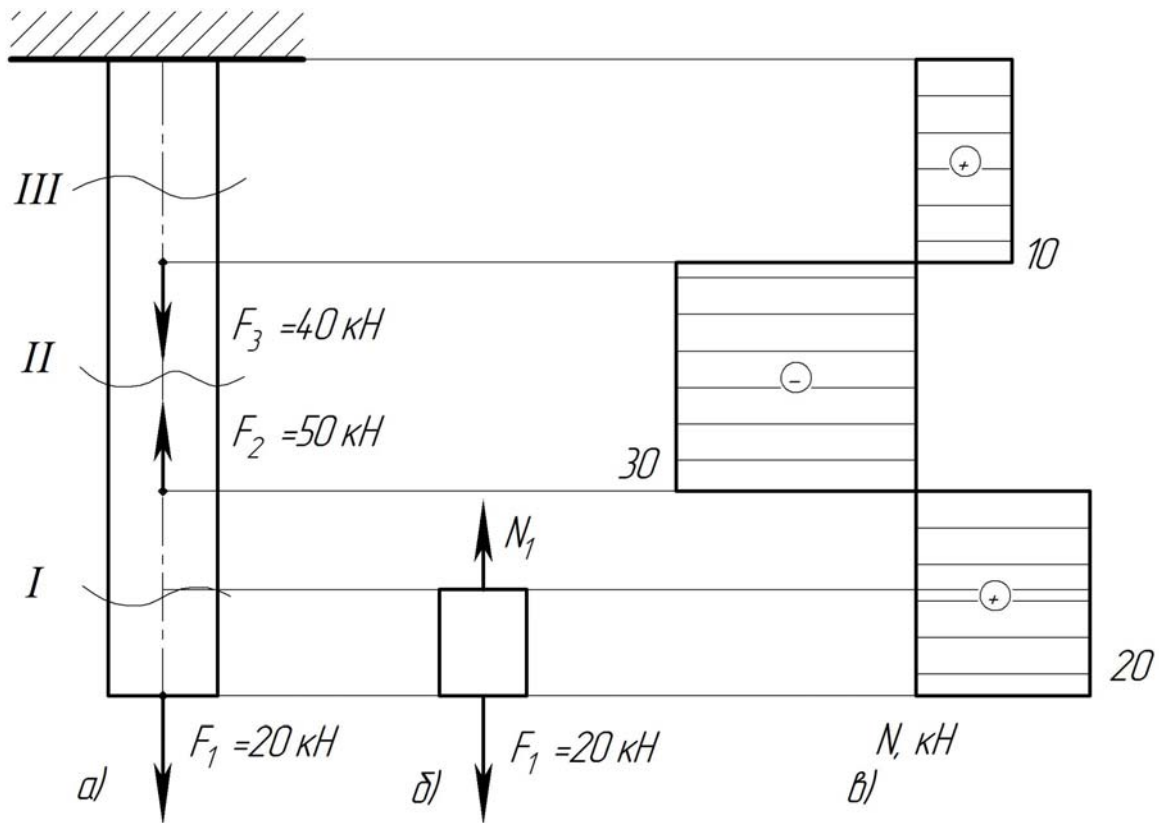


Рисунок 2.1

Напруження у поперечних перетинах стрижня

При розтягу (стиску) бруса у його поперечних перетинах виникають тільки **нормальні напруження**.

При розтягу (стиску) бруса нормальні напруження на його поперечному перетині **розподілені рівномірно**.

Між поздовжньою (нормальною) силою N і нормальним напруженням σ (рисунок 2.2) існує залежність

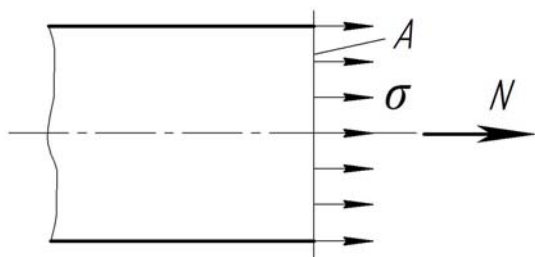


Рисунок 2.2

$$N = \int_A \sigma \cdot dA.$$

Використовуючи принцип Сен-Венана, вважаємо, що $\sigma = const$, тоді

$$N = \sigma \cdot A,$$

Звідки

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Нормальні напруження додатні, якщо розтягують матеріал стрижня, від'ємні, – якщо стискають.

Якщо нормальні напруження у різних поперечних перетинах бруса неоднакові, доцільно показувати закон їх зміни на довжині бруса у вигляді графіка – епюри нормальних напружень.

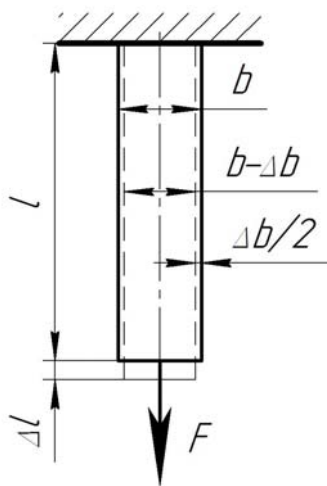
Дотичні напруження додатні, якщо вектор τ обходить елементи матеріалу за годинниковою стрілкою.

Поздовжні й поперечні деформації

Розглянемо деформацію стрижня, навантаженого осьовою силою F (рисунок 2.3):

Δl – повне поздовжнє видовження стрижня (абсолютна поздовжня деформація, лінійне видовження, лінійна деформація);

Δb – абсолютна поперечна деформація (лінійна деформація);



ε – відносна поздовжня деформація, $\varepsilon = \Delta l/l$;

ε' – відносна поперечна деформація, $\varepsilon' = \Delta b/b$.

До певної величини сили деформації пружного тіла пропорційні силі. При розтягу (стиску) існує лінійна залежність між видовженням стрижня і поздовжньою силою.

Експериментально доведено, що напруження у матеріалі стрижня залежать від деформації й механічних характеристик матеріалу. Описується ця залежність як **закон Гука при розтягу (стиску)**

Рисунок 2.3

$$\sigma = \varepsilon \cdot E; \quad \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

де E – модуль пружності (модуль пружності I-го роду, модуль Юнга, модуль нормальної пружності, модуль поздовжньої пружності).

Експериментально встановлено, що при простому розтягу або стиску відношення поперечної деформації до поздовжньої величина постійна для даного матеріалу. Це відношення, взяте за абсолютним значенням, називають коефіцієнтом поперечної деформації або **коефіцієнтом Пуассона**

$$\mu = |\varepsilon'/\varepsilon|.$$

E , μ – механічні характеристики матеріалу, визначають його пружні властивості. Для сталі $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

Закон Гука справедливий лише до певної величини напруженого стану матеріалу, яке називають **границею пропорційності** даного матеріалу.

Діаграма розтягу пластичних матеріалів (сталі)

Механічні характеристики матеріалів, тобто величини, які визначають їх міцність, пластичність, а також пружні постійні E та μ , необхідні інженеру-конструктору для вибору матеріалу деталі та її розрахунку на міцність і жорсткість. Ці характеристики отримують експериментально. Для цього використовують лабораторне обладнання, на якому до взірця (рисунок 2.4б) прикладають статичне навантаження на розтяг (стиск) і заміряють сили й деформації. Щоб виключити вплив абсолютних розмірів досліджуваного взірця, будують так звану умовну діаграму розтягу в координатах: відносьне видовження ε , нормальне напруження σ . **Сталі однаково сприймають навантаження розтягу і стиску**, тому діаграма стиску ідентична, у дзеркальному відображенні, діаграмі розтягу для сталі тієї ж марки.

Для маловуглецевої сталі діаграма розтягу (стиску) зображена на рисунку 2.4а.

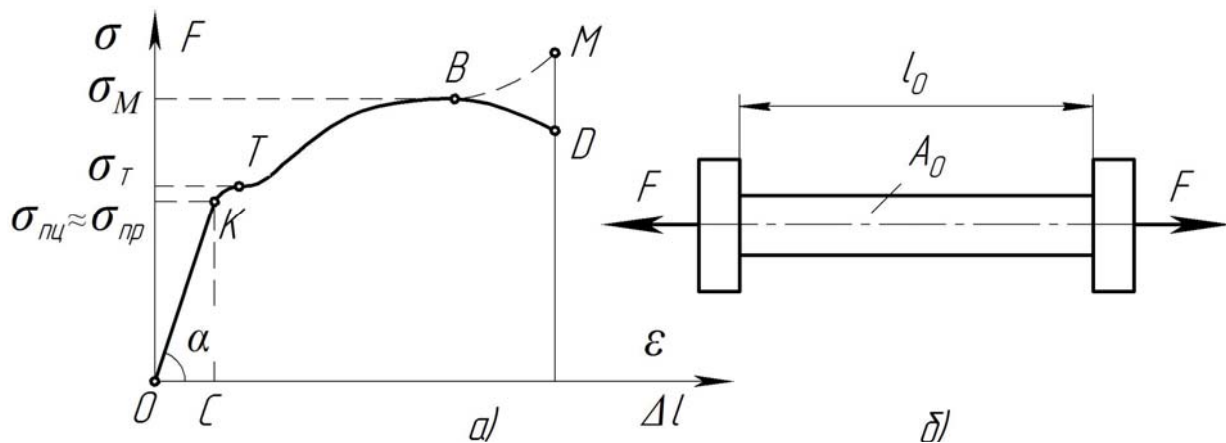


Рисунок 2.4

Позначення на діаграмі такі:

$\sigma_{нц}$ – **границя пропорційності**, на даній ділянці деформація пропорційна навантаженню, найбільше напруження, при досягненні якого справедливий закон Гука,

$$\sigma_{нц} = \frac{F_{нц}}{A_0};$$

σ_{np} – **границя пружності**, до цього напруження матеріал зберігає пружні властивості (у збірці не виникає залишкових деформацій при знятті навантаження),

$$\sigma_{np} = \frac{F_{np}}{A_0};$$

σ_T – **границя текучості** – напруження, при якому відбувається ріст пластичних деформацій збірці при постійному навантаженні, це – основна механічна характеристика для оцінювання міцності пластичних матеріалів (сталей),

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0};$$

σ_M – **границя міцності** – напруження, при якому відбувається руйнування матеріалу збірці, тобто умовне напруження, що відповідає найбільшому навантаженню, яке витримує збірець до руйнування,

$$\sigma_M = \frac{F_{max}}{A_0}.$$

Тут A_0 – початкова площа поперечного перетину зразка, що піддається розтягу; F_{nc} , F_{np} , F_T – зростання величини сили розтягу, F_{max} – максимальна сила навантаження без врахування звуження перетину.

На ділянці ОК діаграми розтягу (див. рис. 2.4а) стверджується закон Гука $E = \sigma/\varepsilon$.

Діаграма розтягу-стиску крихких матеріалів (чавуни)

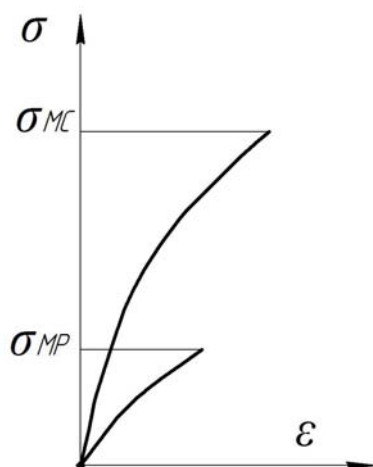


Рисунок 2.5

Крихкі матеріали (чавуни, бетон, цегла) добре сприймають навантаження стиску і значно гірше навантаження розтягу. На рисунку 2.5 зображено діаграми розтягу і стиску крихкого матеріалу. Так як на діаграмах розтягу-стиску крихких матеріалів відсутні прямолінійні ділянки, то закон Гука для визначення лінійних деформацій Δl набуває приблизних значень.

Для крихких матеріалів характерні лише напруження руйнування:

σ_{MC} – границя міцності на стиск;

σ_{MP} – границя міцності на розтяг.

Потенціальна енергія деформацій

При статичному розтягу стрижня (взірця) в межах застосування закону Гука сила F поступово збільшується від нуля до якогось значення, взірець деформується на величину Δl (див. рис. 2.3) і при цьому здійснює роботу W . Ця робота акумулюється у деформованому взірці у вигляді потенціальної енергії деформації, тобто $W=U$.

Якщо діаграма розтягу (див. рис. 2.4а) побудована в координатах (F , Δl), то робота рівна площі трикутника OSK :

$$W = U = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta l,$$

де $\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$; $F = N$.

Тоді

$$W = U = \frac{F^2 \cdot l}{2F \cdot A} = \frac{\sigma^2 \cdot A \cdot l}{2E} = \frac{\sigma^2 \cdot V}{2E},$$

де F – сила, що розтягує взірець, $F = \sigma \cdot A$;

V – об'єм тіла, тобто взірця, $V = A \cdot l$;

A – площа поперечного перетину взірця.

Питома потенціальна енергія – це енергія деформації, яка припадає на одиницю об'єму

$$U = \frac{W}{V} = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Допустимі напруження. Розрахунок на міцність

В опорі матеріалів розрізняють три види нормальних (і дотичних) напружень: **робочі, граничні, допустимі**.

Робочі (фактичні) напруження – це ті, що дійсно мають місце в елементі конструкції і визначаються розрахунками чи експериментально.

Граничні напруження – це ті, при яких матеріал руйнується, або в ньому виникають помітні залишкові деформації.

Для забезпечення міцності деталей необхідно, щоб напруження, які виникли у процесі їх експлуатації, були меншими за граничні. Але якщо робочі напруження дуже близькі до граничних (хоча й менші за них), то міцність деталі гарантувати не можна. Тому **при розрахунках на міцність робочі напруження порівнюють не з граничними, а з допустимими**.

Допустимі напруження – це такі, при яких гарантована безпечна робота деталі. Позначають їх $[\sigma]$ чи $[\tau]$ і визначають як деяку частину від граничних напружень, щоб гарантувати запас міцності:

а) для пластичних матеріалів (сталі)

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n},$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження на розтяг і стиск;

n – коефіцієнт запасу міцності;

б) для крихких матеріалів (чавуни)

$$[\sigma]_P = \frac{\sigma_{MP}}{n}; \quad [\sigma]_C = \frac{\sigma_{MC}}{n},$$

де $[\sigma]_P$ – допустиме напруження на розтяг;

σ_{MP} – границя міцності на розтяг;

$[\sigma]_C$ – допустиме напруження на стиск;

σ_{MC} – границя міцності на стиск.

Коефіцієнт запасу міцності для пластичних матеріалів $n = 1,2 \dots 2,5$;
для крихких матеріалів $n = 2 \dots 5$.

Умова міцності при розтягу-стиску

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

При розрахунках деталей на міцність основними є три види задач.

1. **Проектний розрахунок**, за яким визначають розміри поперечного перетину

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]},$$

де N_{\max} – максимальне значення поздовжньої сили, беруть з епюри N .

2. **Перевірний розрахунок**, за яким визначають робочі (фактичні) напруження і порівнюють з допустимим

$$\sigma = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma].$$

3. **Визначення допустимих навантажень**

$$[N] \leq [\sigma] \cdot A.$$

Юнг Томас (1773 – 1829)



Томас Юнг (англ. Thomas Young; 13.06.1773 – 10.05.1829) – британський учений, який зробив помітний внесок у галузях світла, механіки твердого тіла, енергії, фізіології, мови, музичної гармонії та єгиптології. Він «зробив ряд оригінальних і глибоких інновацій» у розшифруванні єгипетських ієрогліфів (Розеттського каменю).

Юнга називають «останньою людиною, яка все знала».

На думку Юнга, з багатьох його досягнень найважливішим було створення хвильової теорії світла. Для цього йому довелося подолати столітню думку, висловлену в поважній «Оптиці» Ньютона, що світло є частинкою. Тим не менш, на початку 19 століття Юнг висунув низку теоретичних аргументів на підтримку хвильової теорії світла.

Юнг описав у 1807 році характеристику пружності, яка стала відомою як модуль Юнга, позначений як E , а далі описав її у своєму курсі лекцій з натуральної філософії та механічних мистецтв.

Модуль Юнга поєднує напруження (тиск) в тілі і пов'язані з ним деформацію (зміна довжини як відношення до початкової довжини); тобто напруження дорівнює E , що множиться на деформацію для одновісного навантаженого зразка. Модуль Юнга – це властивість матеріалу. Модуль Юнга дозволив вперше визначити деформацію за відомими напруженнями (і навпаки). До відкриття Юнга інженери повинні були використовувати співвідношення Гука $F = k \cdot x$ для визначення деформації (x) тіла, що піддається відомому навантаженню (F), де константа (k) є функцією як геометрії, так і матеріалу. Знаходження k вимагає фізичного тестування для будь-якого нового матеріалу, оскільки співвідношення $F = k \cdot x$ є функцією як геометрії, так і матеріалу. Модуль Юнга залежить лише від матеріалу, а не від його геометрії, що дозволило здійснити революцію в інженерних розрахунках.

Юнга також називають засновником фізіологічної оптики. У 1793 році він пояснив режим, при якому око пристосовується до зору на різних відстанях, залежно від зміни кривизни кришталика; у 1801 році він першим описав астигматизм; і в своїх лекціях він представив гіпотезу, згодом розроблену Германом фон Гельмгольцом (теорія Юнга-Гельмгольца), що сприйняття кольору залежить від наявності в сітківці трьох видів нервових волокон. Це передвіщало сучасне розуміння кольорового зору, зокрема відкриття того, що око дійсно має три кольорові рецептори, чутливі до різних діапазонів довжин хвиль.

У 1804 році Юнг розробив теорію капілярних явищ за принципом поверхневого натягу.

Пуассон Сімеон Дені (1781 – 1840)



Барон Сімеон Дені Пуассон (фр. Siméon-Denis Poisson; 21.06.1781 – 25.04.1840) – французький математик, інженер і фізик, який зробив багато наукових досягнень.

Пуассон народився в Пітів'є, район Луаре у Франції, в сім'ї Сімеона Пуассона, офіцера французької армії.

У 1798 році він вступив до Політехнічної школи в Парижі, як найкращий на своєму курсі, почав привертати увагу професорів школи, які надали йому можливість самостійно приймати рішення щодо того, що йому вивчати. У 1800 р., менш ніж через два роки після навчання опублікував два мемуари, один з них про кількість інтегралів скінченно-різницевого рівняння. Останнє було розглянуто Сильвестром-Франсуа Лакруа та Адрієном-Марі Лежандром, які рекомендували опублікувати його в престижному науковому журналі «Recueil des savants étrangers», що було безпрецедентною честю для вісімнадцятирічного юнака. Цей успіх відразу забезпечив Пуассону входження в наукові кола. Жозеф Луї **Лагранж**, чиї лекції з теорії функцій він відвідував у Політехнічній школі, рано визнав його талант і став його другом. Тим часом П'єр-Сімон **Лаплас**, по стопах якого пішов Пуассон, вважав його майже своїм сином.

Досягнення Пуассона в науковій діяльності досить різноманітні. Кількість наукових праць перевищує 300 публікацій. Вони охоплюють: математику, математичну фізику, теоретичну і небесну механіку.

У механіці твердого деформованого тіла використовують значення коефіцієнта Пуансона – це зміна поперечних розмірів ізотропного тіла при деформації розтягу. Коефіцієнт Пуансона є безрозмірною характеристикою матеріалу.

Застосування математики до фізики можна віднести до найбільших заслуг Пуассона перед наукою. Його мемуари з теорії електрики та магнетизму фактично створили нову галузь математичної фізики.

Наступним досягнення Пуассона є мемуари з небесної механіки, зробивши важливий прогрес у теорії планет.

Задача № 1
Розрахунок на міцність і визначення переміщень
при розтягу й стиску

Для заданого прямолінійного ступінчастого сталюого стрижня (рисунок до задачі № 1, таблиця до задачі № 1) визначити розміри поперечного перетину на всіх ділянках за умови, що форма перетину – круг; виконати ескіз стрижня; побудувати епюри робочих (фактичних) нормальних напружень і лінійних переміщень стрижня, якщо $l = 8$ м; $a = k \cdot l$; $b = m \cdot l$; матеріал стрижня – сталь; $[\sigma] = 160$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

План розв’язування задачі:

1. Виконати розрахункову схему.
2. Побудувати епюру поздовжніх сил.
3. Визначити, з умови міцності, діаметри стрижня на всіх ділянках. Отримані величини заокруглити до розміру, кратного 2 або 5. Виконати ескіз стрижня.
4. Обчислити на кожній ділянці робочі (фактичні) нормальні напруження за модулем σ_p і побудувати епюру робочих (фактичних) нормальних напружень.
5. Визначити лінійні переміщення окремих ступенів і всього стрижня.
6. Побудувати епюру розподілу переміщень на довжині бруса.

Таблиця до задачі № 1

№ з/п	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	k	m
1	25	30	50	0,2	0,5
2	10	40	20	0,4	0,7
3	20	10	60	0,1	0,4
4	15	20	40	0,3	0,6
5	30	25	10	0,25	0,65
6	25	50	25	0,35	0,75
7	40	15	30	0,45	0,8
8	20	30	50	0,15	0,45
9	50	20	40	0,2	0,8
0	60	10	20	0,4	0,8

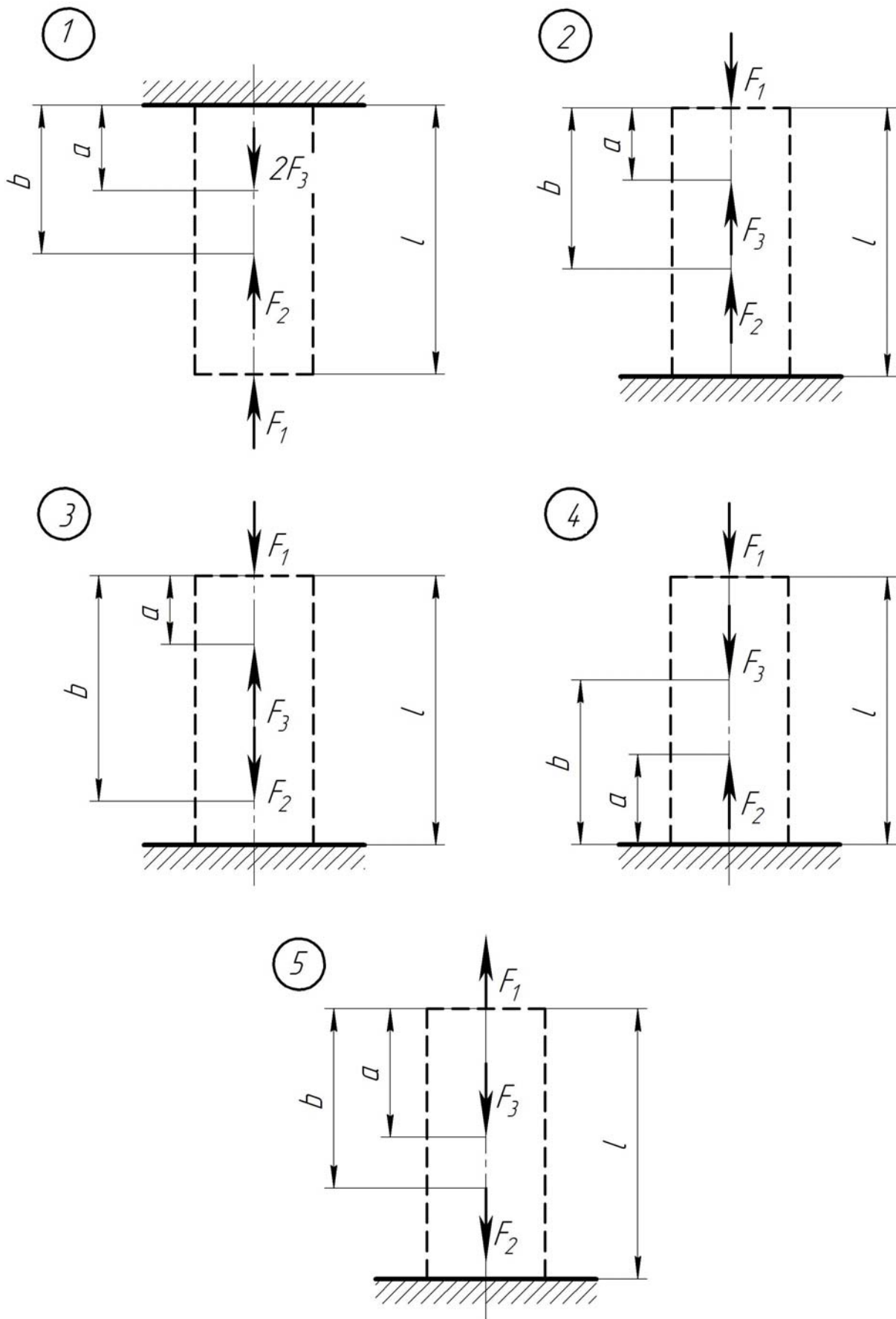
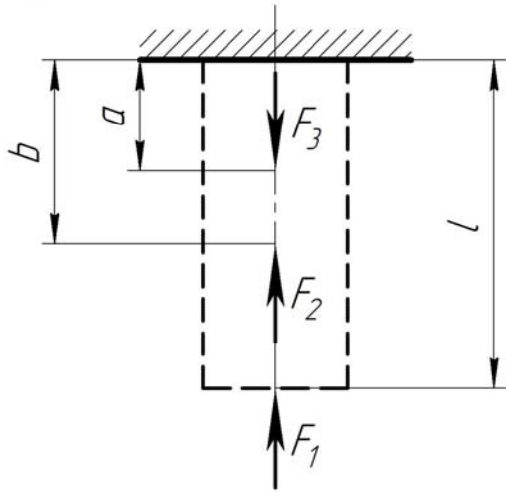
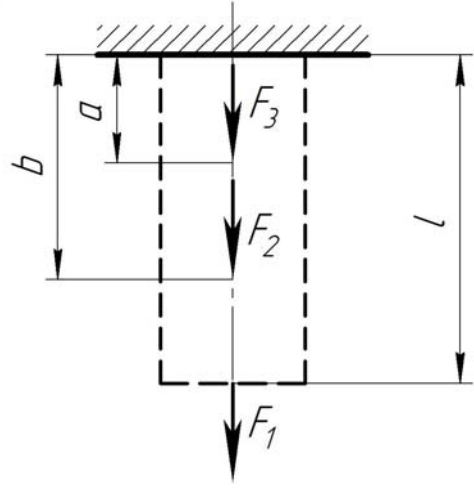


Рисунок до задачі № 1

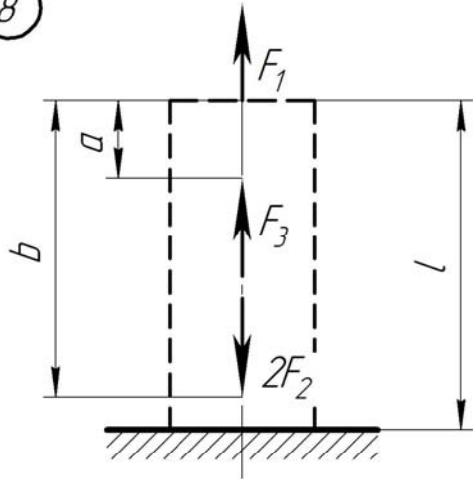
6



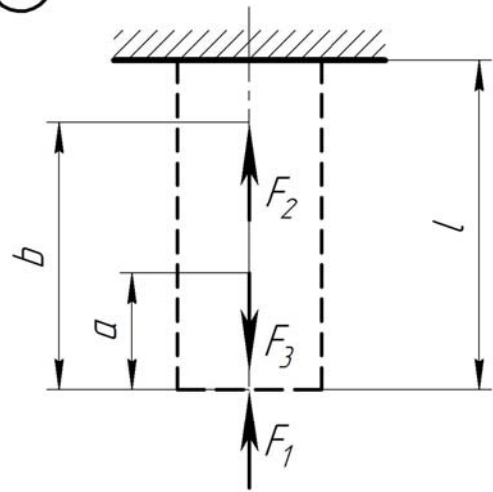
7



8



9



0

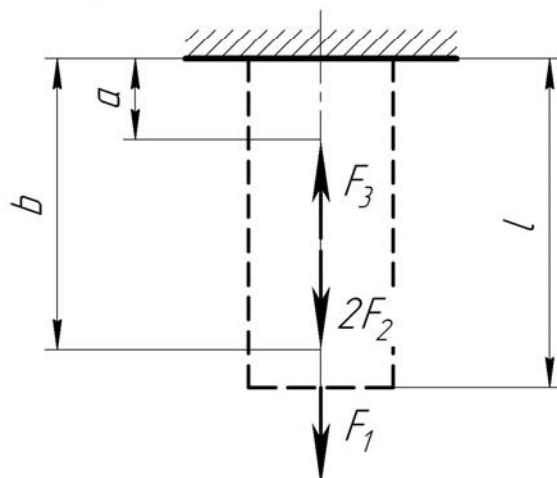


Рисунок до задачі № 1 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі № 1
Розрахунок на міцність і визначення переміщень
при розтягу й стиску

Для заданого прямолінійного ступінчастого сталюого стрижня (рисунок 2.6а) визначити розміри поперечного перетину на всіх ділянках за умови, що форма перетину – круг; виконати ескіз стрижня; побудувати епюри робочих (фактичних) нормальних напружень і поздовжніх лінійних переміщень стрижня, якщо $l = 8$ м; матеріал стрижня – сталь; $[\sigma] = 160$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Розв'язування

Розбиваємо стрижень на три ділянки (рисунок 2.6а). Для кожної з ділянок визначаємо значення поздовжніх (нормальних) сил:

$$N_1 = F_1 = 10 \text{ кН};$$

$$N_2 = F_1 + F_2 = 10 + 20 = 30 \text{ кН};$$

$$N_3 = F_1 + F_2 - 2F_3 = 10 + 20 - 2 \cdot 40 = -50 \text{ кН}.$$

Будуємо епюру поздовжніх сил, N (рисунок 2.6б).

З умови міцності на розтяг-стиск

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

визначаємо необхідні площі поперечних перетинів стрижня на кожній ділянці:

$$A_1 \geq \frac{|N_1|}{[\sigma]} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{160} = 0,625 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_2 \geq \frac{|N_2|}{[\sigma]} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{160} = 1,875 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_3 \geq \frac{|N_3|}{[\sigma]} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{160} = 3,125 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Діаметри стрижня визначаємо за формулою

$$A_i = \frac{\pi \cdot d_i^2}{4}, \quad \text{де } i = 1, 2, 3, 4,$$

звідки

$$d_i \geq \sqrt{\frac{4 A_i}{\pi}}.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 62,5}{3,14}} = 8,92 \text{ мм};$$

$$d_2 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 187,5}{3,14}} = 15,45 \text{ мм};$$

$$d_3 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 312,5}{3,14}} = 19,95 \text{ мм}.$$

Отримані результати заокруглюємо: $d_{\partial 1} = 10 \text{ мм}$, $d_{\partial 2} = 16 \text{ мм}$, $d_{\partial 3} = 20 \text{ мм}$. Виконуємо ескіз стрижня (рисунок 2.6в).

Визначаємо дійсні площі поперечних перетинів стрижня на кожній ділянці з урахуванням заокруглення їх діаметрів за формулою

$$A_{\partial i} = \frac{\pi \cdot d_{\partial i}^2}{4}.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$A_{\partial 1} = \frac{3,14 \cdot 10^2}{4} = 78,5 \text{ мм}^2;$$

$$A_{\partial 2} = \frac{3,14 \cdot 16^2}{4} = 201 \text{ мм}^2;$$

$$A_{\partial 3} = \frac{3,14 \cdot 20^2}{4} = 314 \text{ мм}^2.$$

Визначаємо робочі (фактичні) нормальні напруження за модулем, для оцінювання міцності матеріалу стрижня, користуючись формулою

$$\sigma_{Pi} = \frac{|N_i|}{A_{\partial i}}.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$\sigma_{P1} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{78,5 \cdot 10^{-6}} = 127 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{P2} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{201 \cdot 10^{-6}} = 149 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{P3} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{314 \cdot 10^{-6}} = 159 \text{ МПа}.$$

Будуємо епюру робочих (фактичних) нормальних напружень σ_P за модулем (рисунок 2.6г).

Поздовжні (лінійні) деформації кожної ділянки стрижня визначаємо за формулою

$$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot L_i}{E \cdot A_{\partial i}},$$

де L_i – довжина ділянки стрижня, на якій діє поздовжня сила N_i .

У числовому вигляді

$$\Delta l_1 = \frac{10 \cdot 2,4}{2 \cdot 10^8 \cdot 78,5 \cdot 10^{-6}} = 1,53 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,53 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{30 \cdot 2,4}{2 \cdot 10^8 \cdot 201 \cdot 10^{-6}} = 1,79 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,79 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{-50 \cdot 3,2}{2 \cdot 10^8 \cdot 314 \cdot 10^{-6}} = -2,54 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -2,54 \text{ мм}.$$

Визначаємо лінійні переміщення перетинів стрижня. За нуль приймаємо закріплення, тоді

$$\Delta l_E = 0;$$

$$\Delta l_D = \Delta l_E + \Delta l_3 = 0 + (-2,54) = -2,54 \text{ мм};$$

$$\Delta l_C = \Delta l_3 + \Delta l_2 = -2,54 + 1,79 = -0,75 \text{ мм};$$

$$\Delta l_B = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = -2,54 + 1,79 + 1,53 = 0,78 \text{ мм}.$$

За отриманими результатами будуємо епюру лінійних переміщень перетинів стрижня (рисунок 2.6д).

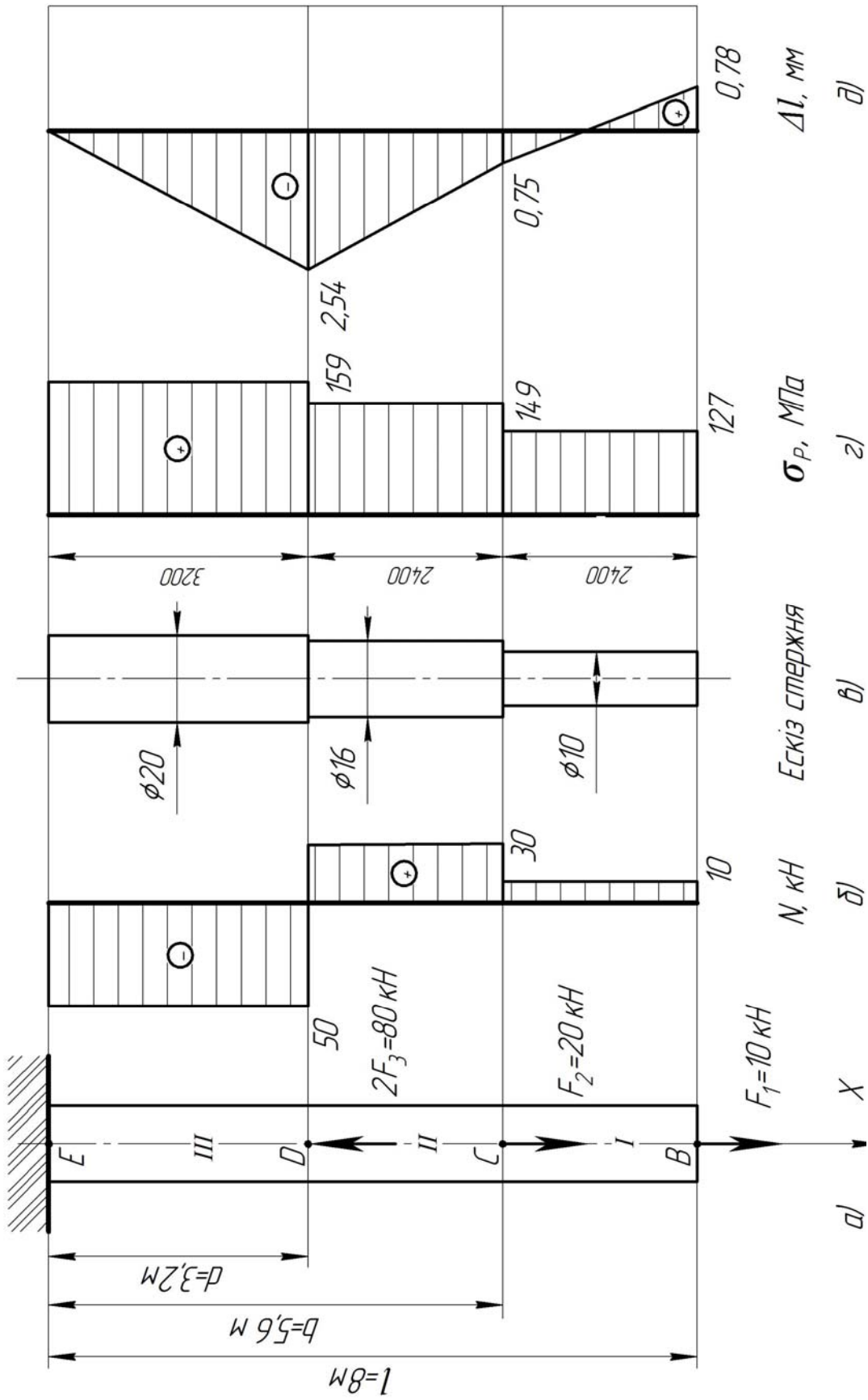


Рисунок 2.6

Задача № 2
Розрахунок статично невизначуваної стрижневої системи
при розтягу-стиску

Для заданої стрижневої системи (рисунок до задачі № 2, таблиця до задачі № 2), до якої прикладена сила $F = 50$ кН, визначити діаметри стрижнів DE і KH , якщо відоме відношення їх площ $A_{DE} = k \cdot A_{KH}$. Матеріал стрижнів – сталь Ст.3; $[\sigma] = 160$ МН/м²; $a = 1$ м. Брус, до якого прикладена зовнішня сила F , вважати абсолютно жорстким.

План розв'язування задачі:

1. Виконати схему стрижневої системи у масштабі.
2. Встановити ступінь статичної невизначуваності системи.
3. Скласти додаткові рівняння, розглянувши деформацію системи.
4. Визначити зусилля у стрижнях.
5. Підібрати площі поперечних перетинів стрижнів.

Таблиця до задачі № 2

№з/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
k	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	0,5

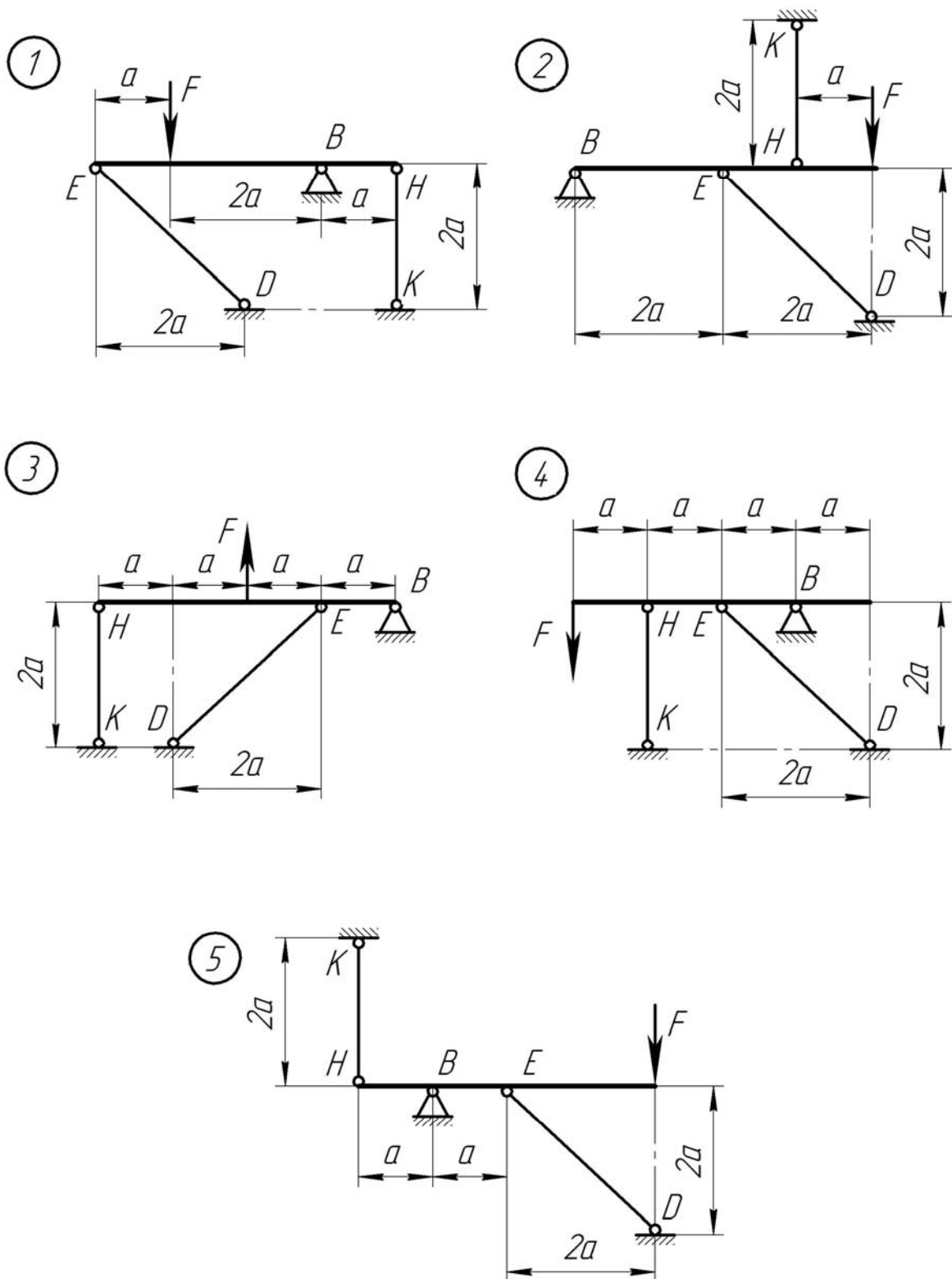
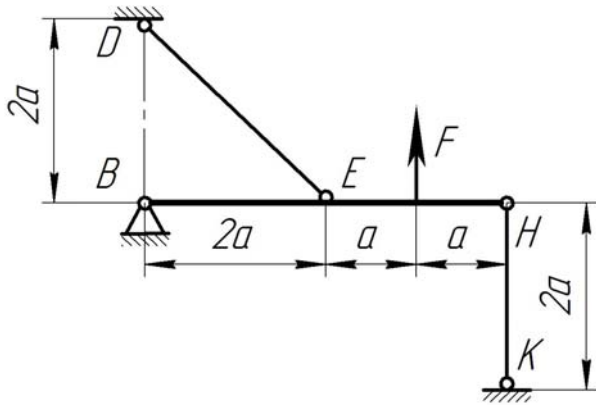
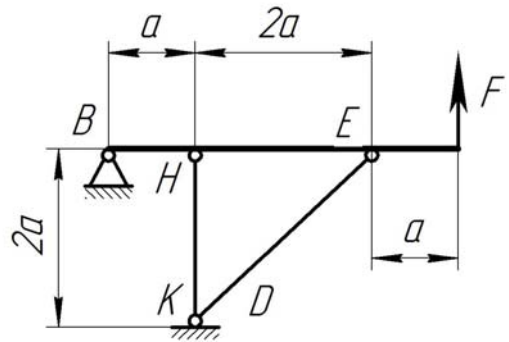


Рисунок до задачі № 2

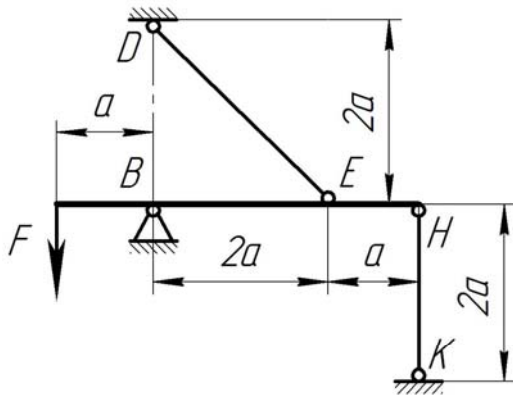
6



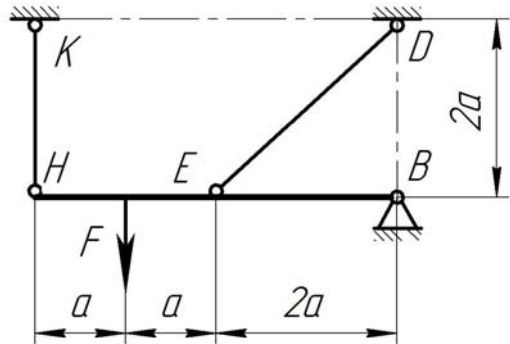
7



8



9



0

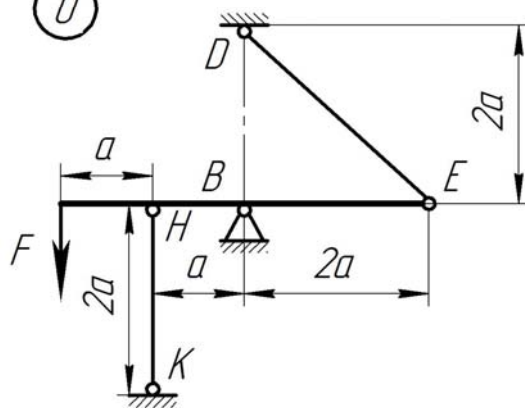


Рисунок до задачі № 2 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі № 2
Розрахунок статично невизначуваної стрижневої системи
при розтягу-стиску

Для заданої стрижневої системи (рисунок 2.7а), до якої прикладена сила $F = 50$ кН, визначити діаметри стрижнів DE і KH , якщо відоме відношення їх площ $A_{DE} = k \cdot A_{KH}$, $k = 3$. Брус, до якого прикладена зовнішня сила F , вважати абсолютно жорстким. Матеріал стрижнів і бруса – сталь Ст.3; $[\sigma] = 160$ МПа; $a = 1$ м.

Розв'язування

При навантаженні системи силою F у стрижнях DE і KH виникають нормальні зусилля, в даному випадку – стискаючі. Площі поперечних перетинів стрижнів при стиску визначаємо з умови міцності на розтяг-стиск

$$\sigma = \frac{N_i}{A_i} \leq [\sigma], \quad \text{звідки} \quad A_i \geq \frac{N_i}{[\sigma]}. \quad (1.1)$$

Для визначення зусиль у стрижнях DE і KH складаємо рівняння рівноваги бруса (рисунок 2.7б):

$$\sum X = 0; \quad -N_{DE} \cdot \cos \alpha + B_X = 0; \quad (1.2)$$

$$\sum Y = 0; \quad -F + N_{DE} \cdot \sin \alpha + B_Y - N_{KH} = 0; \quad (1.3)$$

$$\sum M_B = 0; \quad F \cdot 3a - N_{DE} \cdot 2a \cdot \sin \alpha - N_{KH} \cdot a = 0, \quad (1.4)$$

де N_{DE} , N_{KH} – нормальні сили, що виникають в стрижнях DE і KH ;

B_X , B_Y – складові сили реакції опори B .

У системі є чотири невідомі зусилля та реакції (N_{DE} , N_{KH} , B_X , B_Y), а рівнянь рівноваги – три. Отже, система $4-3=1$ раз статично невизначена.

Складаємо додаткове рівняння – рівняння сумісності переміщень (деформацій).

Після прикладання сили F стрижні DE і KH деформуються, і система займе положення, яке показане на рисунок 2.7в. З подібності трикутників DD_1B і KK_1B випливає, що

$$\frac{DD_1}{KK_1} = \frac{DB}{KB} = \frac{2a}{a} = 2. \quad (1.5)$$

У даному випадку

$$DD_1 = \frac{\Delta L_{DE}}{\sin \alpha}; \quad KK_1 = \Delta L_{KH}, \quad (1.6)$$

де ΔL_{KH} , ΔL_{DE} – абсолютні деформації стрижнів KH і DE .

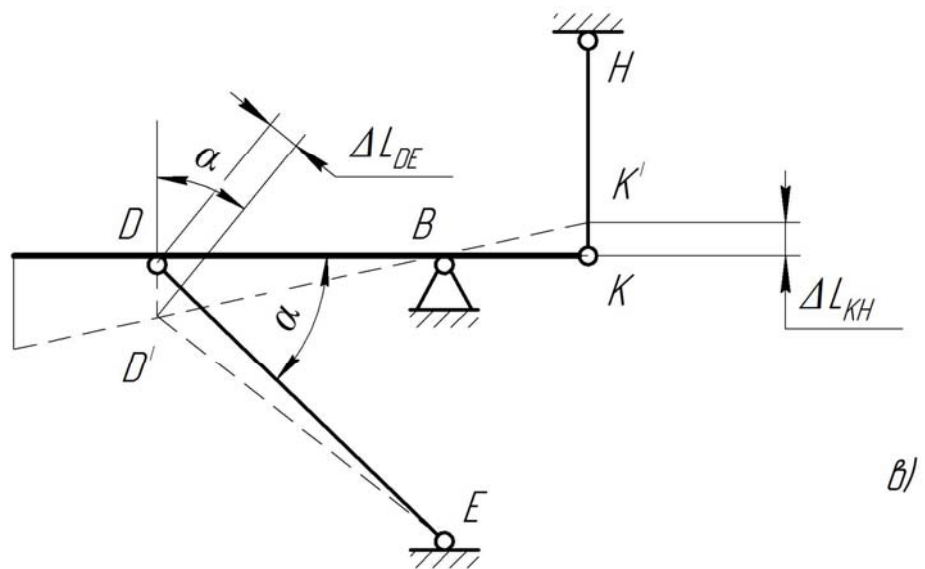
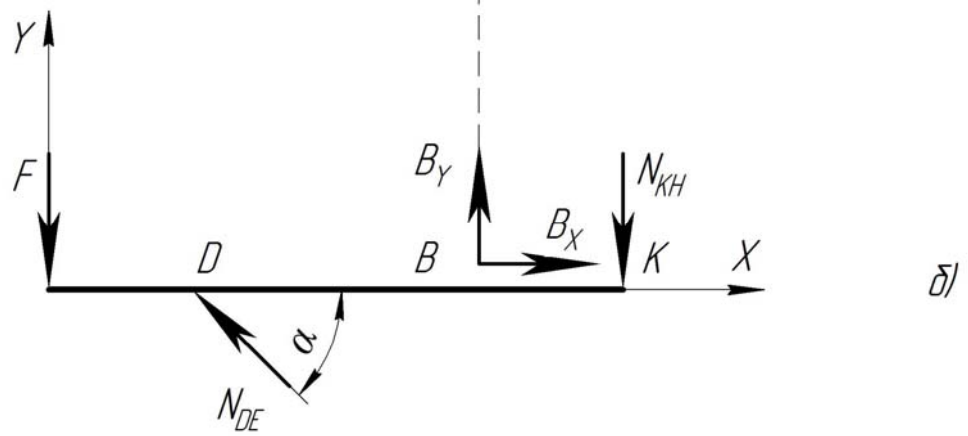
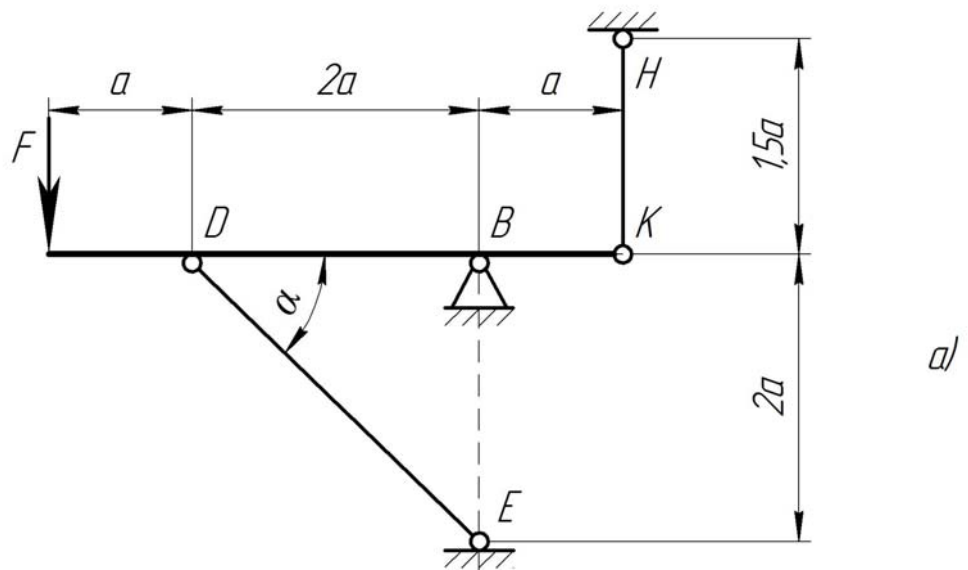


Рисунок 2.7

Деформації стрижнів запишемо через закон Гука у вигляді:

$$\Delta L_{KH} = \frac{N_{KH} \cdot 1,5a}{E \cdot A_{KH}}; \quad \Delta L_{DE} = \frac{N_{DE} \cdot 2a}{E \cdot A_{DE} \cdot \sin \alpha}.$$

Підставивши значення ΔL_{KH} і ΔL_{DE} у вирази (1.5) і (1.6), отримаємо

$$\frac{N_{DE} \cdot 2a \cdot E \cdot A_{KH}}{N_{KH} \cdot 1,5a \cdot E \cdot A_{DE} \cdot \sin^2 \alpha} = 2.$$

Враховувачи, що $A_{DE} = 3A_{KH}$, отримаємо

$$N_{DE} = 4,5N_{KH} \cdot \sin^2 \alpha.$$

У даному випадку $\alpha=45^\circ$ (див. рис. 2.7a), тоді

$$N_{DE} = 4,5N_{KH} \cdot \sin^2 45^\circ = 2,25N_{KH}. \quad (1.7)$$

Розв'язуючи сумісно рівняння (1.4) і (1.7), визначаємо невідомі зусилля в стрижнях

$$\begin{cases} 3F - 2N_{DE} \cdot \sin 45^\circ - N_{KH} = 0; \\ N_{DE} = 2,25N_{KH}, \end{cases}$$

звідки

$$N_{KH} = \frac{3F}{4,5 \sin 45^\circ + 1} = \frac{3 \cdot 50}{4,5 \cdot 0,7 + 1} = 35,9 \text{ кН},$$

відповідно

$$N_{DE} = 2,25 \cdot 35,9 = 80,8 \text{ кН}.$$

Надалі рівняння (1.2) і (1.3) при розв'язуванні задачі не використовуємо, так як невідомі зусилля в стрижнях визначені, а за умовою задачі непотрібно визначати реакцію в опорі B .

Площу поперечного перетину стрижня KH визначаємо з умови міцності на розтяг-стиск (1.1)

$$A_{KH} \geq \frac{N_{KH}}{[\sigma]} = \frac{35,9 \cdot 10^{-3}}{160} = 2,24 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

площу поперечного перетину стрижня DE – зі співвідношення

$$A_{DE} = 3A_{KH} = 3 \cdot 2,24 \cdot 10^{-4} = 6,72 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Перевіряємо стрижень DE на міцність

$$\sigma_{DE} = \frac{N_{DE}}{A_{DE}} = \frac{80,8 \cdot 10^{-3}}{6,72 \cdot 10^{-4}} = 120 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Умова міцності забезпечена. В іншому випадку площу поперечного перетину стрижня DE необхідно було б визначити з умови міцності, а стрижня KH – зі співвідношення.

3. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕТИНІВ

Моменти інерції та центр ваги

Статичний момент площі плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, – це взята на всій площі сума добутків площ елементарних площадок на відстані їх від цієї осі.

Статичні моменти площі перетину довільної форми (рисунок 3.1) визначають за формулами

$$S_X = \int_A y dA; \quad S_Y = \int_A x dA;$$

$$S_X = y_C \cdot A; \quad S_Y = x_C \cdot A,$$

де x , y – координати (відстані), що визначають положення елемента площі dA ;

y_C , x_C – координати центра ваги площі перетину;

A – площа перетину;

dA – елемент площі (елементарна площадка).

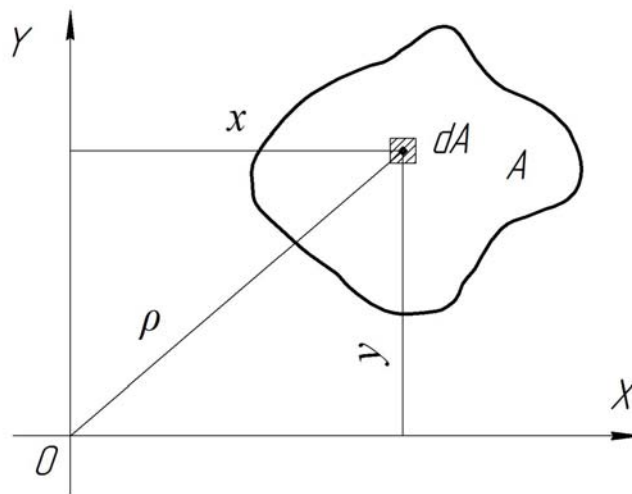


Рисунок 3.1

Статичний момент площі фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, дорівнює добутку площі фігури на відстань її до центра ваги від цієї осі.

Розмірність статичного моменту площі фігури – м^3 . Він може бути величиною додатною, від'ємною і дорівнювати нулю (відносно осі симетрії фігури або відносно центральної осі, тобто осі, що проходить через центр ваги перетину).

Для визначення **центра ваги** складних фігур застосовують **метод розбиття**, статичний момент площі всієї фігури визначають як алгебраїчну суму статичних моментів окремих її частин. Координати центра ваги складного перетину визначають за формулами

$$x_C = \frac{\sum S_Y}{\sum A}; \quad y_C = \frac{\sum S_X}{\sum A},$$

де $\sum S_Y$, $\sum S_X$ – сума статичних моментів окремих площ;
 $\sum A$ – сума окремих площ.

Осі, що проходять через центр ваги перетину, називають **центральною осями**. Статичний момент площі відносно центральної осі дорівнює нулю.

Полярний момент інерції плоскої фігури відносно полюса, який лежить у тій самій площині, – це взята на всій площині сума добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від полюса.

Полярний момент площі перетину довільної форми відносно полюса O (див. рис. 3.1) визначають за інтегралом

$$I_P = \int_A \rho^2 dA,$$

де ρ – відстань від центра елементарної площадки (елемента площі) dA до осі, перпендикулярної до площини перетину, що проходить через точку O (полюс),

$$\rho^2 = y^2 + x^2.$$

Осьовий момент інерції плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, – це взята на всій площі сума добутків площ елементарних площадок на квадрат їх відстаней від цієї осі.

Осьові моменти інерції площі перетину довільної форми (див. рис. 3.1) відносно осей OX та OY визначають за інтегралами

$$I_X = \int_A y^2 dA; \quad I_Y = \int_A x^2 dA.$$

Полярний та осьові моменти інерції площі перетину величини завжди додатні і не дорівнюють нулю.

Залежність між осьовими та полярним моментами інерції

$$I_P = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + x^2) dA = I_X + I_Y.$$

Розмірність момента інерції фігури – m^4 .

Сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції відносно точки перетину цих осей (початку координат).

Залежність між моментами інерції при паралельному переносі осей

$$I_{X_1} = I_X + A \cdot a^2.$$

Осьовий момент інерції відносно будь-якої осі X_1 дорівнює осьовому моменту інерції відносно центральної осі X , яка паралельна осі X_1 , плюс добуток площі на квадрат відстані між осями (a – відстань між осями).

Головні осі та головні моменти інерції

Центральні осі – осі, які проходять через центр ваги плоскої фігури.

Центральні моменти інерції плоскої фігури (перетину) – моменти інерції відносно центральних осей.

Якщо осі координат повертати у своїй площині навколо початку координат, то полярний момент інерції перетину залишиться постійним, а осьові моменти інерції будуть змінюватися, причому

$$I_X + I_Y = I_P = const.$$

Якщо сума двох змінних величин залишається сталою, то одна з них зменшується, а друга збільшується. Отже, при якомусь положенні один із осьових моментів досягає максимального, а другий – мінімального значень.

Головні осі інерції – осі, відносно яких осьові моменти інерції перетину (плоскої фігури) досягають максимальних і мінімальних значень.

Головні моменти інерції перетину – це осьові моменти інерції відносно головних осей.

Головні центральні осі – це головні осі, які проходять через центр ваги перетину (плоскої фігури). Якщо фігура має хоча б одну вісь симетрії, то ця вісь завжди буде однією з головних центральних осей.

Головні центральні моменти інерції перетину (плоскої фігури) – це моменти інерції відносно головних центральних осей.

В інженерних розрахунках важливе значення мають **головні центральні моменти інерції**.

Моменти інерції перетинів є геометричними характеристиками, які дають змогу порівняти жорсткість брусів із заданого матеріалу з їхнім опором зовнішнім силам.

Осьові та полярні моменти інерції набувають лише додатних значень.

Опір бруса згину та крученню характеризують також моментами опору перетинів: осьовими та полярним.

Осьові моменти опору перетинів визначають за формулами

$$W_X = \frac{I_X}{|y_{\max}|}; \quad W_Y = \frac{I_Y}{|x_{\max}|},$$

де y_{\max} , x_{\max} – координати точок поперечного перетину максимально віддалених від осей OX та OY .

Полярний момент опору перетину відповідно

$$W_P = \frac{I_P}{\rho_{\max}},$$

де ρ_{\max} – координата точки перетину, максимально віддаленої від полюса.

Полярні моменти інерції та полярні моменти опору для поперечних перетинів:

- круг (рисунок 3.2а)

$$I_P = \pi \cdot D^4 / 32; \quad W_P = \pi \cdot D^3 / 16;$$

- кільце (рисунок 3.2б)

$$I_P = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot (1 - \alpha^4); \quad W_P = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot (1 - \alpha^4), \quad \text{де } \alpha = d/D.$$

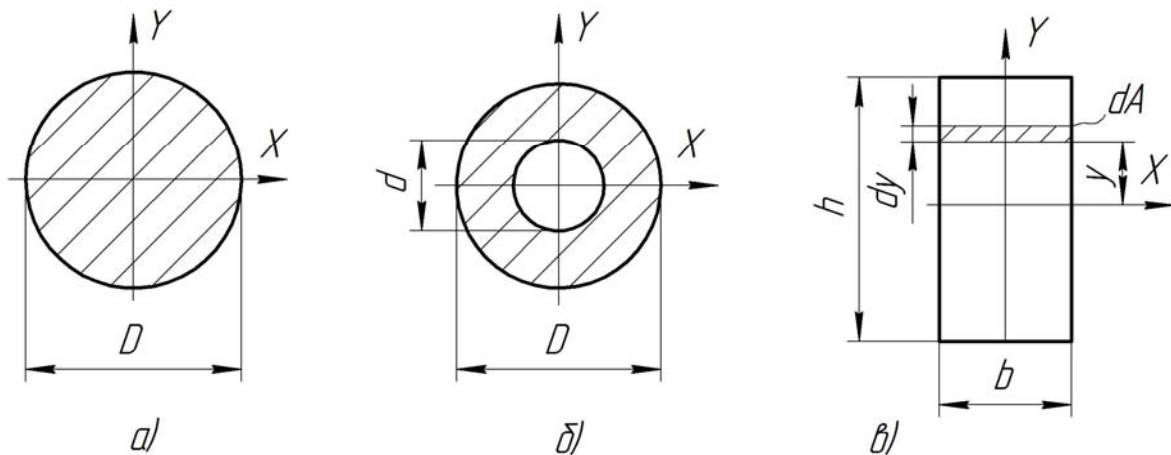


Рисунок 3.2

Осьові моменти інерції та осьові моменти опору для поперечних перетинів:

- круг (див. рис. 3.2а)

$$I_X = I_Y = I_0 = \pi \cdot D^4 / 64; \quad W_X = W_Y = W_0 = \pi \cdot D^3 / 32;$$

- прямокутник (рисунок 3.2в)

$$I_X = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad I_Y = \frac{h \cdot b^3}{12}; \quad W_X = \frac{b \cdot h^2}{6}; \quad W_Y = \frac{h \cdot b^2}{6}.$$

Задача № 3

Визначення осьових моментів інерції плоских перетинів

Для заданого перетину (рисунок до задачі № 3, таблиця до задачі № 3) визначити положення головних центральних осей; головні центральні моменти інерції та осьові моменти опору відносно головних центральних осей.

План розв'язування задачі:

1. Виписати необхідні для розв'язування задачі дані з таблиць сортаменту (додатки 3, 4).
2. Визначити геометричні характеристики полоси (полос).
3. Накреслити перетин у масштабі 1:1 або 1:2. Усі розміри, використані у розрахунках, позначити на кресленні.
4. Вибрати раціональне розміщення допоміжних координатних осей.
5. Визначити положення центра ваги перетину.
6. Провести паралельно допоміжним осям головні центральні осі й визначити величини головних центральних моментів інерції перетину.
7. Визначити осьові моменти опору перетину відносно головних центральних осей.

Таблиця до задачі № 3

№ з/п	Розміри швелера (двотавра)	№ з/п	Розміри швелера (двотавра)
1	12	6	22
2	14	7	24
3	16	8	27
4	18	9	30
5	20	0	10

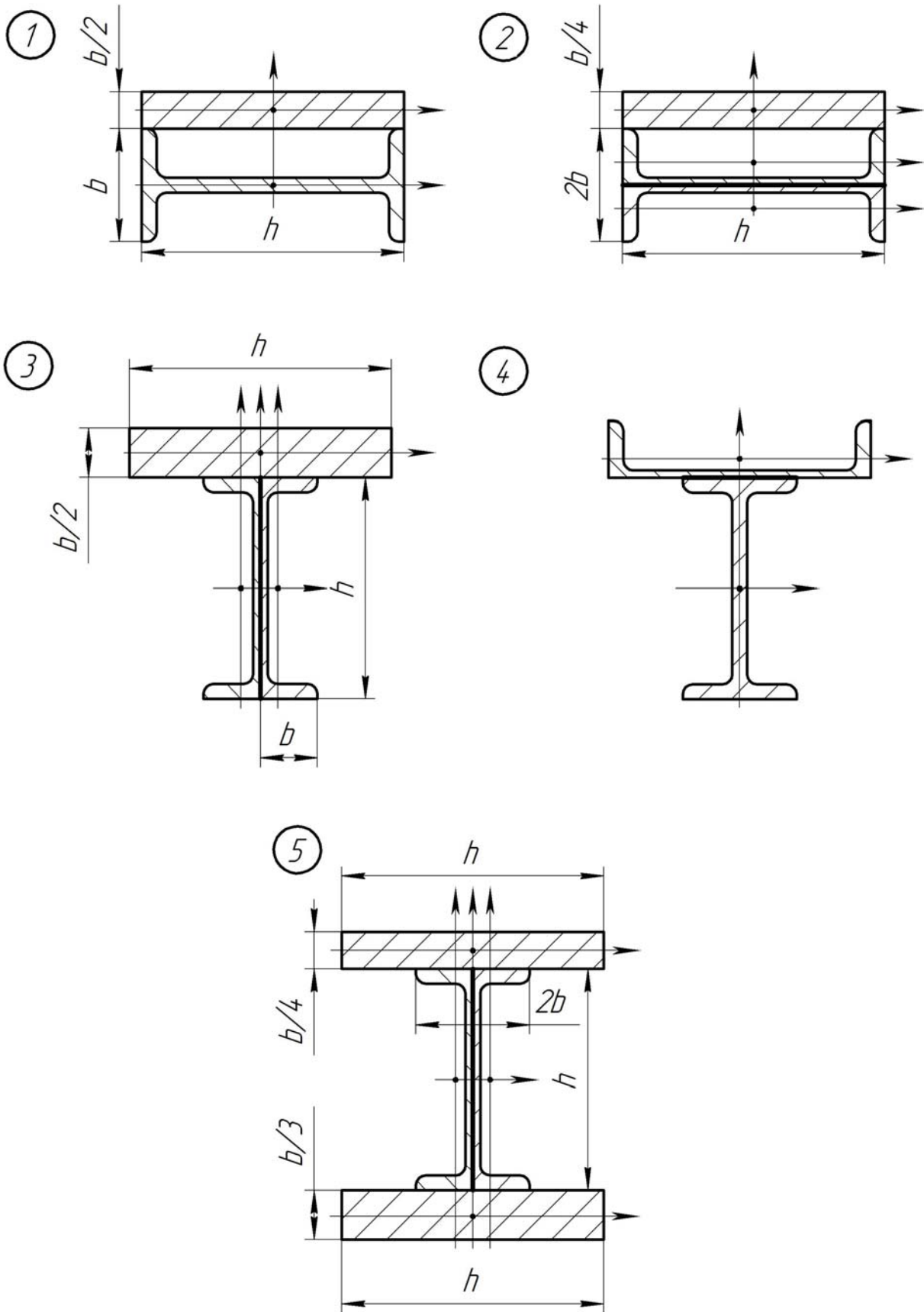


Рисунок до задачі № 3

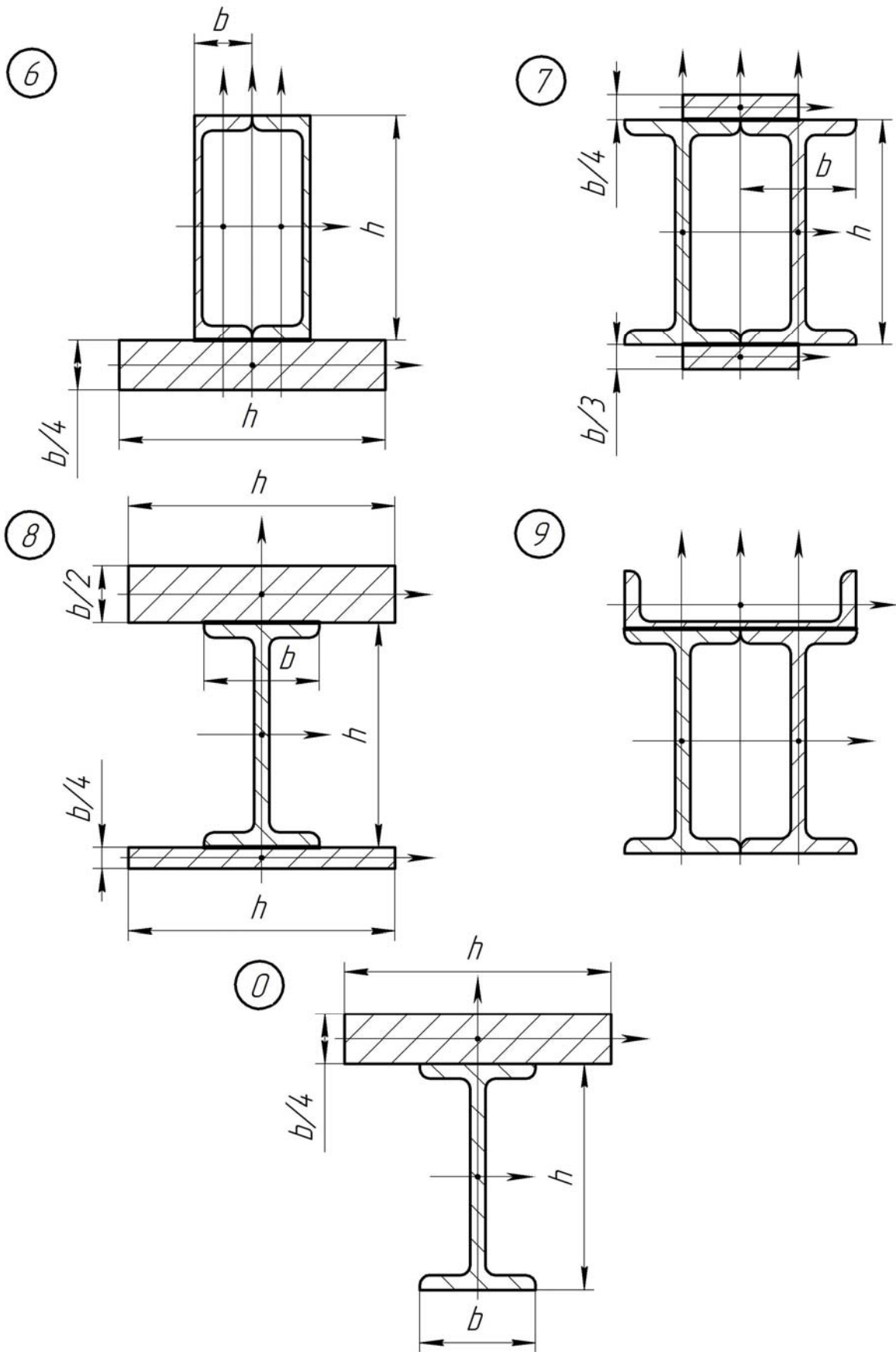


Рисунок до задачі № 3 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі № 3

Визначення осьових моментів інерції плоских перетинів

Для заданого перетину (рисунок 3.3) визначити положення головних центральних осей; головні центральні моменти інерції та осьові моменти опору відносно головних центральних осей, якщо двотавр № 33.

Розв'язування

Геометричні характеристики вказаного прокатного профілю виписуємо з таблиць сортаменту ГОСТ 8239-89 (додаток 3). Для двотавра № 33 позначаємо їх індексом 1.

$$h_1 = 330 \text{ мм}; b_1 = 140 \text{ мм}; d_1 = 7,0 \text{ мм}; t_1 = 11,2 \text{ мм}; A_1 = 53,8 \text{ см}^2;$$

$$I_{X1} = 419 \text{ см}^4; I_{Y1} = 9840 \text{ см}^4.$$

Визначаємо геометричні характеристики полоси, позначимо їх індексом 2. Розміри полоси

$$b_2 = h_1/4 = 330/4 = 82,5 \text{ мм}; \quad a_2 = h_1 = 330 \text{ мм}.$$

Площа поперечного перетину полоси

$$A_2 = b_2 \cdot a_2 = 8,25 \cdot 33 = 272 \text{ см}^2.$$

Осьові моменти інерції полоси

$$I_{X2} = \frac{a_2 \cdot b_2^3}{12} = \frac{33 \cdot 8,25^3}{12} = 1544 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y2} = \frac{b_2 \cdot a_2^3}{12} = \frac{8,25 \cdot 33^3}{12} = 24706 \text{ см}^4.$$

Викреслюємо перетин у масштабі (див. рис. 3.3).

Координати центра ваги перетину в системі координат X_1Y_1 :

$$x_C = 0, \quad \text{тому, що вісь } Y \text{ є віссю симетрії};$$

$$y_C = \frac{\sum S_X}{\sum A} = \frac{A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2}}{A_1 + A_2},$$

де y_{C1} – відстань (координата) від центра ваги площі першої фігури перетину (двотавра) до осі X_1 , $y_{C1} = 0$;

y_{C2} – відстань (координата) від центра ваги площі другої фігури перетину (полоси) до осі X_1

$$y_{C2} = \frac{140}{2} + \frac{82,5}{2} = 111,25 \text{ мм}.$$

Підставимо значення й отримаємо

$$y_C = \frac{0 + 272 \cdot 111,25}{53,8 + 272} = 92,9 \text{ мм}.$$

Проводимо через точку C головні центральні осі XU (див. рис. 3.3).

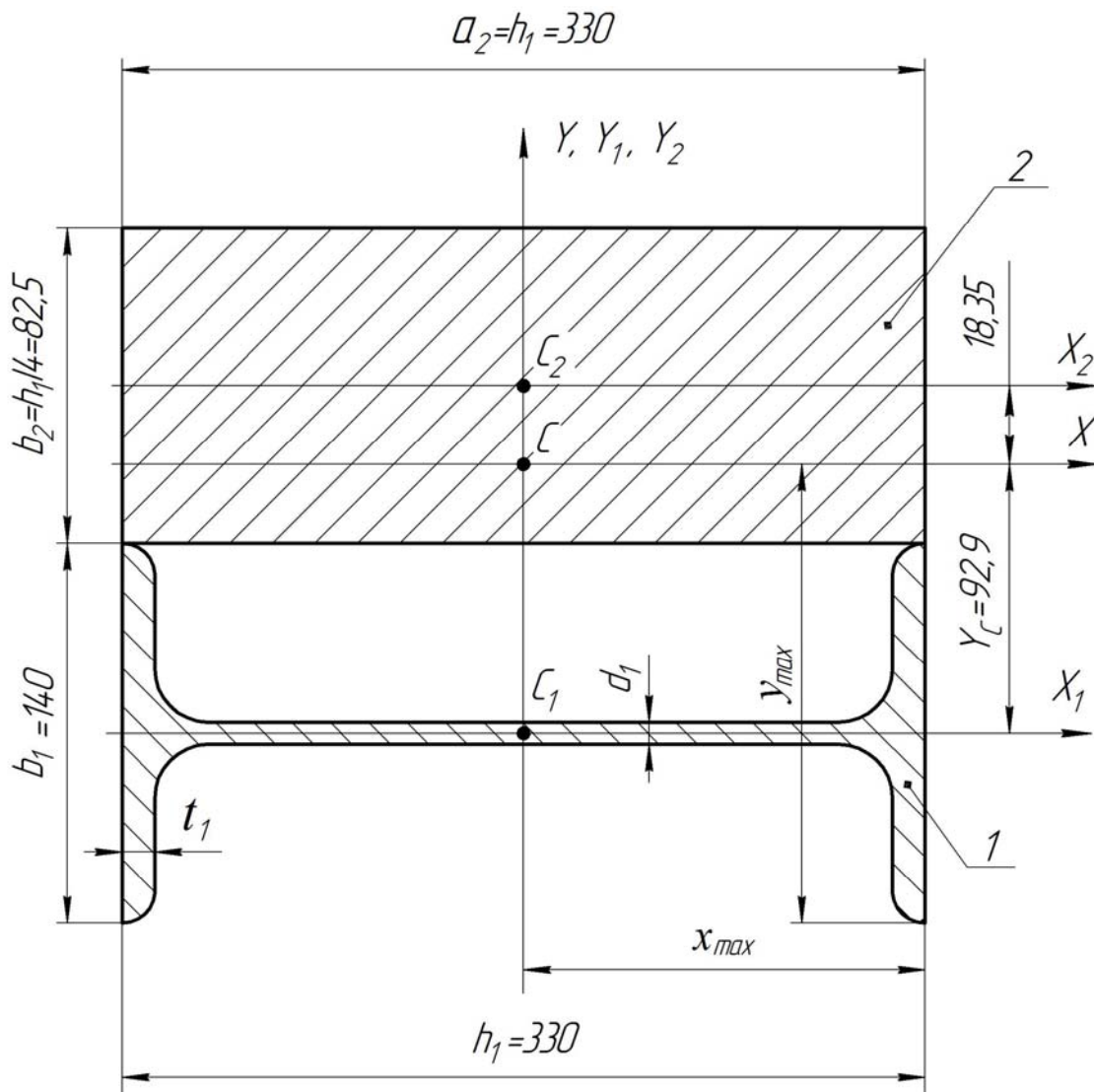


Рисунок 3.3

Визначаємо осьові моменти інерції відносно головних центральних осей, тобто головні центральні моменти інерції заданого перетину

$$I_Y = I_{Y1} + I_{Y2} = 9840 + 24706 \approx 34600 \text{ см}^4;$$

$$I_X = I_{X1} + A_1 \cdot (-9,29)^2 + I_{X2} + A_2 \cdot (1,835)^2 = \\ = 419 + 53,8 \cdot (-9,29)^2 + 1544 + 272 \cdot 1,835^2 \approx 5980 \text{ см}^4.$$

Визначаємо осьові моменти опору відносно головних центральних осей

$$W_X = \frac{I_X}{y_{\max}} = \frac{5980}{16,29} = 367 \text{ см}^3; \quad W_Y = \frac{I_Y}{x_{\max}} = \frac{34600}{16,5} = 2097 \text{ см}^3;$$

де x_{\max} , y_{\max} – координати точок заданого перетину, максимально віддалених від осей X та Y (див. рис. 3.3):

$$y_{\max} = 9,29 + 7 = 16,29 \text{ см}; \quad x_{\max} = 16,5 \text{ см}.$$

4. ЗСУВ. КРУЧЕННЯ

Зсув. Напруження, деформації і закон Гука при зсуві

Зсув (зріз) – це такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перетині бруса діє тільки поперечна (перерізуюча) сила Q (рисунок 4.1а). Деформація зсуву доведена до руйнування матеріалу – зріз.

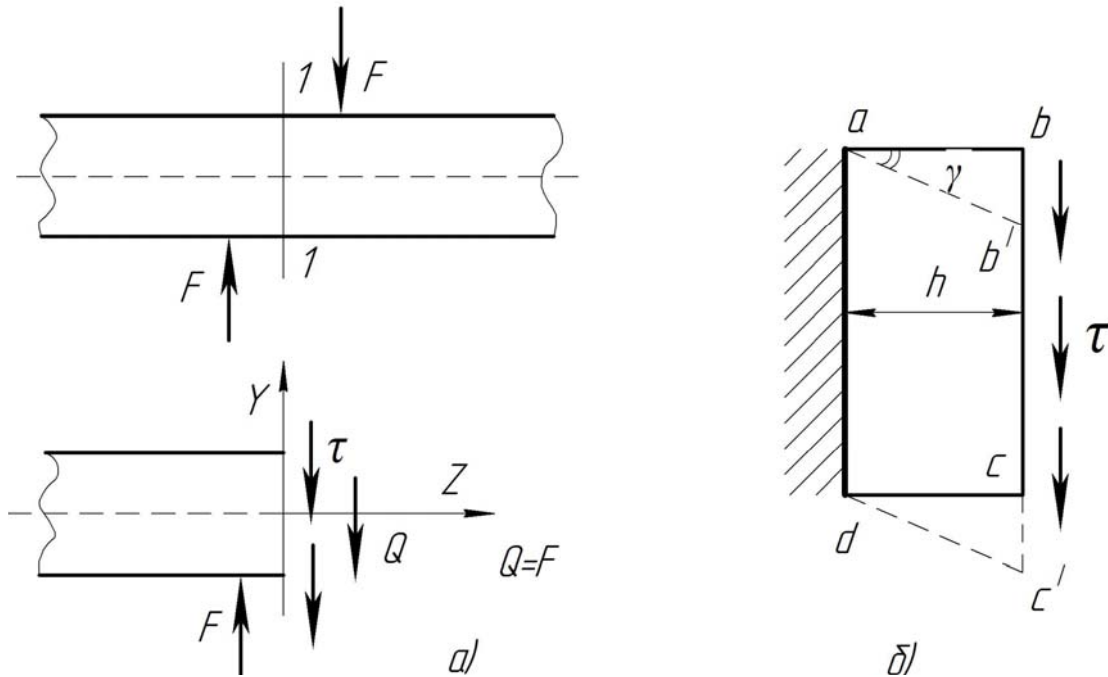


Рисунок 4.1

Вважаємо, що дотичні напруження, які виникають у поперечному перетині бруса при зсуві, $\tau = const$, тоді перерізуюча сила

$$Q = A \cdot \tau, \quad \text{тобто напруження } \tau = Q/A.$$

Умова міцності на зріз

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau]_{ЗР},$$

де $[\tau]_{ЗР}$ – допустиме дотичне напруження на зріз, $[\tau]_{ЗР} = (0,25 \dots 0,35) \cdot \sigma_T$.

Деформація зсуву визначається кутом зсуву – γ . Абсолютний зсув бруса (рисунок 4.1б) – bb' , cc' .

Закон Гука при зсуві

$$\tau = G \cdot \gamma,$$

де G – модуль зсуву, або модуль пружності II-го роду, характеризує жорсткість матеріалу.

Залежність між пружними характеристиками пластичного матеріалу (сталі) E , G , μ

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Кручення

Кручення – вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перетині бруса виникає *тільки крутний момент*, M_{KP} .

Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса у площинах, перпендикулярних до осі, прикладено пару сил M (рисунок 4.2). Моменти цих пар називають *обертаючими* (якщо брус обертається), позначають їх T , і *скручувальними* (якщо брус не обертається), позначають їх M .

Брус круглого поперечного перетину, що працює на деформацію кручення, називають **валом**. Кручення зазнають вали двигунів та верстатів, інші металоконструкції. На кручення працюють також стержні з перетинами інших форм.

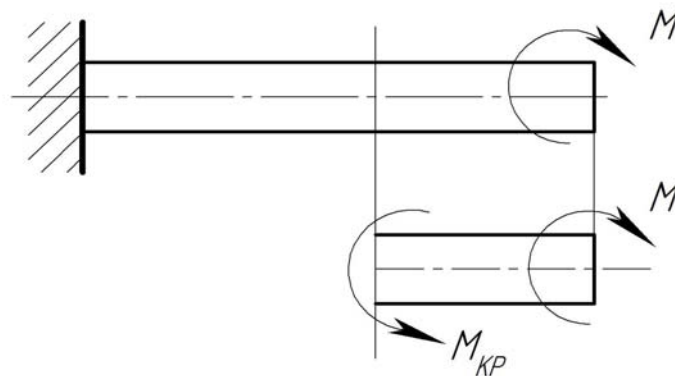


Рисунок 4.2

Крутний момент M_{KP} у будь-якому перетині вала дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх скручувальних моментів, прикладених до бруса справа чи зліва від перетину.

Для розрахунку бруса на міцність при крученні, так як і при розтягу (стиску) необхідно визначити **небезпечний перетин**. У випадку, якщо розміри поперечного перетину на довжині бруса постійні, то небезпечними будуть перетини, у яких крутні моменти максимальні. Графік, який показує закон зміни крутних моментів на довжині бруса, називають **епюрою крутних моментів**. Будують її аналогічно епюрі поздовжніх сил.

При крученні бруса у його поперечних перетинах виникають тільки дотичні напруження. Для круглого стрижня (вала) дотичні напруження визначають за формулою

$$\tau = \frac{M_{KP}}{I_P} \cdot \rho,$$

де ρ – відстань від центра (полюса) круглого перетину до точки, в якій визначають дотичні напруження (рисунок 4.3а).

Епюра розподілу дотичних напружень за висотою поперечного перетину зображена на рисунку 4.3б. Дотичні напруження змінюються вздовж радіуса перетину за лінійним законом.

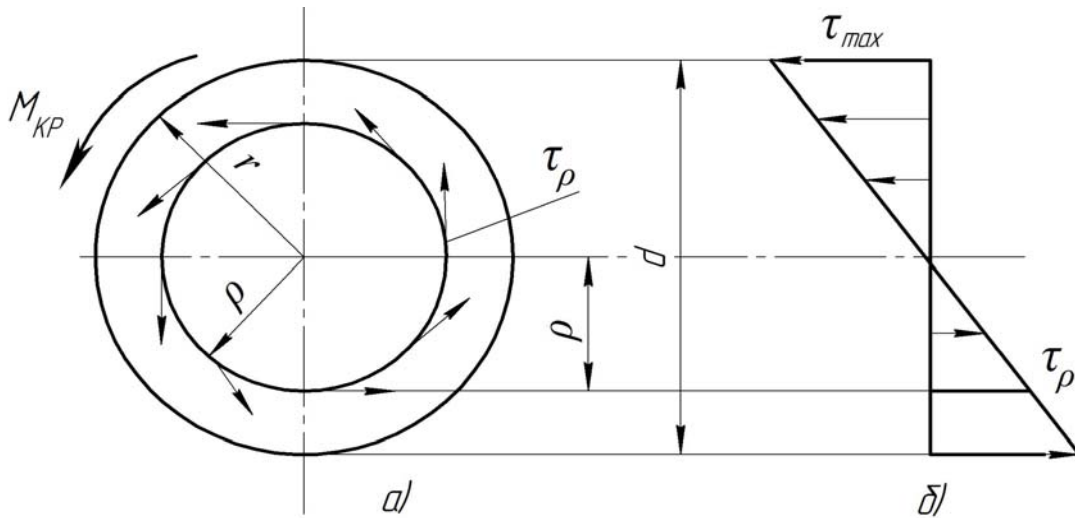


Рисунок 4.3

Дотичні напруження дорівнюють нулю в центрі перетину, $\rho = 0$ і досягають максимального значення у точках контура, $\rho = d/2$. У проміжних точках перетину дотичні напруження лінійно залежать від відстані ρ (див. рис. 4.3б). Оскільки

$$\frac{I_P}{(d/2)} = W_P, \quad \text{то} \quad \tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P}.$$

Умова міцності при крученні. Міцність вала забезпечується, якщо максимальне дотичне напруження не перевищує допустимого

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P} \leq [\tau],$$

де $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження при крученні, визначають залежно від допустимого напруження розтягу $[\sigma]_P$:

для сталей $[\tau] = (0,55 \dots 0,6) \cdot [\sigma]_P$;

для чавунів $[\tau] = (1 \dots 1,2) \cdot [\sigma]_P$.

З допомогою умови міцності вала при крученні розв'язують три типи задач.

1. **Добір поперечного перетину** (проектний розрахунок), тобто визначення потрібних його розмірів з розрахунку полярного моменту опору

$$W_P \geq M_{KP} / [\tau], \quad \text{для круглого перетину} \quad d = \sqrt[3]{16 W_P / \pi}.$$

2. **Перевірка міцності** (перевірний розрахунок), зводиться до порівняння максимального фактичного (дійсного) та допустимого дотичних напружень за формулою

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P} \leq [\tau].$$

3. **Визначення найбільшого допустимого крутного моменту**
 $[M_{KP}] \leq [\tau] \cdot W_P.$

Деформація при крученні характеризується поворотом поперечних перетинів вала один відносно одного на деякий кут φ – **кут закручування**. Для вала постійної жорсткості $G \cdot I_P$ довжиною l при постійному значенні крутного моменту M_{KP} кут закручування (повний кут закручування) визначають за формулами:

$$\varphi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_P} \text{ [рад]}; \quad \varphi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \text{ [град]}.$$

Ці співвідношення називають **законом Гука при крученні**. Для циліндричного бруса, який має кілька ділянок, які різняться розмірами поперечного перетину, величиною крутного моменту, матеріалом, повний кут закручування дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування окремих ділянок $\varphi = \sum \varphi_i$.

Повний кут закручування вала не повністю характеризує деформацію кручення, оскільки залежить від довжини вала. Жорсткість вала оцінюють **відносним кутом закручування**, який визначають за формулами

$$\theta = \frac{\varphi}{l}; \quad \theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right]; \quad \theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \left[\frac{\text{град}}{\text{м}} \right].$$

Умова жорсткості вала при крученні. Жорсткість вала достатня, якщо найбільший відносний кут закручування не перевищує допустимого його значення

$$\theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta],$$

де $[\theta]$ – допустимий кут закручування вала залежно від призначення вала

$$\text{приймають } [\theta] = (0,25 \dots 2) \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

З допомогою умови жорсткості (як і умови міцності) виконують три види розрахунків конструкцій: **проектний, перевірний і визначення допустимого навантаження або деформації.**

Задача № 4

Розрахунок вала на кручення

На зрівноважений вал (рисунок до задачі № 4, таблиця до задачі № 4) насаджено 5 шківів, які передають потужності P_1, P_2, P_3, P_4, P_0 . Визначити, з умови міцності на кручення, діаметри окремих ділянок вала. Провести перевірку вала на жорсткість при допустимому куті закручування $[\theta] = 2$ град/м. Частота обертання вала ω , відстань $a = 0,4$ м. Матеріал – сталь 45; $[\tau] = 60$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

План розв'язування задачі:

1. Знайти скручувальні моменти, що передаються кожним шківом.
2. Визначити крутні моменти M_{KR} на кожній ділянці вала. Побудувати епюру крутних моментів.
3. Визначити, нехтуючи тертям у підшипниках, з умови рівноваги вала, скручувальний момент на шківі « M_0 ».
4. З умови міцності на кручення визначити діаметри вала на окремих його ділянках. Заокруглити отримані величини до розміру кратного 2 або 5.
5. Виконати ескіз ступінчастого вала (з позначенням діаметрів і довжин окремих ділянок).
6. Визначити величини кутів закручування на окремих ділянках і побудувати епюру кутів закручування для всього вала, приймаючи за нерухомий перетин один з кінців вала або перетин, де діє P_0 .
7. Провести перевірку вала на жорсткість.

Таблиця до задачі № 4

№ з/п	P_1 , кВт	P_2 , кВт	P_3 , кВт	P_4 , кВт	ω , рад/сек
1	11	12	13	14	10
2	12	13	14	11	20
3	13	14	11	12	30
4	14	13	12	11	40
5	11	12	13	14	50
6	12	13	14	11	60
7	13	14	11	12	70
8	14	11	12	13	80
9	16	17	13	15	90
0	15	16	14	13	100

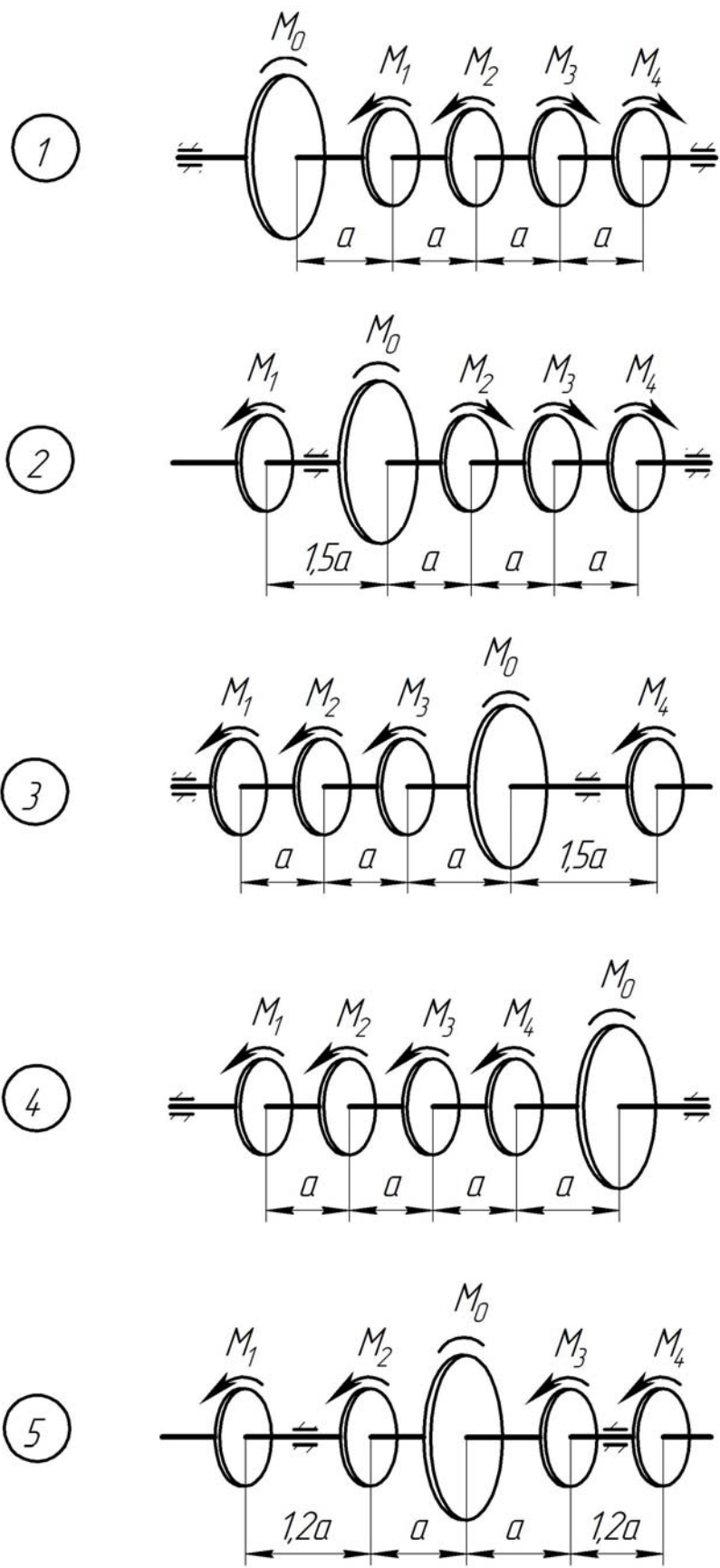


Рисунок до задачі № 4

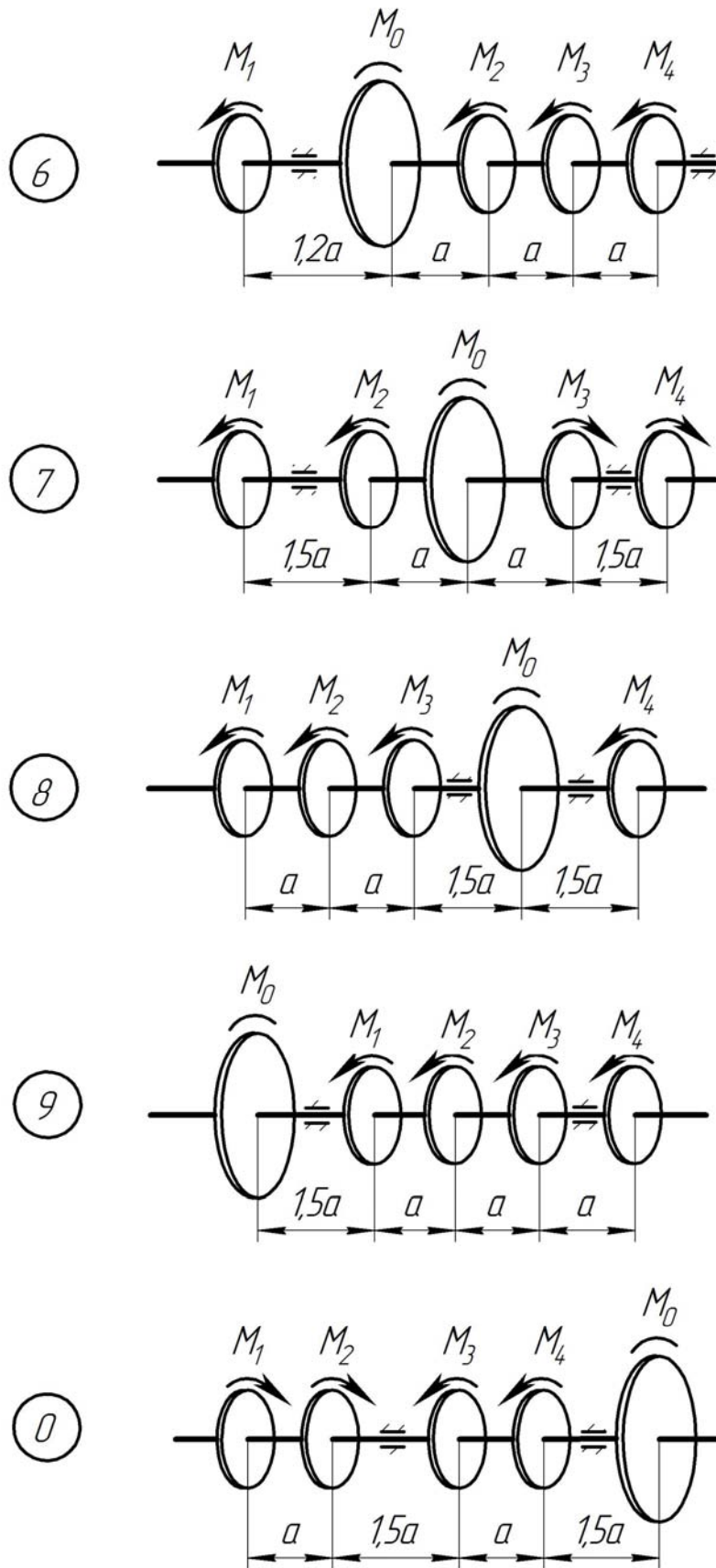


Рисунок до задачі № 4 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі №4 Розрахунок вала на міцність і жорсткість

На вал (рисунок 4.4а) насаджено 5 шківів, які передають потужності $P_1 = 10$ кВт; $P_2 = 50$ кВт; $P_3 = 48$ кВт; $P_4 = 80$ кВт. Визначити, з умови міцності на кручення, діаметри окремих ділянок вала. Провести перевірку вала на жорсткість при допустимому куті закручування $[\theta] = 2$ град/м. Частота обертання вала $\omega = 40$ с⁻¹; відстань $a = 0,4$ м; матеріал – сталь 45; $[\tau] = 50$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Розв'язування

Скручувальні моменти M_i , які передаються кожним шківом, визначаємо за формулою

$$M_i = \frac{P_i}{\omega}, \quad \text{де } i = 1, 2, 3, 4.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$M_1 = \frac{10}{40} = 0,25 \text{ кНм}; \quad M_2 = \frac{50}{40} = 1,25 \text{ кНм};$$
$$M_3 = \frac{48}{40} = 1,2 \text{ кНм}; \quad M_4 = \frac{80}{40} = 2,0 \text{ кНм}.$$

Значення моменту M_0 визначаємо на основі рівняння рівноваги вала, записаного з урахуванням напрямку дії зосереджених моментів (тертям в опорах нехтуємо),

$$-M_0 + M_1 + M_2 + M_3 - M_4 = 0,$$

звідки

$$M_0 = M_1 + M_2 + M_3 - M_4 = 0,25 + 1,25 + 1,2 - 2 = 0,7 \text{ кНм}.$$

Крутні моменти M_{KP_i} ($i = 1, 2, 3, 4$) на кожній ділянці вала рекомендовано визначати, розглядаючи ділянки або тільки зліва чи справа, (у даному випадку зліва. рисунок 4.4б):

$$M_{KP1} = -M_0 = -0,7 \text{ кНм};$$

$$M_{KP2} = -M_0 + M_1 = -0,7 + 0,25 = -0,45 \text{ кНм};$$

$$M_{KP3} = -M_0 + M_1 + M_2 = -0,7 + 0,25 + 1,25 = 0,8 \text{ кНм};$$

$$M_{KP4} = -M_0 + M_1 + M_2 + M_3 = -0,7 + 0,25 + 1,25 + 1,2 = 2,0 \text{ кНм}.$$

За отриманими значеннями будуємо епюру крутних моментів (рисунок 4.4в).

З умови міцності на кручення $\tau_{\max} = |M_{KP}|/W_P \leq [\tau]$, враховуючи, що момент опору круглого поперечного перетину $W_P = \pi \cdot d^3/16 \approx 0,2d^3$, визначаємо діаметр вала на кожній ділянці за формулою

$$d_i \geq \sqrt[3]{\frac{|M_{KPi}|}{0,2 [\tau]}}$$

Підставивши значення крутних моментів, отримаємо

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{0,7}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 41,2 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{0,45}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 35,6 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{0,8}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 43,1 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_4 \geq \sqrt[3]{\frac{2,0}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 58,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Приймаємо діаметри ділянок вала

$$d_{1\partial} = 42 \text{ мм}; \quad d_{2\partial} = 36 \text{ мм}; \quad d_{3\partial} = 44 \text{ мм}; \quad d_{4\partial} = 60 \text{ мм}.$$

За отриманими значення виконуємо ескіз вала (рисунок 4.4з).

Кути закручування окремих ділянок вала визначимо за формулою

$$\varphi_i = \frac{M_{KPi} \cdot l_i}{G \cdot I_{Pi}}; \quad i=1, 2, 3, 4,$$

де l_i – довжина ділянки вала, мм;

G – модуль зсуву, $G = 8,1 \cdot 10^4$ МПа;

I_{Pi} – полярний момент інерції поперечного перетину вала

$$I_{Pi} = \frac{\pi \cdot d_{i\partial}^4}{32} \approx 0,1 d_{i\partial}^4.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$\varphi_1 = \frac{-0,7 \cdot 0,4}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,042)^4} = -1,11 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \frac{-0,45 \cdot 0,6}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,036)^4} = -1,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \frac{0,8 \cdot 0,4}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,044)^4} = 1,05 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_4 = \frac{2,0 \cdot 0,5}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,06)^4} = 0,95 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

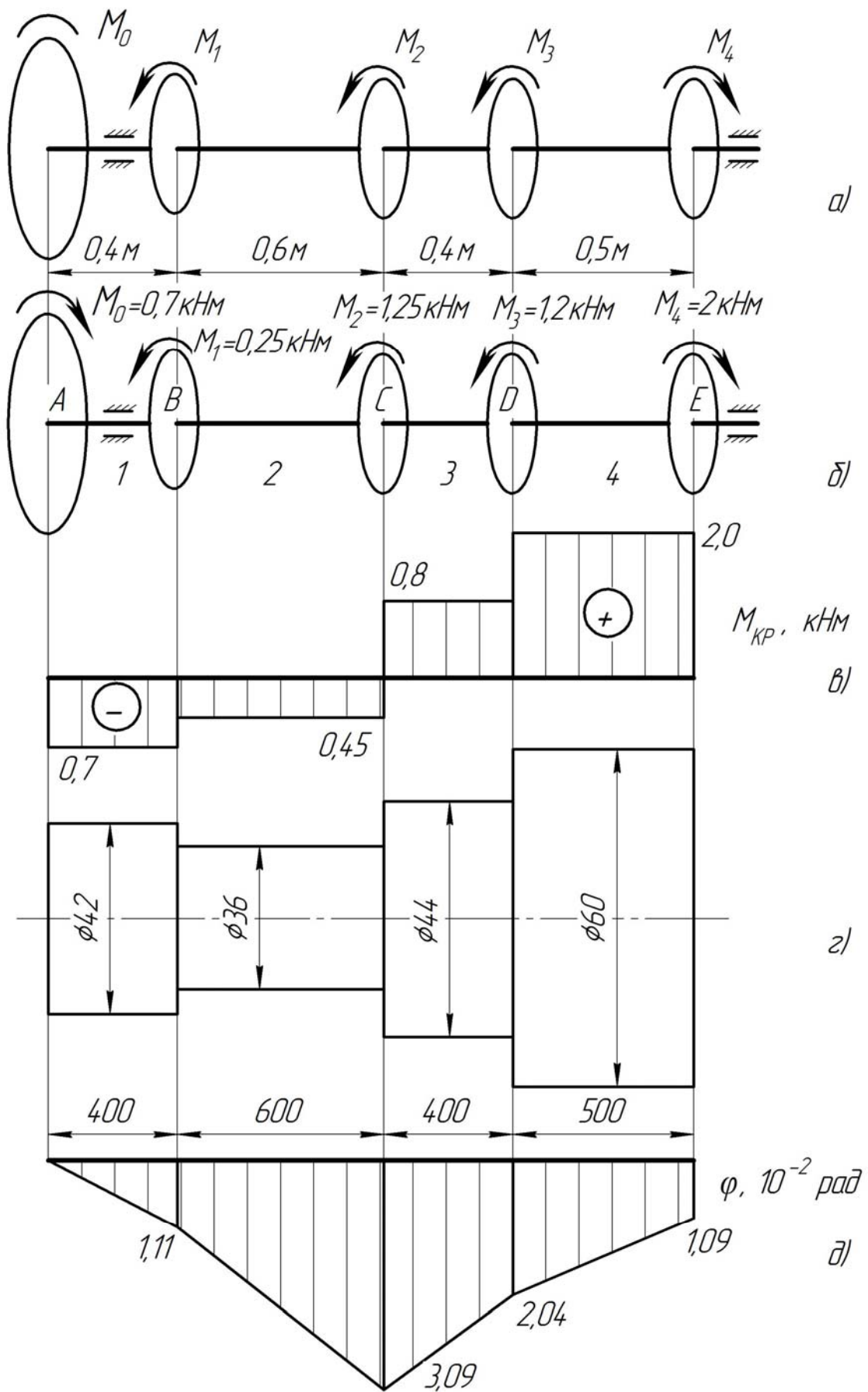


Рисунок 4.4

Визначаємо кути закручування перетинів B, C, D, E вала відносно перетину A , деформацію якого умовно приймаємо за нуль:

$$\varphi_{BA} = \varphi_1 = -1,11 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{CA} = \varphi_{BA} + \varphi_2 = -(1,11 + 1,98) \cdot 10^{-2} = -3,09 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{DA} = \varphi_{CA} + \varphi_3 = (-3,09 + 1,05) \cdot 10^{-2} = -2,04 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{EA} = \varphi_{DA} + \varphi_4 = (-2,04 + 0,95) \cdot 10^{-2} = -1,09 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

Будуємо епюру кутів закручування вала (рисунок 4.4д), прийнявши за початок відліку перетин A .

Перевірку на жорсткість вала виконаємо за умовою жорсткості

$$\theta_{\max} \leq [\theta],$$

де θ_{\max} – максимальний відносний кут закручування вала.

Визначимо відносні кути закручування на кожній ділянці вала за формулою

$$\theta_i = \frac{|\varphi_i|}{l_i}, \text{ де } i = 1, 2, 3, 4.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$\theta_1 = \frac{1,11 \cdot 10^{-2}}{0,4} = 2,78 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_2 = \frac{1,98 \cdot 10^{-2}}{0,6} = 3,30 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_3 = \frac{1,05 \cdot 10^{-2}}{0,4} = 2,63 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_4 = \frac{0,95 \cdot 10^{-2}}{0,5} = 1,90 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Маємо, що

$$\theta_{\max} = \theta_2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 3,30 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{180^\circ}{3,14} = 1,89 \frac{\text{град}}{\text{м}} < [\theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

Отже, умову жорсткості забезпечено.

5. СКЛАДНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

Через будь-яку точку деформованого масивного тіла можна провести безліч по-різному орієнтованих січних площин (площадок). Сукупність нормальних і дотичних напружень, які виникають на площадках, що проходять через дану точку, характеризують напружений стан тіла у даній точці.

Нормальні напруження σ вважаємо додатними якщо вони розтягують матеріал елемента. Дотичні напруження – додатні, коли вони утворюють пару сил відносно центра елемента, яка хоче повернути його за годинниковою стрілкою (рисунок 5.1).

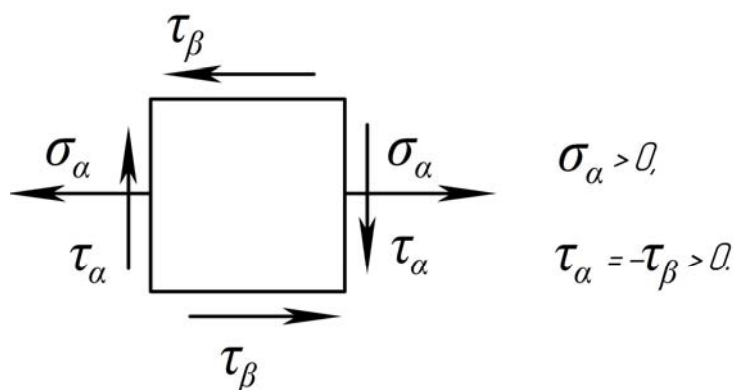


Рисунок 5.1

Дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних площадках рівні між собою, але протилежні за знаком. (Закон парності дотичних напружень).

Через кожну точку тіла можна провести три взаємно-перпендикулярні площадки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулю. Такі площадки називають **головними площадками**, а напруження, що діють на них – **головними напруженнями**. Позначають їх $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, до того ж $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Головні напруження в даній точці масивного тіла досягають екстремальних значень для заданого напруженого стану.

Є три види напруженого стану (рисунок 5.2-5.4).

1. Лінійний

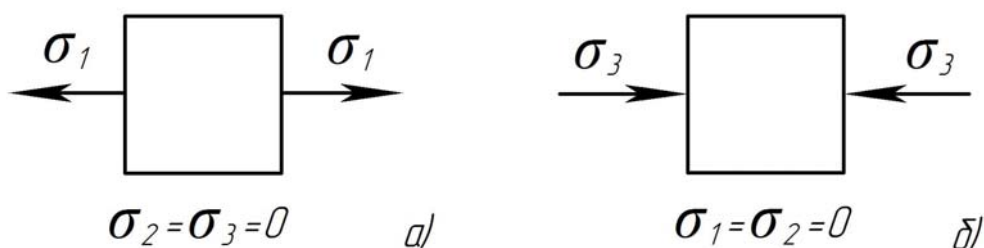


Рисунок 5.2

2. Плоский

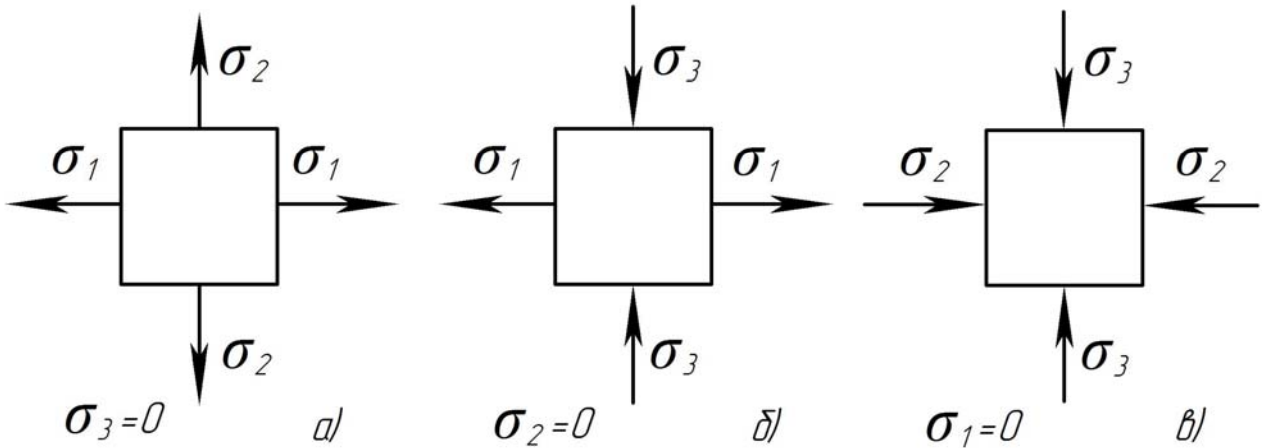


Рисунок 5.3

3. Об'ємний

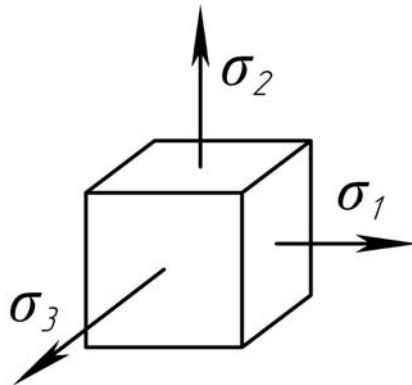


Рисунок 5.4

Надалі розглядаємо лінійний та плоский напружені стани.

Більшість задач складного напруженого стану полягає у визначенні головних напружень за відомими нормальними та дотичними напруженнями на площадках.

Головні напруження – це екстремальні (максимальні і мінімальні) напруження, за якими можна оцінювати міцність матеріалу конструкції.

У загальному випадку, для плоского напруженого стану відомі нормальні σ_α , σ_β та дотичні τ_α , τ_β напруження, які визначаємо за аналітичними залежностями для певного виду деформації. Нормальні напруження σ_α , σ_β діють на взаємно перпендикулярних площадках, а дотичні $\tau_\alpha = -\tau_\beta$. Вважаємо, що $\sigma_\alpha \geq \sigma_\beta$. Тому розрахункову схему можна прийняти такою, як зображено на рисунку 5.5.

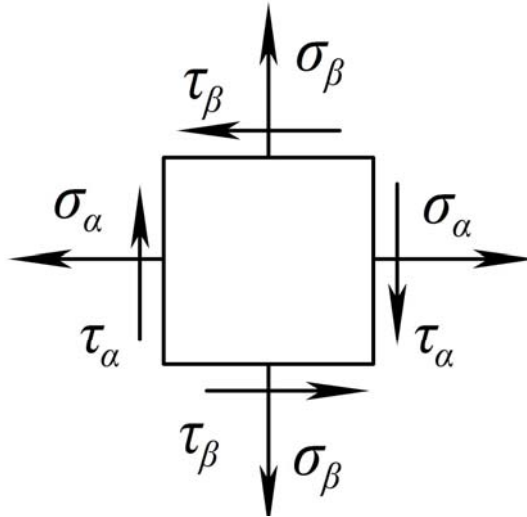


Рисунок 5.5

Величину та напрям головних напружень визначають за формулами

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{1}{2} \left[\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} \pm \sqrt{(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})^2 + 4\tau_{\alpha}^2} \right];$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{\alpha}}{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}},$$

де σ_{\max} – більше головне напруження, $\sigma_{\max} = \sigma_1$ (рисунок 5.3а, б),

$\sigma_{\max} = \sigma_2$ (рисунок 5.3в);

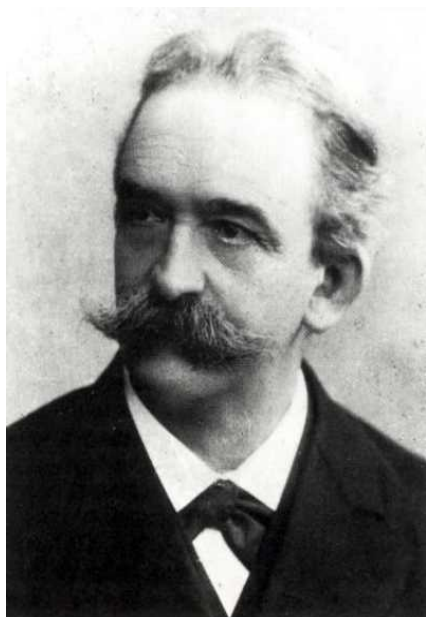
σ_{\min} – менше головне напруження, $\sigma_{\min} = \sigma_2$ (рисунок 5.3а),

$\sigma_{\min} = \sigma_3$ (рисунок 5.3б, в);

α – кут, на який необхідно повернути вектор σ_{α} , щоб визначити напрям більшого головного напруження (якщо кут додатній, то повертати потрібно проти ходу стрілки годинника).

Значення головних напружень та їх напрям можна визначити графічно з допомогою **кола Мора**. Цей метод описаний в прикладі розв'язку задачі № 5.

Мор Крістіан Отто (1835-1918)



Мор Крістіан Отто (нім. Christian Otto Mohr; 08.10.1835 – 03.10.1918) – німецький механік та інженер, відомий своїми роботами в галузі опору матеріалів та теоретичної механіки.

У 1851 році вступив до Ганноверської політехнічної школи, де вивчав інженерну справу і слухав лекції професора Моріца Рюльмана з прикладної математики та механіки. Мор закінчив політехнічну школу у 1855 році, після чого до 1866 року працював інженером на будівництві залізниць та мостів у Ганновері та Ольденбурзі.

У 1867-1873 роках – професор Вюртембергської будівельної школи в Штутгарті (там у нього навчалися, зокрема, Август Феппл і Карл фон Бах). Під час роботи у будівельній школі Мор читав лекції з різних розділів технічної механіки. Як пізніше згадував Феппл, Мор був «природженим педагогом»: хоча його лекторська техніка була не на висоті, а схеми на дошці виконані неякісно, він умів привернути увагу студентів, на свіжий і цікавий матеріал, а зміст лекцій завжди виявлявся ясним і логічно збудованим.

Мор є одним із основоположників графічної кінематики. Розвивав методи графічної статики. В галузі опору матеріалів ним було запропоновано графічний метод побудови пружної лінії в простих і нерозрізних балках, розроблений метод розрахунку нерозрізних балок за допомогою рівняння трьох моментів (цей метод був раніше запропонований Берто і Клапейрон, але узагальнений Мором у 1860 р. на випадок, коли опори балки розташовані на різній висоті). У 1870 р. Мор запропонував графічний спосіб вивчення арок, що допомогло значно спростити практику їх розрахунку.

У 1874 році Мор запропонував узагальнений метод обчислення переміщення балок, запропонований раніше Дж. До. Максвеллом. Незважаючи на очевидне авторство Максвелла, цю формулу часто називають інтегралом Мора.

У 1882 році Мор розробив графічний метод аналізу напружень при складному напруженому стані, відомий під назвою «коло Мора». Гіпотеза Мора про залежність граничних дотичних напружень від середнього нормального напруження лежить в основі теорії Мора-Кулона.

У 1873-1899 роках Мор працював на посаді професора Королівського Саксонського політехнічного інституту в Дрездені.

Задача № 5

Аналіз напруженого стану

Для заданого елемента (рисунок до задачі № 5, таблиця до задачі № 5) визначити: положення головних площадок (графічно й аналітично), величину і напрям головних напружень, лінійні деформації у напрямі всіх головних напружень, відносну зміну об'єму, питому потенціальну енергію деформації. Перевірити елемент на міцність за відповідними для заданих матеріалів теоріями міцності.

План розв'язування задачі:

1. Визначити величини і напрями σ_α , σ_β , τ_α , τ_β (індекси «В» і «Г» на схемі означають «вертикальний» і «горизонтальний», замінити їх на α і β згідно з величиною і знаком σ), зобразити заданий елемент.
2. Визначити графічно величину і напрям головних напружень. В середині заданого елемента зобразити «головний елемент», обмежений головними площадками.
3. Визначити величину τ_{\max} і на тому ж самому рисунку показати положення площадки, на якій діє τ_{\max} .
4. Перевірити отримані результати аналітично.
5. Визначити відносні деформації у напрямках всіх трьох головних напружень.
6. Визначити відносну зміну об'єму і питому потенціальну енергію деформації.
7. Визначити розрахункове напруження за однією з відповідних заданому матеріалу теорій міцності (за вибором студента) і порівняти його з допустимим, приймаючи запас міцності $n_T = 1,5$; $n_M = 2,5$.

Таблиця до задачі № 5

№ з/п	σ_B , МН/м ²	σ_T , МН/м ²	τ , МН/м ²	Матеріал	
				Чавун	Сталь
1	100	50	40	СЧ 12-28	Ст. 1
2	0	60	20	СЧ 15-32	Ст. 2
3	20	0	30	СЧ 18-36	Ст. 3
4	30	80	40	СЧ 21-40	Ст. 4
5	40	90	50	СЧ 24-44	Ст. 5
6	50	0	25	СЧ 28-48	Ст. 6
7	60	30	20	СЧ 32-52	Ст. 1
8	0	20	45	СЧ 35-56	Ст. 2
9	80	30	35	СЧ 38-60	Ст. 3
0	90	40	30	СЧ 18-36	Ст. 4

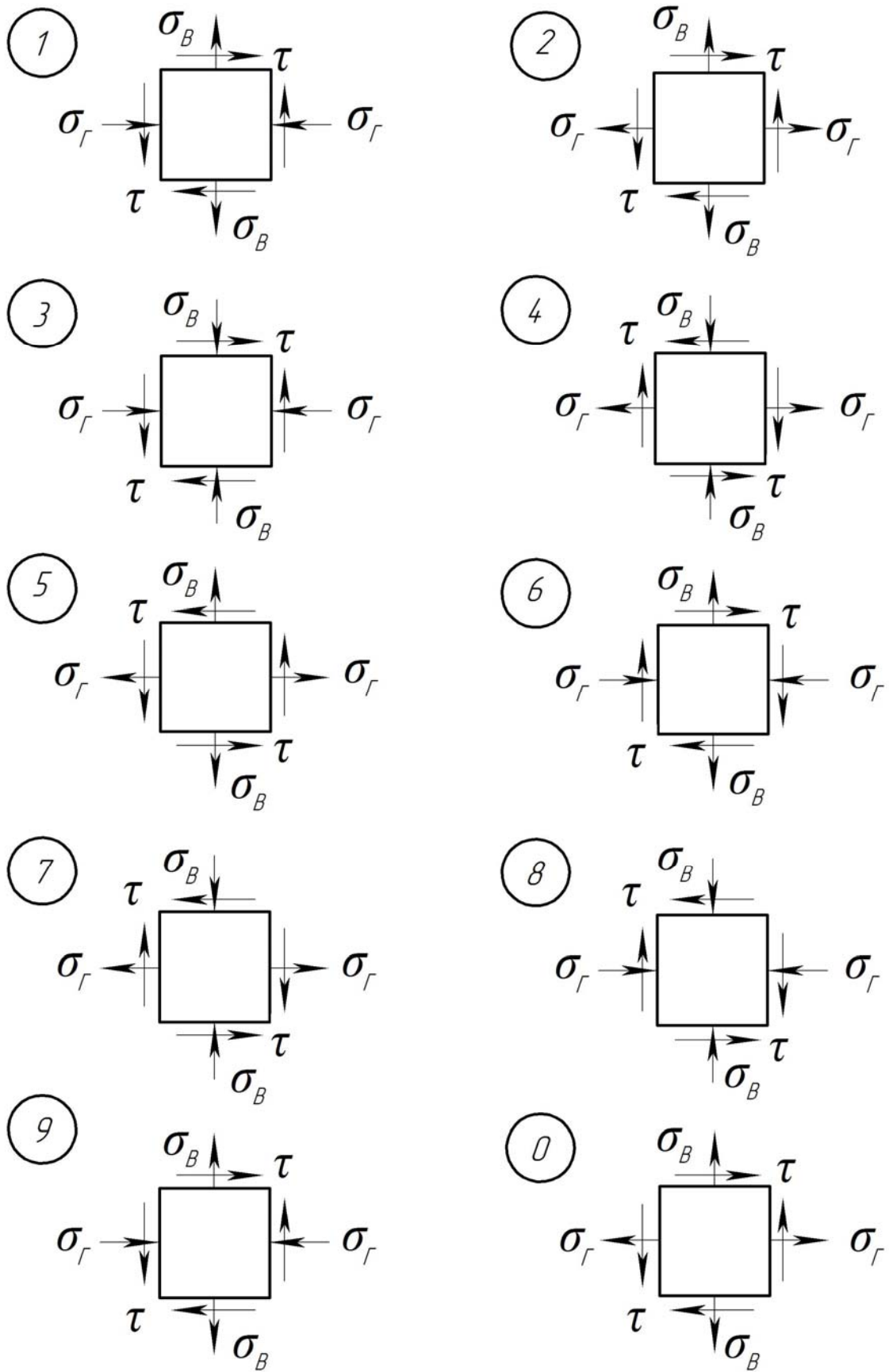


Рисунок до задачі № 5

Приклад розв'язування задачі № 5 Аналіз плоского напруженого стану

На елемент, зображений на рисунок 5.6, діють: $\sigma_B = 0$;
 $\sigma_\Gamma = 60$ МПа; $\tau = 100$ МПа. Необхідно:

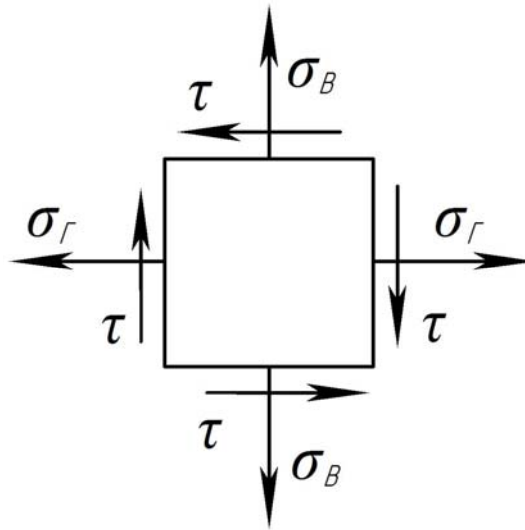


Рисунок 5.6

1. Визначити величини і напрями σ_α , σ_β , τ_α , τ_β (індекси «В» і «Г» на схемі означають «вертикальний» і «горизонтальний», замінити їх на α і β згідно з величиною і знаком σ), зобразити заданий елемент.
2. Визначити графічно величину і напрям головних напружень. В середині заданого елемента зобразити «головний елемент», обмежений головними площадками.
3. Визначити величину τ_{\max} і на тому ж самому рисунку показати положення площадки, на якій діє τ_{\max} .
4. Перевірити отримані результати аналітично.
5. Визначити відносні деформації у напрямках всіх трьох головних напружень.
6. Визначити відносну зміну об'єму і питому потенціальну енергію деформації.
7. Визначити розрахункові напруження за однією з відповідних заданому матеріалу теорій міцності для матеріалів сталь Ст. 3 і чавун СЧ 18-36. Порівняти їх значення з допустимими напруженнями, прийнявши коефіцієнти запасу міцності $n_T = 1,5$; $n_M = 2,5$.

Розв'язування

Замінімо індекси напружень, що діють на елемент, відповідно до даних задачі та розрахункової схеми (рисунок 5.7а)

$$\sigma_\alpha = \sigma_\Gamma = 60 \text{ МПа}; \quad \sigma_\beta = \sigma_B = 0; \quad \sigma_\alpha > \sigma_\beta.$$

На площадці α дотичні напруження $\tau_\alpha = 100$ МПа. За законом парності дотичних напружень

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta = 100 \text{ МПа}.$$

Викреслюємо прямокутну систему координат σ, τ . Вісь σ проводимо паралельно більшому нормальному напруженню σ_α (рисунок 5.7б). У цій системі координат визначаємо точки, які відповідають напруженням на площадках α і β – це точки D_α і D_β . Так як ці точки відображають напруження, які діють на двох взаємноперпендикулярних площадках, то відрізок $D_\alpha D_\beta$ є діаметром кола напружень. Точка перетину цього діаметра з віссю σ дає центр кола – точку C . Точки A і B , в яких коло перетинає вісь σ ($\tau = 0$), визначають величини головних нормальних напружень:

$$\sigma_1 = \overline{OA} = 135 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = \overline{OB} = -75 \text{ МПа}.$$

Напрямок напруження σ_1 визначають вектором BD'_α .

Кут між нормальними напруженнями σ_α і σ_1 становить $\alpha = -37^\circ$. Знак мінус вказує на те, що його відкладають від осі σ за годинниковою стрілкою.

Максимальне дотичне напруження τ_{\max} рівне радіусу кола Мора

$$\tau_{\max} = CT = 105 \text{ МПа}.$$

Визначаємо аналогічні величини аналітичним методом.

Величину та напрям головних напружень визначають за формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{1}{2} \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[60 + 0 \pm \sqrt{(60 - 0)^2 + 4 \cdot 100^2} \right] = \frac{60 \pm 209}{2} \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Відповідно

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{60 + 209}{2} \approx 135 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_3 = \frac{60 - 209}{2} \approx -75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 0.$$

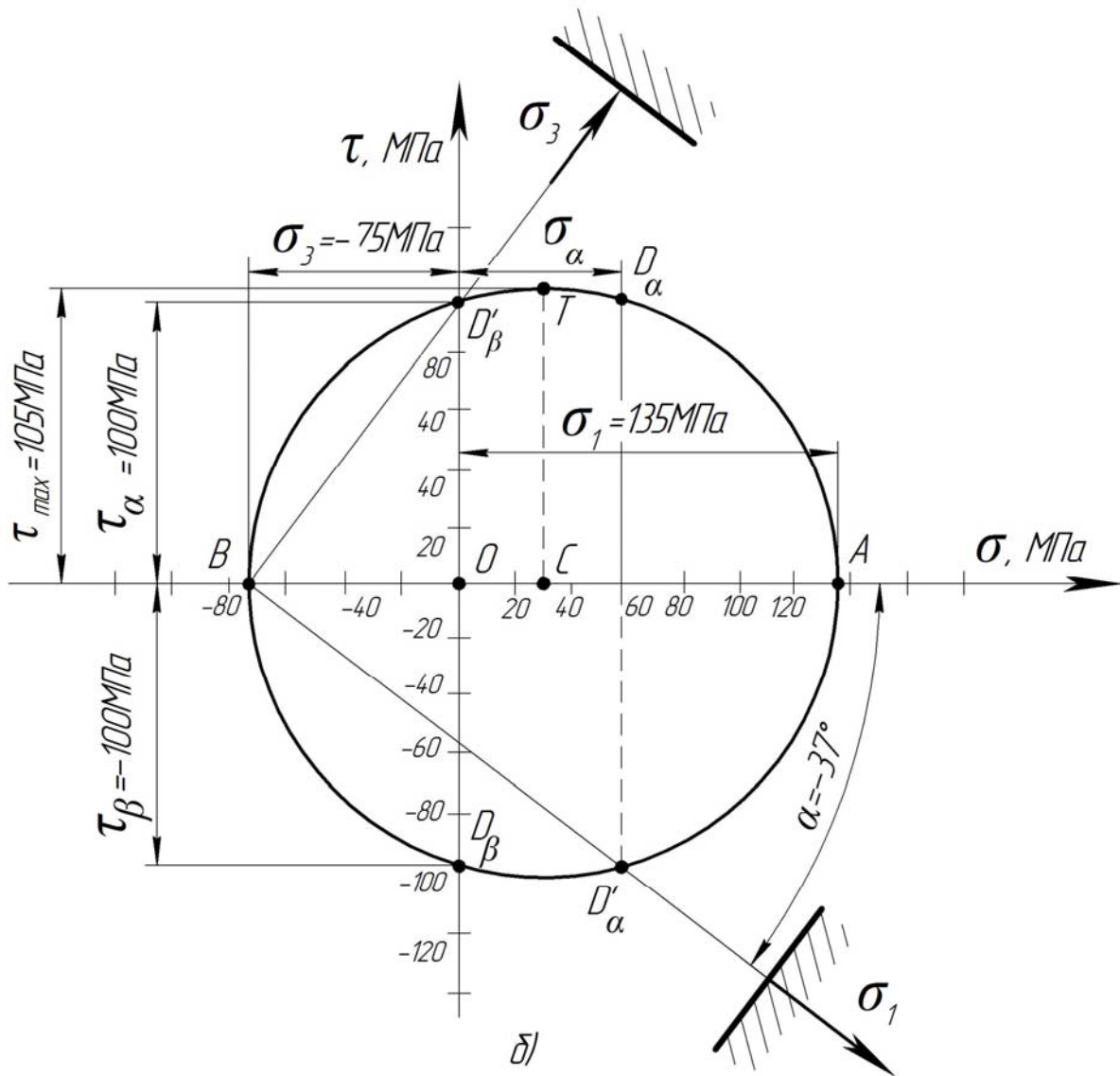
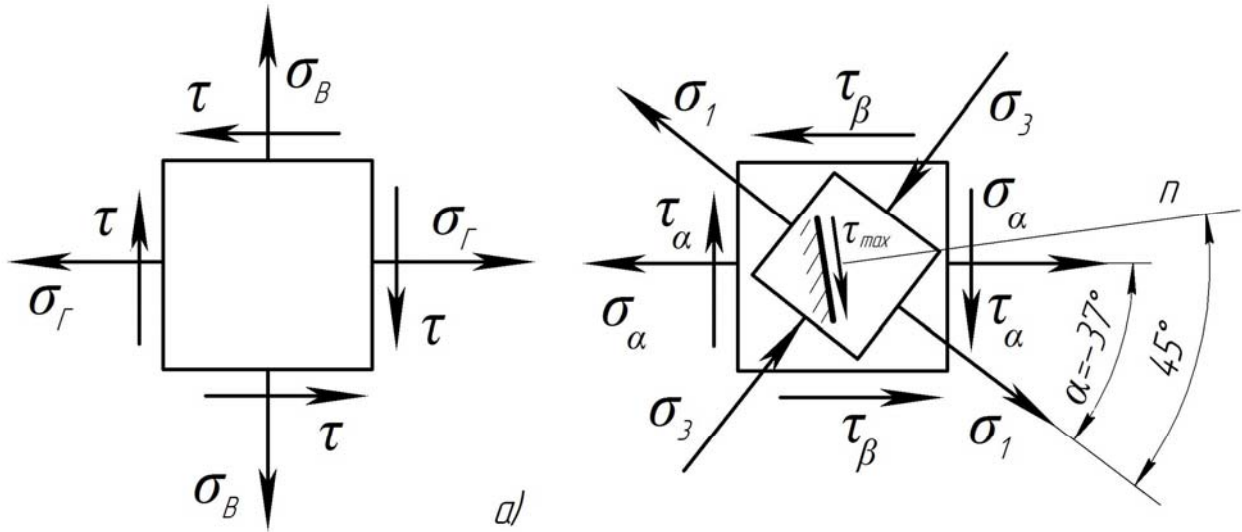


Рисунок 5.7

Кут між напрямком σ_α і більшим головним напрямком визначаємо за формулою

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} = -\frac{2 \cdot 100}{60 - 0} = -3,33;$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(3,33) = -37^\circ.$$

Максимальне дотичне напруження дорівнює

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{135 - (-75)}{2} = 105 \text{ МПа.}$$

Вектори напружень σ_1 , σ_3 , τ_{\max} і площадки, на яких вони діють, зображаємо на рисунок 5.7а.

Відносні деформації в напрямі головних напружень для сталюого елемента визначаємо за формулами:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [135 - 0,3 \cdot (-75)] = 78,8 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [0 - 0,3 \cdot (135 + 75)] = -9,00 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-75 - 0,3 \cdot 135] = -57,8 \cdot 10^{-5}.$$

Визначаємо відносну зміну об'єму

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (78,8 - 9,00 - 57,8) \cdot 10^{-5} = 12 \cdot 10^{-5}.$$

Визначаємо питому потенціальну енергію деформації сталюого елемента

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} (\sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \sigma_3 \cdot \varepsilon_3) = \\ &= \frac{1}{2} (78,8 \cdot 135 + 0 + 57,8 \cdot 75) \cdot 10^{-5} = 74,9 \cdot 10^{-3} \text{ МНм/м}^3. \end{aligned}$$

Визначаємо допустимі напруження:

а) для сталі Ст. 3

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{220}{1,5} = 147 \text{ МПа},$$

де σ_T – границя текучості, для сталі Ст.3 $\sigma_T = 220$ МПа ;

б) для чавуну СЧ 18-36:

$$[\sigma]_P = \frac{\sigma_{MP}}{n_M} = \frac{180}{2,5} = 72 \text{ МПа};$$

$$[\sigma]_C = \frac{\sigma_{MC}}{n_M} = \frac{700}{2,5} = 280 \text{ МПа},$$

де σ_{MP} , σ_{MC} – границі міцності на розтяг і стиск для крихкого матеріалу, для СЧ 18-36 $\sigma_{MP} = 180$ МПа, $\sigma_{MC} = 700$ МПа .

Для сталі Ст.3, яка є пластичним матеріалом, перевірку на міцність можна проводити за третьою або четвертою теорією міцності. За третьою теорією міцності

$$\sigma_{P3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 135 - (-75) = 210 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{P3} = 210 \text{ МПа} > [\sigma] = 147 \text{ МПа}.$$

Умову міцності не забезпечено.

Для чавуна СЧ 18-36, який є крихким матеріалом, застосовуємо теорію міцності Мора, оскільки досліджуваний напружений стан матеріалу знаходиться між простим розтягом і простим стиском

$$\sigma_P = \sigma_1 - \nu \cdot \sigma_3 = 135 - 0,257 \cdot (-75) = 154 \text{ МПа};$$

$$\sigma_P = 154 \text{ МПа} > [\sigma]_P = 72 \text{ МПа},$$

де

$$\nu = \frac{[\sigma]_P}{[\sigma]_C} = \frac{72}{280} = 0,257.$$

Умову міцності для чавуну теж не забезпечено.

6. ПРЯМИЙ ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН

Прямий поперечний згин. Внутрішні силові фактори.

Правило знаків

Згин – це стан опору бруса, в якому відбувається викривлення або зміна кривизни його осі. Брус, що працює на згин, називають *балкою*.

На згин працюють багато конструктивних елементів: осі залізничних вагонів, вали, панелі перекриттів, прольотні споруди мостів, стріли кранів, плоскі ресори автомобілів і т. д.

Плоский, або прямий, згин – це такий випадок згину, при якому викривлення осі балки відбувається у напрямі дії зовнішніх сил та навантажень, тобто в одній площині із зовнішніми силами.

Прямий поперечний згин – це такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса виникають **поперечна сила** Q та **згинальний момент** $M_{зг}$ (рисунок 6.1а). Якщо поперечна сила не виникає, то це – **чистий згин** (рисунок 6.1б).

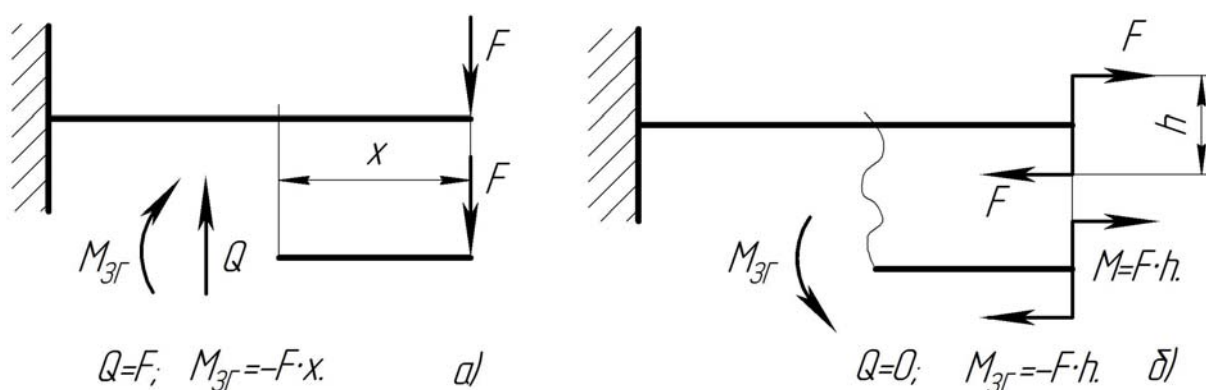


Рисунок 6.1

Поперечна сила у будь-якому поперечному перетині балки дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій від усіх зовнішніх сил, що діють справа чи зліва від перетину на вісь, перпендикулярну до осі балки, тобто

$$Q = \sum F_{iY} .$$

Згинальний момент у будь-якому поперечному перетині балки дорівнює алгебраїчній сумі моментів від усіх зовнішніх сил, що діють справа чи зліва від перетину відносно центра ваги перетину

$$M_{зг} = \sum M(F_i) .$$

Для балки, яка перебуває у рівновазі під дією плоскої системи сил, перпендикулярних до осі (тобто системи паралельних сил), алгебраїчна сума всіх зовнішніх сил дорівнює нулю. Отже, **сума зовнішніх сил, які діють на балку зліва від перетину, чисельно дорівнює сумі сил, які діють на балку справа від перетину.**

Правила знаків статичи непридатні для встановлення знаків поперечної сили Q і згинального моменту $M_{зг}$.

Правило знаків можна зобразити графічно – поперечної сили (рисунок 6.2) та згинального моменту (рисунок 6.3).

Якщо сума зовнішніх сил, які діють зліва від перетину, дає рівнодійну, направлену вгору, то **поперечну силу** в перетині вважають **додатною**. І навпаки: для частини балки, розміщеної справа від перетину, знаки поперечної сили будуть протилежними (див. рис. 6.2). Або поперечні сили додатні, якщо вони намагаються повернути елемент балки за годинниковою стрілкою.

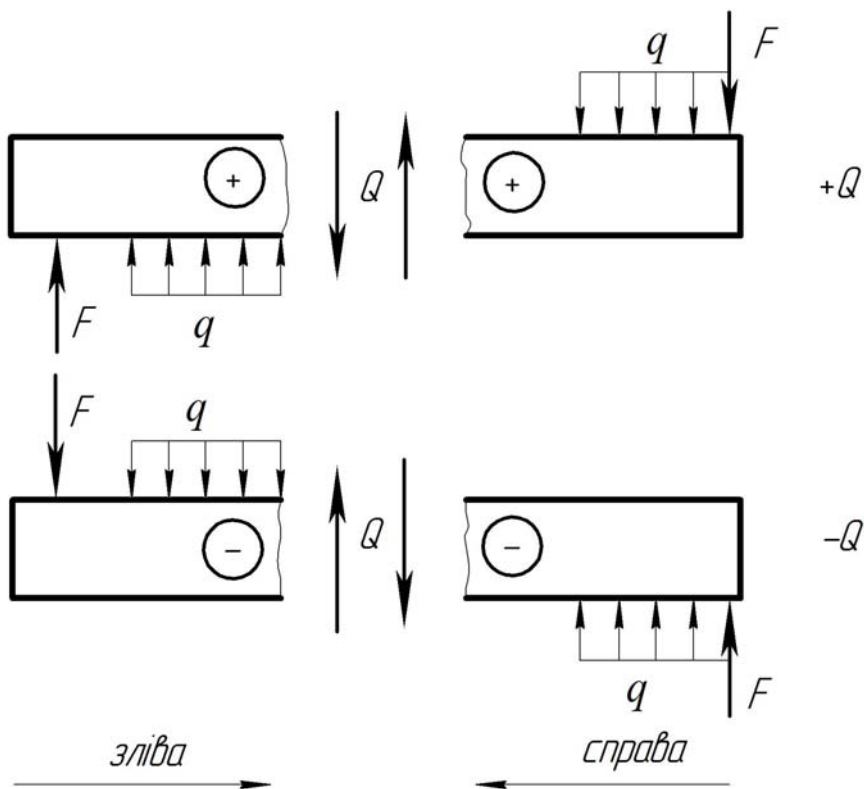


Рисунок 6.2

Якщо зовнішнє навантаження намагається зігнути балку опуклістю вниз (розтягуються нижні волокна), то **згинальний момент** у перетині вважають **додатним**, і навпаки (див. рис. 6.3).

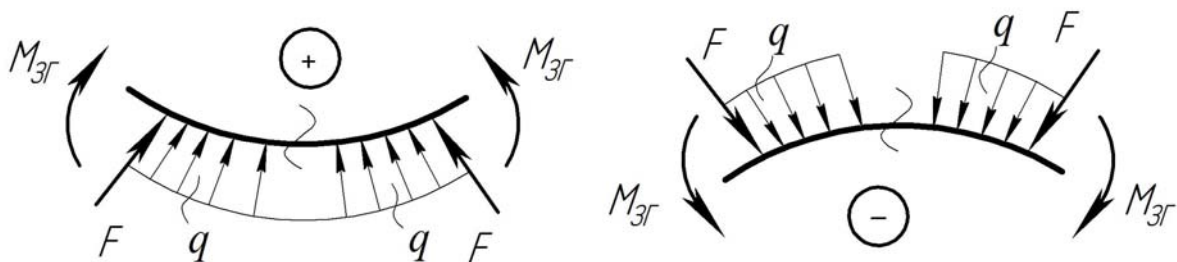


Рисунок 6.3

Користуючись цими правилами, треба уявити мислено *перетин балки жорстко закріпленням*, а в'язі – відкинутими і заміненіми реакціями.

Для визначення опорних реакцій користуються правилами знаків статyki; для визначення знаків згинального моменту і перерізуючої сили – правилами опору матеріалів.

Усі сили, активні та реактивні, – це навантаження балки.

Спрощене уявлення реальних опорних елементів, тобто схематизація їх, що використовується для побудови розрахункових схем балок у стані плоского згину, дає змогу виділити три основні типи опор: шарнірно-рухома, шарнірно-нерухома та затиснення (жорстке закріплення). Кожну з них моделюють у вигляді стрижнів (рисунок 6.4).



а) шарнірно-рухома; б) шарнірно-нерухома; в) жорстке закріплення

Рисунок 6.4 – Схеми опор балок

Диференціальні залежності при прямому поперечному згині

Між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження існують диференціальні залежності, в основі яких лежить **теорема Журавського**: *поперечна сила дорівнює першій похідній від згинального моменту за абсцисою перетину балки.*

Диференціальні залежності між силовими факторами при згині

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x); \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dQ(x)}{dx} = q(x).$$

Друга похідна від згинального моменту або перша похідна від поперечної сили за абсцисою перетину балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження.

Епюри поперечних сил та згинальних моментів

Для наочного зображення розподілу вздовж осі балки поперечних сил і згинальних моментів будують епюри, які дають змогу визначити *можливий небезпечний перетин балки*, встановити значення поперечної сили і згинального моменту в цьому перетині. Епюри поперечних сил та згинальних моментів можна будувати двома способами.

Перший спосіб. Записують аналітичні вирази поперечних сил і згинальних моментів для кожної ділянки як функції поточної координати x поперечного перетину від зовнішніх навантажень

$$Q = f_1(x), \quad M_{зГ} = f_2(x).$$

Потім визначають значення внутрішніх силових факторів на границях ділянок і, за отриманими результатами, будують епюри.

Другий спосіб. Будують епюри за характерними точками і значеннями поперечних сил і згинальних моментів на межах ділянок. Застосовуючи цей спосіб, у більшості випадків можна обійтися без складання функцій поперечних сил і згинальних моментів.

Побудову епюр внутрішніх силових факторів при згині покажемо на прикладах.

Приклад 1 (рисунок 6.5).

Визначаємо опорні реакції балки (рисунок 6.5а)

$$\sum M_C = 0; \quad R_B(a+b) - F \cdot b = 0,$$

звідки $R_B = \frac{F \cdot b}{a+b};$

$$\sum M_B = 0; \quad \sum M_B = R_C(a+b) - F \cdot a = 0,$$

звідки $R_C = \frac{F \cdot a}{a+b}.$

Проводимо перевірку правильності визначення опорних реакцій балки

$$\sum Y = R_B - F + R_C = \frac{F \cdot b}{a+b} - F + \frac{F \cdot a}{a+b} = 0.$$

Опорні реакції балки визначені правильно.

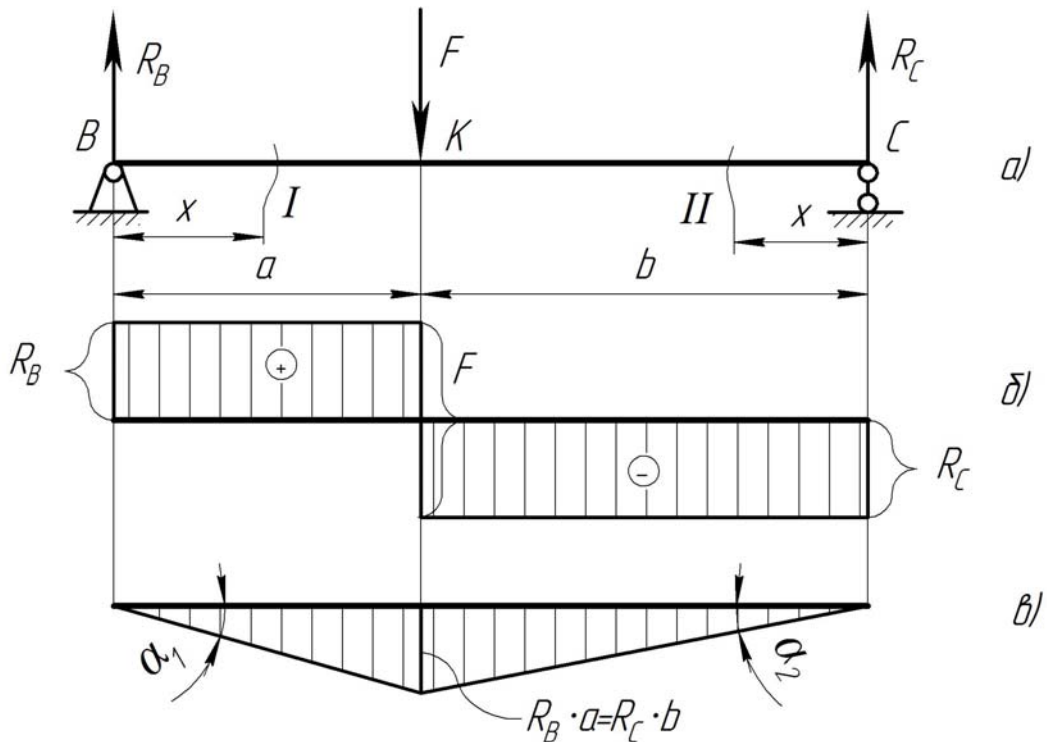


Рисунок 6.5

Використаємо перший спосіб побудови епюр. Розбиваємо балку на ділянки. Для кожної ділянки записуємо функції $Q(x)$, $M_{3\Gamma}(x)$, а також границі, в яких ці функції справедливі (рисунок 6.5а):

ділянка I, $0 \leq x \leq a$ (зліва)

$$Q(x) = R_B = \frac{F \cdot b}{a+b}; \quad Q(0) = Q(a) = \frac{F \cdot b}{a+b};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = R_B \cdot x = \frac{F \cdot b}{a+b} \cdot x; \quad M_{3\Gamma}(0) = 0; \quad M_{3\Gamma}(a) = \frac{F \cdot b \cdot a}{a+b};$$

ділянка II, $0 \leq x \leq b$ (справа)

$$Q(x) = -R_C = -\frac{F \cdot a}{a+b}; \quad Q(0) = Q(b) = -\frac{F \cdot a}{a+b};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = R_C \cdot x = \frac{F \cdot a}{a+b} \cdot x; \quad M_{3\Gamma}(0) = 0; \quad M_{3\Gamma}(b) = \frac{F \cdot b \cdot a}{a+b}.$$

За отриманими результатами будуюмо епюри Q і $M_{3\Gamma}$ (рисунок 6.5 б, в).

З епюри $M_{зГ}$ (див. рис. 6.5в) визначаємо небезпечний перетин, тобто перетин, в якому діє максимальний згинальний момент, – це перетин K

$$M_{зГ \max} = \frac{F \cdot b \cdot a}{a + b}.$$

Визначаємо значення поперечних сил, використовуючи диференціальні залежності (для перевірки):

- на першій ділянці

$$\frac{dM_{зГ}(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_1 = Q_1 = \frac{M_{зГ \max}}{a} = R_B;$$

- на другій ділянці

$$\frac{dM_{зГ}(x)}{dx} = -\operatorname{tg} \alpha_2 = Q_2 = -\frac{M_{зГ \max}}{b} = -R_C.$$

Приклад 2 (рисунок 6.6). Використаємо другий спосіб побудови епюр поперечних сил Q і згинальних $M_{зГ}$.

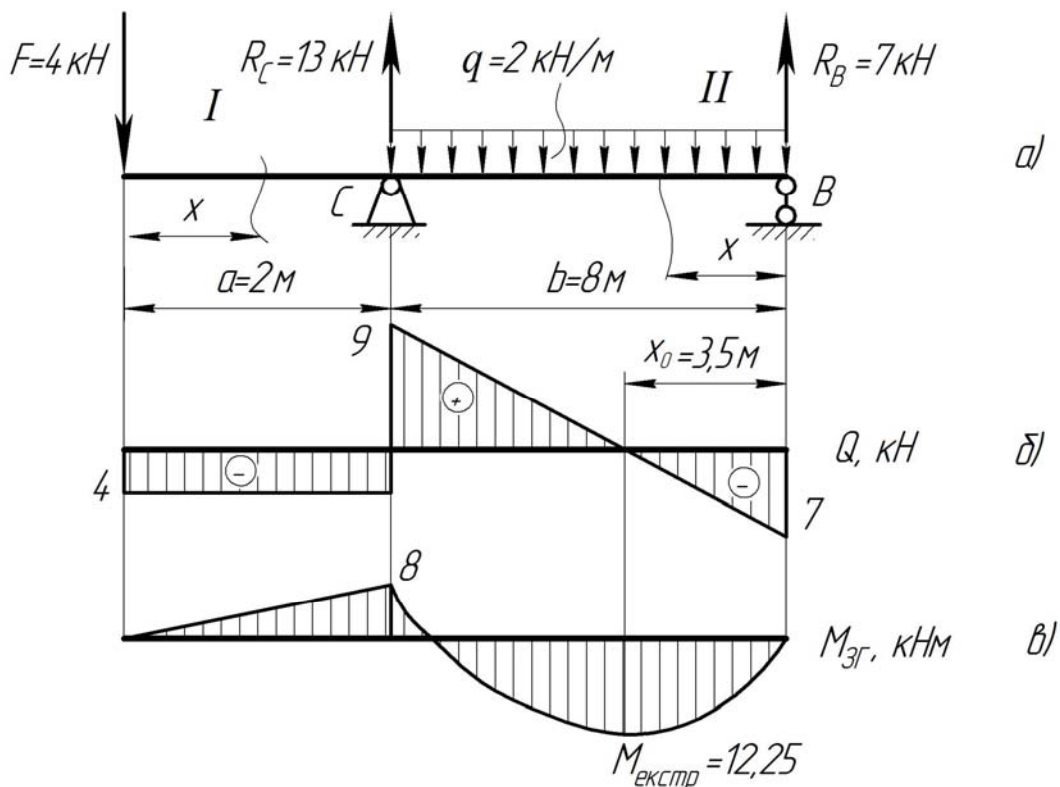


Рисунок 6.6

Аналітично визначимо величину екстремального моменту, у даному випадку – це небезпечний перетин балки.

Координата $x_0 = R_B / q = 7 / 2 = 3,5$ м.

$$M_{зГ}(x_0) = R_B \cdot x_0 - q \cdot x_0^2 / 2 = 7 \cdot 3,5 - 2 \cdot 3,5^2 / 2 = 12,25 \text{ кНм.}$$

I. Контроль правильності побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів за розрахунковою схемою балки

Для епюри поперечних сил:

1. На ділянці балки, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням q , епюра поперечних сил зображується прямою, нахиленою до осі балки.

2. На ділянці балки, вільній від q , епюра поперечних сил зображується прямою, паралельною осі балки.

3. Під перетином балки, де прикладена зосереджена сила, на епюрі поперечних сил є «стрибок», що дорівнює величині прикладеної сили.

4. У перетині, де прикладена зосереджена пара сил (зосереджений момент), епюра поперечних сил не змінює свого значення.

Для епюри згинальних моментів:

1. На ділянці балки, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням q , епюра згинальних моментів зображується квадратичною параболою.

2. На ділянках балки, вільних від q , епюра згинальних моментів зображується прямою лінією, нахиленою до осі балки.

3. Згинальний момент досягає екстремальних значень у перетинах, де поперечні сили дорівнюють нулю.

4. Під перетином балки, де прикладена зосереджена пара сил (зосереджений момент), на епюрі згинальних моментів є «стрибок», що дорівнює величині зосередженого моменту.

5. На ділянках балки, де поперечна сила дорівнює нулю, балка зазнає чистого згину, епюра згинальних моментів – пряма, паралельна осі балки.

II. Перевірка епюри згинальних моментів із використанням диференціальної залежності при згині (за епюрою Q).

Виконують перевірку за епюрою поперечних сил, використовуючи залежність

$$\frac{dM_{зГ}(x)}{dx} = Q(x),$$

враховуючи, що епюра Q – це графічне зображення похідної від згинального моменту $M_{зГ}$:

1. Функція згинального моменту $M_{зГ}(x)$ зростає, якщо похідна функції, тобто $Q(x)$ – додатна.

2. Функція згинального моменту $M_{зГ}(x)$ спадає, якщо похідна функції, тобто $Q(x)$ – від'ємна.

3. Функція згинального моменту $M_{3Г}(x)$ досягає екстремального значення у точці, де її похідна $Q(x)$ дорівнює нулю. Функцію у цьому перетині обов'язково необхідно досліджувати на екстремум.

Напруження при згині. Розрахунок на міцність

Руйнівним внутрішнім силовим фактором при прямому поперечному згині, в більшості випадків, є згинальний момент. Від дії згинального моменту у поперечному перетині балки виникають нормальні напруження, які визначають за формулою

$$\sigma = \frac{M_{3Г}}{I_X} \cdot y,$$

де y – відстань (координата) від осі X (нейтральної осі) до точок поперечного перетину, в яких визначають нормальне напруження (рисунок 6.7а).

Аналізуючи цю формулу, отримують епюру розподілу нормальних напружень за висотою перетину (рисунок 6.7б).

Максимальні нормальні напруження та умова міцності при згині за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{3Г.\max}}{I_X} \cdot y_{\max} = \frac{M_{3Г.\max}}{W_X} \leq [\sigma],$$

де $M_{3Г.\max}$ – максимальний згинальний момент, визначають з епюри $M_{3Г}$;
 W_X – осьовий момент опору поперечного перетину (див. тему 3).

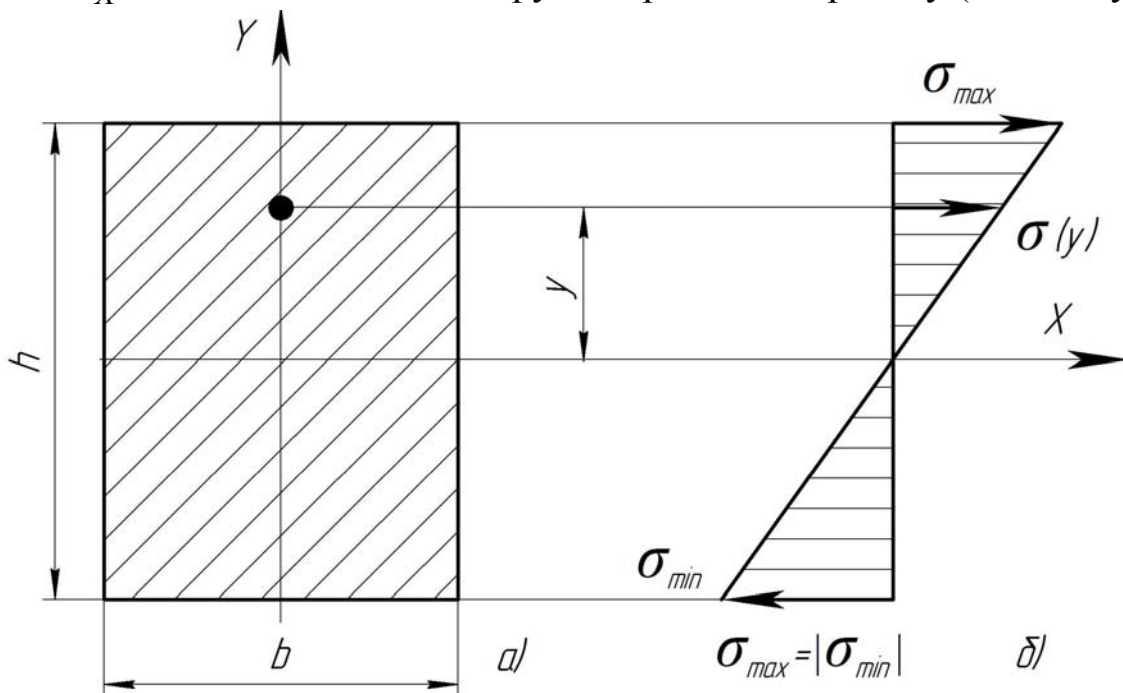


Рисунок 6.7

У поперечних перетинах балки при деформації поперечного згину виникають не тільки нормальні, а й дотичні напруження в результаті дії поперечної сили Q , які спричиняють деформацію зсуву. Відповідно до закону парності такі самі дотичні напруження виникають і в поздовжніх перетинах, паралельних нейтральному шару. Наявність дотичних напружень у поздовжніх перетинах при поперечному згині підтверджується появою в дерев'яних балках поздовжніх тріщин.

Значення дотичних напружень визначають за формулою Д.І. Журавського

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x(y)}{b(y) \cdot I_X},$$

де τ – дотичне напруження в розглядуваній точці поперечного перетину;

Q_y – абсолютне значення поперечної сили в розглядуваному перетині;

$S_x(y)$ – абсолютне значення статичного момента частини перетину, відсіченої на рівні розглядуваної точки;

$b(y)$ – ширина перетину балки на рівні, де визначають дотичні напруження;

I_X – осьовий момент інерції всього перетину відносно його центральної вісі X .

Абсолютне значення статичного момента частини перетину, відсіченої на рівні розглядуваної точки визначають за формулою

$$S_x(y) = A_{відс} \cdot y^*,$$

тут $A_{відс}$ – площа відсіченої частини перетину;

y^* – віддалення (координата) центра ваги C_B площі відсіченої частини відносно центральної вісі.

Для поперечного перетину значення Q_y та I_X є сталі величини.

Залежно від форми поперечного перетину бруса ширина $b(y)$ перетину може бути змінною величиною (при наявності форми перетину функція $b(y)$ – відома). На відміну від Q_y та I_X значення статичного момента $S_x(y)$ відсіченої частини перетину має змінну величину, яка залежить від y^* .

Для балки прямокутного поперечного перетину зі сторонами b і h (рисунок 6.8а)

- площа частини перетину, відсіченої на рівні розглядуваного шару волокон mn

$$A_{\text{видс}} = b \left(\frac{h}{2} - y \right);$$

- статичний момент цієї площі (тобто на рівні mn)

$$S_{\text{видс}} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Осьовий момент інерції прямокутного поперечного перетину

$$I_X = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

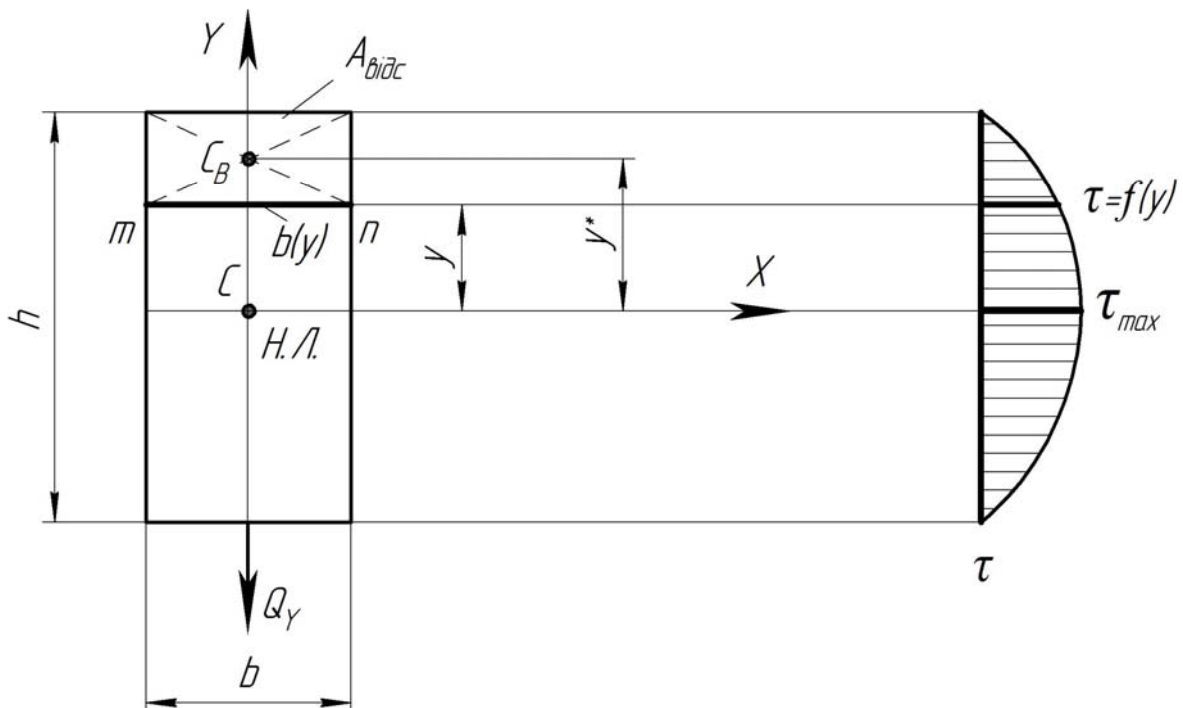


Рисунок 6.8

Визначимо закон розподілу дотичних напружень для балки прямокутного поперечного перетину. Виконаємо це для шару волокон на рівні mn (див. рис. 6.8а)

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{\text{видс}}}{b \cdot I_X} = \frac{Q \left(\frac{b}{2} \right) \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{6Q \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \cdot h^3};$$

коли $y = \pm \frac{h}{2}$, то $\tau = 0$;

$$\text{коли } y = 0, \text{ то } \tau = \tau_{\max} = \frac{3Q}{2b \cdot h} = \frac{3Q}{2A} = \frac{3}{2} \tau,$$

де τ – дотичні напруження зсуву.

Епюра дотичних напружень по висоті прямокутного перетину окреслюється **квадратичною параболою** (рисунок 6.8б). Тобто у верхньому і нижньому шарах волокон дотичні напруження дорівнюють нулю, а у волокнах нейтрального шару вони досягають максимального значення.

Отже, при згині **дотичні напруження** у балках **відповідають деформації зсуву**, у результаті чого плоскі поперечні перетини при прямому поперечному згині не залишаються плоскими, як при чистому згині, а викривляються.

Більшість балок при згині розраховують тільки за нормальними напруженнями. **За дотичними напруженнями перевіряють три види балок:**

- 1) дерев'яні балки, бо дерево погано працює на сколювання;
- 2) вузькі балки, наприклад, двотаврові, бо максимальні дотичні напруження обернено пропорційні ширині нейтрального шару;
- 3) короткі балки, бо при відносно невеликих згинаючому моменті і нормальних напруженнях у таких балках можуть виникати значні поперечні сили і дотичні напруження.

Умова міцності при згині за дотичними напруженнями

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y \max} \cdot S_X(y)_{\max}}{b(y) \cdot I_X} \leq [\tau],$$

де Q_{\max} – максимальна поперечна сила, визначають з епюри Q ;

$S_X(y)_{\max}$ – максимальний статичний момент площі поперечного перетину;

$[\tau]$ – допустиме дотичне напруження, $[\tau] \approx 0,5 [\sigma]$.

Журавський Дмитро Іванович (1821 – 1891)



Журавський Дмитро Іванович (17.12.1821 – 18.11.1891) – інженер, один із піонерів мостобудування та будівельної механіки в Росії.

Журавський Д.І. закінчив Ніжинський ліцей і вступив до Петербурзького інституту корпусу інженерів шляхів сполучення. Основним вчителем Журавського Д.І. був Михайло Остроградський, який і вплинув на подальшу його наукову діяльність. Журавський Д.І. закінчив інститут у 1842 році.

На початку своєї кар'єри Журавський Д.І. брав участь у розробці та плануванні Московсько-Петербурзької залізниці. У 1857-1858 роках він керував реконструкцією Петропавлівського собору в Санкт-Петербурзі.

У 1871-1876 роках Журавський Д.І. брав участь у реконструкції системи Маріївського каналу.

Журавський Д.І. був удостоєний у 1855 року престижної Демидівської премії Російської академії наук.

Значний внесок Журавського Д.І. в теорію опору матеріалів – це аналіз розподілу дотичних напружень при прямому поперечному згині балок. У результаті він вивів формулу для визначення дотичних напружень при прямому поперечному згині. Ця формула носить його ім'я – формула Журавського. Метод Журавського високо оцінив французький механік та математик Адемар Сен-Венсан.

Теоретичні здобутки Журавського Д.І. успішно використовували і використовують під час проектування мостів. Завдяки його розробкам будували і будують та безаварійно експлуатуються розкосні арки довжиною до 60 метрів.

Задача № 6
Побудова епюр поперечних сил і
згинальних моментів для консольної балки

Для заданої консольної балки (рисунок до задачі № 6, таблиця до задачі № 6) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, якщо $a = 4$ м.

План розв'язування задачі:

1. Записати функції поперечних сил і згинальних моментів на ділянках консолі.
2. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

Таблиця до задачі № 6

№ з/п	q , кН/м	F , кН	M , кНм	b , м	c , м
1	2	$1,5 q \cdot a$	$0,5 q \cdot a^2$	$\frac{3}{4} a$	$\frac{1}{4} a$
2	3	$q \cdot a$	$q \cdot a^2$	$\frac{3}{4} a$	$\frac{1}{4} a$
3	6	$0,5 q \cdot a$	$1,2 q \cdot a^2$	$\frac{1}{2} a$	$\frac{1}{4} a$
4	2	$q \cdot a$	$q \cdot a^2$	$\frac{1}{2} a$	$\frac{1}{4} a$
5	4	$2 q \cdot a$	$1,5 q \cdot a^2$	$\frac{1}{2} a$	$\frac{1}{4} a$
6	6	$q \cdot a$	$q \cdot a^2$	$\frac{1}{2} a$	$\frac{1}{4} a$
7	2	$0,5 q \cdot a$	$1,5 q \cdot a^2$	$\frac{3}{4} a$	$\frac{1}{2} a$
8	5	$1,5 q \cdot a$	$q \cdot a^2$	$\frac{3}{4} a$	$\frac{1}{2} a$
9	6	$q \cdot a$	$q \cdot a^2$	$\frac{1}{2} a$	$\frac{1}{4} a$
0	3	$2 q \cdot a$	$0,2 q \cdot a^2$	$\frac{1}{2} a$	$\frac{1}{4} a$

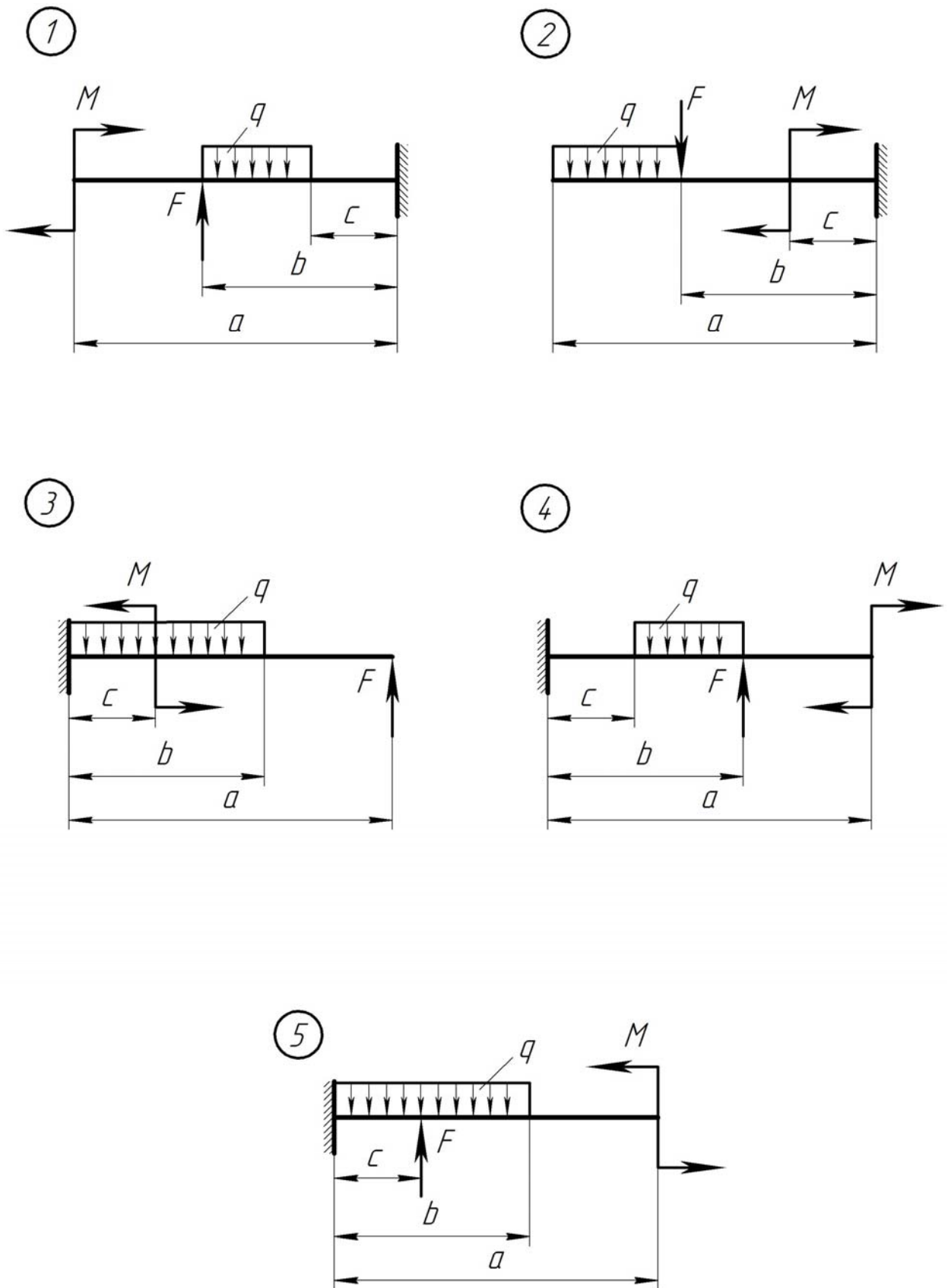
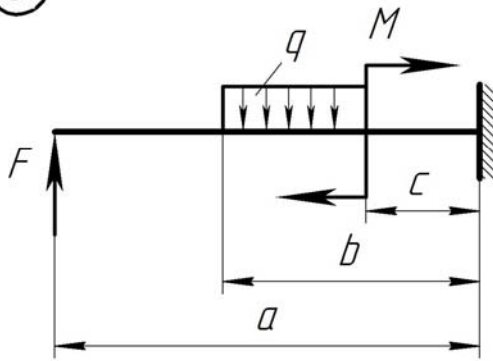
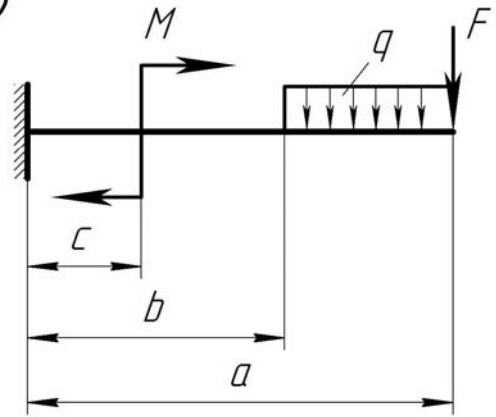


Рисунок до задачі № 6

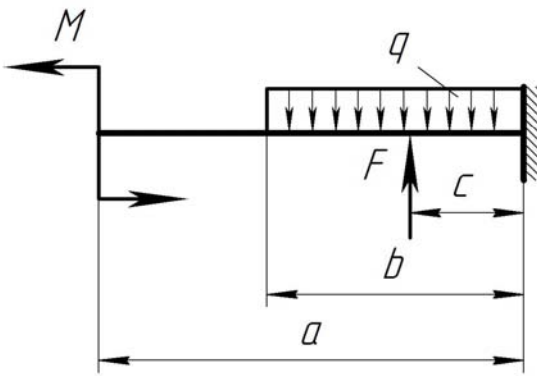
6



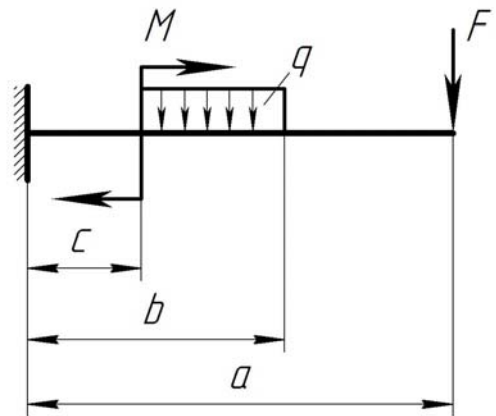
7



8



9



0

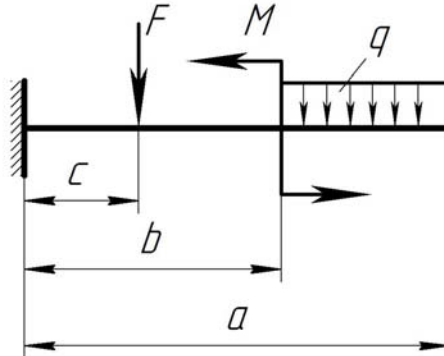


Рисунок до задачі № 6 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі № 6
Побудова епюр поперечних сил і
згинальних моментів для консолі

Для заданої консольної балки (рисунок 6.9а) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

Розв'язування

Розбиваємо балку на три ділянки. Границями ділянок є перетини, де прикладені зосереджена сила F , зосереджений момент M та перетини, де починається і закінчується розподілене навантаження q .

При прямому поперечному згині в перетинах виникають такі внутрішні силові фактори – згинальний момент $M_{зГ}(x)$ і поперечна сила $Q(x)$. Для їх визначення використовуємо метод перетинів.

На кожній ділянці балки (для консольної балки розглядаємо ділянки з вільного кінця) робимо умовні перетини, відкидаємо ліву частину балки і розглядаємо рівновагу правої. Сили взаємодії частин балки замінюємо внутрішніми зусиллями $Q(x)$ і $M_{зГ}(x)$ (рисунок 6.9б). Визначаємо їх як функції поточної координати x на основі рівнянь рівноваги $\sum Y = 0$; $\sum M_0 = 0$, використовуючи правило знаків. Визначаємо поперечні сили і згинальні моменти на границях кожної ділянки консолі:

Ділянка I, $0 \leq x \leq 1,3$ м (справа),

$$Q(x) = -F = -19 \text{ кН};$$

$$Q(0) = Q(1,3) - F = -19 \text{ кН};$$

$$M_{зГ}(x) = F \cdot x;$$

$$M_{зГ}(0) = 0; \quad M_{зГ}(1,3) = 19 \cdot 1,3 = 24,7 \text{ кНм}.$$

Ділянка II, $1,3 \text{ м} \leq x \leq 3,2$ м (справа),

$$Q(x) = -F + q \cdot (x - 1,3);$$

$$Q(1,3) = -19 \text{ кН};$$

$$Q(3,2) = -19 + 13 \cdot (3,2 - 1,3) = 5,7 \text{ кН};$$

$$M_{зГ}(x) = F \cdot x - q \cdot \frac{(x - 1,3)^2}{2};$$

$$M_{зГ}(1,3) = 19 \cdot 1,3 = 24,7 \text{ кНм};$$

$$M_{3\Gamma}(3,2) = 19 \cdot 3,2 - 13 \cdot \frac{(3,2 - 1,3)^2}{2} = 37,3 \text{ кНм.}$$

Досліджуємо функцію $M(x)$ на екстремум

$$\frac{dM_{3\Gamma}(x)}{dx} = Q(x_0) = F - q \cdot (x_0 - 1,3) = 0;$$

$$x_0 = \frac{F + 1,3 \cdot q}{q} = \frac{19 + 1,3 \cdot 13}{13} = 2,76 \text{ м;}$$

тоді

$$M_{3\Gamma}(2,76) = M_{3\Gamma \max} = 19 \cdot 2,76 - 13 \cdot \frac{(2,76 - 1,3)^2}{2} = 38,6 \text{ кНм.}$$

Зазначимо, що необхідною умовою екстремума функції $M_{3\Gamma}(x)$ на ділянці є нульове значення на цій ділянці $Q(x)$.

Ділянка III, $3,2 \text{ м} \leq x \leq 4,8 \text{ м}$ (справа),

$$Q(x) = -F + q \cdot (x - 1,3);$$

$$Q(3,2) = -19 + 13 \cdot (3,2 - 1,3) = 5,7 \text{ кН;}$$

$$Q(4,8) = -19 + 13 \cdot (4,8 - 1,3) = 26,5 \text{ кН;}$$

$$M_{3\Gamma}(x) = F \cdot x - q \cdot \frac{(x - 1,3)^2}{2} - M;$$

$$M_{3\Gamma}(3,2) = 19 \cdot 3,2 - 13 \cdot \frac{(3,2 - 1,3)^2}{2} - 16 = 21,3 \text{ кНм;}$$

$$M_{3\Gamma}(4,8) = 19 \cdot 4,8 - 13 \cdot \frac{(4,8 - 1,3)^2}{2} - 16 = -4,43 \text{ кНм.}$$

За отриманими результатами будемо епюри Q і $M_{3\Gamma}$ (рисунок 6.9в, з). Епюру згинальних моментів будемо зі сторони розтягнутих волокон, тобто додатні значення згинальних моментів відкладаємо вниз від осі, а від'ємні – вгору.

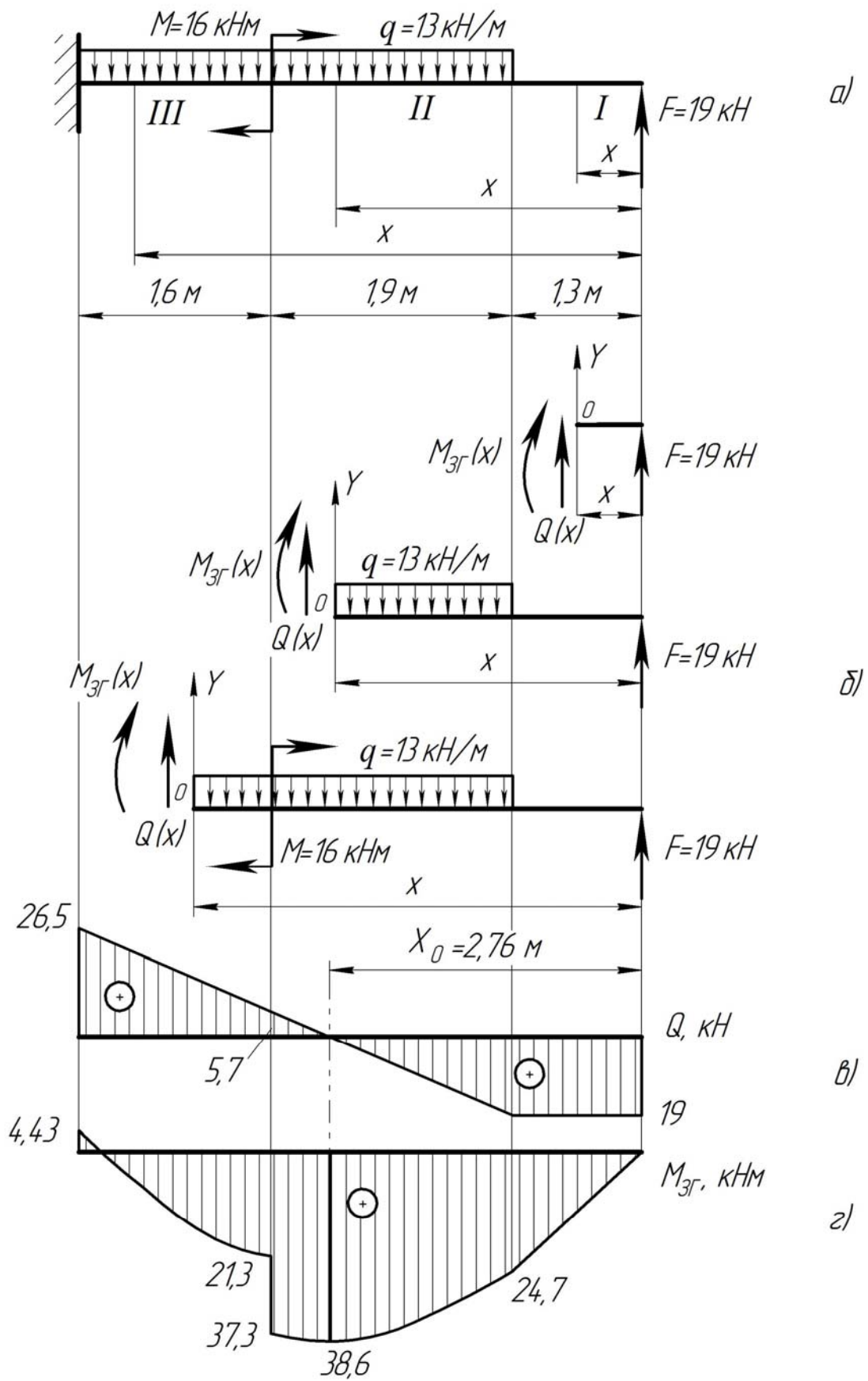


Рисунок 6.9

Задача № 7
Побудова епюр поперечних сил і
згинальних моментів для балки на двох опорах

Для заданої балки (рисунок до задачі № 7, таблиця до задачі № 7) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

План розв'язування задачі:

1. Визначити опорні реакції, записати функції поперечних сил і згинальних моментів на ділянках балки.
2. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

Таблиця до задачі № 7

№ з/п	q , кН/м	F , кН	M , кНм	a , м	№ з/п	q , кН/м	F , кН	M , кНм	a , м
1	4	6	8	3	6	3	3	7	3
2	5	7	9	2	7	2	2	4	5
3	3	3	5	4	8	3	4	5	4
4	2	4	6	5	9	5	8	7	3
5	3	5	4	4	0	4	9	8	2

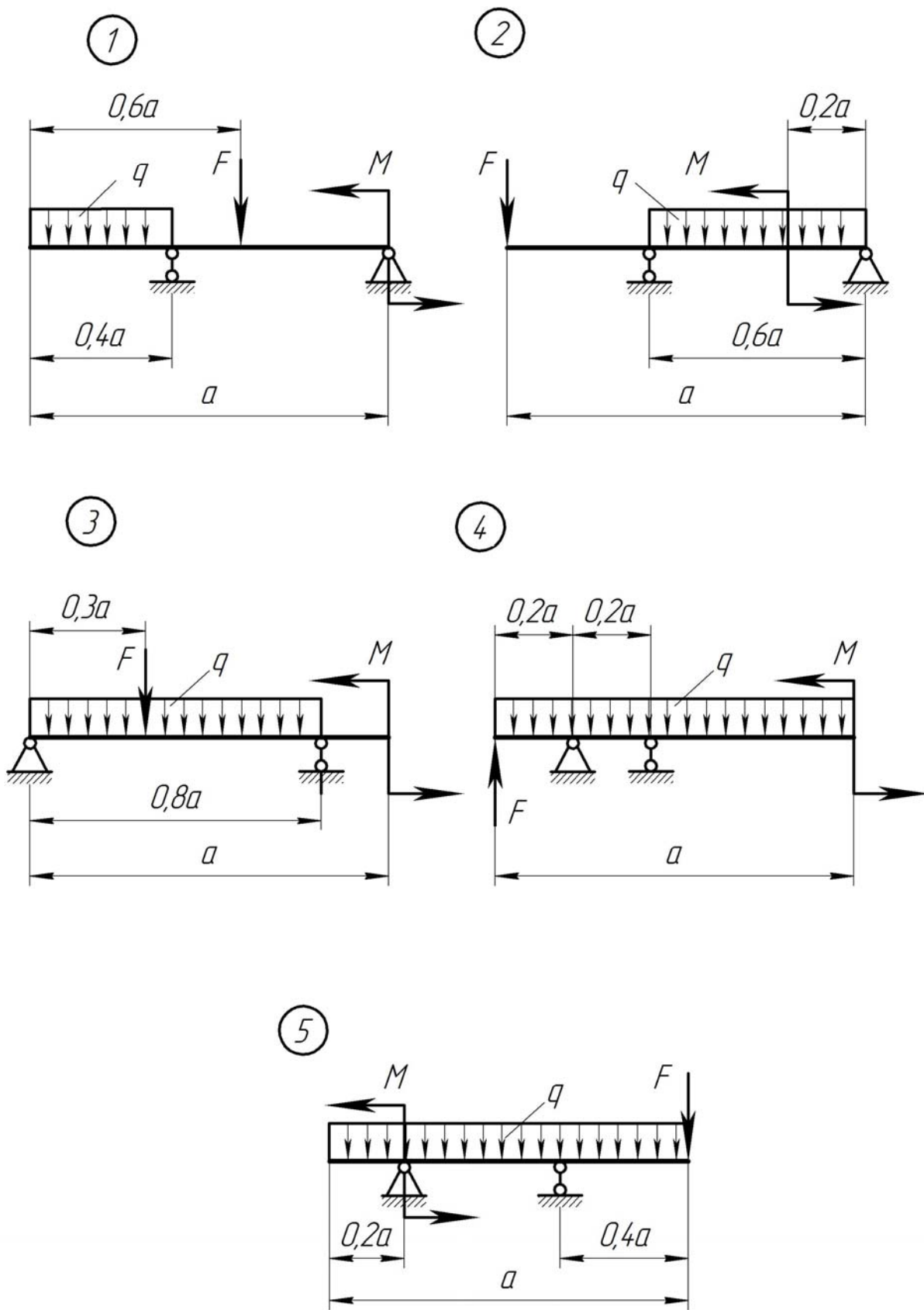
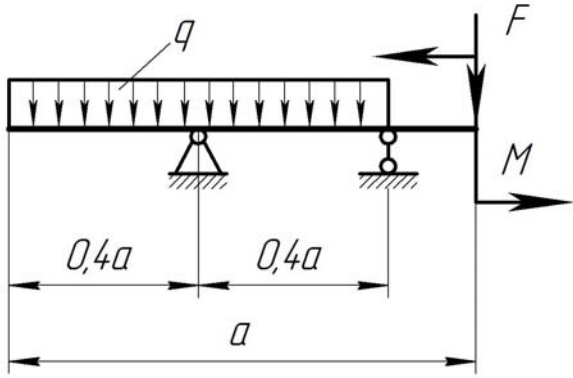
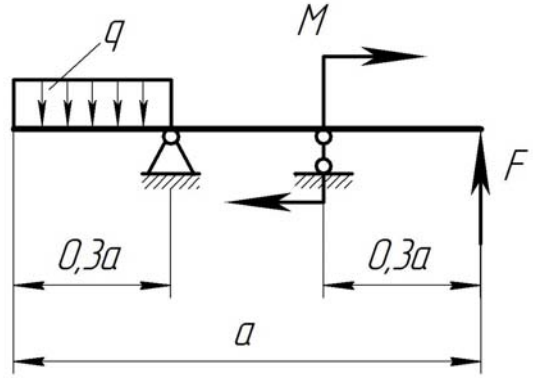


Рисунок до задачі № 7

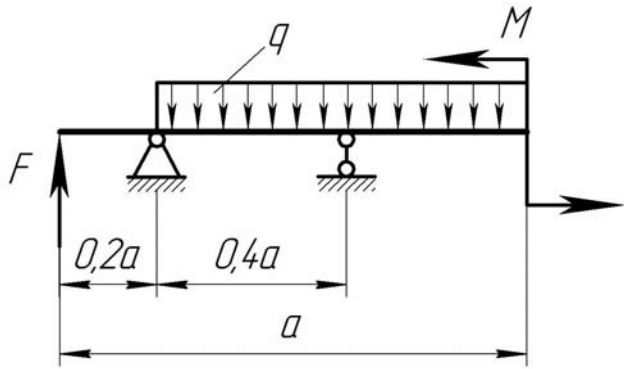
6



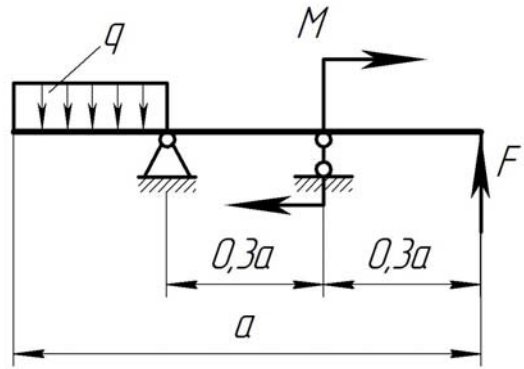
7



8



9



0

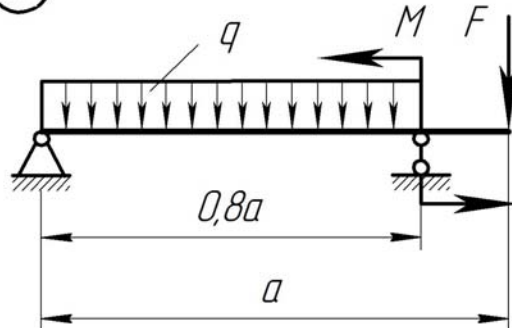


Рисунок до задачі № 7 (закінчення)

Задача № 8

Розрахунок на міцність при згині балок

Для заданої балки (рисунок до задачі № 8, таблиця до задачі № 8) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, підібрати двотавровий, круглий і прямокутний перетини (поклавши для прямо кутного перетину відношення висоти до ширини $h/b = 2$) і порівняти вагу одного метра довжини кожного профілю. Для двотаврової балки провести перевірку міцності за дотичними напруженнями і повну перевірку за головними напруженнями. Матеріал балок – сталь Ст. 3; $[\sigma] = 160$ МПа.

План розв'язування задачі:

1. Визначити опорні реакції, записати функції поперечних сил і згинальних моментів на ділянках балки.
2. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, визначити перетин, в якому діє максимальний згинальний момент і максимальна поперечна сила.
3. Підібрати розміри перетинів (двотаврового, круглого, прямокутного) з умови міцності за нормальними напруженнями.
4. Порівняти вагу балок, прийнявши вагу двотаврової балки за 100%.
5. Перевірити міцність вибраної двотаврової балки за дотичними напруженнями.
6. Визначити перетин балки, в якому згинальний момент і поперечна сила набувають максимальних значень або близьких до них. Провести повну перевірку міцності двотаврової балки у небезпечній точці цього поперечного перетину.

Таблиця до задачі № 8

№ з/п	q , кН/м	F , кН	M , кНм	a , м	№ з/п	q , кН/м	F , кН	M , кНм	a , м
1	2	3	9	8	6	2	3,5	5,5	10
2	3	4	5	7	7	3	4,5	7,5	8
3	4	5	8	9	8	2	2,5	4,5	9
4	1	2	4	10	9	5	6,5	9,5	8
5	4	6	7	7	0	4	5,5	8,5	6

Задача № 9

Розрахунок на міцність і визначення переміщень при згині балок

Для заданої балки (див. рисунок до задачі № 8, таблиця до задачі № 8) підібрати двотавровий перетин. Визначити прогин балки у перетині A методом початкових параметрів. Отриманий результат перевірити методом Мора.

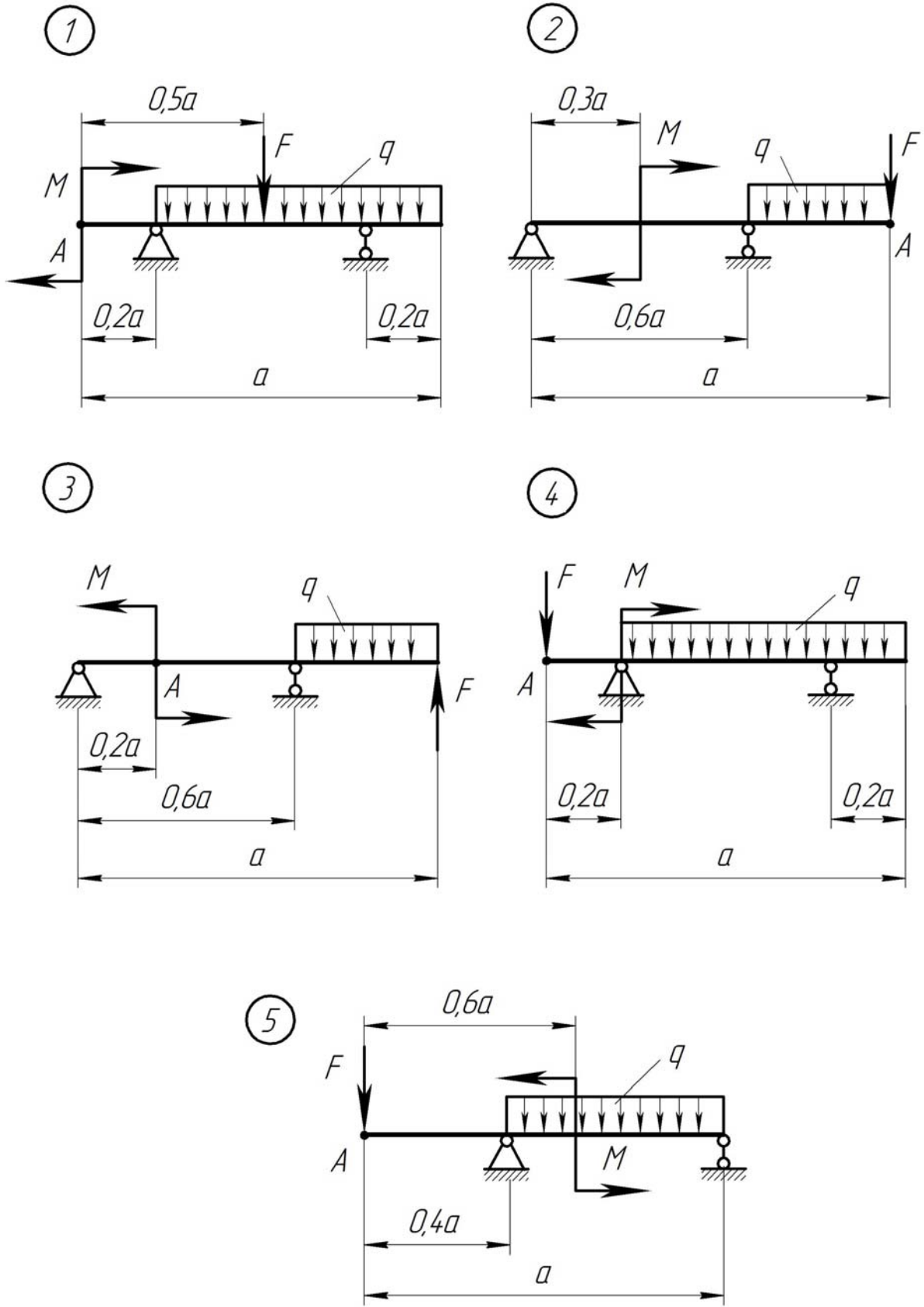


Рисунок до задачі № 8

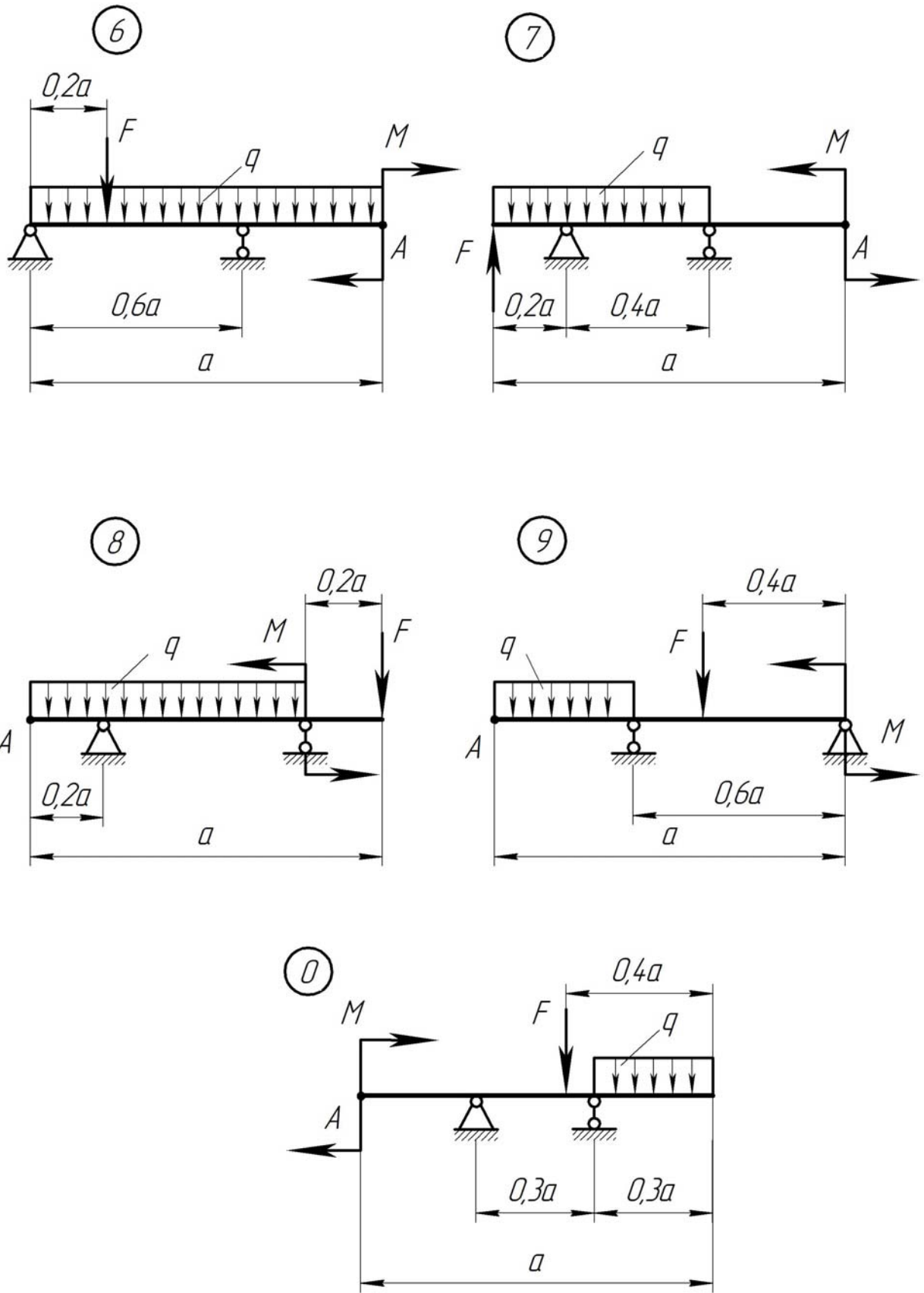


Рисунок до задачі № 8 (закінчення)

Приклад розв'язування задач № 7 і 8

Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для балки на двох опорах. Розрахунок балки на міцність

Для заданої сталюї балки (рисунок 6.10а) необхідно побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів; з умови міцності за нормальними напруженнями підібрати двотавровий, круглий і прямокутний ($h/b=2$) перетини балок та порівняти їх вагу. Для двотаврової балки провести повну перевірку міцності та перевірку міцності за дотичними напруженнями. Матеріал балки – сталь 45; $[\sigma]=160$ МПа.

Розв'язування

Використовуючи рівняння статичної рівноваги для заданої схеми балки (рисунок 6.10б) визначаємо вертикальні складові сил реакцій:

$$\sum M_B = 0; \quad -M + A_Y \cdot 1,5 + q \cdot 1,5 \cdot 0,75 - F \cdot 2,0 = 0;$$

$$A_Y = \frac{16 - 20 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + 15 \cdot 2,0}{1,5} = 15,7 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M - q \cdot 1,5 \cdot 0,75 + B_Y \cdot 1,5 - F \cdot 3,5 = 0;$$

$$B_Y = \frac{16 + 20 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + 15 \cdot 3,5}{1,5} = 60,7 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum Y = -A_Y - q \cdot 1,5 + B_Y - F = -15,7 - 20 \cdot 1,5 + 60,7 - 15 = 0.$$

Висновок – опорні реакції визначені правильно.

Розбиваємо балку на три ділянки. Для кожної ділянки записуємо функції поперечної сили $Q(x)$ і згинального моменту $M_{3Г}(x)$:

Ділянка I, $0 \leq x \leq 1,6$ м (зліва),

$$Q(x) = 0; \quad M_{3Г}(x) = M;$$

$$M_{3Г}(0) = M_{3Г}(1,6) = 16 \text{ кНм}.$$

Ділянка II, $1,6 \text{ м} \leq x \leq 3,1$ м (зліва),

$$Q(x) = -A_Y - q \cdot (x - 1,6);$$

$$Q(1,6) = -15,7 \text{ кН};$$

$$Q(3,1) = -15,7 - 20 \cdot (3,1 - 1,6) = -45,7 \text{ кН};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = M - A_Y \cdot (x - 1,6) - q \cdot \frac{(x - 1,6)^2}{2};$$

$$M_{3\Gamma}(1,6) = 16 \text{ кНм};$$

$$M_{3\Gamma}(3,1) = 16 - 15,7 \cdot (3,1 - 1,6) - 10 \cdot (3,1 - 1,6)^2 = -30 \text{ кНм}.$$

Ділянка III, $0 \leq x \leq 2,0 \text{ м}$ (справа),

$$Q(x) = F = 15 \text{ кН}; \quad Q(0) = Q(2,0) = 15 \text{ кН};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = -F \cdot x; \quad M_{3\Gamma}(0) = 0; \quad M_{3\Gamma}(2,0) = -15 \cdot 2,0 = -30 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри Q і $M_{3\Gamma}$ (рисунок 6.10в, з).

З умови міцності на згин за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{3\Gamma \max}}{W_0} \leq [\sigma],$$

визначаємо необхідний осьовий момент опору перетину

$$W_0 \geq \frac{M_{3\Gamma \max}}{[\sigma]} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{160} = 188 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

де $M_{3\Gamma \max} = 30 \text{ кНм}$ – максимальний згинальний момент, що діє на балку.

Для заданої балки підбираємо вказані поперечні перетини:

а) двотавровий №20а (додаток 3, ГОСТ 8239-89)

$$W_{\text{дв}} = 203 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \quad A_{\text{дв}} = 28,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

б) прямокутний

$$W_{\text{пр}} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3} b^3;$$

звідси
$$b \geq \sqrt[3]{3 \cdot W_{\text{пр}} / 2} = \sqrt[3]{3 \cdot 188 \cdot 10^{-6} / 2} = 65,6 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

приймаємо $b = 70 \text{ мм}$, тоді $h = 2 \cdot 70 = 140 \text{ мм}$,

відповідно $A_{\text{пр}} = b \cdot h = 70 \cdot 140 \cdot 10^{-6} = 98 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$;

в) круглий

$$W_{\text{кр}} = \pi \cdot d^3 / 32;$$

звідси
$$d \geq \sqrt[3]{32 \cdot W_{\text{кр}} / 3,14} = \sqrt[3]{32 \cdot 188 \cdot 10^{-6} / 3,14} = 124 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

приймаємо $d = 125 \text{ мм}$, тоді

$$A_{\text{кр}} = \pi \cdot d^2 / 4 = 3,14 \cdot 125^2 \cdot 10^{-6} / 4 = 123 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

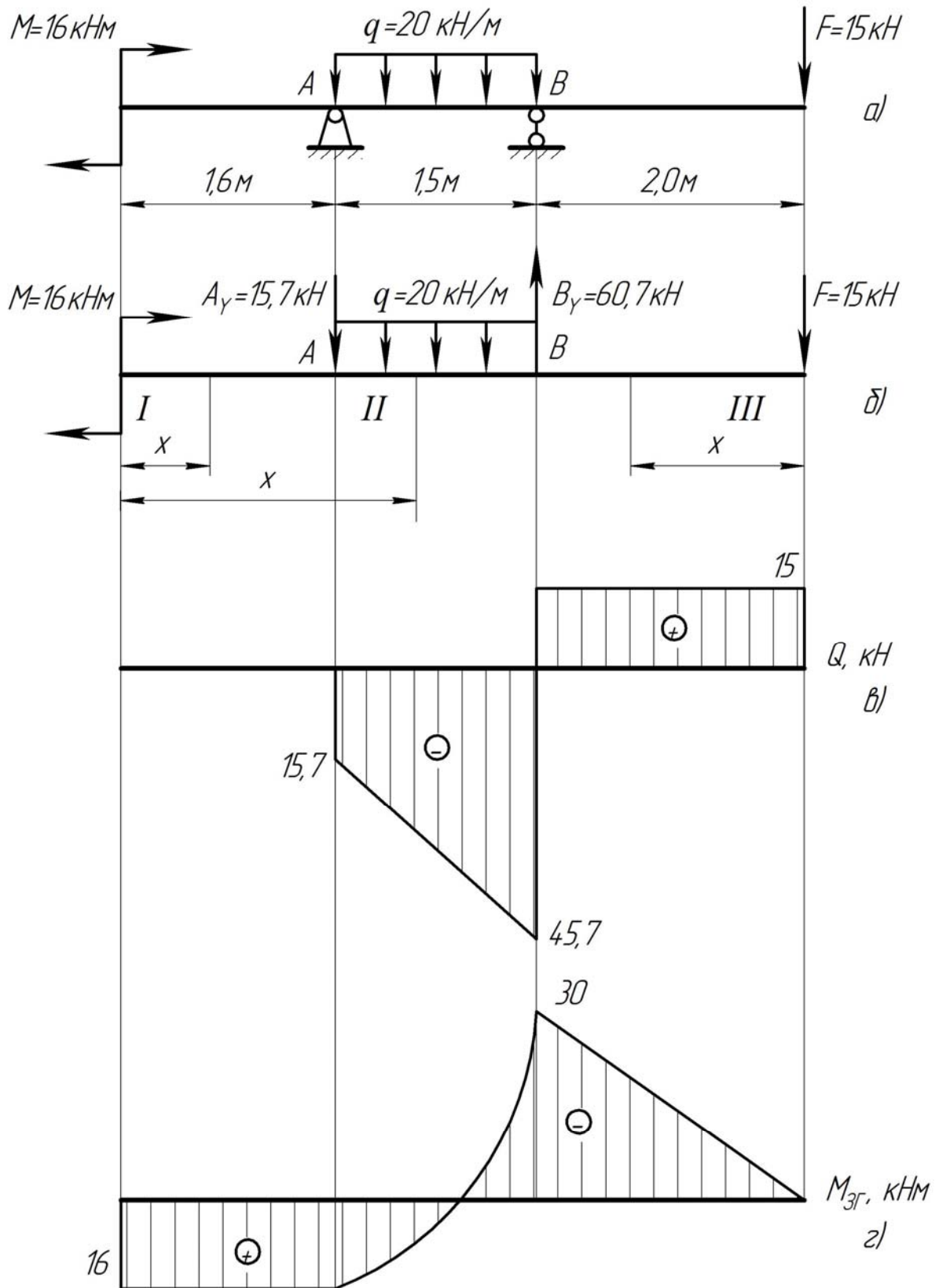


Рисунок 6.10

Порівняємо вагу балок

$$Q_{дв} : Q_{пр} : Q_{кр} = A_{дв} : A_{пр} : A_{кр} = 28,8 : 98 : 123 = 1 : 3,39 : 4,26.$$

Проводимо перевірку міцності двотаврової балки.

Враховуючи те, що розміри поперечного перетину двотаврової балки були визначені лише з умови міцності за нормальними напруженнями, то необхідно провести перевірку міцності балки за дотичними та головними напруженнями.

З таблиць сортаменту для двотавра № 20 а (додаток 3) за ГОСТ 8239-89 виписуємо необхідні для розрахунку дані:

$$h_{дв} = 200 \text{ мм}; \quad b_{дв} = 110 \text{ мм}; \quad d_{дв} = 5,2 \text{ мм}; \quad t_{дв} = 8,6 \text{ мм};$$

$$I_X = 2030 \text{ см}^4; \quad S_X = 114 \text{ см}^3.$$

Викреслюємо спрощений перетин двотавра (рисунок 6.11а).

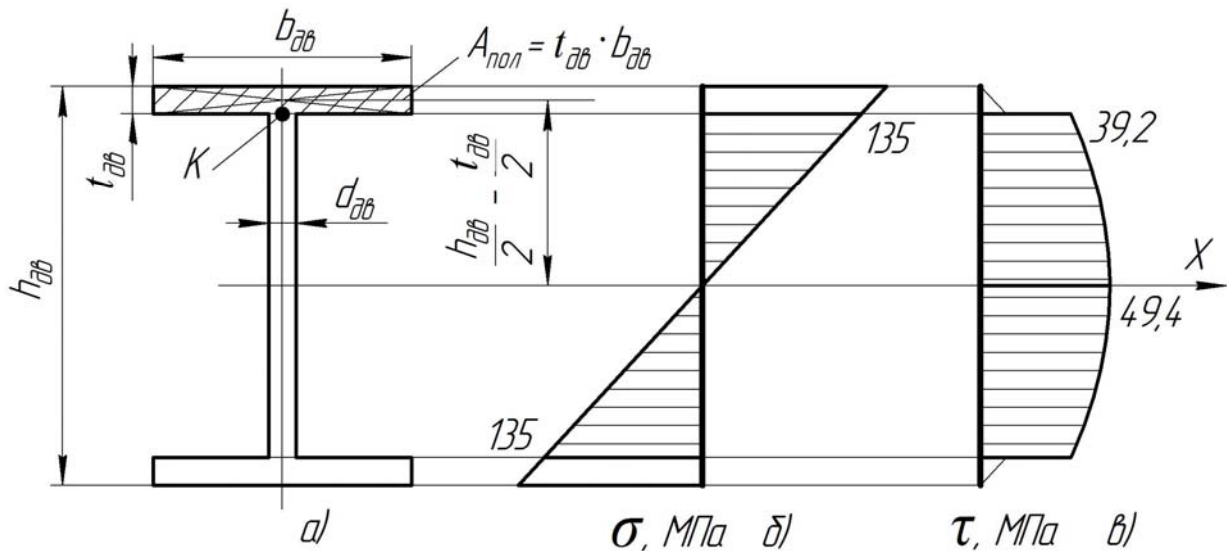


Рисунок 6.11

Небезпечний перетин при перевірці на міцність за дотичним напруженням – перетин, у якому поперечна сила має максимальне значення $Q_{\max} = 45,7 \text{ кН}$ (перетин балки у точці B (див. рис. 6.10в)).

Найбільші дотичні напруження виникають у точках поперечного перетину двотаврового балки, що співпадають з нейтральною віссю (вісь X , див. рис. 6.11).

Умова міцності за дотичним напруженням

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_X}{d_{дв} \cdot I_X} \leq [\tau],$$

де $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження, $[\tau] \approx 0,5 [\sigma] = 0,5 \cdot 160 = 80 \text{ МПа}$.

Після підстановки значень, отримаємо

$$\tau_{\max} = \frac{45,7 \cdot 10^{-3} \cdot 114 \cdot 10^{-6}}{5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 49,4 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Небезпечний перетин балки при перевірці за головними напруженнями – перетин балки, у якому згинальний момент і поперечна сила набувають максимальних значень або близькі до них (перетин у точці B , $M_{3Г \max} = 30 \text{ кНм}$, $Q_{\max} = 45,7 \text{ кН}$, див. рис. 6.10в, з).

Визначаємо нормальне і дотичне напруження в небезпечному перетині двотаврової балки (точка K , рисунок 6.11а):

$$\sigma = \frac{M_{3Г \max}}{I_X} \cdot \left(\frac{h_{\partial\partial} }{2} - t_{\partial\partial} \right) = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{2030 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(\frac{200}{2} - 8,6 \right) \cdot 10^{-3} = 135 \text{ МПа};$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{X_{\text{пол}}}}{d_{\partial\partial} \cdot I_X} = \frac{45,7 \cdot 10^{-3} \cdot 90,5 \cdot 10^{-6}}{5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 39,2 \text{ МПа},$$

де $S_{X_{\text{пол}}}$ – статичний момент площі перетину полички двотавра відносно осі X , визначаємо за формулою

$$S_{X_{\text{пол}}} = A_{\text{пол}} \cdot \left(\frac{h_{\partial\partial} }{2} - \frac{t_{\partial\partial} }{2} \right) = \frac{b_{\partial\partial} \cdot t_{\partial\partial} \cdot (h_{\partial\partial} - t_{\partial\partial})}{2}.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$S_{X_{\text{пол}}} = \frac{110 \cdot 8,6 \cdot (200 - 8,6) \cdot 10^{-9}}{2} = 90,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Тут $A_{\text{пол}}$ – площа полички двотавра, $A_{\text{пол}} = t_{\partial\partial} \cdot b_{\partial\partial}$.

Будуємо епюри нормальних і дотичних напружень для двотаврового перетину (рисунок 6.11а, б, в).

Визначаємо розрахункове напруження за третьою теорією міцності та проводимо перевірку на міцність матеріалу за головним напруженням:

$$\sigma_{P3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{135^2 + 4 \cdot 39,2^2} = 156 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{P3} = 156 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Отже, міцність балки за головним і дотичним напруженнями забезпечена.

7. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ ЗГИНІ

Стрижні, які зазнають деформації згину, повинні мати не тільки відповідну міцність, але й достатню жорсткість. Під дією зовнішніх навантажень переміщення їх перетинів не повинні перевищувати встановлених нормами допустимих значень.

Для виконання розрахунку на жорсткість на практиці необхідно вміти обчислювати відповідні переміщення перетинів. Розглянемо переміщення перетинів при згині консольної балки (рисунок 7.1).

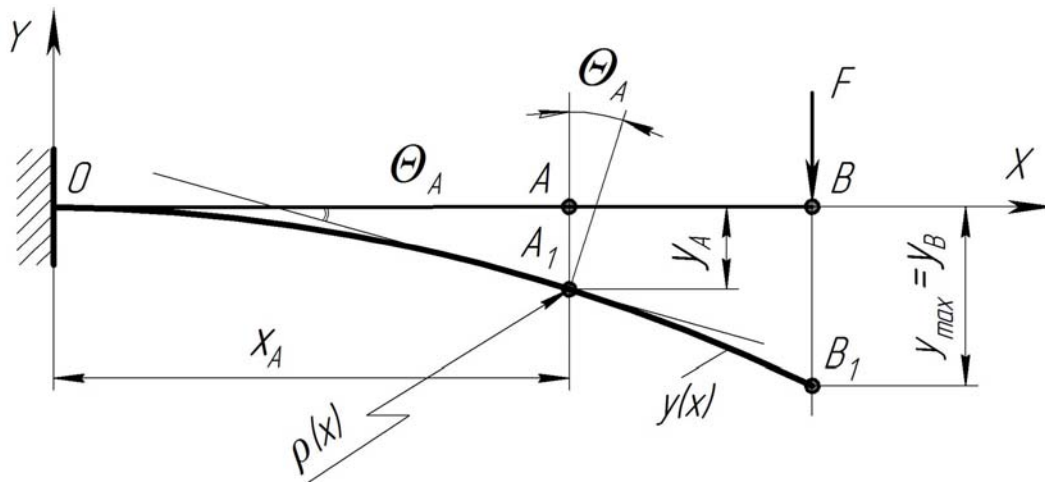


Рисунок 7.1

На рисунку 7.1. використані позначення: OB – недеформована вісь балки; OB_1 – зігнута вісь балки; Θ_A – кутове переміщення перетину A ; y_A – лінійне переміщення перетину; $\rho(x)$ – кривизна вісі балки.

При плоскому поперечному згині **зігнута вісь** балки лежить у силевій площині і збігається з головною площиною. Викривлену вісь балки називають **зігнутою віссю** або **пружною лінією**.

Положення поперечного перетину балки при згині визначається двома переміщеннями (рисунок 7.1):

1. **Лінійне переміщення** $y_A = y(x_A)$ **центра ваги перетину в напрямі, перпендикулярному до недеформованої осі балки, яке називають прогином.**

2. **Кутове переміщення** $\Theta_A = \Theta(x_A)$ – **це кут повороту перетину навколо нейтральної вісі перетину відносно його початкового положення.**

Вважають, що довжина зігнутої поздовжньої осі, що належить нейтральному шару, при викривленні балки не змінюється.

Прогини і кути поворотів балки зв'язані диференціальною залежністю

$$\Theta(x) = \frac{dy(x)}{dx} = y'(x). \quad (7.1)$$

Диференціальне рівняння зігнутої осі балки

Між кривизною $\frac{1}{\rho(x)}$ зігнутої осі балки (пружної лінії), згинальним моментом $M_{3\Gamma}$, який зумовлює цю кривизну, та жорсткістю балки при згині $E \cdot I_0$ має місце така аналітична залежність

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_{3\Gamma}(x)}{E \cdot I_0}, \quad (7.2)$$

де $\rho(x)$ – радіус кривизни пружної лінії балки в площині на відстані x від початку координат;

$M_{3\Gamma}(x)$ – згинальний момент у тому ж перетині балки.

Кривизна плоскої привої (відомо з курсу вищої математики) описується залежністю

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{y''(x)}{[1 + y'(x)^2]^{3/2}}. \quad (7.3)$$

Прирівнюючи праві частини співвідношень (7.2) і (7.3), отримано **точне диференціальне рівняння зігнутої осі балки**

$$E \cdot I_0 \cdot \frac{y''(x)}{[1 + y'(x)^2]^{3/2}} = \pm M_{3\Gamma}(x). \quad (7.4)$$

Враховуючи, що кути повороту перетинів балки малі, то величиною $y'(x)^2$ порівняно з одиницею можна знехтувати. Тоді із виразу (7.4) при виборі напрямку осі Y вгору отримують приблизне **диференціальне рівняння пружної лінії балки**

$$E \cdot I_0 \cdot y''(x) \approx M_{3\Gamma}(x). \quad (7.5)$$

Інтегруючи його двічі чи один раз, можна визначити лінійні $y(x)$ та кутові $\Theta(x)$ переміщення перетинів балки за будь-яких умов навантаження.

Відомо декілька методів визначення переміщень при прямому поперечному згині. Розглянемо деякі з них.

Метод безпосереднього інтегрування диференціального рівняння зігнутої осі балки

В основу методу покладено наближене диференціальне рівняння зігнутої вісі балки

$$E \cdot I_0 \cdot y''(x) = M_{3\Gamma}(x), \quad (7.6)$$

де $E \cdot I_0$ – жорсткість поперечного перетину балки при згині;

E – модуль пружності матеріалу, з якого виготовлена балка;

I_0 – осьовий момент інерції поперечного перетину балки, надалі

$$I_0 = I;$$

$M_{3\Gamma}(x)$ – функція згинального моменту від зовнішнього навантаження, що діє на даній ділянці балки, надалі $M_{3\Gamma}(x) = M(x)$.

Для отримання функції зігнутої осі балки $y = f(x)$ проведемо інтегрування рівняння (7.6)

$$E \cdot I \cdot y'(x) = \int M(x) dx + C; \quad (7.7)$$

$$E \cdot I \cdot y(x) = \int dx \int M(x) dx + C \cdot x + D. \quad (7.8)$$

Отже, рівняння зігнутої осі балки

$$y(x) = \frac{1}{E \cdot I} \int dx \int M(x) dx + C \cdot x + D. \quad (7.9)$$

У рівняння (7.7)-(7.8) входять постійні інтегрування C і D , які визначають з граничних умов, тобто умов закріплення опор балки, прогини і кути повороту яких відомі.

Метод початкових параметрів

Метод початкових параметрів дає можливість записати всього *одне рівняння прогинів або кутів повороту перетинів, яке є придатним для всіх ділянок балки*. Таке рівняння називають *універсальним рівнянням пружної лінії*, яке враховує всі види навантажень: зосереджену силу F , зосереджений момент M , розподілене навантаження $q(x)$.

Метод початкових параметрів отриманий у результаті уніфікації методу безпосереднього інтегрування зігнутої осі балки, прирівнюванням постійних інтегрування на границях ділянок. Даний метод є універсальним методом визначення переміщень при згині.

Для призматичної балки (рисунок 7.2) при вибраній системі координат $X Y$ і різних видах навантаження *рівняння пружної лінії* можна записати у вигляді

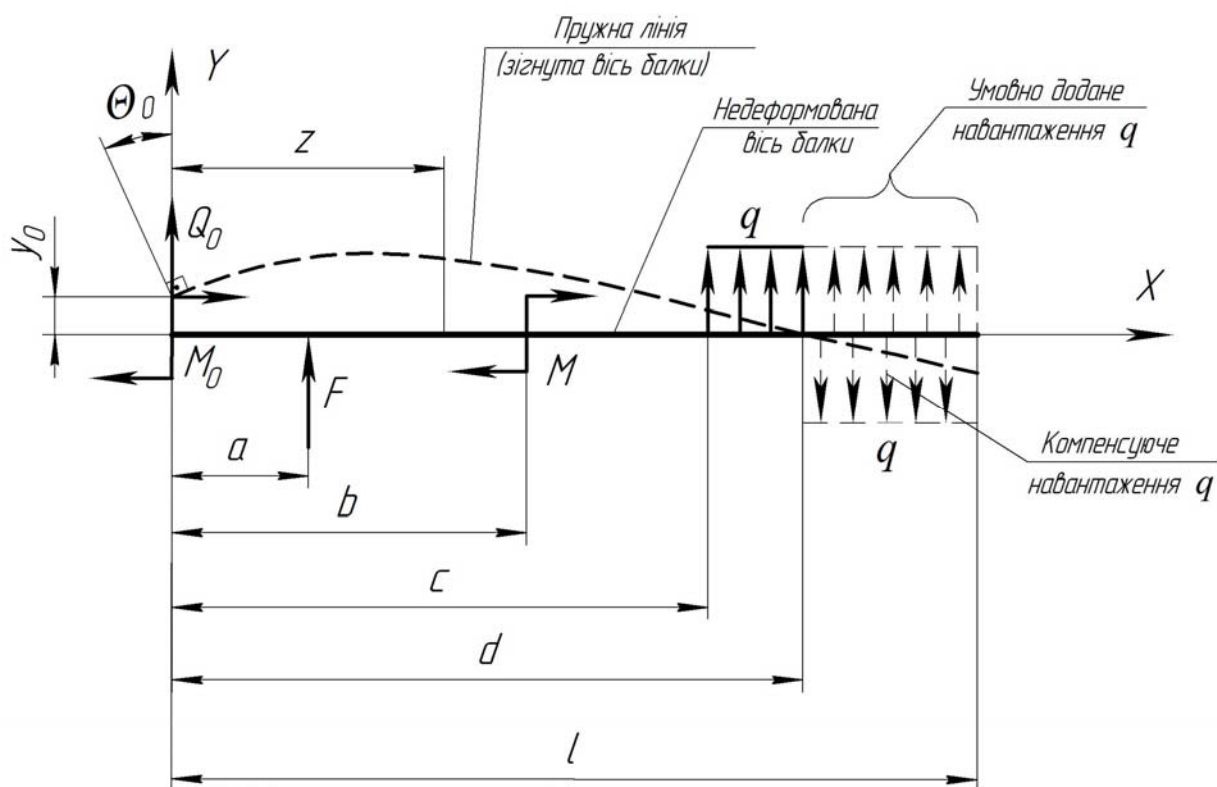


Рисунок 7.2

$$y(x) = y_0 + \Theta_0 \cdot x + \frac{1}{E \cdot I} \left(\frac{M_0 \cdot x^2}{2} + \frac{Q_0 \cdot x^3}{6} + \frac{F(x-a)^3}{6} + \frac{M(x-b)^2}{2} + \frac{q(x-c)^4}{24} - \frac{q(x-d)^4}{24} \right), \quad (7.10)$$

де y_0 , Θ_0 , M_0 , Q_0 – початкові параметри, відповідно: прогин, кут повороту поперечного перетину, згинальний момент і поперечна сила на початку координат;

a – відстань від початку координат до перетину, в якому прикладено зосереджену силу F ;

b – відстань від початку координат до перетину, в якому прикладено зосереджений момент M ;

c – відстань від початку координат до перетину, в якому починає дію навантаження q ;

d – відстань від початку координат до перетину, в якому завершує дію навантаження q .

Прогин y_0 та кут повороту Θ_0 – геометричні початкові параметри; **згинальний момент M_0 та поперечна сила Q_0** у перетині, який збігається з початком координат, – статичні початкові параметри.

Прогин y_0 та кут повороту Θ_0 початкового (лівого кінцевого) перетину балки визначають із умов закріплення балки, згинальний момент M_0 та поперечну силу Q_0 – з ешюр $M_{зГ}$ і Q .

Якщо розглядають балку на двох опорах, то y_0 і Θ_0 визначають з умов рівності нулю прогинів на опорах. Якщо розглядають консольну балку, то ці параметри визначають з умов рівності нулю прогину і кута повороту перетину в защемленні.

Початкові параметри y_0 , Θ_0 , M_0 , Q_0 можуть бути додатними, від’ємними або дорівнювати нулю.

Знаки доданків у рівнянні визначаються знаками відповідних зовнішніх силових факторів. Правила знаків такі ж, які були прийняті для поперечних сил і згинальних моментів.

Рівняння для визначення кутів повороту призматичної балки (див. рис. 7.2) має вигляд

$$\Theta(x) = \Theta_0 + \frac{1}{E \cdot I} \left(M_0 + \frac{Q_0 \cdot x^2}{2} + \frac{F \cdot (x-a)^2}{2} + \frac{M \cdot (x-b)}{1} + \frac{q \cdot (x-c)^3}{6} - \frac{q \cdot (x-d)^3}{6} \right). \quad (7.11)$$

При складанні рівняння пружної лінії балки потрібно дотримуватися таких правил:

1. Початок координат вибирають у крайній лівій точці розглядуваної балки та зберігають його загальним для всіх ділянок.

2. У рівняння підставляють тільки ті навантаження, які прикладені ліворуч від розглядуваного перетину.

3. Якщо розподілене навантаження $q(x)$ обривається на одній із ділянок балки, то його умовно продовжують до правого кінця балки, одночасно вводячи компенсувальне навантаження тієї ж інтенсивності, але зворотного напрямку.

Метод Мора

В основу методу Мора покладено принцип збереження енергії, тобто рівність робіт від зовнішніх навантажень та потенціальної енергії деформації.

Переміщення Δ (прогин y або кут повороту Θ) визначають за інтегралом Мора, який охоплює всю довжину балки l

$$\Delta(y, \Theta) = \sum \int_l \frac{M(x) \cdot \bar{M}(x)}{E \cdot I} dx, \quad (7.12)$$

де $M(x)$ – функції згинальних моментів від зовнішніх навантажень для заданої (навантаженої) балки;

$\bar{M}(x)$ – функції згинальних моментів від одиничного навантаження для «допоміжної» (розвантаженої) балки.

«Допоміжна» балка – це задана балка без зовнішніх навантажень.

Фізична суть інтегралу Мора: переміщення довільного перетину балки – це робота одиничної сили, яка затрачена на переміщення точки її прикладання від заданого навантаження.

Порядок визначення переміщень (прогинів чи кутів повороту) з допомогою інтегралу Мора:

1. Складають функції згинальних моментів $M(x)$ для кожної ділянки балки від заданого навантаження.

2. Звільнивши систему (балку) від заданих навантажень, прикладають до неї силу (пару сил), рівну одиниці (одиничну силу чи одиничний момент) у тому перетині балки, де визначають переміщення та у напрямі цього переміщення.

3. Складають функції згинальних моментів $\bar{M}(x)$ від цієї одиничної сили (пари сил).

4. Обчислюють суму інтегралів (7.12) від добутку обох моментів, розділених на жорсткість перетину.

Графоаналітичний розв'язок інтеграла Мора

Обчислення інтеграла Мора (7.12) можна виконувати графоаналітичним способом.

Суть: *означений інтеграл від добутку двох функцій, одна з яких лінійна, а друга довільна, дорівнює добутку площі графіка довільної функції на взяту під її центром ваги ординату графіка лінійної функції.*

Графоаналітичний розв'язок інтеграла Мора можна використовувати у випадках, коли одна з епюр окреслюється прямими лініями. Така умова виконується для конструкцій, які складаються з прямолінійних брусів (елементів), тому, що епюри від одиничних навантажень завжди прямолінійні.

Загальна формула для визначення переміщень при згині

$$\Delta(y, \Theta) = \sum \frac{1}{E \cdot I} \int_l M(x) \cdot \bar{M}(x) dx = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i \cdot \bar{M}_{Ci}}{E \cdot I}, \quad (7.13)$$

де ω_i – площа епюри (рисунок 7.3а) згинальних моментів $M(F)$ від зовнішніх навантажень i -ої ділянки балки;

\bar{M}_{Ci} – ордината лінійної епюри (рисунок 7.3б) згинальних моментів від одиничного навантаження \bar{M}_C i -ої ділянки балки розташована під центром ваги нелінійної епюри;

n – кількість площ геометричних фігур, на яку розділено епюру згинальних моментів $M(F)$ від зовнішнього навантаження.

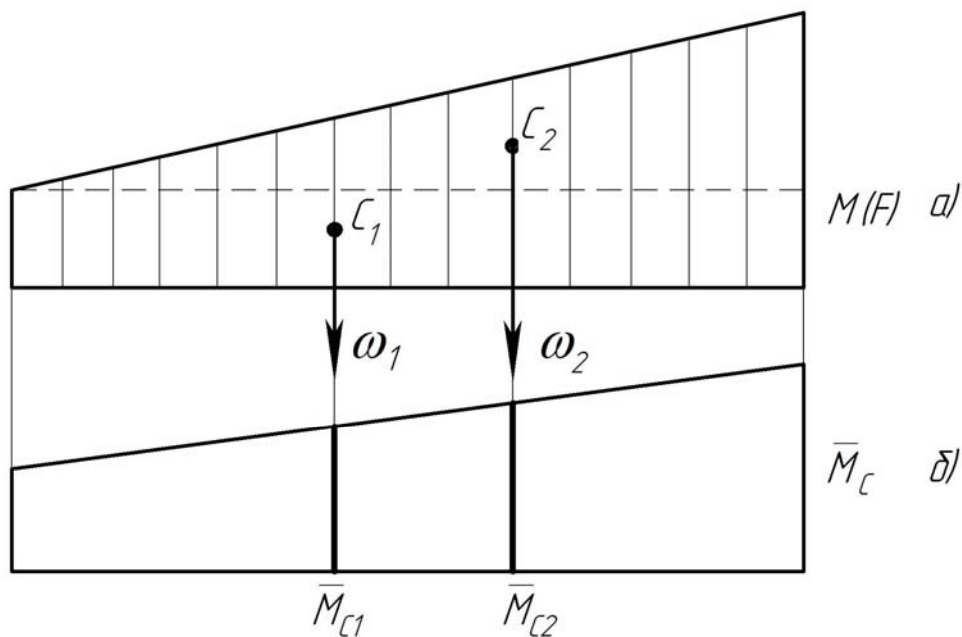


Рисунок 7.3

Обчислення інтеграла Мора графоаналітичним способом називають *способом перемноження еюр*. При цьому епюру $M(F)$ називають *вантажною*, а епюру \bar{M}_C – *одиничною*.

При використанні цього методу потрібно враховувати:

1. Кількість доданків n ($\omega_i \cdot \bar{M}_{Ci}$) повинна бути не менша, ніж кількість сум інтегралів Мора.

2. Якщо епюри $M(F)$ (зовнішніх навантажень) і \bar{M}_{Ci} (одиничних навантажень) протилежні за знаком (знаходяться по різні сторони від нульової лінії), то результат перемноження еюр має знак «мінус».

3. Якщо рівняння згинальних моментів многочлен, то доцільно будувати вантажну епюру у «розшарованому вигляді», тобто доцільно будувати окремі епюри від зовнішніх навантажень, кожна з яких відповідає одному із доданків. Будують такі епюри підходячи з обох боків балки до місця злому одиничної епюри.

4. Епюри від одиничних навантажень \bar{M}_{Ci} , побудовані для використання графоаналітичного способу обчислення інтеграла Мора, рекомендовано не заштриховувати, а вказувати лише ординати \bar{M}_{Ci} .

Розмірність одиничних еюр згинальних моментів – одиниці довжини.

Значення площ еюр та координати їх центра ваги, якими можна скористатися при визначенні переміщень наведені у *додатку 8*.

Приклад розв'язування задачі (консоль)

Визначити графоаналітичним розв'язком інтеграла Мора прогини і кути повороту перетинів A і B консольної балки, зображеної на рис. 7.4, при умові, що $E \cdot I = const$.

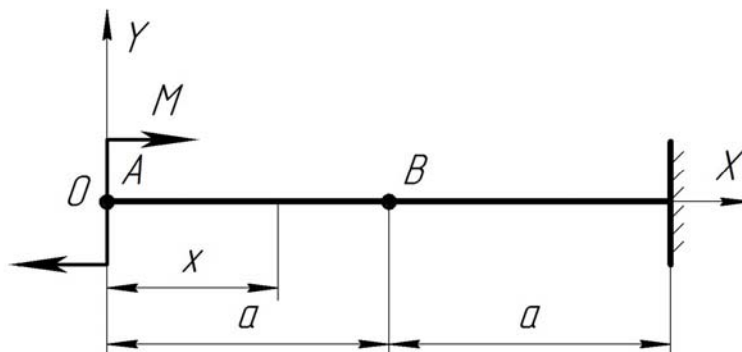


Рисунок 7.4

Розв'язування

Для заданої консольної балки (рисунок 7.5а) будемо епюру згинальних моментів (рисунок 7.5б) від зовнішніх навантажень $M(F)$. Для визначення прогину перетину A , у «допоміжній» балці (рисунок 7.5в) прикладаємо одиничну силу \bar{u} у цьому ж перетині і будемо одиничну епюру згинальних моментів \bar{M}_1 (рисунок 7.5г).

Прогин перетину A визначаємо перемножуючи епюри $M(F)$ і \bar{M}_1

$$y_A = \frac{1}{E \cdot I} \left(-\omega_1 \cdot \bar{M}_{1C1} \right) = -\frac{2 M \cdot a^2}{E \cdot I},$$

де $\omega_1 = M \cdot 2a$; $\bar{M}_{1C1} = -a$.

Для визначення прогину балки у перетині B доцільно заново повторити епюру $M(F)$ (рисунок 7.5д). У «допоміжній» балці у перетині B порібно прикласти одиничну силу (рисунок 7.5е) і побудувати одиничну епюру згинальних моментів \bar{M}_2 (рисунок 7.5ж). Тоді прогин перетину B

$$y_B = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-\omega_2 \cdot \bar{M}_{2C2} + \omega_3 \cdot \bar{M}_{2C3} \right) = -\frac{M \cdot a^2}{2 E \cdot I},$$

де $\omega_2 = M \cdot a$; $\omega_3 = M \cdot a$; $\bar{M}_{2C2} = -a/2$; $\bar{M}_{2C3} = 0$.

Для визначення кутів повороту перетинів A і B потрібно у зазначених перетинах «допоміжних» балок (рисунок 7.5з, л), прикласти одиничні згинальні моменти і побудувати епюри згинальних моментів (рисунок 7.5к, н).

Кут повороту перетину A визначаємо перемножуючи епюри від зовнішніх сил $M(F)$ (див. рис. 7.5б) та одичних моментів $\bar{\bar{M}}_3$ (див. рис. 7.5к)

$$\Theta_A = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\omega_1 \cdot \bar{\bar{M}}_{3C1} \right) = \frac{2 M \cdot a}{E \cdot I},$$

де $\bar{\bar{M}}_{3C1} = 1$.

Кут повороту перетину B визначаємо перемножуючи епюри від зовнішніх сил $M(F)$ (див. рис. 7.5б) та одичних моментів $\bar{\bar{M}}_4$ (див. рис. 7.5н)

$$\Theta_B = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\omega_3 \cdot \bar{\bar{M}}_{4C3} + \omega_2 \cdot \bar{\bar{M}}_{4C2} \right) = \frac{M \cdot a}{E \cdot I},$$

де $\bar{\bar{M}}_{4C3} = 0$; $\bar{\bar{M}}_{4C2} = 1$.

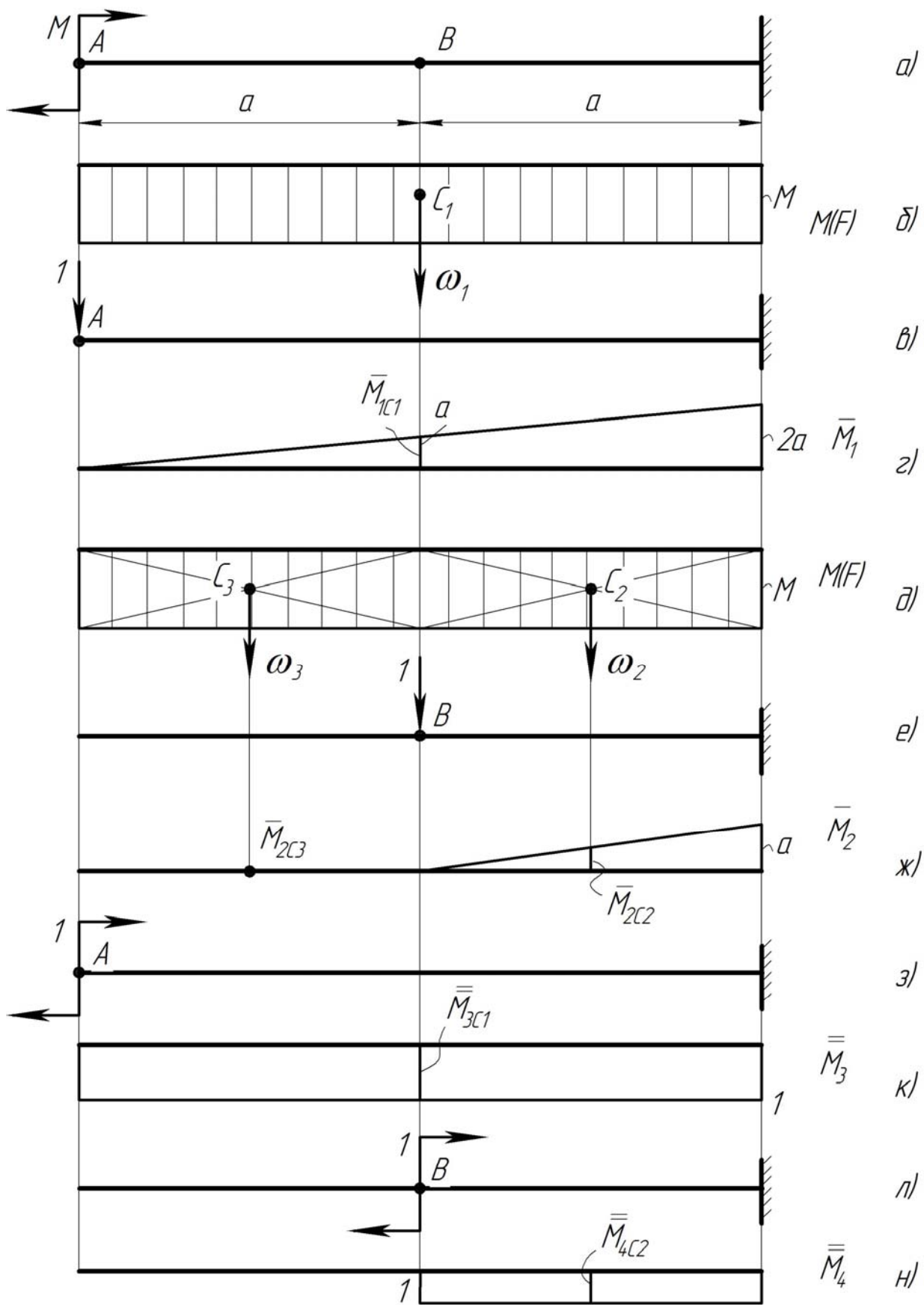


Рисунок 7.5

Приклад розв'язування задачі (балка на двох опорах)

Визначити графоаналітичним розв'язком інтеграла Мора прогини у перетинах K і D та кут повороту перетину A балки на двох опорах, зображеної на рисунок 7.6а, при умові, що $E \cdot I = const$.

Розв'язування

З рівнянь рівноваги визначаємо опорні реакції (див. рис. 7.6а):

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 3a + F \cdot 2a = 0; \quad R_A = \frac{2}{3}F;$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 3a - F \cdot a = 0; \quad R_B = \frac{1}{3}F.$$

$$\text{Перевірка} \quad \sum Y = R_A - F + R_B = \frac{2}{3}F - F + \frac{1}{3}F = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів $M(F)$ (рисунок 7.6б) від зовнішніх навантажень.

Для визначення прогину перетину K у «допоміжній» системі (рисунок 7.6в) прикладаємо у перетині K одиничну силу. Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_B = 0; \quad -\bar{R}_A \cdot 3a + 1 \cdot 2a = 0; \quad \bar{R}_A = \frac{2}{3};$$

$$\sum M_A = 0; \quad \bar{R}_B \cdot 3a - 1 \cdot a = 0; \quad \bar{R}_B = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Перевірка} \quad \sum Y = \bar{R}_A - 1 + \bar{R}_B = \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів \bar{M}_1 (рисунок 7.6г) від одиничної сили.

Прогин перетину K визначаємо перемножуючи епюри $M(F)$ і \bar{M}_1

$$y_K = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (\omega_1 \cdot \bar{M}_{1C1} + \omega_2 \cdot \bar{M}_{2C2}),$$

$$\text{де } \omega_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} F a \cdot a = \frac{F \cdot a^2}{3}; \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} F a \cdot 2a = \frac{2 F \cdot a^2}{3};$$

$$\bar{M}_{1C1} = \bar{R}_A \cdot \frac{2}{3} a = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} a = \frac{4}{9} a; \quad \bar{M}_{1C2} = \bar{R}_B \cdot \frac{2}{3} 2a = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} a = \frac{4}{9} a.$$

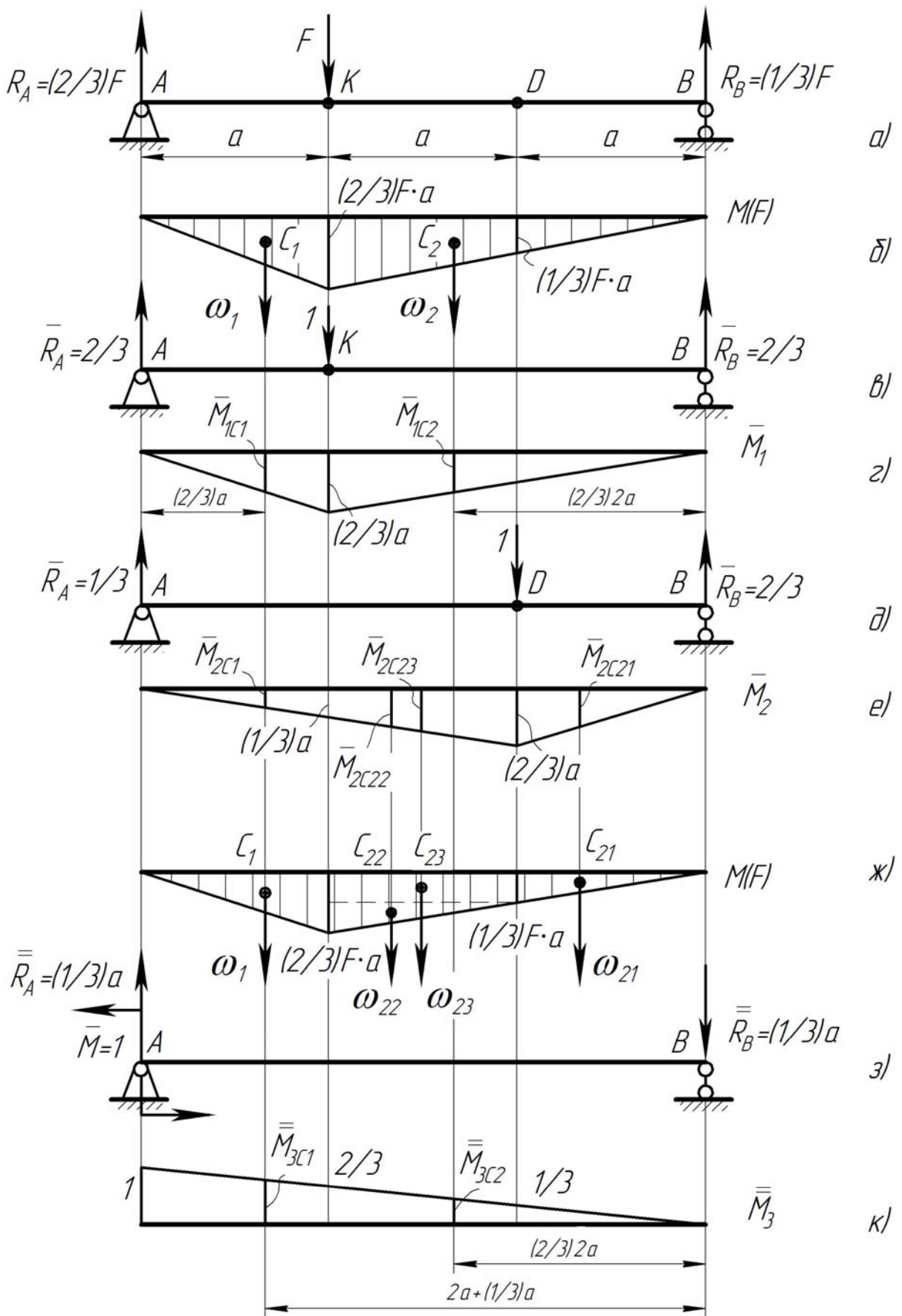


Рисунок 7.6

Підставивши дані, отримаємо

$$y_K = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{F \cdot a^2}{3} \cdot \frac{4}{9} a + \frac{2 F \cdot a^2}{3} \cdot \frac{4}{9} a \right) = \frac{12 F \cdot a^3}{27 E \cdot I}.$$

Для визначення прогину перетину D проводимо аналогічні дії, тобто у «допоміжній» балці (рисунок 7.6д) прикладаємо у перетині D одиничну силу і будуємо епюру \overline{M}_2 (рисунок 7.6е). Для зручності і наглядності під епюрою \overline{M}_2 розмістимо епюру від зовнішніх сил $M(F)$ (рисунок 7.6ж).

Визначення прогину перетину D ускладнюється збільшенням доданків $\omega_i \cdot \overline{M}_{Ci}$. Це пов'язано з тим, що маємо три ділянки інтегрування за методом Мора, а також розбиваємо середню фігуру (трапецію) на дві фігури – трикутник та прямокутник (рисунок 7.6ж).

Прогин перетину D визначимо за формулою

$$y_D = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (\omega_1 \cdot \overline{M}_{2C1} + \omega_{21} \cdot \overline{M}_{2C21} + \omega_{22} \cdot \overline{M}_{2C22} + \omega_{23} \cdot \overline{M}_{2C23}),$$

$$\text{де } \omega_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} F a \cdot a = \frac{F \cdot a^2}{3}; \quad \omega_{21} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} F a \cdot a = \frac{F \cdot a^2}{6};$$

$$\omega_{22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} F a \cdot a = \frac{F \cdot a^2}{6}; \quad \omega_{23} = \frac{1}{3} F a \cdot a = \frac{F \cdot a^2}{3};$$

$$\overline{M}_{2C1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} a = \frac{2}{9} a; \quad \overline{M}_{2C21} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} a = \frac{4}{9} a;$$

$$\overline{M}_{2C22} = \frac{1}{3} \cdot \left(a + \frac{1}{3} a \right) = \frac{4}{9} a; \quad \overline{M}_{2C23} = \frac{1}{3} \cdot \left(a + \frac{1}{2} a \right) = \frac{1}{2} a.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$y_D = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{F \cdot a^2}{3} \cdot \frac{2}{9} a + \frac{F \cdot a^2}{6} \cdot \frac{4}{9} a + \frac{F \cdot a^2}{6} \cdot \frac{4}{9} a + \frac{F \cdot a^2}{3} \cdot \frac{1}{2} a \right) = \frac{21 F \cdot a^3}{54 E \cdot I}.$$

Для визначення кута повороту перетину A у «допоміжній» балці (рисунок 7.6з) у перетині A прикладаємо $\overline{M} = 1$, визначаємо опорні реакції і будуємо епюру згинальних моментів від одиничного навантаження $\overline{\overline{M}}$ (рисунок 7.6к).

Кут повороту перетину A визначаємо перемножуючи епюри $M(F)$ (рисунок 7.6б) та $\overline{\overline{M}}_3$ (рисунок 7.6к)

$$\Theta_A = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-\omega_1 \cdot \overline{\overline{M}}_{3C1} - \omega_2 \cdot \overline{\overline{M}}_{3C2} \right),$$

$$\text{де } \overline{\overline{M}}_{3C1} = \frac{1}{3a} \cdot \left(2a + \frac{1}{3}a \right) = \frac{7}{9}; \quad \overline{\overline{M}}_{3C2} = \frac{1}{3a} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2a \right) = \frac{4}{9}.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$\Theta_A = -\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{F \cdot a^2}{3} \cdot \frac{7}{9} + \frac{2F \cdot a^2}{3} \cdot \frac{4}{9} \right) = -\frac{15 F \cdot a^2}{27 E \cdot I}.$$

Знак «мінус» вказує на те, що кут повороту перетину A відбувається у протилежному напрямі до дії одиничного моменту.

Приклад розв'язування задачі № 9 методом початкових параметрів

Для заданої балки (рисунок 7.7) методом початкових параметрів визначити прогини перетинів C і D та кут повороту перетину A , якщо $F = 10$ кН, $M = 40$ кНм, $q = 20$ кН/м, $E \cdot I = const$.

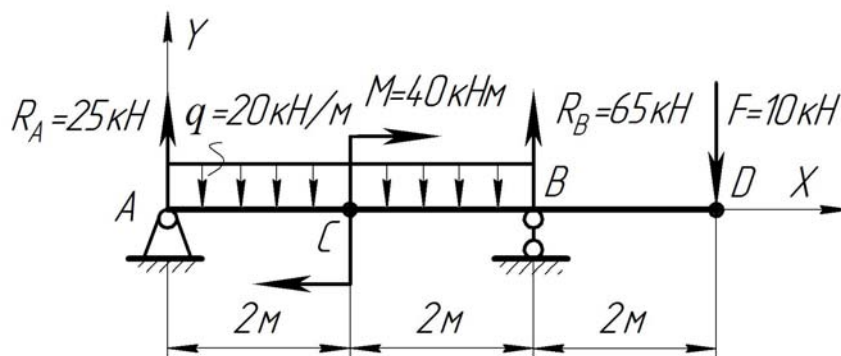


Рисунок 7.7

Розв'язування

З умов рівноваги запишемо:

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 - M - F \cdot 2 = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad -F \cdot 6 + R_B \cdot 4 - M - q \cdot 4 \cdot 2 = 0.$$

Визначаємо опорні реакції:

$$R_A = \frac{q \cdot 8 - M - F \cdot 2}{4} = \frac{20 \cdot 8 - 40 - 10 \cdot 2}{4} = 25 \text{ кН};$$

$$R_B = \frac{F \cdot 6 + M + q \cdot 8}{4} = \frac{10 \cdot 6 + 40 + 20 \cdot 8}{4} = 65 \text{ кН}.$$

Складаємо перевіряюче рівняння

$$\sum Y = R_A - q \cdot 4 + R_B - F = 25 - 20 \cdot 4 + 65 - 10 = 0,$$

тобто опорні реакції визначені правильно.

Початок координат вибираємо на крайній лівій опорі – опорі A . Записуємо загальне рівняння зігнутої осі балки методом початкових параметрів

$$E \cdot I \cdot y(x) = E \cdot I \cdot y_0 + E \cdot I \cdot \Theta_0 \cdot x + \frac{R_A \cdot x^3}{6} + \frac{M \cdot (x-2)^2}{2} + \frac{R_B \cdot (x-4)^3}{6} - \frac{q \cdot x^4}{24} + \frac{q \cdot (x-4)^4}{24}. \quad (7.14)$$

Початкові параметри y_0 і Θ_0 визначаємо з умов:

$$\begin{aligned} E \cdot I \cdot y(0) &= 0; \\ E \cdot I \cdot y(4) &= 0; \end{aligned} \quad (7.15)$$

або

$$\begin{cases} E \cdot I \cdot y_0 = 0; \\ E \cdot I \cdot y_0 + E \cdot I \cdot \Theta_0 \cdot 4 + \frac{R_A \cdot 4^3}{6} - \frac{q \cdot 4^4}{24} + \frac{M \cdot (4-2)^2}{2} = 0. \end{cases} \quad (7.16)$$

Із системи (7.16) отримаємо:

$$E \cdot I \cdot y_0 = 0;$$

$$E \cdot I \cdot \Theta_0 = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{25 \cdot 4^3}{6} + \frac{20 \cdot 4^4}{24} - \frac{40 \cdot 2^2}{2} \right) = -33,3.$$

Після підстановки початкових параметрів записуємо рівняння зігнутої осі балки

$$E \cdot I \cdot y(x) = -33,3 \cdot x + \frac{R_A \cdot x^3}{6} - \frac{q \cdot x^4}{24} + \frac{M(x-2)^2}{2} + \frac{R_B(x-4)^3}{6} + \frac{q(x-4)^4}{24}.$$

Визначаємо прогини балки у перетинах C і D .

Перетин C , $x_C = 2$ м:

$$E \cdot I \cdot y_C(2) = -33,3 \cdot 2 + \frac{25 \cdot 2^3}{24} - \frac{20 \cdot 2^4}{24} = -46,7;$$

звідки

$$y_C(2) = -\frac{46,7}{E \cdot I}.$$

Перетин D , $x_D = 6$ м:

$$E \cdot I \cdot y_D(6) = -33,3 \cdot 6 + \frac{25 \cdot 6^3}{6} - \frac{20 \cdot 6^4}{24} + \frac{40 \cdot 4^2}{2} + \frac{65 \cdot 2^3}{6} + \frac{20 \cdot 2^4}{24} = 40,0;$$

звідки

$$y_D(6) = \frac{40,0}{E \cdot I}.$$

Кут повороту перетину A

$$E \cdot I \cdot \Theta_0 = E \cdot I \cdot \Theta_A = -33,3;$$

звідки

$$\Theta_A = -\frac{33,3}{E \cdot I}.$$

Приклад розв'язування задачі № 9 методом Мора

Розв'яжемо задачу (див. рис. 7.7) методом Мора.

Дано: $q = 20$ кН/м; $M = 40$ кНм; $F = 10$ кН; $R_A = 25$ кН; $R_B = 65$ кН, $E \cdot I = const$. Розрахункова схема зображена на рисунку 7.8а.

Розв'язування

Визначаємо прогин перетину C . У «допоміжній» балці у точці C (рисунок 7.8б) прикладаємо одиничну силу. Визначаємо опорні реакції. У даному випадку (симетричне прикладання сили)

$$\bar{R}_A = \bar{R}_B = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Прогин перетину C за методом Мора визначимо, користуючись формулою

$$E \cdot I \cdot y_C = \int_l M(x) \cdot \bar{M}(x) dx. \quad (7.17)$$

Запишемо вирази $M(x)$ і $\bar{M}(x)$ на ділянках балки:
ділянка I; $0 \leq x \leq 2$ м (зліва)

$$M(x) = 25x - 10x^2;$$

$$\bar{M}(x) = 0,5x;$$

ділянка II; $2 \text{ м} \leq x \leq 4 \text{ м}$ (зліва)

$$M(x) = 25x - 10x^2 + 40;$$

$$\bar{M}(x) = 0,5x - 1(x - 2);$$

ділянка III; $0 \leq x \leq 2$ м (справа)

$$M(x) = -10x;$$

$$\bar{M}(x) = 0.$$

Підставляємо вирази $M(x)$ і $\bar{M}(x)$ в інтеграл Мора (7.17) і проводимо інтегрування

$$E \cdot I \cdot y_C = \int_0^2 (25x - 10x^2) \cdot 0,5x dx + \int_2^4 (25x - 10x^2 + 40) \cdot (0,5x - (x - 2)) dx + 0 =$$

$$= \int_0^2 (12,5x^2 - 5x^3) dx + \int_2^4 (50x - 20x^2 + 80 - 12,5x^2 + 5x^3 - 20x) dx =$$

$$= \frac{12,5 \cdot x^3}{3} \Big|_0^2 - \frac{5 \cdot x^4}{4} \Big|_0^2 + \frac{30 \cdot x^2}{2} \Big|_2^4 - \frac{32,5 \cdot x^3}{3} \Big|_2^4 + \frac{5 \cdot x^4}{4} \Big|_2^4 + \frac{80 \cdot x}{1} \Big|_2^4 = 46,7;$$

звідки прогин точки C

$$y_C = \frac{46,7}{E \cdot I}.$$

Знак «плюс» вказує на те, що прогин співпадає з напрямком дії одиничної сили.

Для визначення прогину перетину D у «допоміжній» балці (рисунок 7.8в) прикладаємо одиничну силу у цьому ж перетині. Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0; \quad \bar{R}_B \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 0; \quad \bar{R}_B = 1,5;$$

$$\sum M_B = 0; \quad \bar{R}_A \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 0; \quad \bar{R}_A = 0,5.$$

Записуємо вирази згинальних моментів від одиничного навантаження на ділянках балки:

ділянка I; $0 \leq x \leq 2$ м (зліва)

$$\bar{M}(x) = -0,5x;$$

ділянка II; $2 \text{ м} \leq x \leq 4 \text{ м}$ (зліва)

$$\bar{M}(x) = -0,5x;$$

ділянка III; $0 \leq x \leq 2$ м (справа)

$$\bar{M}(x) = -1x.$$

Підставляємо вирази $M(x)$ і $\bar{M}(x)$ в інтеграл Мора (7.17) і проводимо інтегрування

$$\begin{aligned} EIy_D &= \int_0^2 (25x - 10x^2) \cdot (-0,5x) dx + \int_2^4 (25x - 10x^2 + 40) \cdot (-0,5x) dx + \int_0^2 (-10x) \cdot (-1x) dx = \\ &= \int_0^2 (-12,5 \cdot x^2 - 5x^3) dx + \int_2^4 (-12,5x^2 + 5x^3 - 20x) dx + \int_0^2 10x^2 dx = \\ &= \frac{12,5 \cdot x^3}{3} \Big|_0^2 + \frac{5 \cdot x^4}{4} \Big|_0^2 - \frac{12,5 \cdot x^3}{2} \Big|_2^4 + \frac{5 \cdot x^4}{4} \Big|_2^4 - \frac{20 \cdot x^2}{2} \Big|_2^4 + \frac{10 \cdot x^3}{3} \Big|_0^2 = -40, \end{aligned}$$

звідки прогин точки D

$$y_D = -\frac{40}{E \cdot I}.$$

Знак «мінус» вказує на те, що прогин перетину D не співпадає з напрямком дії одиничної сили (див. рис. 7.8в).

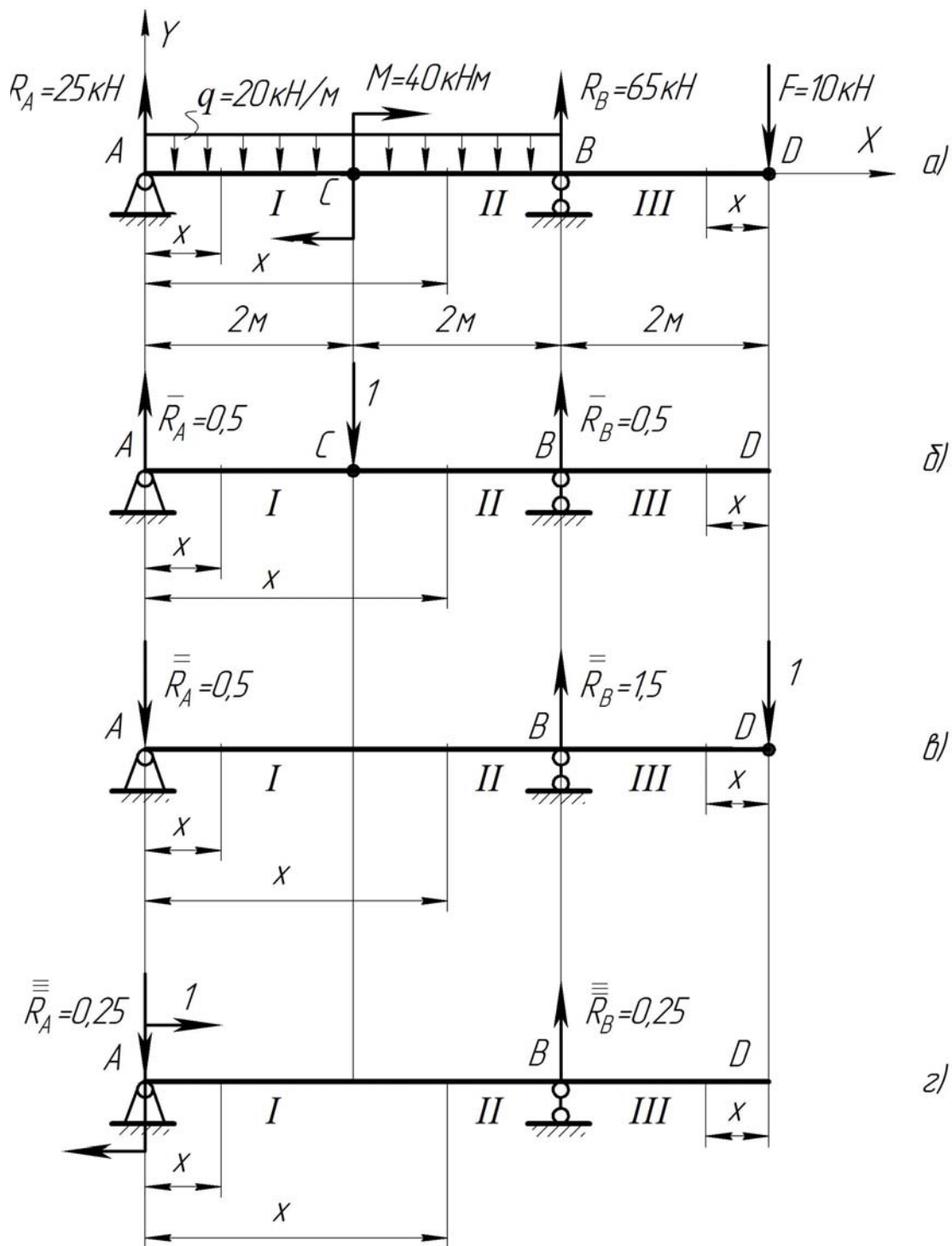


Рисунок 7.8

Для визначення кута повороту перетину A , у «допоміжній» балці (рисунок 7.8г), прикладаємо одиничний момент.

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту

$$\bar{\bar{\bar{R}}}_A = \bar{\bar{\bar{R}}}_B = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Вирази згинальних моментів для балки (рисунок 7.8г):
ділянка I; $0 \leq x \leq 2$ м (зліва);

$$\overline{\overline{M}}(x) = 1 - 0,25x;$$

ділянка II; $2 \text{ м} \leq x \leq 4 \text{ м}$ (зліва);

$$\overline{\overline{M}}(x) = 1 - 0,25x;$$

ділянка III; $0 \leq x \leq 2$ м (справа);

$$\overline{\overline{M}}(x) = 0.$$

Кут повороту перетину A за методом Мора визначимо, користуючись формулою

$$E \cdot I \cdot \Theta_A = \int_l M(x) \cdot \overline{\overline{M}}(x) dx. \quad (7.18)$$

Підставивши дані, отримаємо

$$\begin{aligned} E \cdot I \cdot \Theta_A &= \int_0^2 (25x - 10x^2) \cdot (1 - 0,25x) dx + \\ &+ \int_2^4 (25x - 10x^2 + 40) \cdot (1 - 0,25x) dx + 0 = \\ &= \int_0^2 (25x - 10x^2 - 6,25x^2 + 2,5 \cdot x^3) dx + \\ &+ \int_2^4 (25x - 10x^2 + 40 - 6,25x^2 + 2,5x^3 - 10x) dx = \\ &= \frac{25 \cdot x^2}{2} \Big|_0^2 - \frac{16,25 \cdot x^3}{3} \Big|_0^2 + \frac{2,5 \cdot x^4}{4} \Big|_0^2 + \frac{40 \cdot x}{1} \Big|_2^4 + \frac{15 \cdot x^2}{2} \Big|_2^4 - \\ &- \frac{16,25 \cdot x^3}{3} \Big|_2^4 + \frac{2,5 \cdot x^4}{4} \Big|_2^4 = 33,4; \end{aligned}$$

звідки кут повороту перетину A

$$\Theta_A = \frac{33,4}{E \cdot I}.$$

8. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ СИСТЕМИ

Загальні поняття

Статично невизначувані системи – це системи, в яких реакції в'язей та внутрішні зусилля неможливо визначити тільки з рівнянь рівноваги.

Такі системи (конструкції) найпоширеніші, бо вони є надійнішими та жорсткішими порівняно зі статично визначуваними.

Статично визначувану (ізостатичну) балку чи раму можна перетворити у статично невизначувану (гіперстатичну) встановивши додаткову (зайву з точки зору рівноваги системи) опору. Переваги такої системи: навантаження на неї можна збільшити не міняючи перетин балки, при пошкодженні однієї із опор в ізостатичній системі вона перетворюється в механізм, тоді як гіперстатична система залишається нерухомою, здатною сприймати навантаження, тобто є безпечнішою. У багатьох випадках статично невизначувані системи є єдиною можливим варіантом конструкції.

Переваги статично невизначуваних систем: зменшують пружні переміщення; збільшують жорсткість і стійкість елементів системи; значно зменшують робочі напруження у їх перетинах; економічно доцільніші, бо при тих же розмірах перетинів можуть нести більше навантаження; при втраті деяких «зайвих» зв'язків зберігають нерухомість та геометричну незмінність; мають вищу надійність, більшу монолітність та зв'язність елементів у роботі; здатність перерозподіляти навантаження між елементами у разі пошкодження або ослаблення деяких з них (у випадку осадки однієї чи декількох опор).

Недоліки: у них виникають температурні напруження, а також монтажні - у випадку зміни їх розмірів відносно проектних.

Особливості: реакції опор і внутрішні зусилля в елементах залежать від жорсткостей поперечних перетинів стрижневої системи; неможливо забезпечити однакові запаси міцності у всіх елементах, тобто одні елементи можуть бути недовантаженими, інші – навпаки, що вимагає оптимального їх проектування.

Основні методи розкриття статичної невизначеності систем

Оскільки невідомих зусиль більше, ніж рівнянь рівноваги, то статичну невизначеність системи можна розкрити лише за допомогою додаткових рівнянь. Ці рівняння повинні відображати особливості геометричних зв'язків, що накладені на стрижневу систему. Складають такі рівняння за допомогою уявлення та зображення картини переміщень перетинів елементів конструкції при її деформуванні, тому їх називають – **рівняннями сумісності переміщень** (деформацій).

Методи розрахунку статично невизначуваних систем класифікують залежно від того, що приймають за невідомі величини. Якщо за невідомі прийняті переміщення, то метод розрахунку називають **методом переміщень**,

якщо невідомі прийняті зусилля, то метод їх розрахунку – *метод сил*. Якщо невідомими є частково сили, частково переміщення, то метод розрахунку – *змішаний*.

Метод переміщення, у якому за невідомі у рівняннях статички прийняті лінійні та кутові переміщення жорстких вузлів стержневої системи виник у 1880 році, метод сил відомий з 1807 року.

У курсах опору матеріалів частіше застосовують метод сил.

Метод сил

Розрахунок статично невизначуваної системи починають з її аналізу. Це необхідно для визначення ступеня статичної невизначеності. **Ступінь статичної невизначеності** дорівнює числу зайвих зв'язків, відкидання яких перетворює невизначувану систему в статично визначену (основну), геометрично незмінну. Термін «зайвий зв'язок» потрібно розуміти як «додатковий зв'язок», а не як «непотрібний зв'язок».

На рисунку 8.1а зображена статично невизначувана балка.

На дану балку накладено чотири зв'язки X_1, X_2, X_3, X_4 . Для плоскої системи сил можемо скласти тільки **три рівняння статички**, тому ця балка $4 - 3 = 1$ раз статично невизначувана. Як «зайвий зв'язок» приймаємо X_1 , тоді балка (рисунок 8.1б) є статично визначеною (основною).

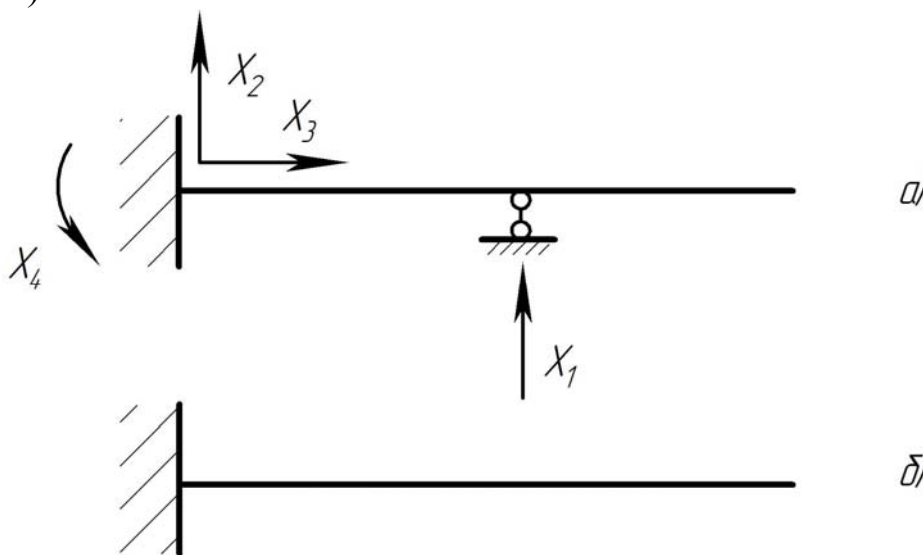


Рисунок 8.1

На рисунку 8.2а зображена плоска рама. Ця система $5 - 3 = 2$ рази статично невизначувана.

Відкинувши «зайві зв'язки» X_1 та X_2 , перетворимо статично невизначувану систему в статичну визначувану, геометрично незмінну, (рисунок 8.2б).

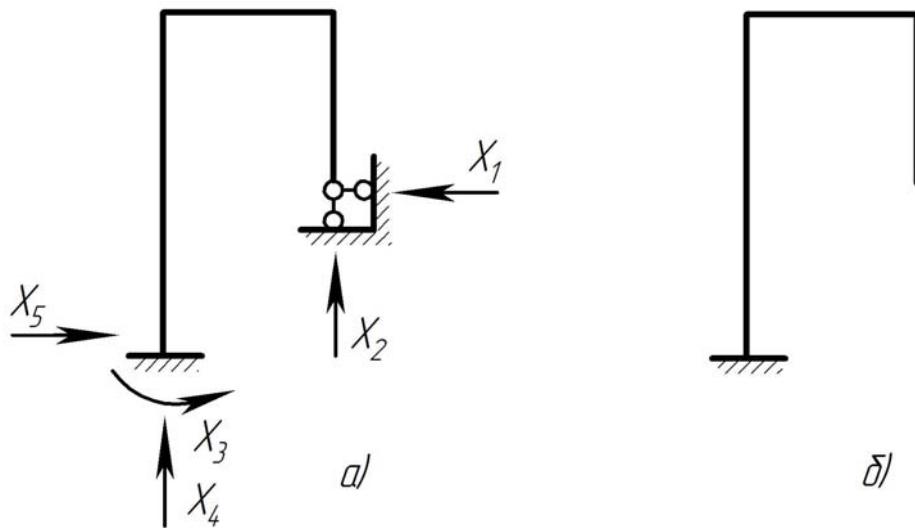


Рисунок 8.2

Статично визначувану, геометрично незмінну систему, утворену зі статично невизначуваної, називають **основною системою**. На рис. 8.1б зображена основна система.

В основу методу сил покладено *принцип незалежності дії сил*.

Порядок розрахунку статично невизначуваних систем за методом сил:

1. **Встановлення ступеня статичної невизначуваності системи** (див. рис. 8.1, 8.2).

2. **Вибір основної системи** шляхом відкидання зайвих зв'язків. Основна система має бути статично визначуваною, нерухомою та геометрично незмінною і після прикладання навантаження. Для кожної заданої системи можна вибрати кілька основних, тому доцільно вибрати оптимальну, що значно спрощує подальші розрахунки.

3. **Формування еквівалентної системи**. Штучні зміни у статично невизначуваній заданій системі при переході до основної системи повинні бути компенсовані введенням відповідних узагальнених невідомих зусиль, прикладених замість відкинутих зв'язків. У перетинах, де неможливі лінійні переміщення, прикладають зосереджені сили, а там, де заборонені кутові переміщення, вводять моменти. Ці невідомі, поки що, зусилля, позначають X_i , де i – номер невідомого зайвого зусилля. Тобто, заміною відкинутих зайвих зв'язків зусиллями X_i та прикладанням зовнішнього навантаження формують «еквіваленту» систему. При переході до неї має бути збережена силова схема заданої гіперстатичної системи та її деформаційна схема, тобто еквівалентна система повинна деформуватися так само, як і задана гіперстатична. Ці вимоги можуть бути сформульовані у вигляді так званих умов нерозривності або *сумісності деформацій*.

напрямку реакції цієї в'язі під дією заданого навантаження та всіх невідомих сил.

Загальна кількість рівнянь сумісності переміщень дорівнює кількості невідомих зусиль (відкинутих зайвих зв'язків), тобто ступеню статичної невизначуваності заданої системи.

5. Обчислення коефіцієнтів та вільних членів системи канонічних рівнянь. Ці переміщення доцільно визначати за допомогою формул енергетичного методу (інтегралом Мора).

При визначенні δ_{ij} та Δ_{iF} вирази для жорсткості EI елементів системи доцільно залишати у загальному (а не числовому) вигляді, щоб спростити канонічні рівняння та скоротити розрахунки.

Для того, щоб визначити вільні члени системи рівнянь (8.2), тобто повні переміщення Δ_{iF} , необхідно побудувати епюри, зумовлені дією зовнішніх сил. Краще будувати ці епюри від кожної сили окремо. Перемноженням цих реальних епюр на відповідні одиничні визначають величину переміщень $\Delta_i(F)$.

6. Визначення невідомих зусиль із системи канонічних рівнянь.

7. Розрахунки на міцність, жорсткість та стійкість можна вести аналогічно тому, як це роблять у випадку статично визначуваних систем. **Визначення сумарних згинальних моментів та інших внутрішніх силових факторів у перетинах ведуть на основі принципу незалежності дії сил класичним методом перетинів або способом складання відповідних епюр.**

При визначенні реальних переміщень окремих перетинів системи до основної системи потрібно прикласти одиничну силу, побудувати епюру згинальних моментів від цієї сили та перемножити її на сумарну епюру від зовнішнього навантаження. Щоб не ділити сумарну епюру на прості ділянки, можна перемножити одиничну епюру на окремі реальні епюри від дії кожної сили і додати результати. **Переміщення характерних перетинів** (закріплень на опорах) **визначають для перевірки вірності всіх попередніх розрахунків статично невизначуваної системи.**

Метод мінімуму потенціальної енергії деформації (ММПЕД)

При розгляді статично невизначуваних рамних конструкцій, враховуючи адитивність (безперервність) функції потенціальної енергії деформації, можна записати вираз повної потенціальної енергії деформації конструкції

$$U = U_M + U_K + U_Q + U_N, \quad (8.3)$$

де U_M – потенціальна енергія деформації згину елементів рами,

$$U_M = \sum \int \frac{[M(x)]^2}{2EI_0} dx;$$

U_K – потенціальна енергія деформації кручення,

$$U_K = \sum \int \frac{[K(x)]^2}{2GI_p} dx;$$

U_Q – потенціальна енергія деформації зсуву,

$$U_Q = \sum \int \frac{[Q(x)]^2}{2GA} dx;$$

U_N – потенціальна енергія деформації розтягу (стиску)

$$U_N = \sum \int \frac{[N(x)]^2}{2EA} dx,$$

тут E і G – відповідно модулі пружності та зсуву;

I_0 – осьовий момент інерції поперечного перетину;

I_p – полярний момент інерції поперечного перетину;

A – площа поперечного перетину;

$M(x)$ – функції згинального моменту;

$K(x)$ – функції крутного моменту;

$Q(x)$ – функції поперечних сил;

$N(x)$ – функції розтягуючих (стискаючих) сил.

У цих формулах інтегрування проводять вздовж елементів рами (балки).

Формула (8.3) та її складові є **основними виразами потенціальної енергії деформації при розкритті статичної невизначуваності будь-яких систем.**

Використовуючи теорему Кастиліано $\partial U / \partial X_i = 0$, складають систему рівнянь і визначаємо значення зайвих невідомих.

При розрахунках рамних конструкцій потенціальними енергіями від нормальних і поперечних сил нехтують, враховуючи лише потенціальні енергії від згинального моменту та кручення.

Задача № 10

Розрахунок статично невизначуваної рами

Для заданої статично невизначуваної рами (рисунок до задачі № 10, таблиця до задачі № 10) розкрити статичну невизначеність методом сил та перевірити отриманий результат методом мінімуму потенціальної енергії деформації (ММПЕД). Побудувати епюри поперечних та осьових сил, згинальних моментів. Провести статичну перевірку будь-якого вузла рами. Підібрати двотавровий перетин, якщо $[\sigma] = 160$ МПа; $a = 1$ м; $q = 20$ кН/м; $E \cdot I = \text{const}$. З двох зв'язків (1 і 2) залишити той, що вказаний у таблиці 10.

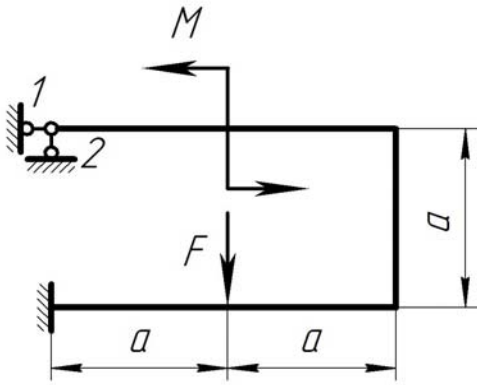
План розв'язування задачі:

1. Вибрати основну систему і побудувати епюри згинальних моментів від зовнішніх та одиничних навантажень в основній системі.
2. Записати канонічне рівняння методу сил.
3. Визначити коефіцієнт δ_{11} і вільний член $\Delta_1(F)$ канонічного рівняння.
4. Розв'язати канонічне рівняння.
5. Перевірити правильність розкриття статичної невизначеності ММПЕД.
6. Записати функції осьових N , поперечних Q сил і згинальних моментів M на ділянках рами.
7. Побудувати епюри N , Q , M для еквівалентної системи.
8. Провести статичну перевірку будь-якого вузла рами.
9. Визначити небезпечний перетин рами і підібрати двотавровий перетин з умови міцності за нормальними напруженнями, що виникають від згину.

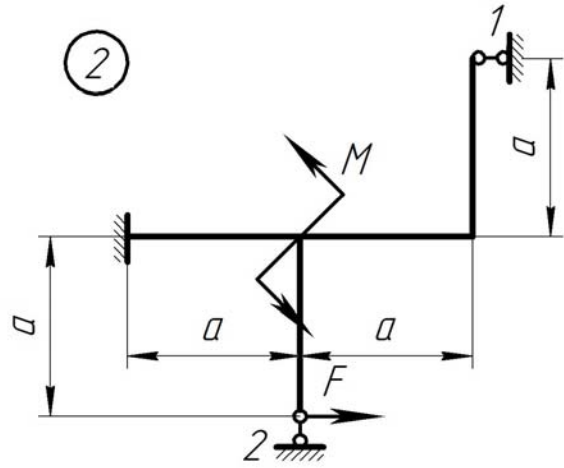
Таблиця до задачі № 10

№ з/п	F , кН	M , кНм	№ зв'язку
1	$q \cdot a$	$F \cdot a$	1
2	$2 q \cdot a$	$q \cdot a^2$	2
3	$3 q \cdot a$	$F \cdot a$	1
4	$q \cdot a$	$q \cdot a^2$	2
5	$2 q \cdot a$	$F \cdot a$	1
6	$3 q \cdot a$	$q \cdot a^2$	2
7	$q \cdot a$	$F \cdot a$	1
8	$2 q \cdot a$	$q \cdot a^2$	2
9	$3 q \cdot a$	$F \cdot a$	1
0	$q \cdot a$	$q \cdot a^2$	2

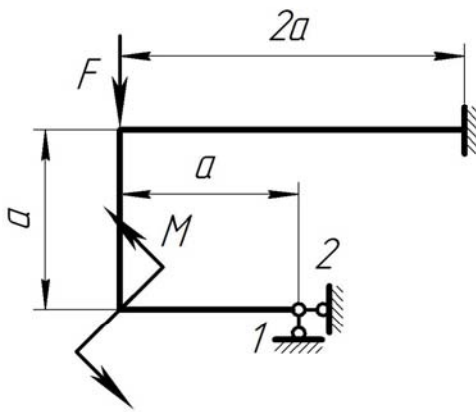
1



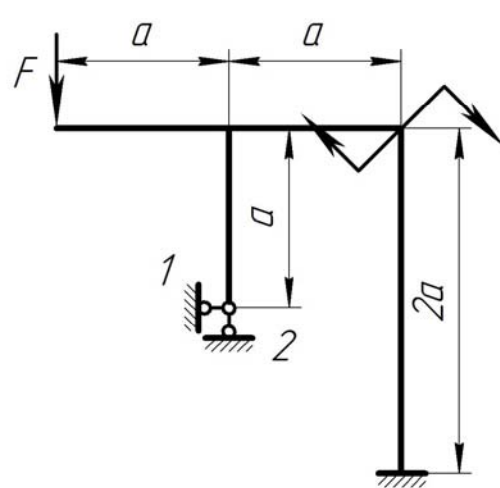
2



3



4



5

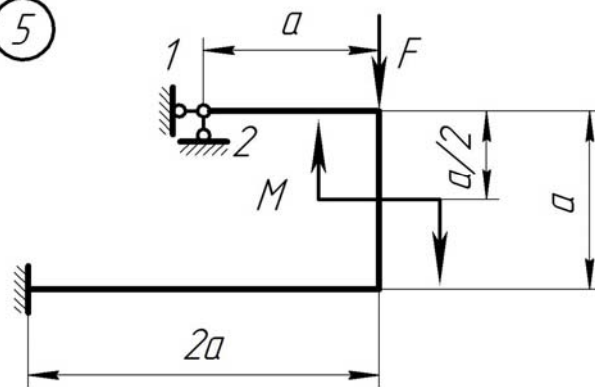


Рисунок до задачі № 10

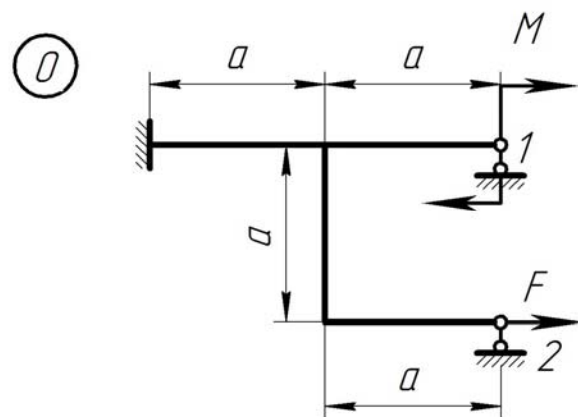
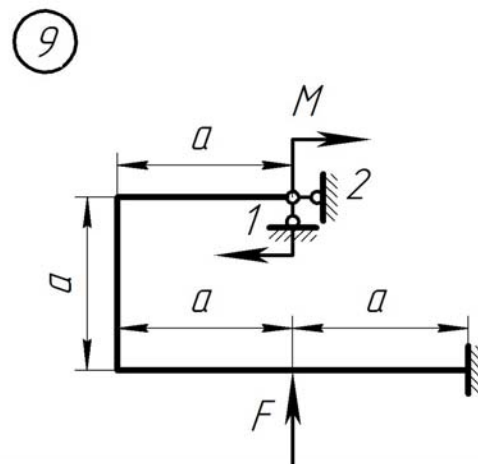
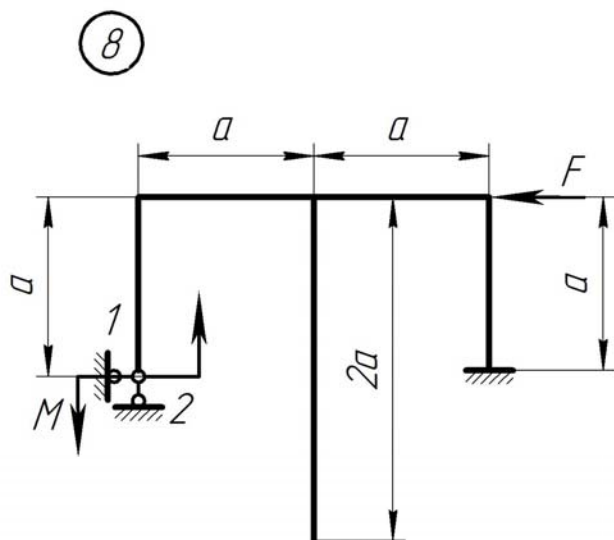
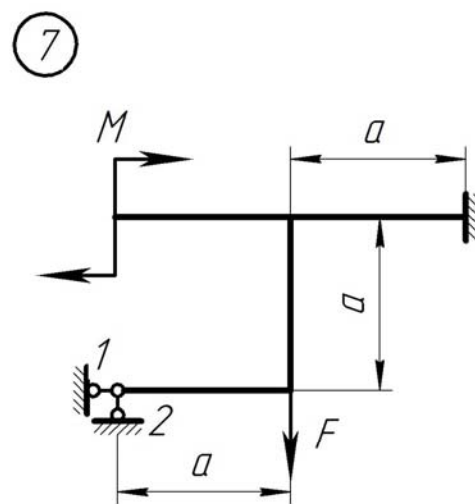
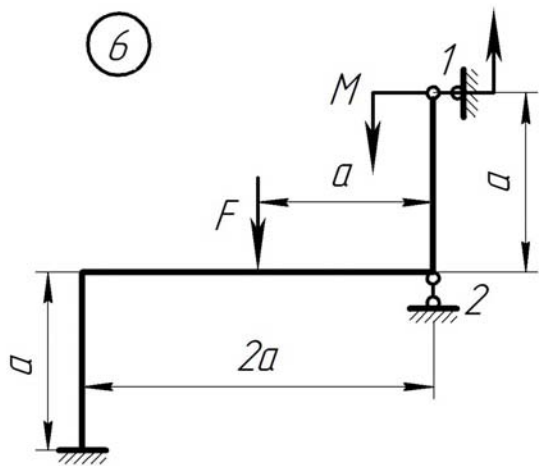


Рисунок до задачі № 10 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі № 10 методом сил

Для заданої статично невизначуваної рами (рисунок 8.3а) розкрити статичну невизначеність методом сил та перевірити отриманий результат методом мінімуму потенціальної енергії деформації (ММПЕД). Побудувати епюри поперечних та осьових сил, згинальних моментів. Провести статичну перевірку будь-якого вузла рами. Підібрати поперечний перетин, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $a = 1 \text{ м}$; $F = 40 \text{ кН}$; $M = 60 \text{ кН/м}$; $E \cdot I = \text{const}$.

Розв'язування

Задана рамна конструкція (див. рис. 8.3а) $4-3=1$ раз статично невизначена. Статичну невизначеність розкриваємо методом сил. Як «зайву» невідому приймаємо X_1 .

Основна система показана на рисунку 8.3б.

Записуємо канонічне рівняння методу сил

$$X_1 \cdot \delta_{11} = -\Delta_1(F).$$

Переміщення (коефіцієнт) δ_{11} і вільний член рівняння $\Delta_1(F)$ визначаємо графоаналітичним способом розв'язку інтегралу Мора.

Навантажуюмо основну систему одиничною силою (рисунок 8.3в). Будуємо епюру згинальних моментів від одиничної сили (рисунок 8.3г). Визначаємо

$$E \cdot I \cdot \delta_{11} = \omega_1 \cdot \overline{M}_{C1},$$

$$\text{де } \omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2; \quad \overline{M}_{C1} = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Тоді

$$E \cdot I \cdot \delta_{11} = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Щоб визначити вільний член рівняння $\Delta_1(F)$ до основної системи прикладаємо зовнішнє навантаження (рисунок 8.3д). Будуємо епюру згинальних моментів від навантажень (рисунок 8.4е). Запишемо рівняння

$$E \cdot I \cdot \Delta_1(F) = \omega_2 \cdot \overline{M}_{C2} - \omega_3 \cdot \overline{M}_{C3},$$

$$\text{де } \omega_2 = 40 \cdot 1 = 40; \quad \omega_3 = 20 \cdot 1 = 20; \quad \overline{M}_{C2} = \frac{1}{2} = 0,5; \quad \overline{M}_{C3} = 1,5.$$

Тоді

$$E \cdot I \cdot \Delta_1(F) = 40 \cdot 0,5 - 20 \cdot 1,5 = -10.$$

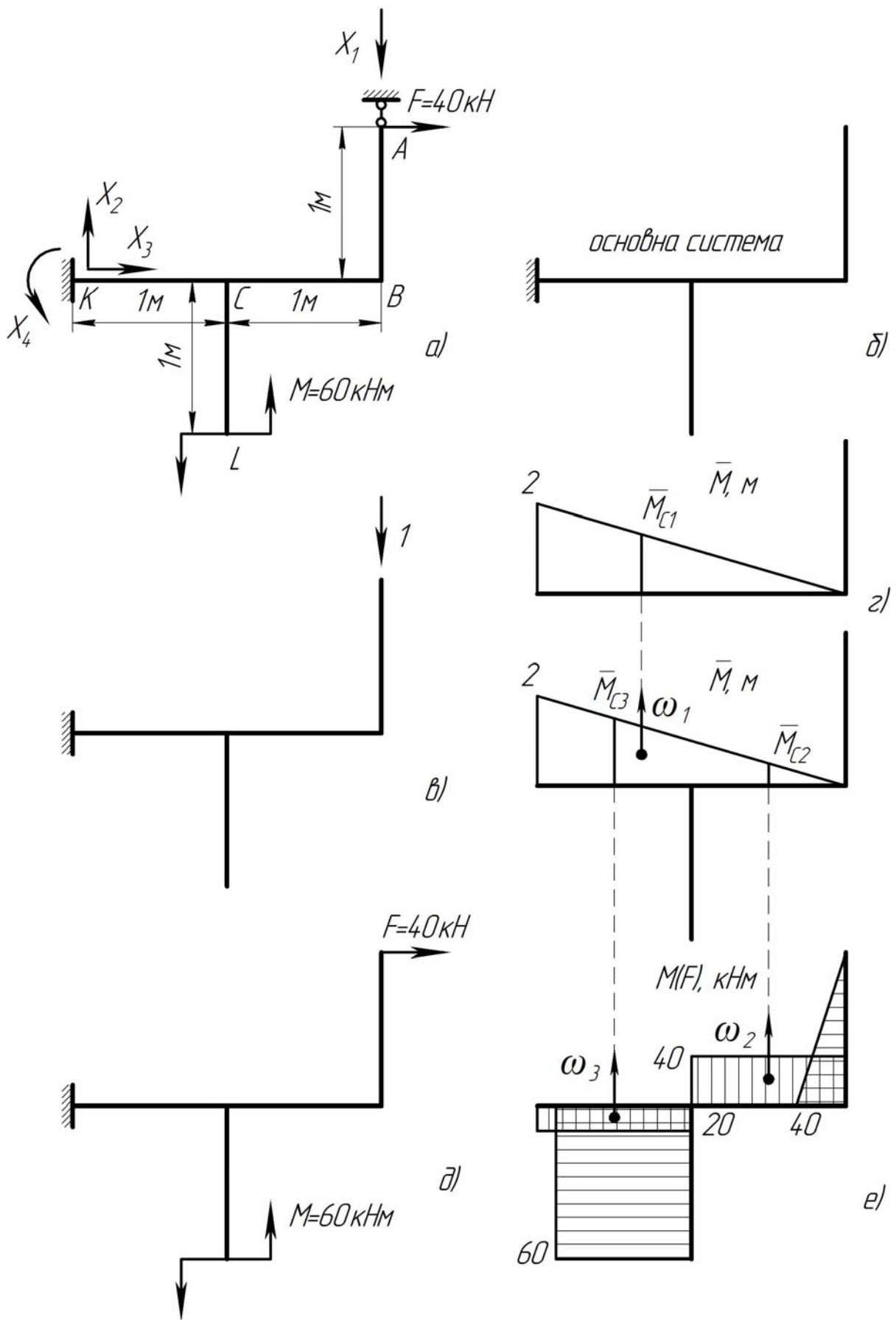


Рисунок 8.3

Розв'язуємо канонічне рівняння методу сил

$$X_1 = -\frac{\Delta_1(F)}{\delta_{11}} = -\frac{(-10) \cdot 3}{8} = 3,75 \text{ кН.}$$

Знак «плюс» вказує на те, що напрям сили реакції X_1 , вибрано вірно.

Викреслюємо еквівалентну систему (рисунок 8.3ж). **Еквівалентна система** – це основна система, завантажена зовнішнім навантаженням і визначеними силами реакцій, тобто **задана початкова система з визначеними реакціями**.

Розбиваємо раму на ділянки. Визначаємо значення внутрішніх силових факторів для кожної з них. На схемі (див. рис. 8.3ж) на контурі рами проставлені знаки «плюс» – для додатних значень згинальних моментів. Вважаємо згинальний момент додатним, якщо він розтягує нижні волокна. Записуємо функції осьових N , поперечних сил Q та згинального моменту M на ділянках рами.

Ділянка AB , $0 \leq x \leq 1 \text{ м}$:

$$\begin{aligned} N(x) &= -X_1 = -3,75 \text{ кН}; & N_A &= N_B = -3,75 \text{ кН}; \\ Q(x) &= F = 40 \text{ кН}; & Q_A &= Q_B = 40 \text{ кН}; \\ M_{3Г}(x) &= -F \cdot x = -40 x; & M_{3Г.A} &= 0; \quad M_{3Г.B} = -40 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Ділянка BC , $0 \leq x \leq 1 \text{ м}$:

$$\begin{aligned} N(x) &= F = 40 \text{ кН}; & N_B &= N_C = 40 \text{ кН}; \\ Q(x) &= X_1 = 3,75 \text{ кН}; & Q_B &= Q_C = 3,75 \text{ кН}; \\ M_{3Г}(x) &= -F \cdot 1 - X_1 \cdot x = -40 - 3,75 x; \\ M_{3Г.B} &= -40 \text{ кНм}; & M_{3Г.C} &= -43,75 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Ділянка LC , $0 \leq x \leq 1 \text{ м}$:

$$\begin{aligned} N(x) &= 0; & N_L &= N_C = 0; \\ Q(x) &= 0; & Q_L &= Q_C = 0; \\ M_{3Г}(x) &= M = -60 \text{ кНм}; & M_{3Г.L} &= M_{3Г.C} = -60 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Ділянка CK , $1 \text{ м} \leq x \leq 2 \text{ м}$:

$$\begin{aligned} N(x) &= F = 40 \text{ кН}; & N_C &= N_K = 40 \text{ кН}; \\ Q(x) &= X_1 = 3,75 \text{ кН}; & Q_C &= Q_K = 3,75 \text{ кН}; \\ M_{3Г}(x) &= -F_1 \cdot 1 - X_1 \cdot 1 - X_1 \cdot x + M = -40 - 3,75 - 3,75 x + 60 = 16,25 - 3,75 x; \\ M_{3Г.C} &= 16,25 \text{ кНм}; & M_{3Г.K} &= 12,5 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

За отриманими результатами будуємо епюри N , Q та $M_{3Г}$ (рисунок 8.3з, к, л).

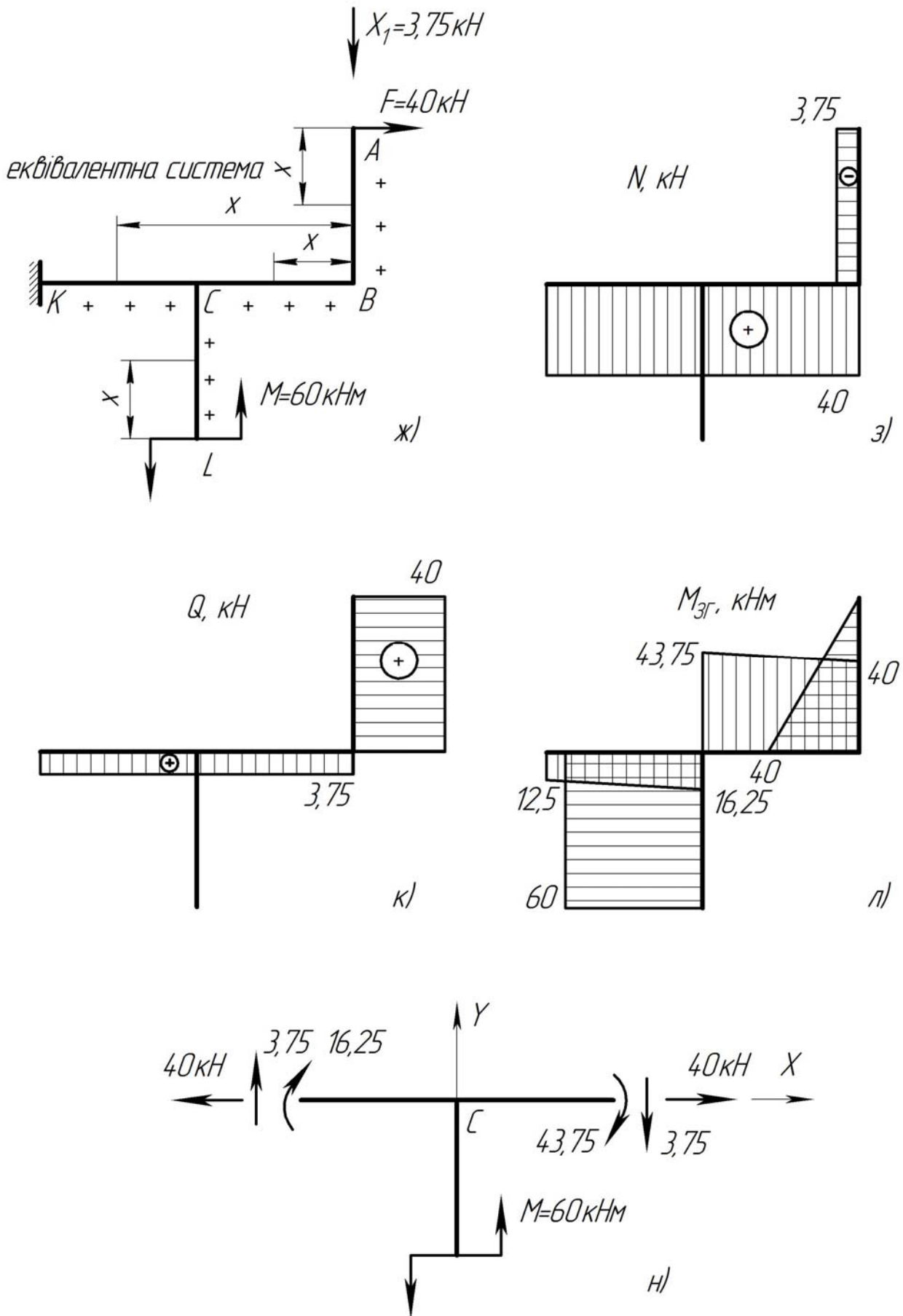


Рисунок 8.3 (закінчення)

Проводимо перевірку розкриття статичної невизначеності.
 Статична перевірка. Розглядаємо рівновагу вузла C (рисунок 8.3н):
 Записуємо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{iX} = F - Q_A = 40 - 40 = 0;$$

$$\sum F_{iY} = -X_1 + N = -3,75 + 3,75 = 0;$$

$$\sum M_{iC} = 60 - 16,25 - 43,75 = 0.$$

З епюри згинальних моментів (див. рис. 8.3л) визначаємо

$$M_{3Г.max} = 60 \text{ кНм.}$$

Щоб підібрати перетин рами, з умови міцності на згин за нормальними напруженнями, визначаємо осьовий момент опору одного швелера

$$W_0 = \frac{M_{3Г.max}}{2[\sigma]} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 160} = 187,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

приймаємо швелер №22а (додаток 4, ГОСТ 8240-72), для якого $W_0 = 192 \text{ см}^3$.

Приклад розв'язування задачі №10 методом мінімуму потенціальної енергії деформації

Розкрити статичну невизначеність рамної конструкції (див. рис. 8.3а) методом мінімуму потенціальної енергії деформації (ММПЕД).

Розв'язування

Запишемо вирази потенціальних енергій деформацій від згину для кожного елемента рами.

Ділянка AB , $0 \leq x \leq 1 \text{ м}$:

$$M(x) = F \cdot x = 40 x;$$

$$U_1 = \int_0^1 \frac{(40 x)^2}{2 E \cdot I} dx.$$

Ділянка BC , $0 \leq x \leq 1 \text{ м}$:

$$M(x) = 40 \cdot 1 + X_1 \cdot x;$$

$$U_2 = \int_0^1 \frac{(40 + X_1 \cdot x)^2}{2 E \cdot I} dx.$$

Ділянка LC , $0 \leq x \leq 1$ м:

$$M(x) = M = 60;$$

$$U_3 = \int_0^1 \frac{(60)^2}{2 E \cdot I} dx.$$

Ділянка CK , $0 \leq x \leq 1$ м:

$$M(x) = 40 + X_1 \cdot 1 + X_1 \cdot x - 60 = -20 + X_1 + X_1 \cdot x;$$

$$U_4 = \int_0^1 \frac{(-20 + X_1 + X_1 \cdot x)^2}{2 E \cdot I} dx.$$

Загальна потенціальна енергія деформації від згину

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = \int_0^1 \frac{(40 \cdot x)^2}{2 E \cdot I} dx + \int_0^1 \frac{(40 + X_1 \cdot x)^2}{2 E \cdot I} dx + \\ + \int_0^1 \frac{(60)^2}{2 E \cdot I} dx + \int_0^1 \frac{(-20 + X_1 + X_1 \cdot x)^2}{2 E \cdot I} dx.$$

З рівняння $\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0$, визначаємо величину реакції X_1 :

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \frac{1}{2EI} \left\{ 0 + \int_0^1 2(40 + X_1 \cdot x) x dx + 0 + \int_0^1 2(-20 + X_1 + X_1 \cdot x)(1 + x) dx \right\} = \\ = \frac{1}{2EI_0} \left\{ \frac{80 \cdot x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{2X_1 \cdot x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{40 \cdot x}{1} \Big|_0^1 + \frac{2X_1 \cdot x}{1} \Big|_0^1 + \frac{2X_1 \cdot x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{40 \cdot x^2}{2} \Big|_0^1 + \right. \\ \left. + \frac{2X_1 \cdot x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{2X_1 \cdot x^3}{3} \Big|_0^1 \right\} = 40 + \frac{2}{3} X_1 - 40 + 2X_1 + X_1 - 20 + X_1 + \frac{2}{3} X_1 = \\ = -20 + \frac{16}{3} X_1 = 0;$$

звідки

$$X_1 = \frac{20 \cdot 3}{16} = 3,75 \text{ кН},$$

що співпадає з визначеннями методу сил.

9. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ КОСОМУ ЗГИНІ

Косий згин – складний вид деформації. Виникає тоді, коли площина дії сумарного згинального моменту у поперечному перетині балки не співпадає ні з однією з його головних площин, тобто площин, проведених через вісь балки і головні осі інерції перетину.

Розглянемо випадок чистого косого згину. У довільному поперечному перетині силова площина дії згинальної пари M утворює з головною віссю інерції Y кут α (рисунок 9.1).

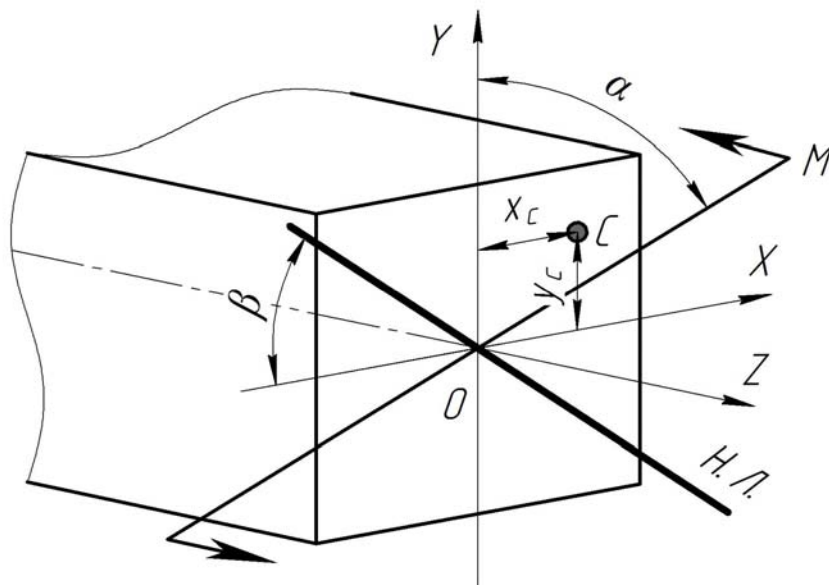


Рисунок 9.1

Косий згин розглядаємо як поєднання двох прямих згинів у головних площинах XZ та YZ (рисунок 9.2). Осі X та Y – головні центральні осі інерції перетину, вісь Z збігається з поздовжньою віссю балки.

Складові M_X і M_Y загального згинального моменту M , що діють у головних площинах, визначають за формулами:

$$M_X = M \cdot \cos \alpha ; \quad M_Y = M \cdot \sin \alpha .$$

Нормальне напруження при косому згині, у будь-якій точці поперечного перетину, наприклад у точці C з координатами x_C та y_C (див. рис. 9.1), **визначають як алгебраїчну суму нормальних напружень від складових згинального моменту M_X і M_Y ,**

$$\sigma_{Z \text{ сум}} = \sigma_Z(M_X) + \sigma_Z(M_Y) = - \left(\frac{M_X}{I_X} \cdot y_C + \frac{M_Y}{I_Y} \cdot x_C \right) \quad (9.1)$$

або

$$\sigma_{Z \text{ сум}} = -M \left(\frac{y_C}{I_X} \cdot \cos \alpha + \frac{x_C}{I_Y} \cdot \sin \alpha \right). \quad (9.2)$$

Систему координат XYZ вибирають так, щоб у I-му квадранті діяли напруження стиску.

Нейтральна (нульова) лінія перетину – це геометричне місце точок, в яких нормальні напруження дорівнюють нулю. Ця лінія обов'язково проходить через центр ваги поперечного перетину.

Рівняння нейтральної лінії при косому згині

$$\frac{M_X}{I_X} \cdot y_0 + \frac{M_Y}{I_Y} \cdot x_0 = 0, \quad (9.3)$$

або

$$\frac{y_0}{I_X} \cdot \cos \alpha + \frac{x_0}{I_Y} \cdot \sin \alpha = 0, \quad (9.4)$$

де x_0, y_0 – координати точок нейтральної лінії перетину (рисунок 9.3).

Оскільки $x_0 = 0$, то й $y_0 = 0$. Положення такої лінії визначають кутом її нахилу до вісі X (рисунок 9.2)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{I_X}{I_Y} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (9.5)$$

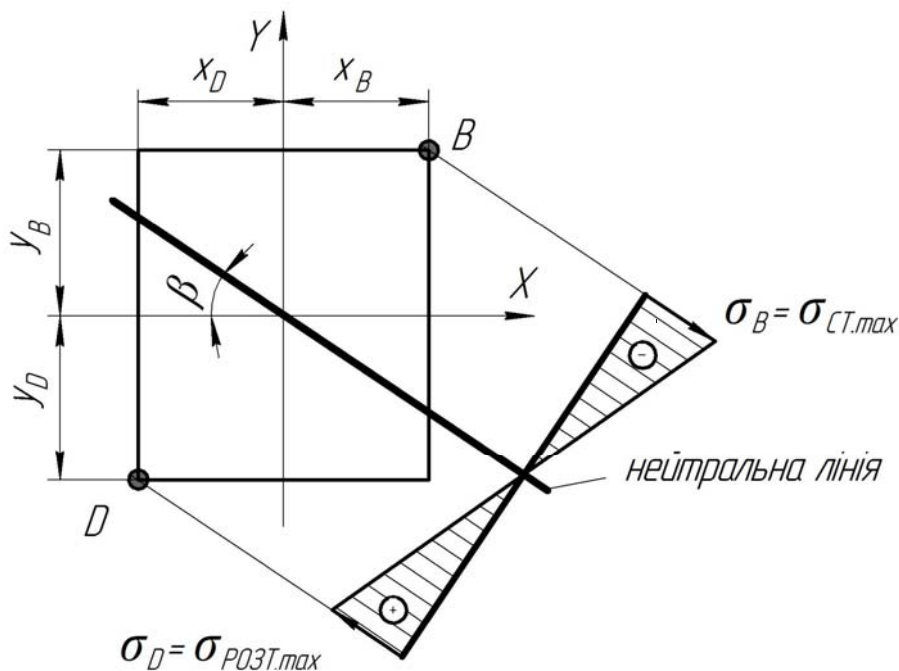


Рисунок 9.2

Напруження при косому згині. Умова міцності

Максимальні нормальні напруження, що виникають у найбільш віддалених від нейтральної лінії точках симетричного перетину, наприклад прямокутник (див. рис. 9.2), точки B і D , однакові за величиною, але різні за знаком. Їх визначають за формулою

$$\sigma_{\max/\min} = \pm \left(\frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \right), \quad (9.6)$$

де M_X і M_Y – згинальні моменти відносно головних осей у найбільш навантаженому небезпечному перетині.

Для пластичних матеріалів, поперечні перетини яких мають дві осі симетрії, **умова міцності за нормальними напруженнями при косому згині**

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma]. \quad (9.7)$$

Дотичні напруження при косому згині визначають як суму дотичних τ_X , τ_Y напружень, отриманих від дії поперечних сил Q_X , Q_Y

$$\tau = \sqrt{\tau_X^2 + \tau_Y^2}. \quad (9.8)$$

Складові дотичних напружень τ_Y , τ_Z визначають за формулою Д.І. Журавського

$$\tau_X = \frac{Q_X \cdot S_Y^{\text{відр}}}{b_1 \cdot I_Y}; \quad \tau_Y = \frac{Q_Y \cdot S_X^{\text{відр}}}{b_2 \cdot I_X}. \quad (9.10)$$

Деформації при косому згині

У загальному випадку для перетину із різними значеннями осьових моментів інерції, тобто при $I_X \neq I_Y$ і при $\text{tg}\beta \neq \text{tg}\alpha$ нейтральна лінія не перпендикулярна силовій лінії, а відхилена в сторону осі мінімального момента інерції перетину.

Оскільки напрям повного прогину f і нейтральна лінія завжди ортогональні (рисунок 9.3), то балка при косому згині згинається не в силовій площині, а в деякій іншій площині, де жорсткість на згинання буде меншою.

Косий згин зводять до двох плоских. Застосовуючи принцип суперпозиції визначають переміщення f_X і f_Y у кожній з головних площин.

Загальний прогин балки f (див. рис. 9.3) при косому згині визначають як геометричну суму прогинів

$$f = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2}. \quad (9.11)$$

Напрямок повного прогину визначають кутом

$$\gamma = \arctg \left(\frac{f_X}{f_Y} \right),$$

однаковим з кутом β .

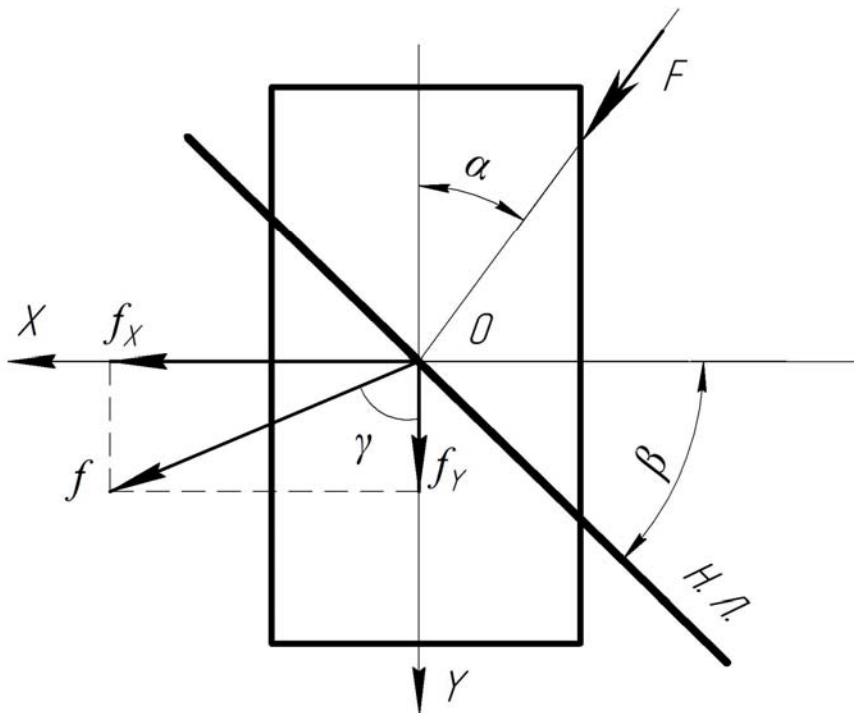


Рисунок 9.3

Явище косоного згину небезпечне для перетинів, які значно відрізняються осьовими моментами інерції відносно головних центральних осей перетину (наприклад, двотавра). Балки з таким перетином мало прогинаються при згині у площині найбільшої жорсткості, але навіть при незначних кутах нахилу площини дії зовнішніх сил до площини найбільшої жорсткості у балках виникає значне відхилення лінії повного прогину f у бік найменшої жорсткості.

Задача № 11

Підбір поперечного перетину балки при деформації косоного згину

Для заданої балки (рисунок до задачі № 11, таблиця до задачі № 11) підібрати прямокутний перетин при відношенні висоти балки до її ширини $h/b = 2$, розмістивши сторони b та h паралельно осям X та Y найбільш раціонально. Знайти положення нейтральної осі у небезпечному перетині балки. Побудувати просторову епюру розподілу нормальних напружень у небезпечному перетині. Визначити повне переміщення перетину, позначеного точкою A на рисунку, якщо $a = 1$ м; матеріал балки – сталь Ст.3; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[\sigma] = 160$ МПа.

План розв'язування задачі:

1. Розкласти задані навантаження на осі X і Y . Побудувати балки у вертикальній і горизонтальній площинах. Записати функції поперечних сил і згинальних моментів у горизонтальній і вертикальній площинах.
2. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів у горизонтальній і вертикальній площинах.
3. Визначити небезпечний перетин і встановити раціональне його розміщення відносно навантаження.
4. Визначити розміри поперечного перетину балки з умови міцності за нормальними напруженнями.
5. Визначити положення нейтральної лінії у небезпечному перетині балки і побудувати просторову епюру розподілу нормальних напружень у перетині.
6. Визначити горизонтальний, вертикальний і повний прогини балки у перетині A .

Таблиця до задачі № 11

№ з/п	q , кН/м	F , кН	M , кНм	α°
1	5	12	12	0
2	6	10	10	90
3	8	8	8	180
4	10	6	6	270
5	12	5	5	360
6	5	12	12	0
7	6	10	10	90
8	8	8	8	180
9	10	6	6	270
0	12	5	5	360

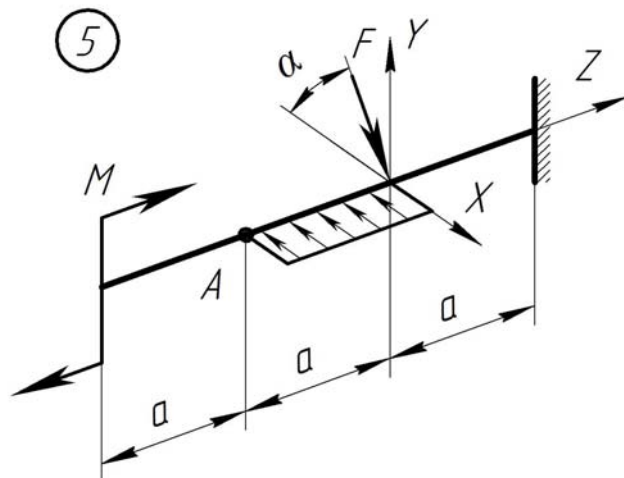
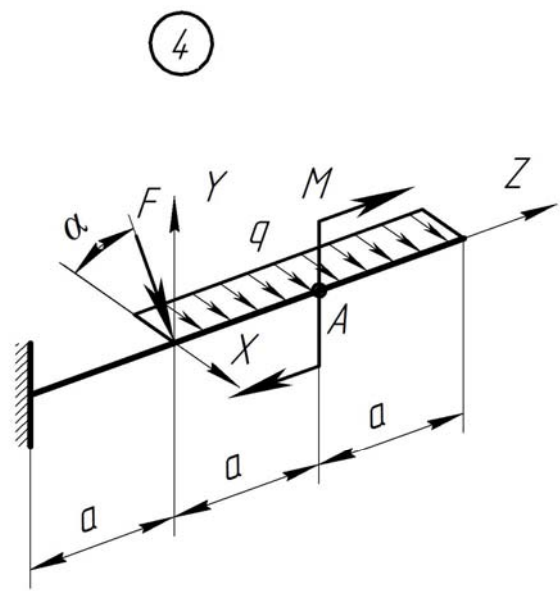
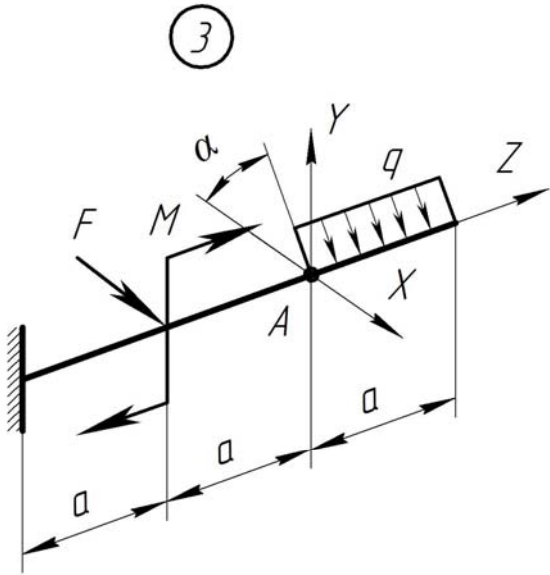
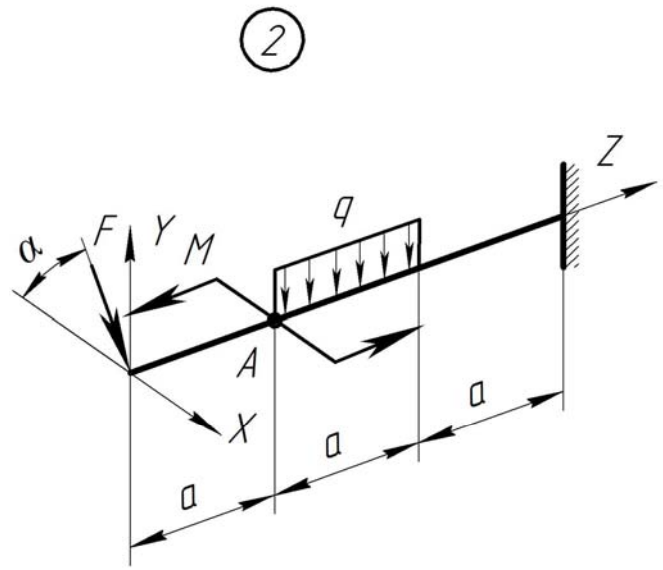
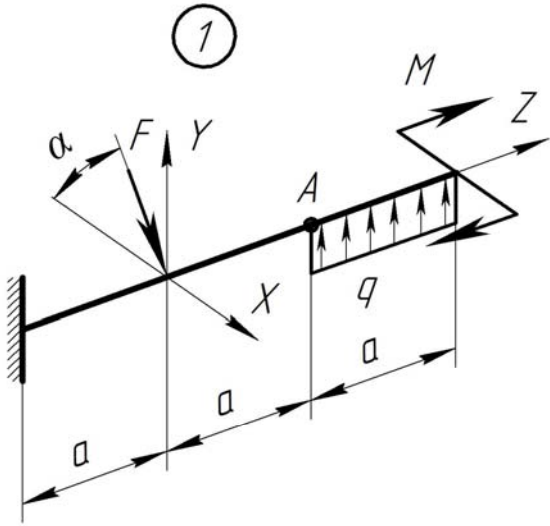


Рисунок до задачі № 11

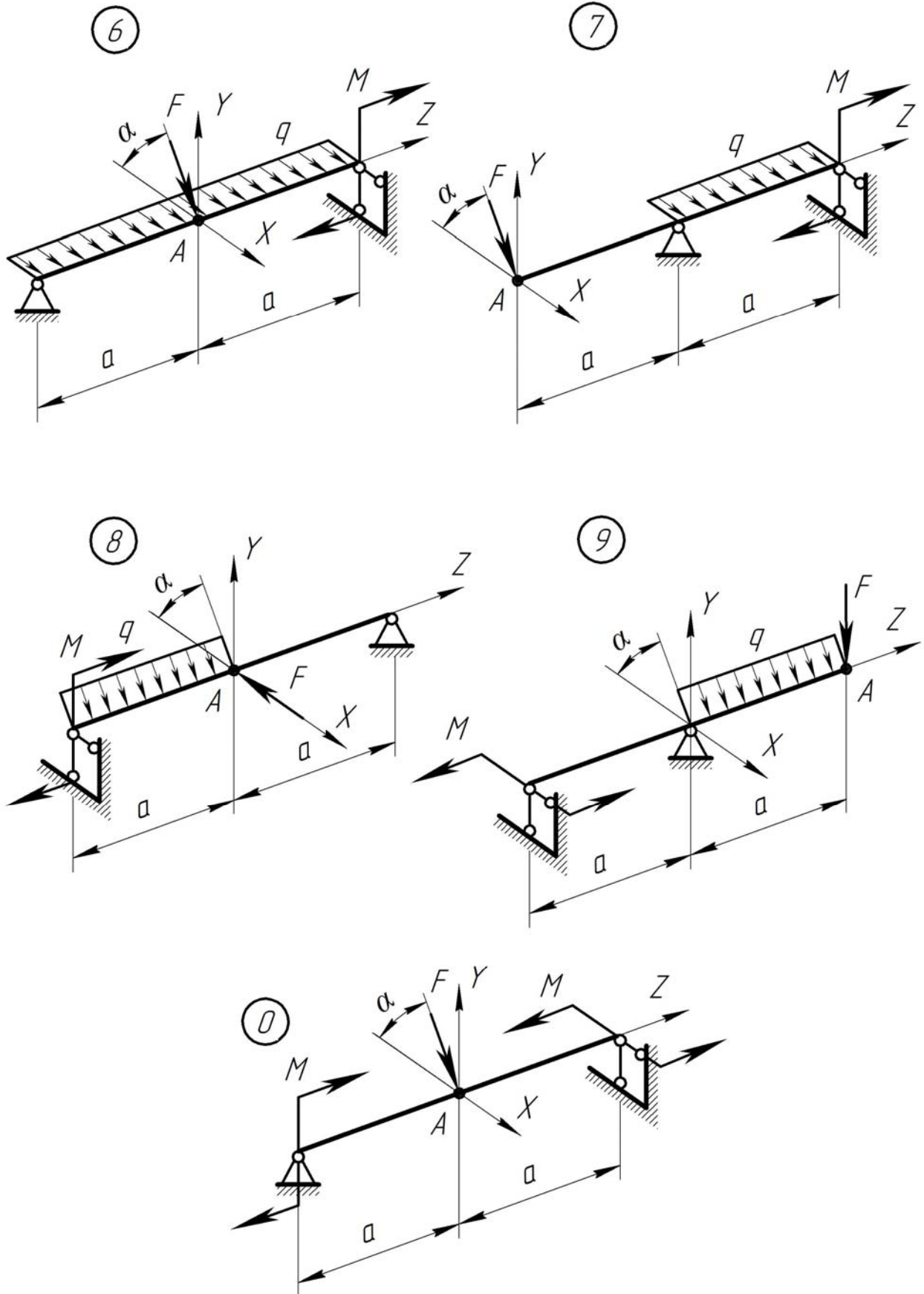


Рисунок до задачі № 11 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі № 11
Підбір поперечного перетину балки
при деформації косоного згину

Для заданої балки (рисунок 9.4а) підібрати прямокутний перетин при відношенні висоти балки до її ширини $h/b = 2$, розмістивши сторони b та h паралельно осям X та Y раціонально. Знайти положення нейтральної лінії у небезпечному перетині балки. Побудувати просторову епюру розподілу нормальних напружень у небезпечному перетині. Визначити повне переміщення перетину, позначеного точкою A на рисунку, якщо $a = 1$ м; матеріал балки – сталь Ст.3; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[\sigma] = 160$ МПа.

Розв'язування

Розкладаємо силу F на вертикальну і горизонтальну складові:

$$F_X = F \cdot \sin 45^\circ = 5 \cdot \sin 45^\circ = 3,54 \text{ кНм};$$

$$F_Y = F \cdot \cos 45^\circ = 5 \cdot \cos 45^\circ = 3,54 \text{ кНм}.$$

Балку завантажують навантаженням у вертикальній (рисунок 9.4б) і горизонтальній (рисунок 9.4д) площинах. Будуємо епюри поперечних сил (рисунок 9.4в, е) і згинальних моментів (рисунок 9.4з, ж). Ці епюри будуємо за характерними точками і значеннями поперечних сил і згинальних моментів на межах ділянок. Застосовуючи цей спосіб, обходимося без складання рівнянь поперечних сил і згинальних моментів. З аналізу епюр визначаємо небезпечний перетин – це перетин B , в якому діють:

$$|M_X| = 12,08 \text{ кНм};$$

$$|M_Y| = 37,08 \text{ кНм}.$$

Будуємо поперечні перетини балки відносно зовнішнього навантаження для двох випадків розміщення осей (рисунок 9.5б, в)

Для схеми (рисунок 9.5б) осьові моменти опору перетину

$$W_X = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{2}{3} b^3;$$

$$W_Y = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{1}{3} b^3.$$

Для схеми (рисунок 9.5в) осьові моменти опору перетину

$$W_X = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{1}{3} b^3;$$

$$W_Y = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{2}{3} b^3.$$

Використовуючи умову $|M_Y| > |M_X|$, раціонально розміщуємо поперечний перетин балки відносно зовнішнього навантаження (рисунок 9.5в), забезпечуючи виконання умови $W_Y > W_X$.

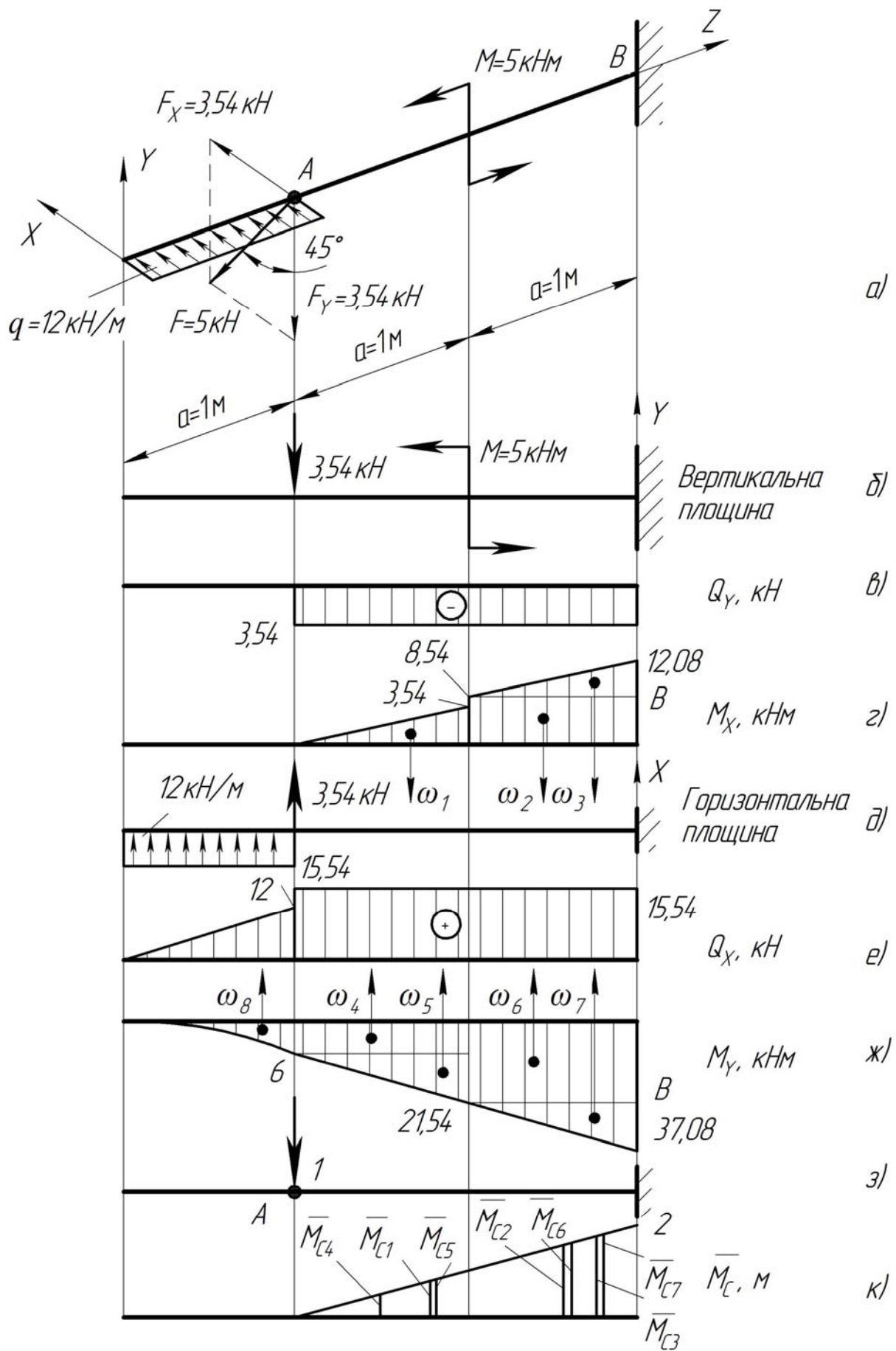


Рисунок 9.4

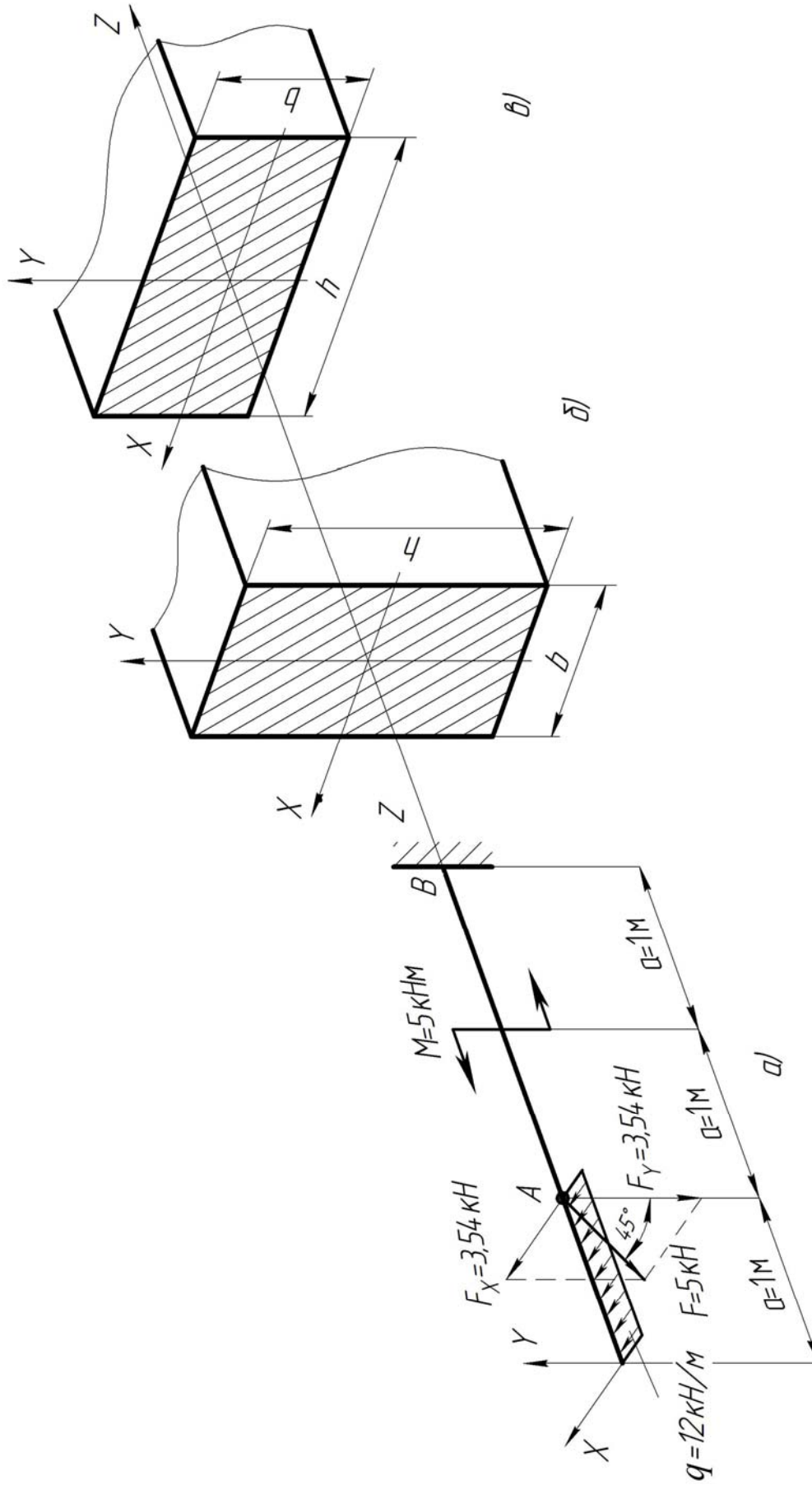


Рисунок 9.5

Записуємо умову міцності за нормальними напруженнями при косому згині для вибраного перетину (рисунок 9.5в)

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_X|}{W_X} + \frac{|M_Y|}{W_Y} \leq [\sigma].$$

З умови міцності визначаємо ширину прямокутного перетину

$$b = \sqrt[3]{\frac{3|M_X| + 1,5|M_Y|}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 12,08 + 1,5 \cdot 37,08}{160 \cdot 10^{-3}}} = 0,0831 \text{ м.}$$

Приймаємо $b = 85$ мм, відповідно висота перетину $h = 170$ мм.

Записуємо рівняння нейтральної лінії у небезпечному перетині балки

$$\frac{M_X}{I_X} \cdot y_0 + \frac{M_Y}{I_Y} \cdot x_0 = 0,$$

де

$$I_X = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{17 \cdot 8,5^3}{12} \cdot 10^{-8} = 870 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_Y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{8,5 \cdot 17^3}{12} \cdot 10^{-8} = 3480 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$\frac{12,08 \cdot 10^{-3}}{870 \cdot 10^{-8}} \cdot y_0 + \frac{37,08 \cdot 10^{-3}}{3480 \cdot 10^{-8}} \cdot x_0 = 0;$$

звідки

$$y_0 = -0,767 x_0; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{x_0} = -0,767; \quad \beta = -37,5^\circ.$$

На рисунку 9.6 показано раціональне розміщення поперечного перетину балки відносно навантаження і розташування нейтральної лінії.

Для побудови просторової епюри розподілу напружень на контурі небезпечного перетину визначаємо нормальні напруження у вузлових точках цього перетину (див. рис. 9.6) за формулою

$$\sigma_i = -\left(\frac{M_X}{I_X} \cdot y_i + \frac{M_Y}{I_Y} \cdot x_i \right),$$

де x_i, y_i – координати вузлових точок перетину:

$$\begin{aligned} x_1 &= 8,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}; & y_1 &= 4,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \\ x_2 &= 8,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}; & y_2 &= -4,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \\ x_3 &= -8,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}; & y_3 &= -4,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \\ x_4 &= -8,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}; & y_4 &= 4,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \end{aligned}$$

Визначимо напруження у вузлових точках перетину:

$$\sigma_1 = - \left(\frac{12,08 \cdot 10^{-3} \cdot 4,25 \cdot 10^{-2}}{870 \cdot 10^{-8}} + \frac{37,08 \cdot 10^{-3} \cdot 8,5 \cdot 10^{-2}}{3480 \cdot 10^{-8}} \right) = -150 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = -(-59 + 91) = -32 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = -(-59 - 91) = 150 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = -(59 - 91) = 32 \text{ МПа}.$$

За отриманими результатами будемо епюру розподілу нормальних напружень у поперечному перетині (див. рис. 9.6).

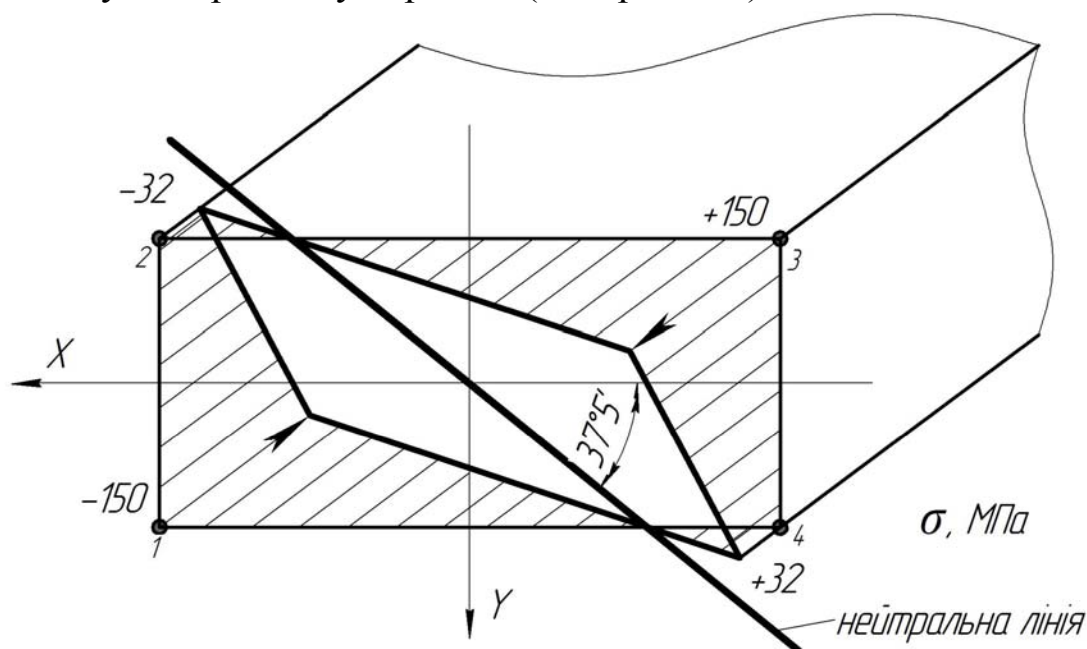


Рисунок 9.6

Прогин балки у перетині A (див. рис. 9.4а) визначаємо використовуючи графоаналітичний метод розв'язку інтегралу Мора.

Вертикальний прогин у точці A визначаємо за формулою

$$f_A^{верт} = \sum_1^3 \frac{\omega_i \cdot \bar{M} C_i}{E \cdot I_Y};$$

де ω_i – площа епюри згинальних моментів від зовнішніх навантажень i -ої ділянки (рисунок 9.4г);

\bar{M}_{C_i} – величина згинального моменту (рисунок 9.4к) від одиничного навантаження (сили) (рисунок 9.4з), що знаходиться під центром ваги i -ої епюри.

Відповідно

$$f_A^{верт} = \frac{\omega_1 \cdot \bar{M}_{C1} + \omega_2 \cdot \bar{M}_{C2} + \omega_3 \cdot \bar{M}_{C3}}{E \cdot I_Y},$$

$$\begin{aligned} \text{де } \omega_1 &= -\frac{1}{2} \cdot 3,54 \cdot 1 = -1,77 \text{ кНм}^2; & \bar{M}_{C1} &= -0,667 \text{ м}; \\ \omega_2 &= -8,54 \cdot 1 = -8,54 \text{ кНм}^2; & \bar{M}_{C2} &= -1,5 \text{ м}; \\ \omega_3 &= -\frac{1}{2} \cdot (12,08 - 8,54) \cdot 1 = -1,77 \text{ кНм}^2; & \bar{M}_{C3} &= -1,667 \text{ м}. \end{aligned}$$

Підставивши дані, отримаємо

$$f_A^{верт} = \frac{1,77 \cdot 0,667 + 8,54 \cdot 1,5 + 1,77 \cdot 1,667}{2 \cdot 10^5 \cdot 870 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-3} = 0,0097 \text{ м} = 9,7 \text{ мм}.$$

Горизонтальний прогин у точці A визначаємо за формулою

$$f_A^{гор} = \sum_4^7 \frac{\omega_i \cdot \bar{M}_{C_i}}{E \cdot I_X},$$

або

$$f_A^{гор} = \frac{\omega_4 \cdot \bar{M}_{C4} + \omega_5 \cdot \bar{M}_{C5} + \omega_6 \cdot \bar{M}_{C6} + \omega_7 \cdot \bar{M}_{C7}}{E \cdot I_X},$$

$$\begin{aligned} \text{де } \omega_4 &= 6 \cdot 1 = 6 \text{ кНм}^2; & \bar{M}_{C4} &= -0,5 \text{ м}; \\ \omega_5 &= \frac{1}{2} \cdot (21,54 - 6) \cdot 1 = 7,77 \text{ кНм}^2; & \bar{M}_{C5} &= -0,667 \text{ м}; \\ \omega_6 &= 21,54 \cdot 1 = 21,54 \text{ кНм}^2; & \bar{M}_{C6} &= -1,5 \text{ м}; \\ \omega_7 &= \frac{1}{2} \cdot (37,08 - 21,54) \cdot 1 = 7,77 \text{ кНм}^2; & \bar{M}_{C7} &= -1,667 \text{ м}. \end{aligned}$$

Підставивши дані, отримаємо

$$f_A^{гор} = \frac{6 \cdot (-0,5) + 7,77 \cdot (-0,667) + 21,54 \cdot (-1,5) + 7,77 \cdot (-1,667)}{2 \cdot 10^5 \cdot 3480 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-3} = -7,7 \text{ мм}.$$

Повний прогин перетину у точці A дорівнює

$$f_A = \sqrt{\left(f_A^{верт}\right)^2 + \left(f_A^{гор}\right)^2} = \sqrt{9,7^2 + (-7,7)^2} = 12,4 \text{ мм}.$$

10. СУМІСНА ДІЯ ЗГИНУ З КРУЧЕННЯМ

Сумісна дія згину з крученням – вид складного опору, при якому зовнішні сили, що діють на брус, викликають у ньому такі внутрішні силові фактори: **крутний момент, згинальні моменти й поперечні сили**.

Під дією згину та кручення у поперечному перетині бруса виникають нормальні напруження від згинального моменту в двох площинах і дотичні напруження від кручення й поперечних сил.

Одночасних деформацій згину і кручення зазнає більшість валів (прямих брусів круглого або кільцевого перетину).

При розрахунку валів враховують крутний і згинальний моменти. Поперечні сили не враховують, оскільки відповідні їм дотичні напруження відносно невеликі.

При сумісній дії згину та кручення елемент матеріалу в небезпечному перетині перебуває у плоскому напруженому стані (рисунок 10.1).

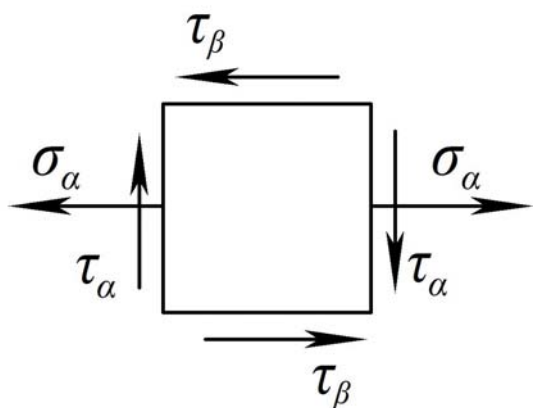


Рисунок 10.1

Максимальні нормальні й дотичні напруження для круглих валів визначають за формулами

$$|\sigma_{\alpha}| = \frac{M_{3\Gamma}}{W_0} = \frac{32 M_{3\Gamma}}{\pi \cdot d^3};$$

$$|\tau_{\alpha}| = \frac{M_{KP}}{W_P} = \frac{16 M_{KP}}{\pi \cdot d^3},$$

де $W_P = W_0/2$;

$\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}$, закон парності дотичних напружень.

Найбільшого значення нормальні й дотичні напруження досягають на поверхні вала.

Для визначення згинального моменту розглядають згин вала у двох взаємно перпендикулярних площинах (вертикальній і горизонтальній). Будують епюри згинальних моментів у двох площинах і сумарну. Значення згинальних моментів у характерних перетинах зводять до сумарного (рівнодійного) за формулою

$$M_{3\Gamma} = \sqrt{M_Z^2 + M_Y^2}.$$

Небезпечні перетини вала визначають співставленням епюр сумарних згинальних моментів і крутного моменту. Небезпечними є перетини, де $M_{3\Gamma}$ і M_{KP} одночасно досягають найбільших значень.

При одночасній дії нормальних і дотичних напружень міцність матеріалу оцінюють за однією з теорій міцності.

Теорії міцності застосовують за призначенням, тобто перша і друга теорії – для крихких матеріалів, третя і четверта – для пластичних; теорії Мора та Писаренка-Лебедева – для матеріалів з різними границями текучості при розтягу і стиску.

Розрахунок вала на міцність при складному опорі проводять за зведеним (еквівалентним, розрахунковим) моментом M_P ($M_{екв}$).

Визначають його залежно від прийнятої теорії міцності:

– за третьою теорією міцності (найбільших дотичних напружень)

$$M_P = \sqrt{M_{3Г}^2 + M_{КР}^2};$$

– за четвертою теорією міцності (енергетичною)

$$M_P = \sqrt{M_{3Г}^2 + 0,75 M_{КР}^2}.$$

Умова міцності при сумісній дії згину з крученням

$$\sigma_{екв} = \frac{M_P}{W_0} = \frac{32 M_P}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma],$$

де $\sigma_{екв}$ – еквівалентне (розрахункове) нормальне напруження;

W_0 – осьовий момент опору перетину бруса, для круглого поперечного перетину $W_0 = \pi \cdot d^3 / 32$.

Задача № 12

Розрахунок вала на згин з крученням

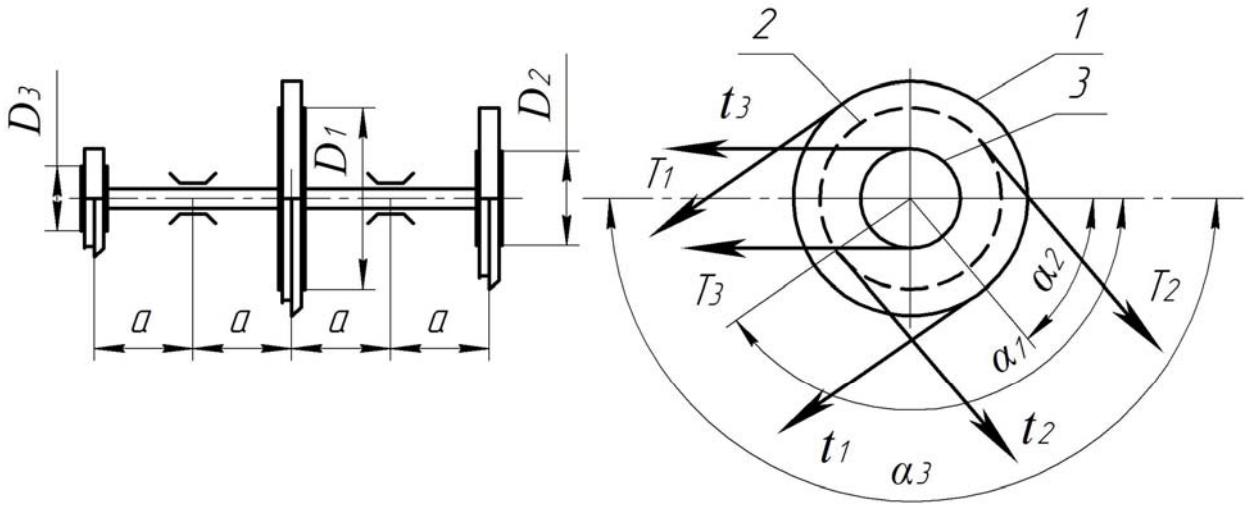
Стальний вал трансмісії (рисунок до задачі № 12, таблиця до задачі № 12) обертається з частотою n об/хв і передає через два ведених шківів пасових передач потужності, задані у таблиці 12. Діаметри шківів: $D_1 = 60$ см, $D_2 = 40$ см, $D_3 = 30$ см; відстань $a = 100$ см; матеріал – сталь 45, $[\sigma] = 100$ МПа. Визначити діаметр вала з умови міцності.

План розв'язування задачі:

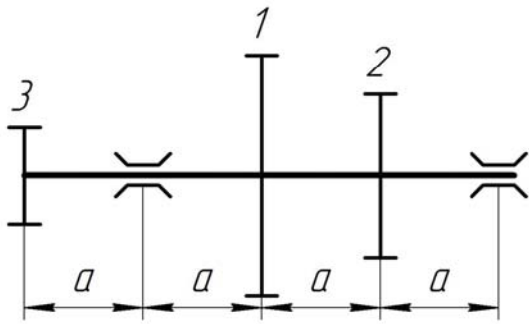
1. Визначити потужність на шківі (з умови балансу потужностей), де вона не задана.
2. Визначити скручувальні моменти на кожному шківі, крутні моменти на ділянках вала і побудувати епюру крутних моментів.
3. Визначити тиск, що передається кожним шківом на вал, вважаючи, що натяг ведучої вітки паса у два рази більший, ніж натяг веденої, $T_i = 2t_i$.
4. Визначити величини складових сил тиску на вал, що діють у горизонтальній і вертикальній площинах.
5. Побудувати епюри згинальних моментів у горизонтальній і вертикальній площинах.
6. Визначити сумарні згинальні моменти у характерних перетинах вала. Побудувати епюру сумарних згинальних моментів.
7. Визначити розрахунковий момент, користуючись третьою теорією міцності.
8. Визначити діаметр вала із умови міцності.

Таблиця до задачі № 12

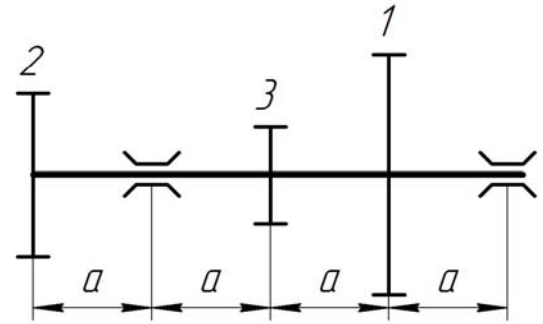
№ з/п	a_1°	a_2°	a_3°	n , об/хв	P_1 , кВт	P_2 , кВт	P_3 , кВт
1	0	270	360	150	-	10	20
2	90	0	180	100	10	-	20
3	180	270	0	200	10	20	-
4	270	360	0	300	-	30	40
5	360	0	90	400	30	-	40
6	0	90	180	500	30	40	-
7	90	180	270	600	-	50	60
8	180	270	360	700	50	-	60
9	270	360	0	800	50	60	-
0	90	0	180	900	-	90	50



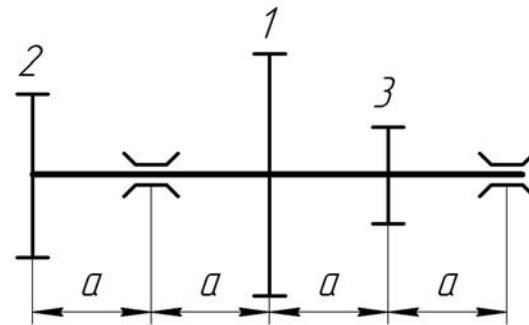
①



②



③



④

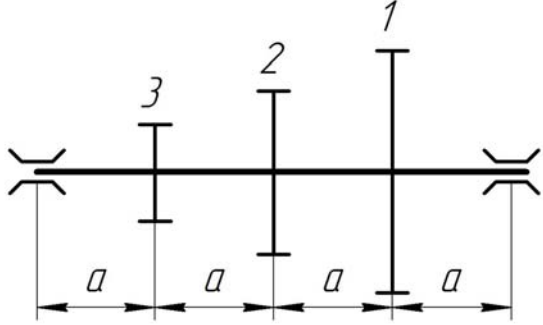


Рисунок до задачі № 12

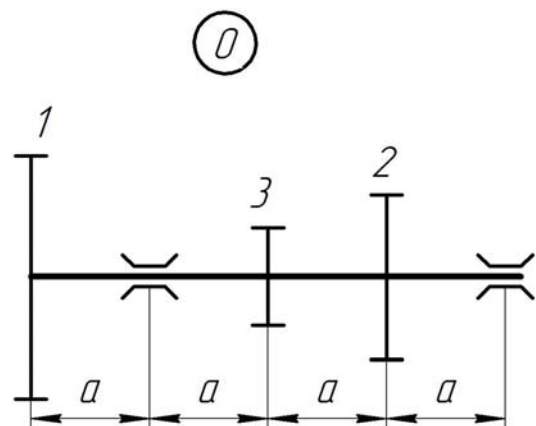
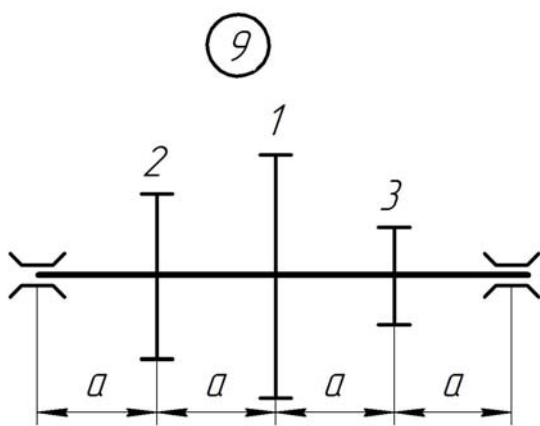
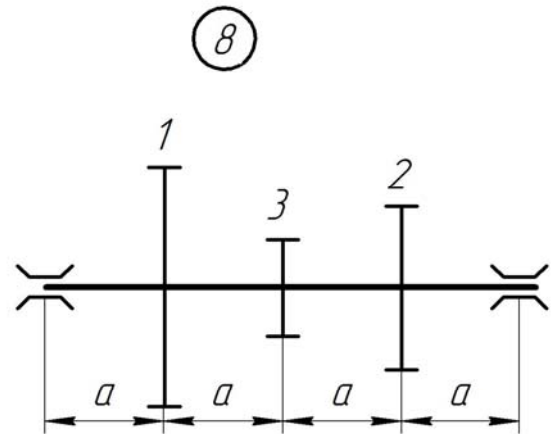
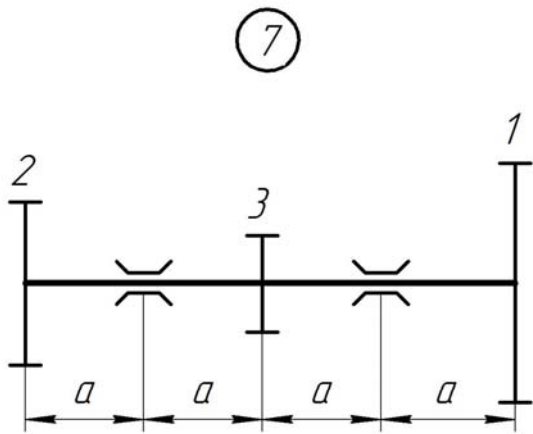
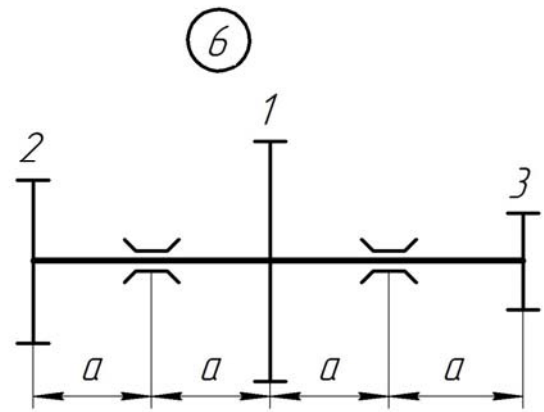
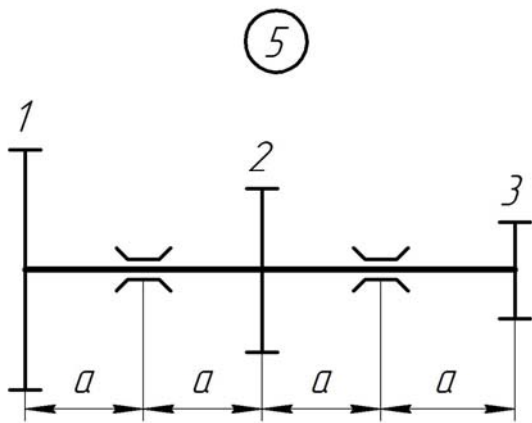


Рисунок до задачі № 12 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі № 12

Розрахунок вала на згин з крученням

Стальний вал трансмісії обертається з частотою $n = 300$ об/хв і передає через два ведені шківів пасових передач потужності $P_1 = 70$ кВт і $P_3 = 40$ кВт (рисунок 10.2а). Діаметри шківів $D_1 = 60$ см, $D_2 = 40$ см, $D_3 = 30$ см. Кути нахилу пасів $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 240^\circ$, $\alpha_3 = 180^\circ$ (на рисунку 10.2 кути відкладено від осі Y), відстань $a = 100$ см. Матеріал вала – сталь 45; $[\sigma] = 100$ МПа. Визначити діаметр вала з умови міцності.

Розв'язування

З балансу потужностей визначаємо потужність, яку передає ведучий шків

$$P_2 = P_1 + P_3 = 70 + 40 = 110 \text{ кВт.}$$

Величини моментів, які передають шківів, визначаємо за формулою

$$M_i = P_i / \omega,$$

де ω – кутова швидкість вала, визначаємо її за формулою

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 300}{30} = 31,4 \text{ с}^{-1}.$$

Скручувальні моменти на шківів:

$$M_1 = 70 / 31,4 = 2,23 \text{ кНм;}$$

$$M_2 = 110 / 31,4 = 3,50 \text{ кНм;}$$

$$M_3 = 40 / 31,4 = 1,27 \text{ кНм.}$$

Використовуючи метод перетинів, будемо епюру крутних моментів, M_{KR} (рисунок 10.2б).

Визначаємо сили натягів пасових передач за формулою

$$t_i = 2M_i / D_i.$$

Відповідно

$$t_1 = \frac{2 \cdot 2,23}{0,6} = 7,43 \text{ кН;} \quad t_2 = \frac{2 \cdot 3,50}{0,4} = 17,5 \text{ кН;} \quad t_3 = \frac{2 \cdot 1,27}{0,3} = 8,47 \text{ кН.}$$

Сили тиску на вал у місцях посадки шківів визначаємо за формулою

$$F_i = 3 t_i.$$

Тобто

$$F_1 = 3 \cdot 7,43 = 22,3 \text{ кН;}$$

$$F_2 = 3 \cdot 17,5 = 52,4 \text{ кН;}$$

$$F_3 = 3 \cdot 8,47 = 25,4 \text{ кН.}$$

Розкладаємо сили тиску на вертикальні і горизонтальні складові:

$$F_{1Z} = -F_1 \cdot \sin 30^\circ = -22,3 \cdot \sin 30^\circ = -11,2 \text{ кН};$$

$$F_{1Y} = F_1 \cdot \cos 30^\circ = 22,3 \cdot \cos 30^\circ = 19,3 \text{ кН};$$

$$F_{2Z} = F_2 \cdot \sin 60^\circ = 52,4 \cdot \sin 60^\circ = 45,4 \text{ кН};$$

$$F_{2Y} = -F_2 \cdot \cos 60^\circ = -52,4 \cdot \cos 60^\circ = -26,2 \text{ кН};$$

$$F_{3Z} = 0;$$

$$F_{3Y} = -F_3 = 25,4 \text{ кН}.$$

Розглянемо вертикальну площину (рисунок 10.2в)

Вертикальні складові реакцій опор A і B визначаємо з рівнянь рівноваги:

$$\begin{cases} M_B = 0; & A_Z \cdot 4 - F_{2Z} \cdot 3 + F_{1Z} \cdot 2 = 0; \\ M_A = 0; & -B_Z \cdot 4 - F_{1Z} \cdot 2 + F_{2Z} \cdot 1 = 0; \end{cases}$$

звідки

$$A_Z = \frac{45,4 \cdot 3 - 11,2 \cdot 2}{4} = 28,4 \text{ кН};$$

$$B_Z = \frac{45,4 \cdot 1 - 11,2 \cdot 2}{4} = 5,8 \text{ кН}.$$

$$\begin{aligned} \text{Перевірка: } \sum Z &= -A_Z + F_{2Z} - F_{1Z} - B_Z = \\ &= -28,4 + 45,4 - 11,2 - 5,8 = 45,4 - 45,4 = 0. \end{aligned}$$

Визначаємо згинальні моменти у характерних точках вертикальної площини:

$$M_Y^A = M_Y^B = 0;$$

$$M_Y^K = -A_Z \cdot 1 = -28,4 \cdot 1 = -28,4 \text{ кНм};$$

$$M_Y^L = -A_Z \cdot 2 + F_{2Z} \cdot 1 = -28,4 \cdot 2 + 45,4 \cdot 1 = -11,4 \text{ кНм};$$

$$M_Y^C = -B_Z \cdot 1 = -5,8 \cdot 1 = -5,8 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів у вертикальній площині (рисунок 10.2з).

Розглянемо горизонтальну площину (рисунок 10.2д).

Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_B = 0; \quad -A_Y \cdot 4 + F_{2Y} \cdot 3 - F_{1Y} \cdot 2 + F_{3Y} \cdot 1 = 0; \quad A_Y = 16,4 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; \quad B_Y \cdot 4 - F_{3Y} \cdot 3 + F_{1Y} \cdot 2 - F_{2Y} \cdot 1 = 0; \quad B_Y = 15,9 \text{ кН}.$$

$$\begin{aligned} \text{Перевірка: } \sum Y &= A_Y - F_{2Y} + F_{1Y} - F_{3Y} + B_Y = \\ &= 16,4 - 26,2 + 19,3 - 25,4 + 15,9 = 51,6 - 51,6 = 0; \end{aligned}$$

тобто опорні реакції визначено правильно.

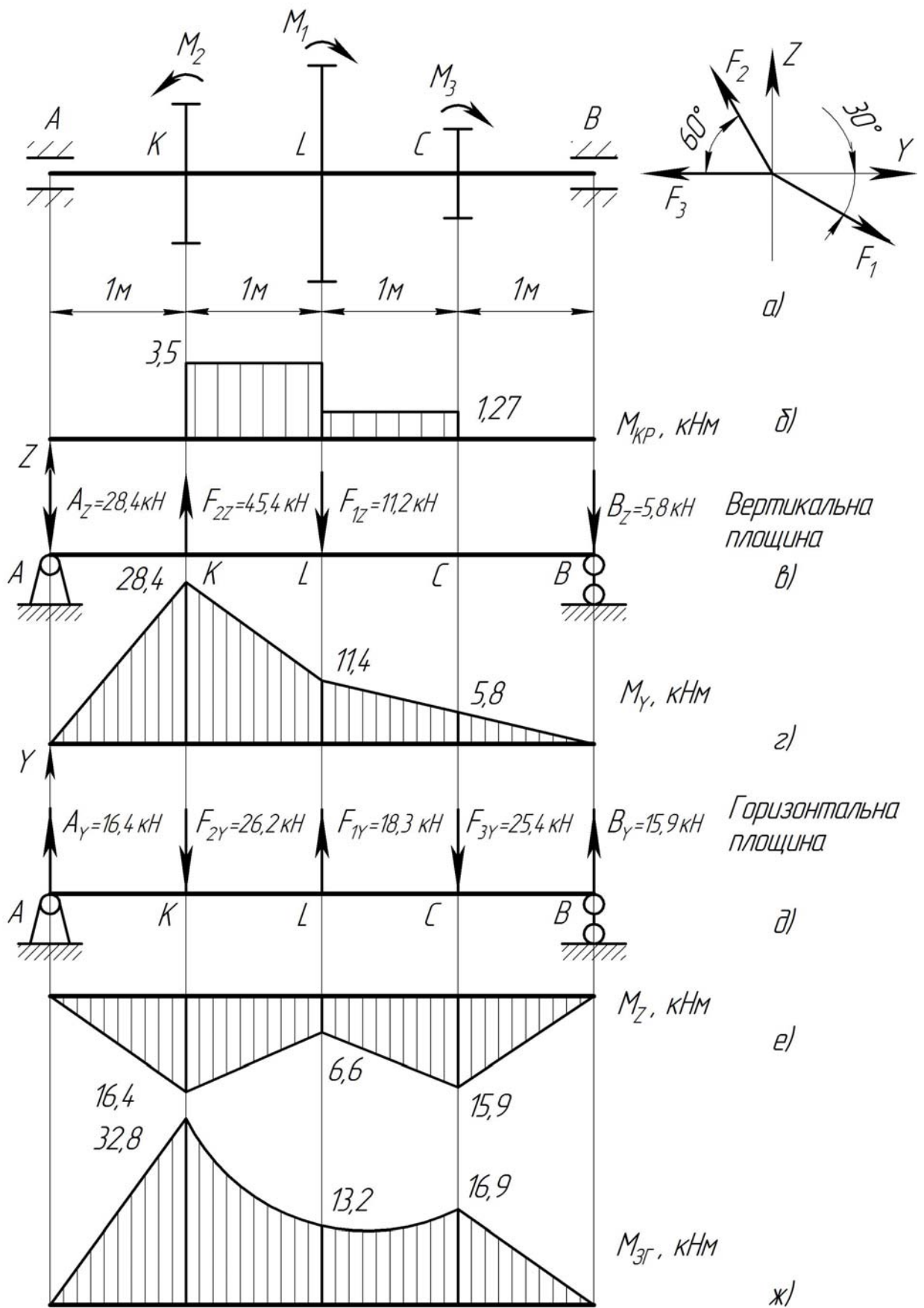


Рисунок 10.2

Визначаємо згинальні моменти у характерних точках горизонтальної площини:

$$\begin{aligned}M_Z^A &= M_Z^B = 0; \\M_Z^K &= A_Y \cdot 1 = 16,4 \cdot 1 = 16,4 \text{ кНм}; \\M_Z^L &= A_Y \cdot 2 - F_{2Y} \cdot 1 = 16,4 \cdot 2 - 26,2 \cdot 1 = 6,6 \text{ кНм}; \\M_Z^C &= B_Y \cdot 1 = 15,9 \cdot 1 = 15,9 \text{ кНм}.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів у горизонтальній площині (рисунок 10.2e).

Визначаємо сумарні значення згинальних моментів у характерних перетинах вала за формулою

$$M_{3\Gamma} = \sqrt{M_Y^2 + M_Z^2}.$$

Визначимо:

$$\begin{aligned}M_{3\Gamma}^A &= M_{3\Gamma}^B = 0; \\M_{3\Gamma}^K &= \sqrt{28,4^2 + 16,4^2} = 32,8 \text{ кНм}; \\M_{3\Gamma}^L &= \sqrt{11,4^2 + 6,6^2} = 13,2 \text{ кНм}; \\M_{3\Gamma}^C &= \sqrt{5,8^2 + 15,9^2} = 16,9 \text{ кНм}.\end{aligned}$$

Будуємо епюру сумарних згинальних моментів (рисунок 10.2ж).

З аналізу епюр M_{KP} (див. рис. 10.2б) і $M_{3\Gamma}$ (див. рис. 10.2ж) визначимо небезпечний перетин – це перетин K , у якому

$$M_{3\Gamma} = 32,8 \text{ кНм}; \quad M_{KP} = 3,5 \text{ кНм}.$$

Розрахунковий момент визначимо за третьою теорією міцності

$$M_P = \sqrt{M_{3\Gamma}^2 + M_{KP}^2} = \sqrt{32,8^2 + 3,5^2} = 33 \text{ кНм}.$$

З умови міцності при сумісній дії згину з крученням

$$\sigma_{\max} = \frac{M_P}{W_0} = \frac{32 M_P}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma];$$

визначаємо діаметр вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_P}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 33,0}{\pi \cdot 100 \cdot 10^3}} = 149 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

приймаємо $d = 150 \text{ мм}$.

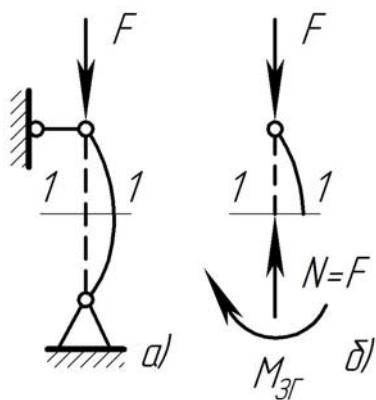
11. СТІЙКІСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО-СТИСНЕНИХ СТРИЖНІВ

Умови міцності та жорсткості доповнюють умовою стійкості, яка передбачає збереження початкової форми рівноваги конструкції або окремих її елементів під дією заданого навантаження стиску.

Навантаженн стиску, при яких втрачається стійкість, називають **критичними**, а відповідні їм стани – **критичними станами**.

Небезпека втрати стійкості виникає для тонкостінних конструкцій типу гнучких стрижнів, довгих стиснених стрижнів, пластин і оболонок.

Критична сила – це найбільше значення стискаючої сили, прикладеної центрально, до якої прямолінійна форма рівноваги стрижня є стійкою. Згин, пов'язаний із втратою стійкості стрижнем прямолінійної форми, називають **повдовжнім згином**.



Унаслідок викривлення осі у поперечних перетинах стрижня виникають два внутрішні силові фактори – **повдовжня сила** $N=F$ і **згинальний момент** $M_{зг}$ (рисунок 11.1). Отже, викривлений стрижень зазнає одночасно деформацій центрального стиску і поперечного згину.

Рисунок 11.1

Визначення критичних навантажень є відповідальною частиною розрахунку конструкції і дає можливість уникнути втрати стійкості введенням відповідного коефіцієнта запасу стійкості

$$n_{cm} = \frac{F_{KP}}{F}.$$

Щоб забезпечити стійкість, необхідно, щоб стискаюча сила F , яка діє на стрижень, була меншою за критичну F_{KP} . Стійкість стрижня достатня, якщо $n_{cm} > 1$. Значення коефіцієнта запасу стійкості залежить від призначення стрижня і його матеріалу. Для сталей $n_{cm} = 1,8...3$; для чавунів $n_{cm} = 5...5,5$; для дерева $n_{cm} = 2,8...3,2$.

Рівновага абсолютно твердого тіла може бути стійкою, байдужою і нестійкою. Аналогічно це можна віднести і до деформованого тіла.

Довгий стрижень при дії осьового стискуючого навантаження проходить **три форми рівноваги**: **стійку**, **байдужу** та **нестійку**. Стиснений стрижень перебуває у стані **стійкої** рівноваги (рисунок 11.2а),

якщо сила стиску F не перевищує критичного значення F_{KP} . Тобто, якщо стрижень незначно зігнути якимось поперечним навантаженням, а потім це навантаження забрати, то стрижень знову вирівнюється, набуде початкове положення.

Форма рівноваги стисненого стрижня є *байдужою* (рисунок 11.2б), якщо сила стиску досягає певного значення, яке дорівнює критичній силі. При незначному відхиленні від початкового положення, під дією поперечної сили стрижень назад не повертається.

При значенні стискуючої сили, яке перевищує критичне, прямолінійна форма рівноваги стрижня стає *нестійкою*, стрижень втрачає свою початкову форму (рисунок 11.2в).

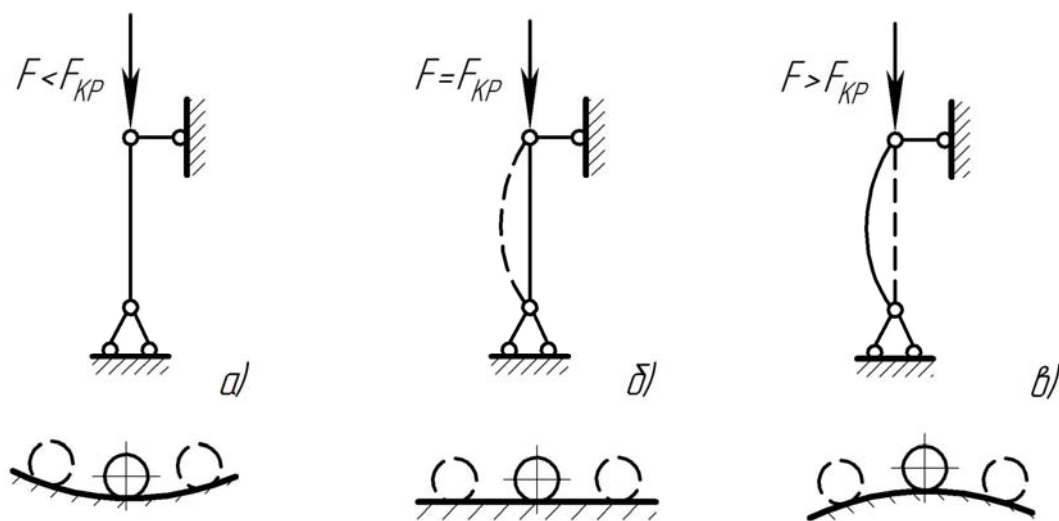


Рисунок 11.2

Втрата стійкості стрижня може відбутися навіть тоді, коли напруження під дією критичної сили не досягнуло границі пропорційності.

Найменше значення стискуючої сили, при якій стрижень втрачає властивість зберігати прямолінійну форму, називають критичною, позначають F_{KP} .

Задачу визначення величини критичної сили вперше розв'язав академік Петербурзької академії наук Леонард Ейлер у 1744р. **Формула Ейлера**

$$F_{KP} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2},$$

де E – модуль пружності I-го роду;

I_{\min} – мінімальний осьовий момент інерції поперечного перетину стрижня;

μ – коефіцієнт зведення довжини, залежить від способу закріплення кінців стрижня;

l – довжина стрижня.

Варіанти закріплення кінців стрижнів і відповідні значення коефіцієнтів зведення довжини зображено на рисунку 11.3.

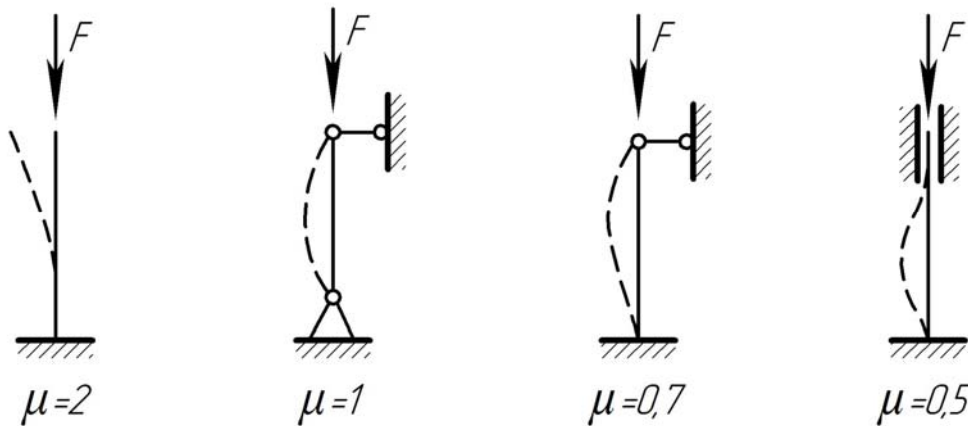


Рисунок 11.3

Межі застосування формули Ейлера. Формула Ясинського

Формула Ейлера отримана з диференціального рівняння зігнутої осі стрижня при шарнірно закріплених кінцях. Виведення формули Ейлера ґрунтується на законі Гука, який дійсний доти, доки напруження у матеріалі не перевищує границю пропорційності.

Критичні напруження мають бути меншими за границю пропорційності, їх визначають за формулою

$$\sigma_{KP} \leq \sigma_{пц}; \quad \sigma_{KP} = \frac{F_{KP}}{A} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} \leq \sigma_{пц},$$

де A – площа поперечного перетину стрижня;

λ_{\max} – максимальна гнучкість стрижня, залежить від геометрії стрижня, способів закріплення його кінців. Визначають її за формулою

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}},$$

де i_{\min} – мінімальний радіус інерції поперечного перетину стрижня, залежить від геометричних параметрів, визначають його за формулою

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min}/A}.$$

Формулу Ейлера використовують при гнучкостях, які більші або дорівнюють максимальному значенню

$$\lambda_{\max} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{\text{тц}}}}.$$

Гранична гнучкість стрижня λ_0 є найменшим значенням максимальної гнучкості і залежить лише від матеріалу стрижня. Визначають її за формулою

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{\text{тц}}}}.$$

Формулу Ейлера застосовують тоді, коли гнучкість стрижня більша або дорівнює граничній гнучкості матеріалу, з якого його виготовлено,

$$\lambda_{\max} \geq \lambda_0.$$

Як приклад, можна визначити граничну гнучкість для маловуглецевої сталі Ст.3, для якої $\sigma_{\text{тц}} = 200 \text{ МПа}$, модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

$$\lambda_0 = \sqrt{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 / (200 \cdot 10^6)} = 100.$$

Для стрижнів з маловуглецевої сталі формулу Ейлера застосовують, якщо їх гнучкість $\lambda \geq 100$. Аналогічно визначають граничну гнучкість для інших матеріалів. Зокрема, для чавуну $\lambda_0 = 80$; для дерева $\lambda_0 = 110$.

Якщо гнучкість стрижнів менша від граничної, зокрема для сталевих стрижнів середньої гнучкості при $\lambda = 40 \dots 100$, для визначення критичних напружень застосовують емпіричну формулу Ясинського

$$\sigma_{\text{КР}} = a - b \cdot \lambda_{\max},$$

де a, b – коефіцієнти, що залежать від матеріалу стрижня. Для сталі Ст.3 ці величини дорівнюють

$$a = 310 \text{ МПа}; \quad b = 1,14 \text{ МПа}.$$

Якщо гнучкість $\lambda < 40$, стрижні можна розраховувати на міцність при простому стиску, не враховуючи небезпеки поздовжнього згину, тобто за формулами

$$\sigma = F/A; \quad [\sigma] = \sigma_T(\sigma_{KP})/n_{cm}.$$

Графік залежності критичних напружень від гнучкості для стрижнів, виготовлених із маловуглецевої сталі, зображено на рисунку 11.4.

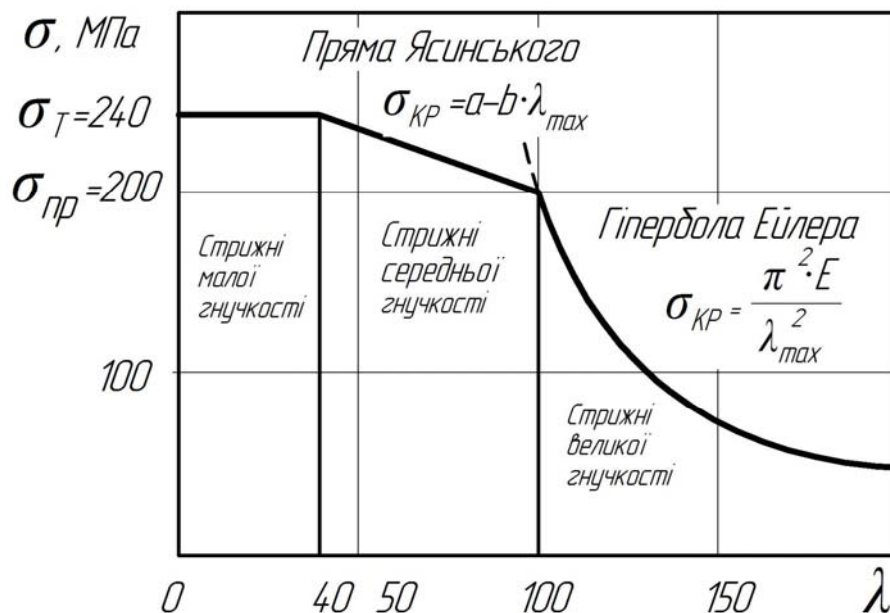


Рисунок 11.4

Зазначимо, що для стрижнів із маловуглецевих сталей, є характерні такі напружені стани при розрахунках на стійкість:

1) при малих значеннях λ критичне напруження дорівнює границі текучості $\sigma_{KP} = \sigma_T$;

2) при середніх значеннях λ критичне напруження менше від границі текучості, але більше ніж границя пропорційності $\sigma_{mц} < \sigma_{KP} < \sigma_T$;

3) при великих значеннях λ критичне напруження менше від границі пропорційності $\sigma_{KP} < \sigma_{mц}$.

Величину критичної сили, яку можна прикласти до стрижня, отримують у такій послідовності. Визначають:

а) граничну гнучкість λ_0 , яка залежить лише від матеріалу;

б) максимальну дійсну гнучкість λ_{max} , яка залежить від геометричних характеристик стрижня і способів закріплення його кінців;

в) маючи λ_0 і λ_{\max} , для визначення критичних напружень використовують одну з таких формул:

- при $\lambda_{\max} \geq \lambda_0$ формулу Ейлера, $\sigma_{KP} = \pi^2 E / \lambda_{\max}^2$;
- при $\lambda_{cp} \leq \lambda_{\max} \leq \lambda_0$ формулу Ясинського, $\sigma_{KP} = a - b \cdot \lambda_{\max}$;
- при $\lambda_{\max} < \lambda_{cp}$, формулу на стиск, $\sigma_{KP} = \sigma_T$;

з) маючи σ_{KP} , знаходять $F_{KP} = \sigma_{KP} \cdot A$.

Допустиме значення сили, прикладеної до стрижня, визначають як

$$[F] = F_{KP} / n_{cm}.$$

У розрахунках на стійкість критичне напруження є руйнівним, як границя текучості або границя міцності в розрахунках на міцність. Тому введено поняття **допустимого напруження на стійкість** $[\sigma_{CT}]$, що визначається як частина критичного напруження

$$[\sigma_{CT}] = \sigma_{KP} / n_{cm}.$$

Умова стійкості вимагає, щоб напруження, яке виникає при стиску, не перевищувало допустимого напруження на стійкість

$$\sigma = \frac{F_{\max}}{A} \leq [\sigma_{CT}].$$

Проте обчислення допустимого напруження на стійкість ускладнюється внаслідок того, що критичне напруження залежить не лише від властивостей матеріалу, але й від гнучкості стрижня. Тому введено поняття **коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження на міцність при розрахунку на стійкість**

$$\varphi = \frac{[\sigma_{CT}]}{[\sigma]},$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження на міцність при стиску, $[\sigma] = \sigma_T / n$.

Коефіцієнт φ для кожного матеріалу можна визначити при будь-якому значенні гнучкості. Значення його для деяких матеріалів наведено у додатку 7. Коефіцієнт φ називають ще **коефіцієнтом поздовжнього згину** стрижня.

Умова стійкості для центрально стиснених стрижнів

$$\sigma = \frac{F_{\max}}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma].$$

Розв'язування задач з використанням умови стійкості не має єдиного розв'язку, оскільки до нерівності входять дві невідомі величини, які взаємозв'язані між собою: площа перетину A і коефіцієнт φ , який залежить від невизначених ще розмірів перетину та його форми.

Розв'язують задачі методом послідовних наближень з перевіркою проміжних результатів. У першому наближенні беруть довільне значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження, орієнтовно $\varphi=0,5\dots 0,6$. Уточнені значення коефіцієнта φ визначають із таблиць для заданого матеріалу та гнучкості стрижня, яка залежить від визначеної площі поперечного перетину стрижня (дивись приклад розв'язування задачі 13).

За допомогою умови стійкості розв'язують три типи задач.

1. Підбір поперечного перетину стрижня або проектний розрахунок.

Виконують цей розрахунок визначенням площі поперечного перетину стрижня методом послідовних наближень

$$A \geq \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]}.$$

2. Визначення допустимого навантаження

$$[F] \leq \varphi \cdot [\sigma] \cdot A.$$

Значення коефіцієнта φ визначають із таблиць для заданого матеріалу та відповідної гнучкості стрижня.

3. Перевірний розрахунок. Перевірка стійкості, тобто виконання умови стійкості. Виконують у такій послідовності:

- визначають мінімальний осьовий момент інерції поперечного перетину стрижня та мінімальний радіус інерції (при однаковому закріпленні у головних площинах);

- обчислюють максимальну гнучкість стрижня;

- визначають із таблиць значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження φ ;

- отримані дані підставляють в умову стійкості й перевіряють її виконання.

Визначення розмірів поперечного перетину стрижня при стійкості ускладнюється тим, що наперед не відомо, в якому діапазоні буде знаходитися дійсна гнучкість стрижня, тобто якою з формул потрібно користуватися: Ейлера, Ясинського чи на простий стиск.

Ейлер Леонард (1707 – 1783)



Ейлер Леонард (нім. Leonhard Euler; 15.04.1707 – 07.09.1783) – швейцарський математик та фізик, який провів більшу частину свого життя в Росії та Німеччині. Ейлер здійснив важливі відкриття в таких різних галузях математики, як математичний аналіз та теорія графів. Він також ввів велику частину сучасної математичної термінології та її позначень, зокрема у математичному аналізі, як, наприклад, поняття математичної функції. Ейлер відомий також завдяки своїм роботам у механіці, динаміці рідин, оптиці та астрономії, інших прикладних науках.

Ейлера вважають найвидатнішим математиком 18-го століття, а, можливо, навіть усіх часів.

Ейлер є автором 866 наукових публікацій, зокрема у галузях математичного аналізу, диференціальної геометрії, теорії чисел, теорії графів, наближених обчислень, небесної механіки, математичної фізики, оптики, балістики, кораблебудування, теорії музики, що мали значний вплив на розвиток науки. Саме він ввів більшість математичних понять та символів у сучасну математику.

Леонард Ейлер зробив значний внесок у розвиток механіки, зокрема у розв'язок задачі про обертання абсолютно твердого тіла. Підхід Ейлера пов'язаний із поняттями Ейлерових кутів та кінематичних рівнянь Ейлера. В 1757 р. Ейлер опублікував мемуар «Principes generaux du mouvement des fluides» (Загальні принципи руху флюїдів), в якому записав рівняння руху ідеальної рідини, що отримали назву рівнянь Ейлера.

Результатом праці над задачею про деформацію бруса при навантаженні стали рівняння Ейлера-Бернуллі, які згодом знайшли застосування в інженерній науці, зокрема під час проектування мостів.

Ейлер працював над загальними проблемами механіки, розвиваючи принцип Мопертюї. Основні рівняння механіки часто називають рівняннями Ейлера-Лагранжа. Ейлер застосовував розроблені математичні методи для розв'язку проблем небесної механіки. Його праці в цій галузі отримали кілька нагород Паризької академії наук. Серед його досягнень є визначення орбіт комет та інших небесних тіл, пояснення природи комет, розрахунок паралаксу Сонця. Розрахунки Ейлера стали значним внеском у розробку точних таблиць широт. Важливе значення для свого часу мав внесок Ейлера в оптику. Він заперечував панівну тоді корпускулярну теорію світла Ньютона. Праці Ейлера впродовж 1740-х років допомогли утвердитися хвильовій теорії світла Християна Гюйгенса.

Ясинський Фелікс Станіславович (1856 – 1899)



Ясинський Фелікс Станіславович (пол. Feliks Antoni Michał Jasiński 15.09.1856 – 18.11.1899) – польський учений-механік та інженер, спеціаліст у галузі будівельної механіки. Фелікс Ясинський освіту здобув у 2-й Варшавській класичній гімназії (1872 р.) та в Інституті інженерів шляхів сполучення (1877 р.). У 1878 р. вступив на службу в головне товариство російських залізниць на Варшавську дорогу, де займав різні посади, був також начальником Санкт-Петербурзької дистанції.

З 1880 р. по 1888 р. рік Ясинський працював нв посаді міського інженера, у місті Вільно, його роботи сприяли благоустрою міста. Найголовніші його роботи – регулювання та зміцнення берегів річки Вілейки, водопостачання та каналізація частини міста, будівництво Заріченського та Поплавського мостів. За проектом Ясинського було реконструйовано палац графа Ігнаци Кароль Корвін-Мілевського, нині палац Спілки письменників Литви.

У 1890 році Ясинський перейшов на Миколаївську залізницю начальником технічного відділу, а потім з 1892 року помічником головного інженера. Під керівництвом Ясинського було складено низку проектів з різних галузей інженерної справи, а саме: розширення паровозних майстерень на Олександрівському заводі з влаштуванням залізних крокв за системою, запропонованою Ясинським, що набуло значного поширення в Російській імперії; будівництво нових майстерень для пасажирських і товарних вагонів із застосуванням крокв за новою системою, розробленою Ясинським; водопостачання цього заводу.

Із 1892 року Ясинський редактор «Вісника зборів інженерів шляхів сполучення», в яких було вміщено декілька його статей, одна з них – «Досвід розвитку теорії поздовжнього вигину». Під час розробки проектів підсилень металевих мостів Ясинський зіштовхнувся з проблемою втрати стійкості стиснутих стрижнів. У період 1892-1896 років він опублікував у російських та зарубіжних журналах статі і монографію за цією проблематикою.

У теорії розрахунків стиснених стрижнів Ясинський ввів поняття коефіцієнта довжини; дав визначення критичних напружень за границею пропорційності; запропонував лінійну залежність критичних напружень від їх гнучкості на основі обробки даних Й. Баушінгера, Л. Тетмаера та А. Консідера. Ясинський ввів поняття коефіцієнта допустимих напружень на стиск, який є функцією гнучкості та матеріалу стрижня, розробив методикау інженерних розрахунків стиснутих стрижнів на стійкість за цим коефіцієнтом.

У 1896 році був обраний професором кафедри будівельної механіки в Гірничому інституті та інституті цивільних інженерів (місто Санкт Петербург), згодом реорганізований в Електротехнічний інститут. У 1899 році Ясинський очолив кафедру будівельної механіки; у тому ж році опублікував конспекти лекцій з курсів: «Опір матеріалів», «Статика споруд», «Теорія пружності».

Задача № 13

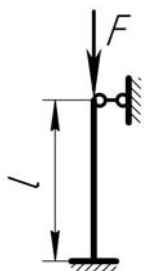
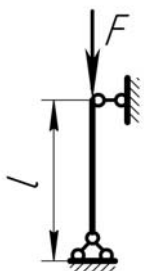
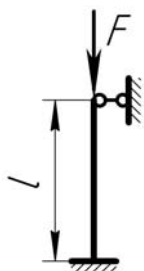
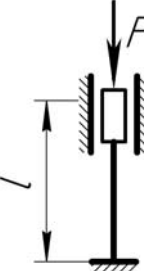
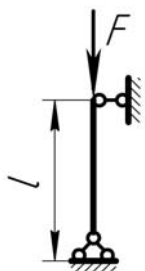

Розрахунок на стійкість стисненого стрижня

Для заданого стрижня (рисунок до задачі № 13, таблиця до задачі № 13), визначити розміри поперечного перетину, критичну силу й коефіцієнт запасу стійкості. Розрахунок виконати послідовними наближеннями, попередньо задавшись коефіцієнтом зменшення основного допустимого напруження $\varphi_1 = 0,5$. Матеріал стрижня – сталь Ст.3; $[\sigma] = 160$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; гранична гнучкість $\lambda_0 = 100$.

План розв'язування задачі:

1. Накреслити задану схему, розмістивши перетин під стояком.
2. Визначити розміри поперечного перетину, користуючись таблицею коефіцієнтів зниження основного допустимого напруження (додаток 7).
3. Визначити критичну силу.
4. Визначити коефіцієнт запасу стійкості.

Таблиця до задачі № 13

№ з/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
F , кН	800	200	300	400	500	200	300	400	500	600
l , м	2,4	2,8	2,5	3,0	2,4	2,8	2,5	3,0	2,5	3,0
Схема закріплення кінців стрижня										

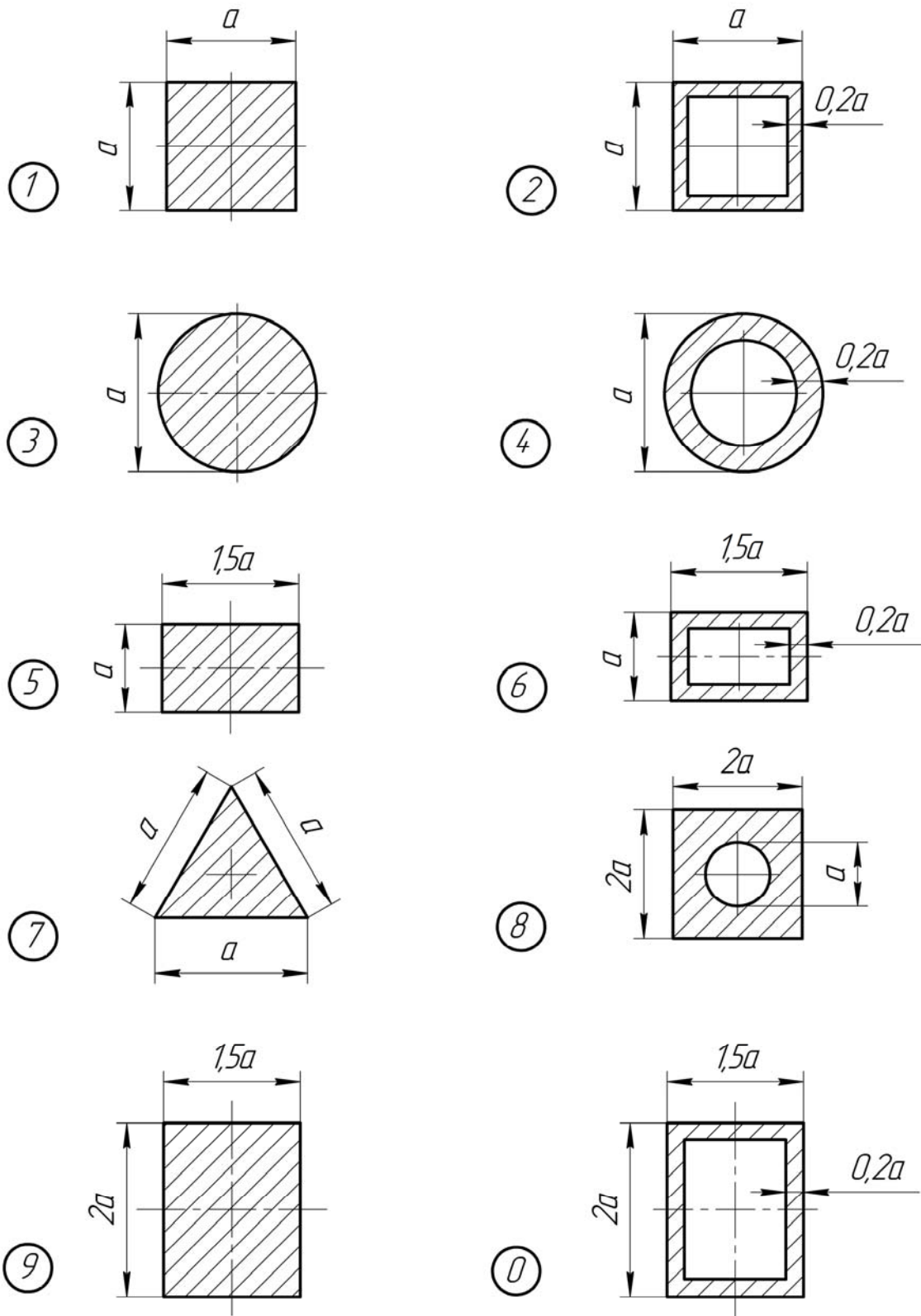


Рисунок до задачі 13

Приклад розв'язування задачі № 13

Розрахунок на стійкість стисненого стрижня

Для заданого стрижня (рисунок 11.5) визначити розміри поперечного перетину, критичну силу й коефіцієнт запасу стійкості. Розрахунок виконати послідовними наближеннями, попередньо задавшись коефіцієнтом зменшення основного допустимого напруження $\varphi_1 = 0,5$. Матеріал стрижня – сталь Ст. 3; $[\sigma] = 160$ МПа; $F = 500$ кН; $l = 2,5$ м.

Розв'язування

Розрахунок проводимо методом послідовних наближень.

Перше наближення, приймаємо значення коефіцієнта поздовжнього згину $\varphi_1 = 0,5$.

З умови стійкості визначаємо площу поперечного перетину стрижня

$$A_1 \geq \frac{F}{\varphi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{500 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 160} = 62,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

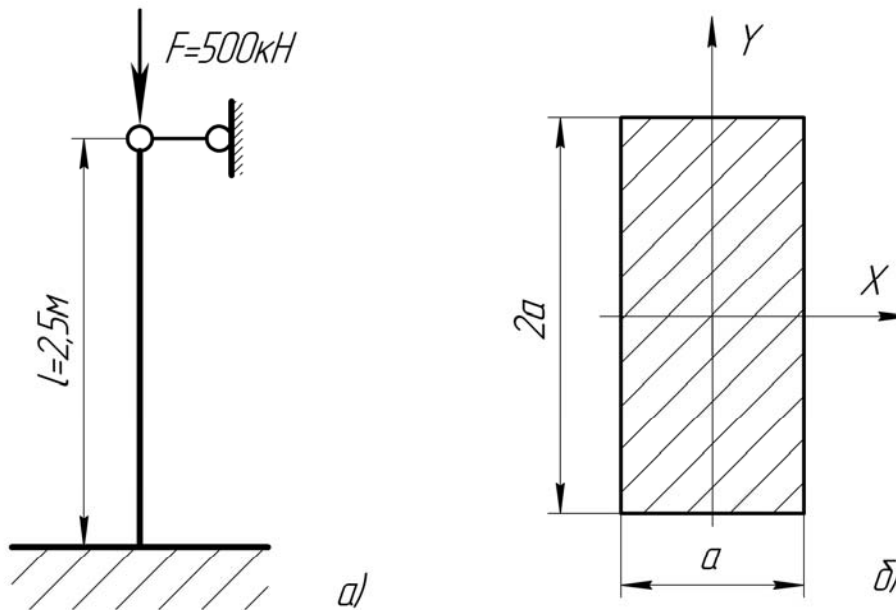


Рисунок 11.5

Для заданого поперечного перетину (рисунок 11.5б) визначаємо необхідні геометричні характеристики:

- площа перетину

$$A = 2a \cdot a = 2a^2,$$

звідки

$$a = \sqrt{A/2};$$

- мінімальний осьовий момент інерції

$$I_{\min} = I_Y = \frac{2a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{6};$$

- мінімальний радіус інерції

$$i_{\min} = i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{6 \cdot 2a^2}} = 0,289a;$$

- максимальна гнучкість стрижня

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_Y} = \frac{0,7 \cdot 2,5}{0,289a} = \frac{6,06}{a},$$

де μ – коефіцієнт зведення довжини стрижня, залежить від способу закріплення його кінців, для даної схеми (див. рис. 11.5а), $\mu = 0,7$.

Для першого наближення визначимо

$$a_1 = \sqrt{\frac{62,5 \cdot 10^{-4}}{2}} = 5,59 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\lambda_1 = \frac{6,06}{5,59 \cdot 10^{-2}} = 108.$$

З таблиці значень коефіцієнтів поздовжнього згину (див. додаток 7) визначимо, що при $\lambda=100$, $\varphi=0,60$; при $\lambda=110$, $\varphi=0,52$.

Використовуючи метод лінійної інтерполяції, визначаємо уточнене значення коефіцієнта поздовжнього згину, що відповідає гнучкості $\lambda_1 = 108$,

$$\varphi'_1 = 0,60 - \frac{0,60 - 0,52}{10} \cdot 8 = 0,536.$$

Виконаємо перевірку на стійкість. Визначаємо дійсне й допустиме напруження

$$\sigma_{\partial 1} = \frac{F}{A_1} = \frac{500 \cdot 10^{-3}}{62,5 \cdot 10^{-4}} = 80 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{cm}]_1 = \varphi'_1 \cdot [\sigma] = 0,536 \cdot 160 = 85,8 \text{ МПа}.$$

Недонапруження складає

$$\frac{|[\sigma_{cm}]_1 - \sigma_{\partial 1}|}{[\sigma_{cm}]_1} \cdot 100\% = \frac{85,8 - 80}{85,8} \cdot 100\% = 6,7\% > 5\%,$$

що недопустимо.

Друге наближення, приймаємо

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,536}{2} = 0,518.$$

Виконаємо розрахунки, аналогічні першому наближенню,

$$A_2 \geq \frac{500 \cdot 10^{-3}}{0,518 \cdot 160} = 60,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{60,3 \cdot 10^{-4}}{2}} = 5,49 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\lambda_2 = \frac{6,06}{5,49 \cdot 10^{-2}} = 110,$$

що відповідає $\varphi'_2 = 0,52$.

Дійсне напруження

$$\sigma_{\partial 2} = \frac{F}{A_2} = \frac{500 \cdot 10^{-3}}{60,3 \cdot 10^{-4}} = 82,9 \text{ МПа}.$$

Допустиме напруження

$$[\sigma_{cm}]_2 = \varphi'_2 \cdot [\sigma] = 0,52 \cdot 160 = 83,2 \text{ МПа}.$$

Недонапруження складає

$$\frac{|[\sigma_{cm}]_2 - \sigma_{\partial 2}|}{[\sigma_{cm}]_2} \cdot 100\% = \frac{83,2 - 82,9}{83,2} \cdot 100\% = 0,36\% < 5\%.$$

Отже, розмір перетину $a=54,9$ мм.

Щоб визначити, за якою з формул (Ейлера чи Ясинського) виконати розрахунок критичної сили, визначаємо:

а) граничну гнучкість матеріалу стрижня (матеріал – сталь Ст.3)

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{mц}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{200}} \approx 100,$$

де E – модуль пружності, $E=2,0 \cdot 10^5$ МПа;

$\sigma_{mц}$ – границя пропорційності, $\sigma_{mц}=200$ МПа;

б) дійсну гнучкість стрижня

$$\lambda_{\partial} = \frac{\mu \cdot l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 2,5}{0,289 \cdot 54,9 \cdot 10^{-3}} = 110.$$

Так як $\lambda_{\partial} = 110 > \lambda_0 = 100$, то критичну силу визначимо за формулою Ейлера

$$F_{KP} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot (5,49 \cdot 10^{-2})^4}{6(0,7 \cdot 2,5)} = 975 \text{ кН.}$$

Коефіцієнт запасу стійкості

$$n_{cm} = \frac{F_{KP}}{F} = \frac{975}{500} = 1,95.$$

12. ДИНАМІЧНІ НАВАНТАЖЕННЯ. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ УДАРІ

Динамічне навантаження – це навантаження, яке частково або повністю спричинене силами інерції (при прискореному русі деталей, при обертанні їх та коливанні), а також *при миттєвому навантаженні та ударах*. Одні і ті ж елементи конструкцій та їх матеріал деформуються по-різному залежно від того, як вони навантажені: статично чи динамічно.

Особливість руйнування при динамічній дії сил – та, що пластичні матеріали, такі як маловуглецева сталь, при миттєвому (ударному) навантаженні проявляють крихкі властивості, тобто руйнуються без значних залишкових деформацій і при значно меншій енергії деформування. *Механічну характеристику матеріалу, що відображає його здатність чинити опір ударному навантаженню, називають ударною в'язкістю*. Ударна в'язкість характеризується площею діаграми напружень « $\varepsilon - \sigma$ » до руйнування (див. розділ 2). Модулі пружності при динамічному навантаженні теж інші, ніж при статичному. В опорі матеріалів використовують **наближену теорію удару**, вважаючи, що і **закон Гука виконується, модулі пружності незмінні і немає розсіювання енергії при ударі**.

Робота деяких машин (пресування, забивання свай та ін.) супроводжуються ударним навантаженням, наприклад, падіння вантажу Q з деякої висоти h на нерухому пружну систему. У момент удару в конструкції напруження і деформації досягають максимальних значень.

Ударне навантаження вільно падаючим тілом

У системах, на які падає вантаж, можуть виникати різні види деформацій: стиск (рисунк 12.1а), згин (рисунк 12.1б, в), кручення (рисунк 12.1г).

Для отримання формул міцності і жорсткості при такому навантаженні (у наближеному вигляді) приймають такі припущення:

1. Прискорення і сила інерції тіла, що спричиняє удар, зростають не змінюючи напрямку від нуля до кінцевого значення.
2. Тіло, що зазнає удару, має лише один ступінь вільності.
3. Тіло, що ударає – абсолютно жорстке і не деформується; удар – пружний, але тіла після удару переміщуються разом (немає «відскоку»).
4. Деформації того тіла, що зазнало удару, – пружні і закон Гука для нього прийнятний.
5. Масою пружної системи при наближених розрахунках нехтують.
6. Розсіюванням енергії при ударі нехтують. Кінетична енергія вантажу, який падає, повністю переходить у потенціальну енергію пружної системи.

Розглянемо найпростіший випадок осевого ударного навантаження вертикальної колони вільно падаючим абсолютно твердим тілом (рисунок 12.1а).

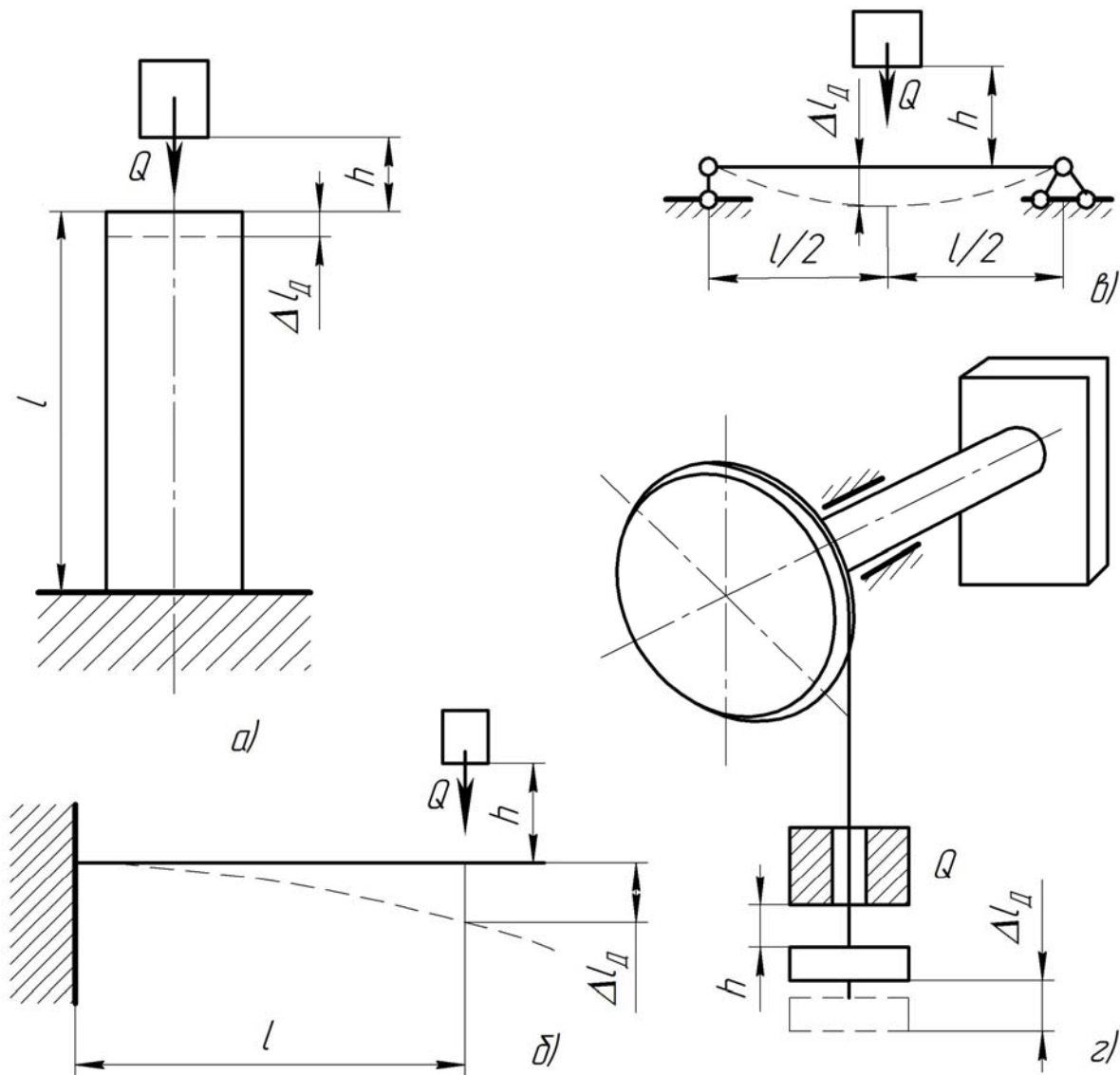


Рисунок 12.1

Користуючись законом збереження енергії, складемо рівняння балансу енергії системи «падаюче тіло – конструкція» для моменту найбільшого переміщення Δl_D

$$K_T = K_{II} = U_{кол}, \quad (12.1)$$

де K_T – кінематична енергія тіла, що падає, повністю переходить в потенціальну енергію колони, з врахуванням укороченням колони на Δl_D) аж до зупинки в кінці максимального переміщення точки удару

$$K_T = K_{II} = Q(h + \Delta l_D). \quad (12.2)$$

Потенціальна енергія пружної деформації, що накопичиться при такому укороченні колони

$$U = \frac{1}{2} N_D \cdot \Delta l_D, \quad (12.3)$$

де N_D – найбільше внутрішнє зусилля при пружному деформуванні,

$N_D \neq Q$, це невідомий параметр, так як і Δl_D .

Запишемо зв'язок між цими параметрами, вважаючи, що закон Гука виконується:

$$\Delta l_D = \frac{N_D \cdot l}{E \cdot A},$$

звідки

$$N_D = \frac{\Delta l_D \cdot E \cdot A}{l}.$$

Енергія деформування буде відповідно до (12.3)

$$U = \frac{\Delta l_D^2 \cdot E \cdot A}{2l}. \quad (12.4)$$

Згідно балансу енергій (12.2) і (12.4) порівняємо

$$Q(h + \Delta l_D) = \frac{\Delta l_D^2 \cdot E \cdot A}{2l}. \quad (12.5)$$

Запишемо квадратне рівняння у найпростішому вигляді

$$\Delta l_D^2 - \frac{2Q \cdot l}{E \cdot A} \cdot \Delta l_D - \frac{2Q \cdot l \cdot h}{E \cdot A} = 0. \quad (12.6)$$

Вираз $\frac{Q \cdot l}{E \cdot A}$ – це вкорочення (згідно закону Гуку) колони при статичній дії ваги Q , тобто це Δl_{CT} (переміщення перетину пружної системи від статичної дії вантажу).

Динамічне вкорочення можна отримати у вигляді

$$\Delta l_D = \Delta l_{CT} + \sqrt{\Delta l_{CT}^2 + 2\Delta l_{CT} \cdot h}, \quad (12.7)$$

або

$$\Delta l_D = \Delta l_{CT} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{CT}}} \right) = \Delta l_{CT} \cdot k_D. \quad (12.8)$$

Вираз у дужках вважають *коефіцієнтом динамічності при ударі вільно падаючим тілом*.

При $h = 0$, тобто при падінні тіла з нульової висоти (або ж при так званому миттєвому прикладенні сили) $k_D = 1 + \sqrt{1} = 2$.

Пружні деформації частіше всього набагато менші ніж h , тому коефіцієнт динамічності можна брати

$$k_D \approx \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{CT}}}. \quad (12.9)$$

Чим більший знаменник, тим менший k_D . Це означає, що податливіша деформуванню (менш жорстка) система є міцнішою при ударах і при коливаннях.

При отриманні залежності для коефіцієнта динамічності, нехтують власною масою тіла, що деформується. Це допускається лише для наближених розрахунків.

На основі лінійної залежності між силою та переміщеннями можна записати, що

$$\sigma_D = \sigma_{CT} \cdot k_D;$$

$$\tau_D = \tau_{CT} \cdot k_D,$$

де σ_D, τ_D – динамічні нормальні та дотичні напруження;

σ_{CT}, τ_{CT} – статичні нормальні та дотичні напруження, визначені в елементах конструкції від статичної дії вантажу.

Задача № 14
Визначення максимальних динамічних
напружень і переміщень при ударі

Для заданої пружної системи (рисунок до задачі № 14, таблиця до задачі № 14) визначити максимальні напруження при ударі, що виникають при падінні на неї з висоти $h = 0,5$ м вантажу $Q = 100$ Н та величину переміщення у зазначеному перетині (див. табл. до задачі № 14) у напрямі удару. Матеріал пружної системи – сталь; $l = 2$ м; $d = 4$ см.

План розв'язування задачі:

1. Визначити, на які види деформації працюють елементи конструкції.
2. Побудувати епюри внутрішніх силових факторів при статичній дії вантажу Q .
3. Визначити максимальні статичні напруження в елементах конструкції.
4. Визначити статичне переміщення у заданому перетині.
5. Визначити статичне переміщення у місці удару.
6. Визначити динамічний коефіцієнт (без врахування власної ваги пружної системи).
7. Визначити максимальні динамічні напруження.
8. Визначити переміщення під час удару у заданому перетині ($f_A^{верт}$ або Θ_B).

Таблиця до задачі № 14

№ з/п	D , см	Переміщення
1	4,5	$f_A^{верт}$
2	4,0	Θ_B
3	5,0	$f_A^{верт}$
4	6,0	Θ_B
5	7,0	$f_A^{верт}$
6	8,0	Θ_B
7	9,0	$f_A^{верт}$
8	10,0	Θ_B
9	11,0	$f_A^{верт}$
0	12,0	Θ_B

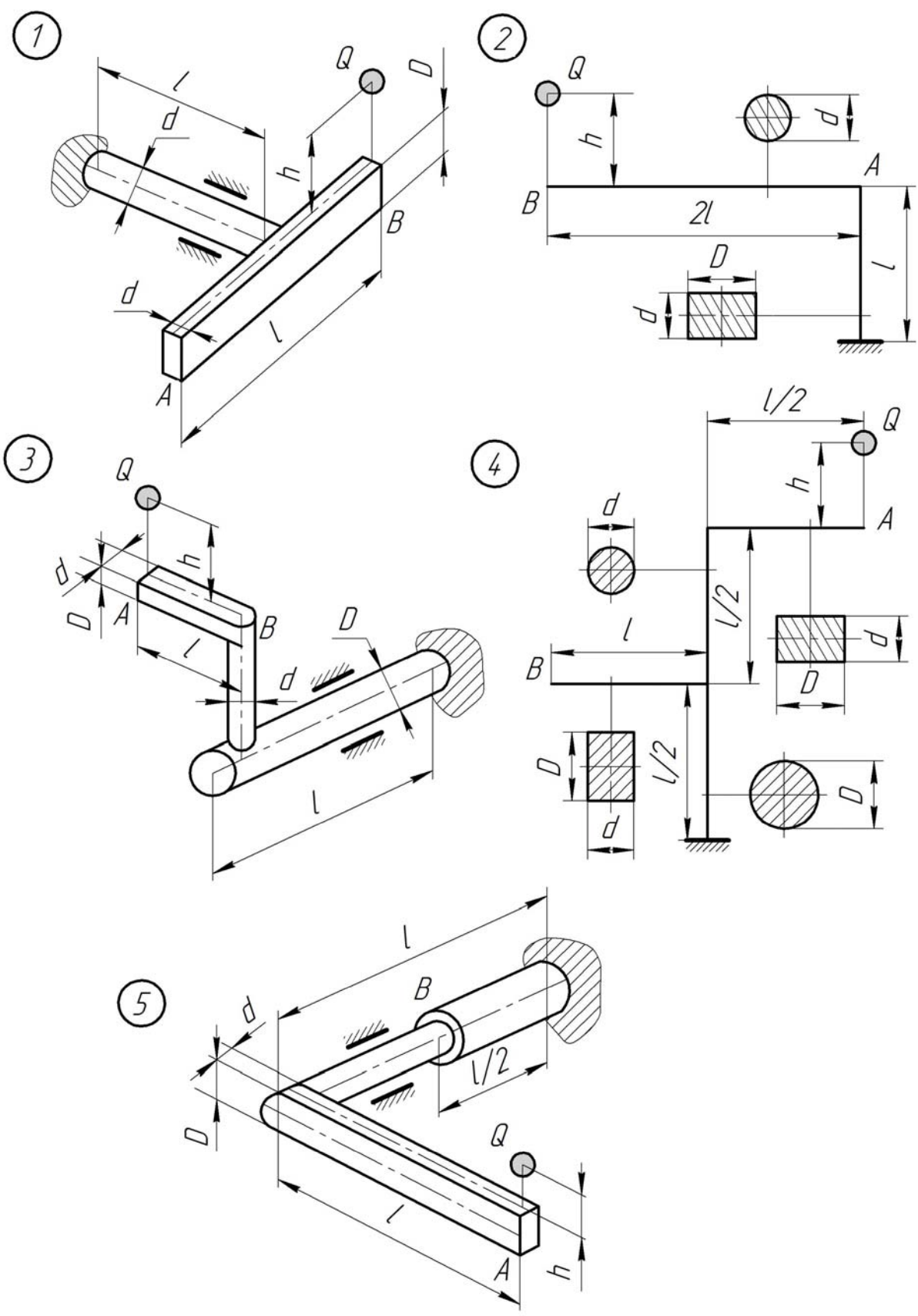


Рисунок до задачі № 14

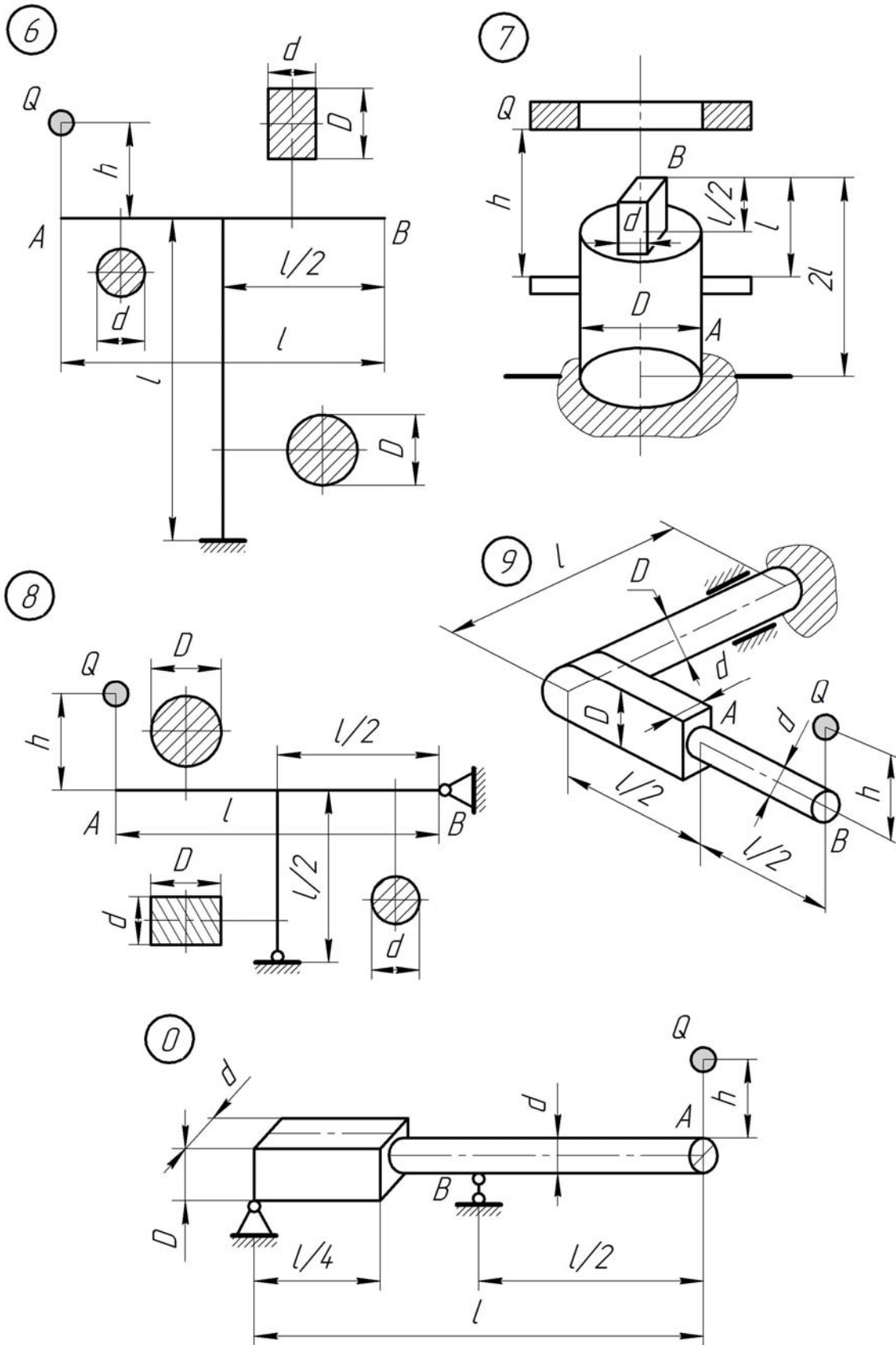


Рисунок до задачі № 14 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі № 14.1

Для заданої пружної системи (рисунок 12.3а) визначити максимальні напруження, що виникають при ударі об неї вантажу $Q = 100$ Н, що падає з висоти $h = 0,5$ м та величину переміщення у перетині, на який падає вантаж. Дано: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $l = 2$ м; $d = 4$ см; $D = 5$ см.

Розв'язування

Задана стрижнева система (рисунок 12.3б) працює на такі види деформацій: ділянки AB , BC – прямий поперечний згин. Деформаціями зрізу ділянки AB та стиску ділянки BC – нехтуємо.

Визначаємо максимальні внутрішні силові фактори при статичній дії навантаження $Q = 100$ Н. Будуємо епоюру згинальних моментів (рисунок 12.3в).

Ділянка AB , перетин B : $M_{зг.B} = 100$ Нм.

Ділянка BC , $M_{зг.BC} = 100$ Нм.

Визначаємо максимальні статичні напруження.

Перетин B :

$$\sigma_{ст.B} = \frac{M_{зг.B}}{W_{01}} = \frac{100}{6,28 \cdot 10^{-6}} = 15,9 \text{ МПа},$$

де

$$W_{01} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 4^3}{32} = 6,28 \text{ см}^3 = 6,28 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Ділянка BC :

$$\sigma_{ст.BC} = \frac{M_{зг.BC}}{W_{02}} = \frac{100}{12,3 \cdot 10^{-6}} = 8,15 \text{ МПа},$$

де

$$W_{02} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} = \frac{\pi \cdot 5^3}{32} = 12,3 \text{ см}^3 = 12,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Визначаємо статичне переміщення перетину, на який падає вантаж, використовуючи графоаналітичний метод розв'язку інтегралу Мора (рисунок 12.3г, д)

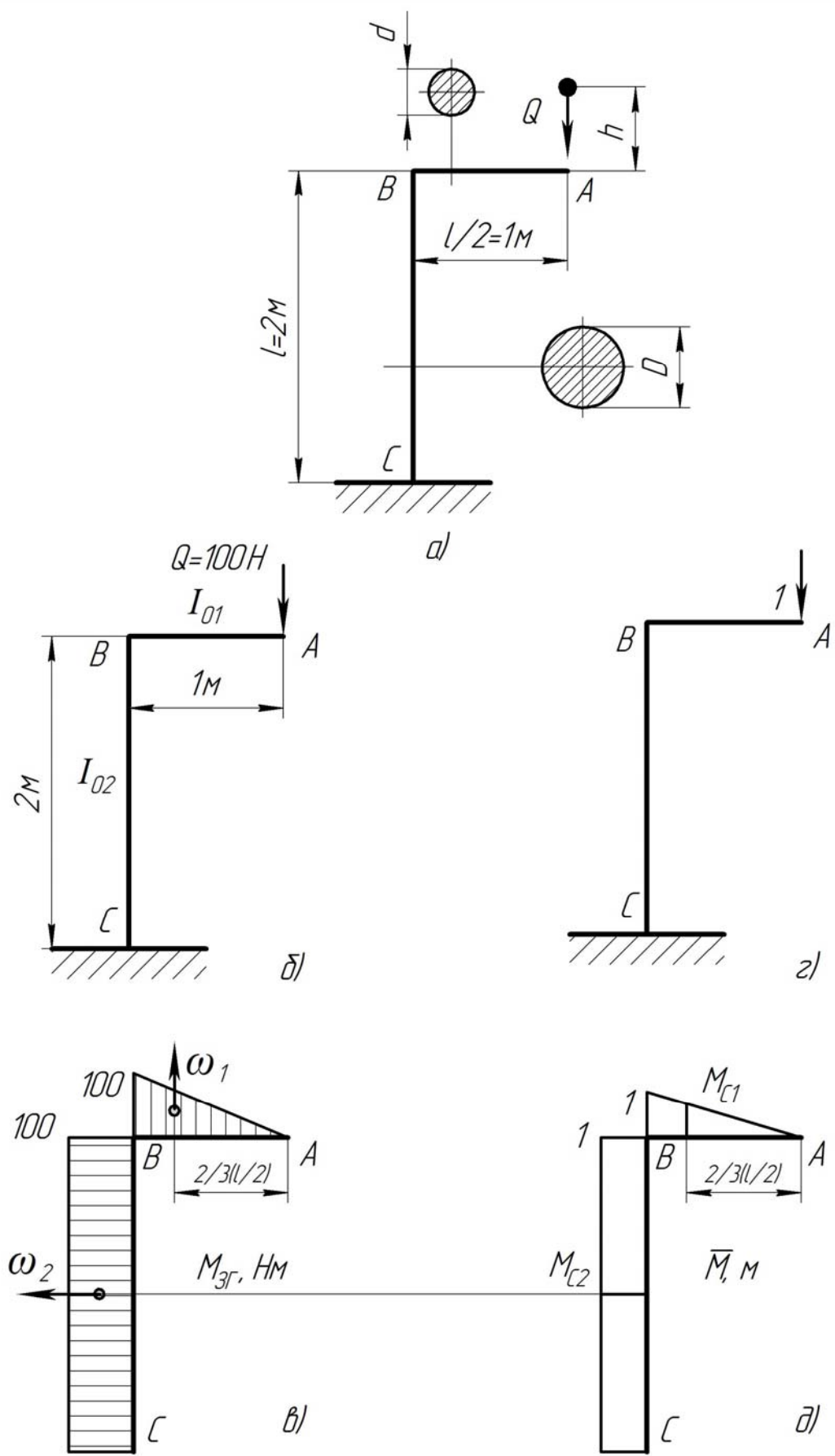


Рисунок 12.3

$$\Delta l_{CT} = \frac{1}{EI_{01}} \omega_1 \cdot M_{C1} + \frac{1}{EI_{02}} \omega_2 \cdot M_{C2} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 10^{11}} \left(\frac{50 \cdot 0,67}{12,56} + \frac{200 \cdot 1}{30,6} \right) \cdot \frac{1}{10^{-8}} = 5,93 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

де $\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 1 = 50;$ $\omega_2 = 100 \cdot 2 = 200;$

$$M_{C1} = \frac{2}{3} \cdot 1 = 0,67; \quad M_{C2} = 1;$$

$$I_{01} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 4^4}{64} = 12,56 \text{ см}^4 = 12,56 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{02} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = \frac{\pi \cdot 5^4}{64} = 30,6 \text{ м} = 30,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Визначаємо динамічний коефіцієнт

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta l_{CT}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,5}{5,93 \cdot 10^{-3}}} = 14,0.$$

Визначаємо динамічні напруження в елементах конструкції:
перетин B ,

$$\sigma_{D.B} = \sigma_{CT.B} \cdot k_D = 15,9 \cdot 14 = 223 \text{ МПа.}$$

ділянка BC ,

$$\sigma_{D.BC} = 8,15 \cdot 14 = 114 \text{ МПа.}$$

Вертикальний прогин перетину A під час удару

$$f_{D.A} = \Delta l_{CT.A} \cdot k_D = 5,93 \cdot 14 = 83 \text{ мм,}$$

де $\Delta l_{CT.A} = \Delta l_{CT}.$

Приклад розв'язування задачі № 14.2

Для заданої пружної системи (рисунок 12.4) визначити максимальні напруження, що виникають при ударі об неї вантажу $Q = 100$ Н, що падає з висоти $h = 0,5$ м та величину переміщення перетину B , на який падає вантаж.

Дано: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $l = 2$ м; $d = 4$ см; $D = 4$ см; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Розв'язування

Задана стрижнева система працює на такі види деформацій (рисунок 12.4а): ділянки BA та AC – прямий поперчний згин; ділянка CK – кручення. Визначаємо максимальні внутрішні силові фактори при статичній дії навантаження $Q = 100$ Н (рисунок 12.4б).

Ділянка BA , перетин A ; $M_{3Г.А} = 100 \cdot 1 = 100$ Нм.

Ділянка AC , перетин C ; $M_{3Г.С} = 100 \cdot 2 = 200$ Нм.

Ділянка CK , $M_{КР.СК} = 200$ Нм.

Будуємо епюри внутрішніх силових факторів (рисунок 12.4в).

Визначаємо максимальні статичні напруження.

$$\text{Перетин } A: \quad \sigma_{СТ.А} = \frac{M_{3Г.А}}{W_{01}} = \frac{100}{6,28} = 15,9 \text{ МПа,}$$

$$\text{де} \quad W_{01} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 4^3}{32} = 6,28 \text{ см}^3 = 6,28 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

$$\text{Перетин } C: \quad \sigma_{СТ.С} = \frac{M_{3Г.С}}{W_{02}} = \frac{200}{10,7} = 18,7 \text{ МПа,}$$

$$\text{де} \quad W_{02} = \frac{d \cdot D^2}{6} = \frac{4^3}{6} = 10,7 \text{ см}^3 = 10,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

$$\text{Перетин } СК: \quad \tau_{СТ.СК} = \frac{M_{КР.СК}}{W_P} = \frac{200}{12,6} = 15,9 \text{ МПа,}$$

$$\text{де} \quad W_P = \frac{\pi \cdot D^3}{16} = \frac{\pi \cdot 4^3}{16} = 12,6 \text{ см}^3 = 12,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Визначаємо статичне переміщення перетину, на який падає вантаж

$$\Delta l_{СТ} = \Delta l_{СТ.КР} + \Delta l_{СТ.3Г} = 0,398 + 0,00679 = 0,0466 \text{ м,}$$

де $\Delta l_{СТ.КР}$ – переміщення перетину від деформації кручення ділянки $СК$

$$\Delta l_{СТ.КР} = \varphi \cdot 2 = 0,0199 \cdot 2 = 0,0398 \text{ м;}$$

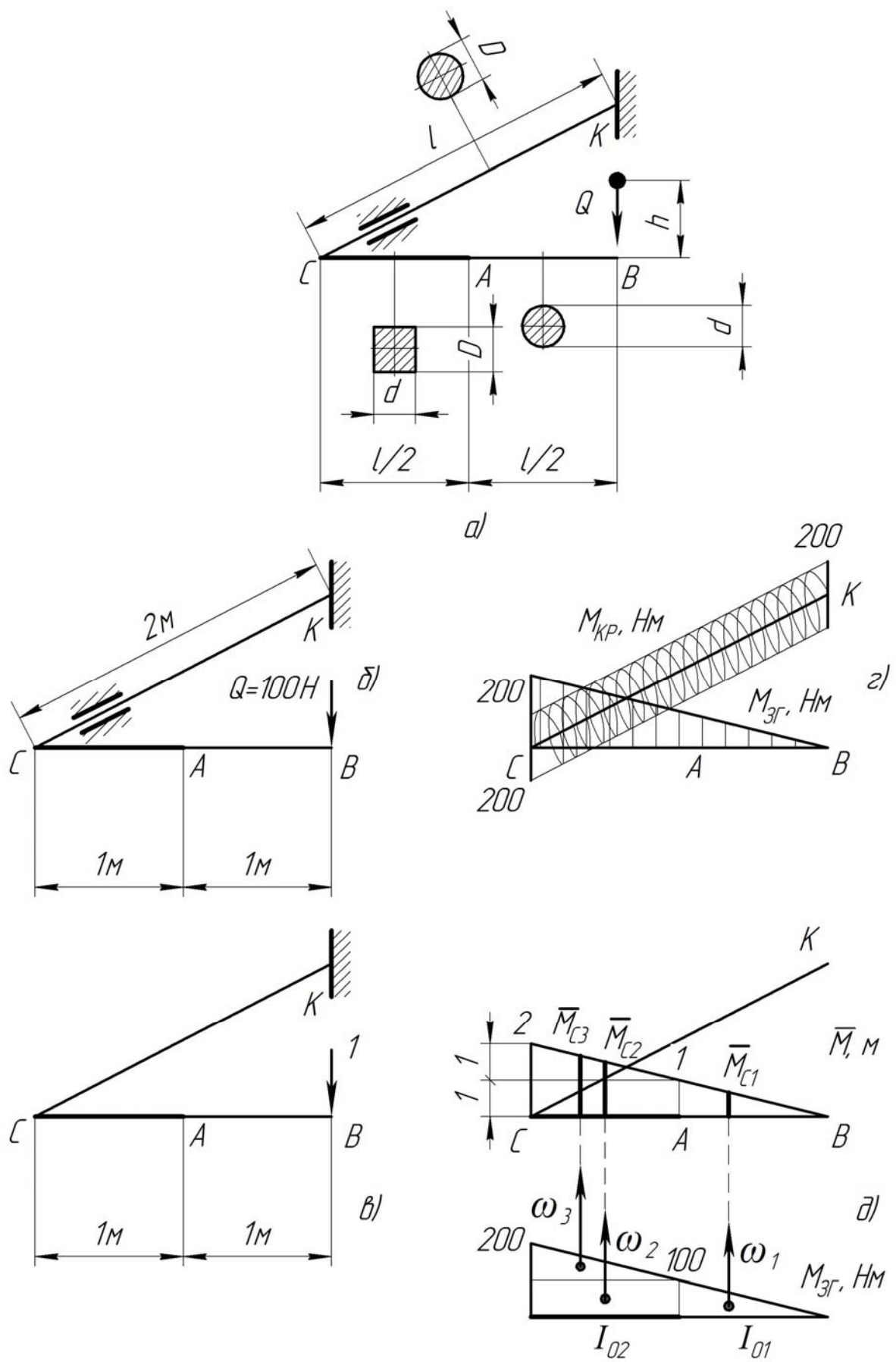


Рисунок 12.4

$$\varphi = \frac{M_{KP.CK} \cdot l_{CK}}{G \cdot I_P} = \frac{200 \cdot 2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 25,1 \cdot 10^{-8}} = 0,0199 \text{ рад};$$

$$I_P = \frac{\pi \cdot D^4}{32} = \frac{\pi \cdot 4^4}{32} = 25,1 \text{ см}^4 = 25,1 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$\Delta l_{CT.3Г}$ – переміщення перетину B від деформації згину ділянки BC , визначаємо графоаналітичним методом розв'язку інтегралу Мора (рисунок 12.4z)

$$\begin{aligned} \Delta l_{CT.3Г} &= \frac{\omega_1 \cdot M_{C1}}{E \cdot I_{01}} + \frac{1}{E \cdot I_{02}} (\omega_2 \cdot M_{C2} + \omega_3 \cdot M_{C3}) = \\ &= \frac{50 \cdot 0,667}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12,56 \cdot 10^{-8}} + \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 21,3 \cdot 10^{-8}} (100 \cdot 1,5 + 50 \cdot 1,667) = 6,79 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \end{aligned}$$

де $\omega_1 = 0,5 \cdot 100 = 50$;

$M_{C1} = 0,667$;

$\omega_2 = 100 \cdot 1 = 100$;

$M_{C2} = 1,5$;

$\omega_3 = 50$;

$M_{C3} = 1 + 0,667 = 1,667$;

$$I_{01} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 4^4}{64} = 12,56 \text{ см}^4 = 12,56 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{02} = \frac{d \cdot D^3}{12} = \frac{4^4}{12} = 21,3 \text{ см}^4 = 21,3 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Визначаємо динамічний коефіцієнт

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{CT}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,5}{0,0466}} = 5,74.$$

Визначаємо максимальні динамічні напруження та переміщення перетину B у момент падіння вантажу:

$$\sigma_{D.A} = \sigma_{CT.A} \cdot k_D = 15,9 \cdot 5,74 = 91,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{D.C} = \sigma_{CT.C} \cdot k_D = 18,7 \cdot 5,74 = 107 \text{ МПа};$$

$$\tau_{D.CK} = \tau_{CT.CK} \cdot k_D = 15,9 \cdot 5,74 = 91,3 \text{ МПа};$$

$$f_{D.B} = \Delta l_{CT.B} \cdot k_D = 0,0466 \cdot 5,74 = 0,268 \text{ м},$$

де $\Delta l_{CT.B} = \Delta l_{CT}$.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. М.: Наука, 1976. 608 с.
2. Варіанти задач для виконання розрахунково-графічних робіт з курсу «Опір матеріалів». Частина 1 / Т.І. Рибак, А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2003. 24 с.
3. Варіанти задач і приклади їх розв'язку для виконання розрахунково-графічних робіт з курсу «Опір матеріалів». Частина 1. Для студентів напрямів підготовки «Інженерна механіка», «Машинобудування» / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик, О.В. Ферендюк. Тернопіль, 2010. 80 с.
4. Дарков, А.В., Шпиро, Г.С. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. М.: Высшая школа, 1969.
5. Иосилевич, Г.Б. Прикладная механика / Г.Б. Иосилевич и др. М.: Высшая школа, 1989.
6. Заблонский, К.И. Прикладная механика / К.И. Заблонский и др. М.: Высшая школа, 1989.
7. Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів «Визначення переміщень при згині» / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. Тернопіль, 2006. 35 с.
8. Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів «Розрахунок кривих брусів. Розрахунок на стійкість центрально стиснутих стержнів» / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. Тернопіль, 2002. 30 с.
9. Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів «Складний опір» / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. Тернопіль, 2001. 32 с.
10. Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів «Статично невизначені системи» для напрямів підготовки «Інженерна механіка» і «Машинобудування» денної та заочної форм навчання / Т.І. Рибак, А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. Тернопіль, 2007. 35 с.
11. Опір матеріалів / За ред. С.Е. Гарфа. К.: Вища школа, 1972. 230 с.
12. Опір матеріалів / За ред. Г.С. Писаренка. К.: Вища школа, 1974. 304 с.
13. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності / За заг. ред. В.Т. Піскунова: у 2ч., 5 кн. К.: Вища школа, 1995.
14. Опір матеріалів. Методичний посібник для виконання контрольних робіт. Частина 2. Для студентів денної та заочної форм навчання / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. Тернопіль, 2011. 92 с.
15. Опір матеріалів. Теорія і практика розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість елементів механізмів та споруд: навч. посібник / В.С. Кравчук, П.М. Калініченко, Л.В. Коломієць, О.М. Лимаренко; за ред. О.Ф. Дашенка. Одеса: ВМВ, 2009. 316 с.
16. Посацький, Л.С. Опір матеріалів / Л.С. Посацький. Львів: в-во Львівського університету, 1973. 440 с.

17. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов /Миролюбов И.Н. и др. М.: Высшая школа, 1974.
18. Рибак, Т.І. Опір матеріалів: конспект лекцій (навчальний посібник) / Рибак Т.І. Тернопіль: Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя. 2016. 252 с.
19. Сопротивление материалов: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников всех специальностей технических высших учебных заведений, кроме строительных / А.В. Дарков, Б.Н. Кутуков. М.: Высшая школа, 1985.
20. Сопротивление материалов /Под ред. Г.С. Писаренко. К.: Вища школа, 1986. 775 с.
21. Хомик, Н.І. Технічна механіка: курс лекцій /Н.І. Хомик, А.Д. Довбуш. Тернопіль, 2011. 208 с.
22. Хомик, Н.І. Технічна механіка: навчально-методичний посібник до курсової роботи /Н.І. Хомик, А.Д. Довбуш. Тернопіль: Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2013. 192 с.
23. Хомик Н.І., Довбуш, А.Д., Довбуш, Т.А., Рубінець, Н.А. Прикладна механіка і основи конструювання: навчально-методичний посібник до розрахунково-графічної роботи. Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2015. 116 с.
24. Хомик, Н.І., Довбуш, А.Д., Довбуш, Т.А., Рубанець, Н.А. Опір матеріалів: навчально-методичний посібник до виконання курсової роботи для студентів за скороченим терміном навчання. Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2015. 128 с.
25. Хомик, Н.І., Довбуш, А.Д., Крамар, Г.М. Опір матеріалів: навчально-методичний посібник до виконання розрахунково-графічних робіт (2 семестр) для студентів напряму підготовки «Будівництво». Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2015. 76 с.
26. Хомик, Н.І., Довбуш, А.Д., Цьонь, О.П. Деталі машин. Курс лекцій для студентів заочної форми навчання. Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2016. 160 с.
27. Хомик Н.І., Довбуш Т.А., Рубінець Н.А. Опір матеріалів (спецкурс) і основи теорії пружності і пластичності: курс лекцій для студентів напряму підготовки «Будівництво». Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2017. 232 с.
28. Опір матеріалів. Конкурсні задачі, приклади розв'язування: навчальний посібник / Р.Б. Гевко, Т.А. Довбуш, Н.І. Хомик, А.Д. Довбуш. Тернопіль: ФОП Паляниця В.М., 2020. 160 с.
29. Strength of materials: course book for practical works / Nevko R.V., Dovbush T.A., Khomyk N.I., Dovbush A.D., Tson H.V. Ternopil, FOP Palianytsia V.A., 2020. 240 p.
30. Деталі машин та основи автоматизованого конструювання: навчальний посібник до лабораторних робіт /Гевко Р.Б., Хомик Н.І., Жаровський О.С., Довбуш Т.А. Тернопіль: ФОП Паляниця В. А., 2021. 256 с.

ДОДАТОК 1

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

(повна назва вищого навчального закладу)

технічної механіки та сільськогосподарських машин

(повна назва кафедри, циклової комісії)

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА

з Опору матеріалів

(назва дисципліни)

на тему: _____

Студента (ки) 2 курсу ММ групи

=(прізвище та ініціали)

спеціальності 131 Прикладна механіка

Керівник _____

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Національна шкала _____

Кількість балів: _____ Оцінка: ECTS _____

Члени комісії

(підпис)

(прізвище та ініціали)

(підпис)

(прізвище та ініціали)

(підпис)

(прізвище та ініціали)

м. Тернопіль - 20 рік

ДОДАТОК 2

ЗМІСТ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

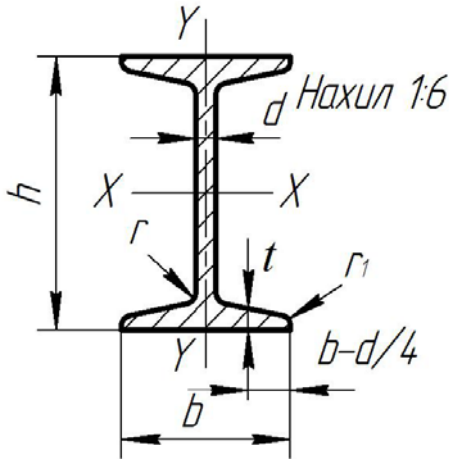
3 семестр

Задача №1. Розрахунок на міцність і визначення переміщень при розтягу і стиску	2
Задача №2. Розрахунок статично невизначеної стрижневої системи	5
Задача №3. Визначення осьових моментів інерції плоских перетинів	8
Задача №4. Розрахунок вала на кручення	12
Задача №5. Аналіз напруженого стану	15
Задача №6. Побудова епюр перерізуючих сил і згинальних моментів для консолі	20
Задача №7. Побудова епюр перерізуючих сил і згинальних моментів для балки на двох опорах	22
Задача №8. Розрахунок на міцність при згині балок	24

4 семестр

Задача №9. Розрахунок на міцність і визначення переміщень при згині балок	28
Задача №10. Розрахунок статично невизначеної рами	33
Задача №11. Підбір поперечного перетину балки при деформації косоного згину	38
Задача №12. Розрахунок вала на згин з крученням	42
Задача №13. Розрахунок на стійкість стиснутого стрижня	44
Задача №14. Визначення максимальних динамічних напружень і переміщень при ударі	46

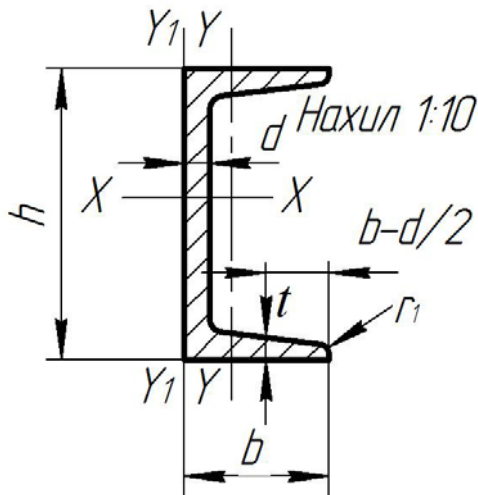
ДОДАТОК 3



Сталь прокатна. Балки двотаврові. Сортамент. ГОСТ 8239-89

Но- мера про- філю	Розміри				Площа перетину A , $см^2$	Довідкові величини для осей						
	h	b	d	t		$x - x$				$y - y$		
						J_X	W_X	i_x	S_X	J_Y	W_Y	i_y
						$см^4$	$см^3$	$см$	$см$	$см^4$	$см^3$	$см$
мм												
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,0	13,0	71,4	18930	947	16,3	540	665	85,9	3,05
45	450	160	6,6	14,2	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12
50	500	170	9,5	15,2	97,3	39120	1560	20,1	899	1040	122	3,28
55	550	180	10,0	16,5	113	54810	1990	22,0	1150	1350	150	3,46
60	600	190	10,8	17,8	131	75010	2500	23,9	1440	1720	181	3,62

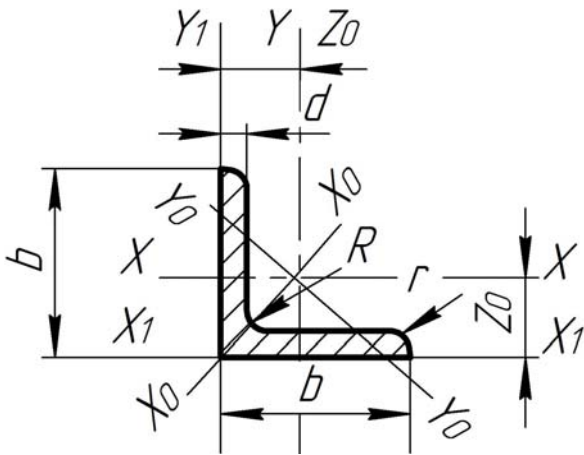
ДОДАТОК 4



Сталь прокатна. Швелери. Сортамент. ГОСТ 8240-89

Номера профілю	Розміри				Площа перетину A , $см^2$	Довідкові величини для осей						
						$x - x$			$y - y$			z_0
	J_x	W_x	i_x	J_y		W_y	i_y					
	$см^4$	$см^3$	$см$	$см^4$		$см^3$	$см$	$см$				
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,10	1,92	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	45,4	11,0	1,70	1,67
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	63,3	13,8	1,87	1,80
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	86,0	17,0	2,04	1,94
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	113	20,5	2,20	2,07
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	151	25,1	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	208	31,6	2,60	2,42
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	642	73,4	3,23	2,75

ДОДАТОК 5



Сталь прокатна кутова рівнобічна. Сортамент. ГОСТ 8509-86

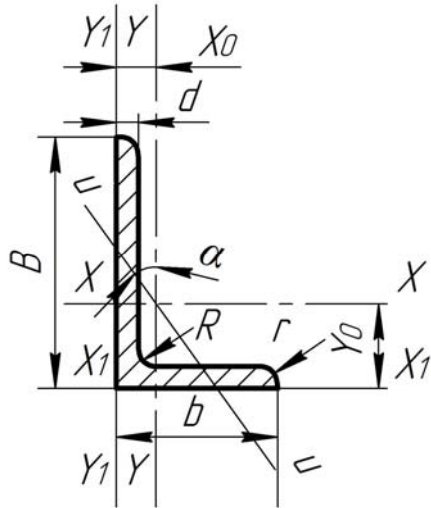
Номера профілю	Розміри			Площа профілю A , $см^2$	Довідкові величини для осей		
	b	d	R		$x - x$		z_0
					J_x	i_x	
	мм				см	см	см
1	2	3	4	5	6	7	8
2	20 {	3	3,5	1,13	0,40	0,59	0,60
		4		1,46	0,50	0,58	0,64
2,5	25 {	3	3,5	1,43	0,81	0,75	0,73
		4		1,86	1,03	0,74	0,76
2,8	28	3	4	1,62	1,16	0,85	0,80
3,2	32 {	3	4,5	1,86	1,77	0,97	0,89
		4		2,43	2,26	0,96	0,94
3,6	36 {	3	4,5	2,10	2,56	1,10	0,99
		4		2,75	3,29	1,09	1,04
4	40 {	3	5	2,35	3,55	1,23	1,09
		4		3,08	4,58	1,22	1,13
4,5	45 {	3	5	2,65	5,13	1,39	1,21
		4		3,48	6,63	1,38	1,26
		5		4,29	8,03	1,37	1,30
5	50 {	3	5,5	2,96	7,11	1,55	1,33
		4		3,89	9,21	1,54	1,38
		5		4,80	11,2	1,53	1,42
5,6	56 {	3,5	6	3,86	11,6	1,73	1,50
		4		4,38	13,1	1,73	1,52
		5		5,41	16,0	1,72	1,57
6,3	63 {	4	7	4,96	18,9	1,95	1,69
		5		6,13	23,1	1,94	1,74
		6		7,28	27,1	1,93	1,78

Закінчення додатка 5

Сталь прокатна **кутова рівнобічна**. Сортамент. ГОСТ 8509-86
(закінчення)

1	2	3	4	5	6	7	8
7	70	4,5	8,0	6,20	29,0	2,16	1,88
		5		6,86	31,9	2,16	1,90
		6		8,15	37,6	2,15	1,94
		7		9,42	43,0	2,14	1,99
		8		10,7	48,2	2,13	2,02
7,5	75	5	9	7,39	39,5	2,31	2,02
		6		8,78	46,6	2,30	2,06
		7		10,1	53,3	2,29	2,10
		8		11,5	59,8	2,28	2,15
		9		12,8	66,1	2,27	2,18
8	80	5,5	9	8,63	52,7	2,47	2,17
		6		9,38	57,0	2,47	2,19
		7		10,8	65,3	2,45	2,23
		8		12,3	73,4	2,44	2,27
9	90	6	10	10,6	82,1	2,78	2,43
		7		12,3	94,3	2,77	2,47
		8		13,9	106	2,76	2,51
		9		15,6	118	2,75	2,55
10	100	6,5	12	12,8	122	3,09	2,68
		7		13,8	131	3,08	2,71
		8		15,6	147	3,07	2,75
		10		19,2	179	3,05	2,83
		12		22,8	209	3,03	2,91
		14		26,3	237	3,00	2,99
		16		29,7	264	2,98	3,06
11	110	7	12	15,2	176	3,40	2,96
		8		17,2	198	3,39	3,00
12,5	125	8	14	19,7	294	3,87	3,46
		9		22,0	327	3,86	3,40
		10		24,3	360	3,85	3,45
		12		28,9	422	3,82	3,53
		14		33,4	482	3,80	3,61
		16		37,8	539	3,78	3,68
14	140	9	14	24,7	466	4,34	3,78
		10		27,3	512	4,33	3,82
		12		32,5	602	4,31	3,90

ДОДАТОК 6



Сталь прокатна кутова нерівнобічна. Сортамент. ГОСТ 8510-86

Номера профілю	Розміри				Площа профілю A , $см^2$	Довідкові величини для осей					
	B	b	d	R		$x - x$		$y - y$		$x_1 - x_1$	$y_1 - y_1$
						J_x	i_x	J_y	i_y	Відстань від центра тяжіння	
	мм					$см^4$	см	$см^4$	см	y_0	x_0
	7	8	9	10		11	12				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,16	0,70	0,78	0,22	0,44	0,86	0,42
3,2/2	32	20	3	3,5	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	1,08	0,49
			4		1,94	1,93	1,00	0,57	0,54	1,12	0,53
4/2,5	40	25	3	4,0	1,89	3,06	1,27	0,93	0,70	1,32	0,59
			4		2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	1,37	0,63
4,5/2,8	45	28	3	5	2,14	4,41	1,43	1,32	0,79	1,47	0,64
			4		2,80	5,68	1,42	1,69	0,78	1,51	0,68
5/3,2	50	32	3	5,5	2,42	6,17	1,60	1,99	0,91	1,60	0,72
			4		3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,65	0,76
5,6/3,6	56	36	3,5	6,0	3,16	10,1	1,79	3,30	1,02	1,80	0,82
			4		3,58	11,4	1,78	3,70	1,02	1,82	0,84
			5		4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	1,86	0,88
6,3/4,0	63	40	4	7,0	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	2,03	0,91
			5		4,98	19,9	2,00	6,26	1,12	2,08	0,95
			6		5,90	23,3	1,99	7,28	1,11	2,12	0,99
			8		7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	2,20	1,07

Закінчення додатка 6

**Сталь прокатна кутова нерівнобічна. Сортамент. ГОСТ 8510-86
(закінчення)**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7/4,5	70	45 {	4,5	7,5	5,07	25,3	2,23	8,25	1,28	2,25	1,03
			5		5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	2,28	1,05
7,5/5	75	50 {	5	8	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	2,39	1,17
			6		7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	2,44	1,21
			8		9,47	52,4	2,35	18,5	1,40	2,52	1,29
8/5	80	50 {	5	8	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	2,6	1,13
			6		7,55	49,0	2,55	14,8	1,40	2,65	1,17
9/5,6	90	56 {	5,5	9	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	2,92	1,26
			6		8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	2,95	1,28
			8		11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	3,04	1,36
10/6,3	100	63 {	6	10	9,59	98,3	3,2	30,6	1,79	3,23	1,42
			7		11,1	113	3,19	35,0	1,78	3,28	1,46
			8		12,6	127	3,18	39,2	1,77	3,32	1,50
			10		15,5	154	3,15	47,1	1,75	3,40	1,58
11/7	110	70 {	6,5	10	11,4	142	3,53	45,6	2	3,55	1,58
			7		12,3	152	3,52	48,7	1,99	3,57	1,6
			8		13,9	172	3,51	54,6	1,98	3,61	1,54
12,5/8	125	80 {	7	11	14,1	227	4,01	73,7	2,29	4,01	1,8
			8		16	256	4	83,0	2,28	4,05	1,84
			10		19,7	312	3,98	100	2,26	4,14	1,92
			12		23,4	356	3,95	117	2,24	4,22	2
14/9	140	90 {	8	12	18	364	4,49	120	2,58	4,49	2,02
			10		22,2	444	4,47	146	2,56	4,58	2,12

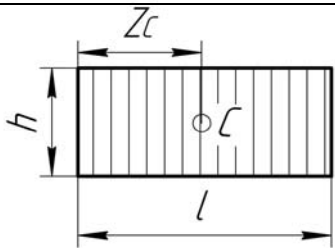
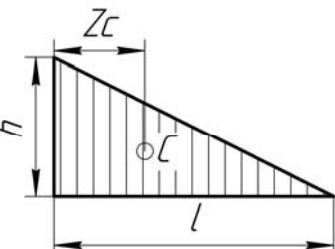
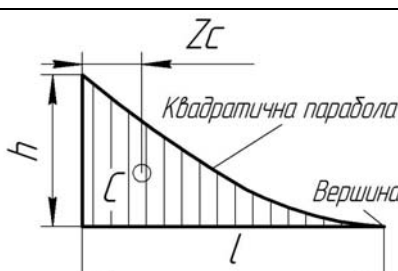
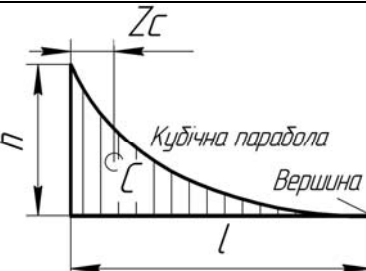
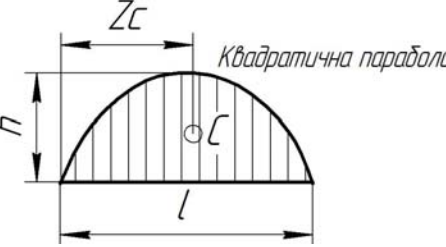

ДОДАТОК 7

Коефіцієнти зменшення основного допустимого напруження

Гнучкість бруса $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$	Сталь марок Ст.0С, Ст.2, Ст.3, Ст.4.	Сталь Ст.5	Сталь СПК	Чавун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,36	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

ДОДАТОК 8

Площі ω і координати z_C центра тяжіння простих фігур

Фігура	ω	z_C
	$l \cdot h$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{1}{2}l \cdot h$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{1}{3}l \cdot h$	$\frac{1}{4}l$
	$\frac{1}{4}l \cdot h$	$\frac{1}{5}l$
	$\frac{2}{3}l \cdot h$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{2}{3}l \cdot h$	$\frac{3}{8}l$

УКРАЇНСЬКО-АНГЛІЙСЬКИЙ СЛОВНИК ОСНОВНИХ ТЕРМІНІВ

UKRAINIAN-ENGLISH VOCABULARY OF BASIC TERMS

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ BASIC CONCEPTS OF STRENGTH OF MATERIALS		
опір матеріалів	–	strength of materials
теорія міцності	–	theory of strength
припущення (гіпотези)	–	assumption (hypotheses)
гіпотеза про суцільність матеріалу	–	hypothesis of the material continuity
гіпотеза про однорідність та ізотропність	–	hypothesis of homogeneity and isotropy
гіпотеза про ідеальну пружність та природну не напруженість матеріалу	–	hypothesis of the ideal elasticity and natural tension of the material
площа	–	area
міцність	–	strength
жорсткість, достатня жорсткість	–	rigidity, sufficient rigidity
стійкість	–	durability
стрижень (стержень)	–	rod
прямий стрижень	–	direct rod
стрижнева система	–	rod system
пластина	–	plate
оболонка	–	shell
масив (масивне тіло)	–	solid (massive body)
навантаження	–	load
зовнішнє навантаження	–	external load
статичне навантаження	–	static load
динамічне навантаження	–	dynamic load
рівномірно розподілене навантаження	–	evenly distributed load
навантаження розподілені на лінії	–	distributed on line load
інтенсивність розподіленого навантаження	–	intensity of the distributed load
силовий фактор	–	force factor
внутрішній силовий фактор	–	internal force factor
внутрішнє зусилля	–	internal force
зосереджена сила	–	concentrated force
рівнодійний	–	equivalent

критична сила	–	critical force
сила інерції	–	inertia force
сила тиску	–	pressure force
момент	–	moment
розрахункова схема	–	calculation scheme
деформація (переміщення)	–	deformation (displacement)
лінійна деформація (переміщення)	–	linear deformation (displacement)
відносна деформація	–	relative deformation
відносна зміна об'єму	–	relative change in volume
поздовжня деформація	–	longitudinal deformation
поперечна деформація	–	transverse deformation
плоска система сил	–	plane system of forces
система паралельних сил	–	system of parallel forces
правило знаків	–	sign rule
опуклість	–	convexity
зразок	–	specimen
площадка, площина	–	plane
запас міцності (коефіцієнт запасу міцності)	–	margin of safety
вибір, підбір	–	choice
прямокутна система координат	–	rectangular coordinate system
початок координат	–	coordinate origin
поточна координата	–	current coordinate
взаємно перпендикулярні площини	–	mutually perpendicular planes
лінійна залежність	–	linear relationship
закон розподілу	–	law of distribution
прискорення	–	acceleration
ступінь	–	degree
абсолютно жорстке тіло	–	absolutely rigid body
пружна деформація	–	elastic deformation
пружна система	–	elastic system
конструкція	–	construction
рівняння статички	–	static equation
рівняння рівноваги	–	equilibrium equation
рівновага	–	equilibrium
значення, величина	–	value
форма (перетину)	–	shape
відома величина	–	known value
рівень	–	level
шар волокон	–	fiber layer
нейтральний шар	–	neutral layer

верхній шар	–	upper layer
нижній шар	–	lower layer
одиниця вимірювання, розмірність	–	measurement
перевага	–	advantage
недолік	–	drawback
особливість	–	peculiarity
рама	–	frame
сумісна дія	–	joint action
дія	–	action
розв'язування (розв'язок)	–	solution
двотавр	–	I-beam
швелер	–	U-beam
коротка балка	–	short beam
точний	–	exact
умова	–	condition
точка	–	point
вектор	–	vector
вузол	–	nod
нахил	–	slope
вгору	–	up
вниз	–	down (downwards)
кривизна	–	curvature
плоска крива	–	plane curve
руйнівний	–	destructive
метод перетинів	–	section method
плоский поперечний перетин	–	plane cross-section (section)
нормальний (поперечний) перетин	–	normal (shear) section
довільний (косий або похилий) перетин	–	random (oblique or inclined) cross-section
умовний (уявний) перетин	–	imaginary section
небезпечний перетин	–	dangerous section
діаграма, епюра	–	diagram
розмір	–	dimension
висота	–	height
ширина	–	width
довжина	–	length
діаметр	–	diameter
коло	–	circle
кільце	–	ring
круг	–	round
центр кола	–	circle center

прямокутник	–	rectangle
об'єм	–	volume
вага	–	weight
центр ваги	–	center of gravity (weight)
ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ-СТИСК ПРЯМИХ СТРИЖНІВ CENTRAL TENSION AND COMPRESSION OF DIRECT RODS (BARS)		
центральний розтяг-стиск	–	central tension and compression
поздовжня (нормальна осьова) сила	–	longitudinal (normal, axial) force
модуль пружності (модуль Юнга)	–	modulus of elasticity (Young's modulus)
коефіцієнт поперечної деформації (коефіцієнт Пуассона)	–	coefficient of transverse deformation or Poisson
зсув (зріз)	–	shear
поперечна (перерізуюча) сила	–	cross-cut, shear (cutting) force
модуль зсуву	–	shear modulus
сколювання	–	chipping
пластичний матеріал	–	plastic material
крихкий матеріал	–	brittle material
сталь	–	steel
чавун	–	cast iron
дерево	–	wood
діаграма розтягу	–	stress-strain diagram
границя пропорційності	–	limit of proportionality
границя пружності	–	limit of elasticity
границя текучості	–	yield (strength) limit
границя міцності	–	tensile strength
потенціальна енергія деформації	–	potential deformation energy
розрахунок на міцність	–	strength calculation
напруження	–	stress
нормальне напруження	–	normal stress
дотичне напруження	–	tangential (shear) stress
головне напруження	–	main (principal) stress
робоче (фактичне) напруження	–	working (actual) stress
граничне напруження	–	boundary stress
допустиме напруження	–	allowable stress
коефіцієнт запасу міцності	–	strength factor
умова міцності	–	strength condition
проектний розрахунок	–	design calculation
перевірний розрахунок	–	validation calculation

наближений розрахунок	–	approximate calculation
ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕТИНІВ GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF PLANE SECTIONS		
геометрична характеристика плоских перетинів	–	geometric characteristics of plane sections
площа довільної форми	–	area of arbitrary shape
елементарна площа	–	elementary plane
статичний момент площі	–	static moment of the area
полярний момент інерції	–	polar moment of inertia
осьовий момент інерції	–	axial moment of inertia
центральна вісь	–	central axis
нейтральна вісь	–	neutral axis
центральний момент інерції	–	central moment of inertia
головна вісь інерції	–	main axis of inertia
головний момент інерції	–	main moment of inertia
головний центральний момент інерції	–	main central moment of inertia
головна центральна вісь	–	principal central axis
осьовий момент опору	–	axial moment of resistance
полярний момент опору	–	polar moment of intersection resistance
ЗСУВ. КРУЧЕННЯ SHEAR. TORSION		
кручення	–	torsion
крутний момент	–	torque moment
обертаючий момент	–	rotating moment
вал	–	shaft
шків (диск)	–	pulley
потужність	–	power
частота обертання вала	–	shaft rotation frequency
кут закручування	–	twist angle
відносний кут закручування	–	relative twist angle
ПРЯМИЙ ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН STRAIGHT TRANSVERSE BENDING		
прямий поперечний згин	–	direct lateral bending
напруження при згині	–	bending stress
згинальний момент	–	bending moment
консольна балка	–	cantilever beam
балка на опорах	–	supported beam

лінійний закон	–	linear law
нижні волокна матеріалу	–	lower fibers of material
верхні волокна матеріалу	–	upper fibers of material
нейтральні волокна матеріалу	–	neutral fibers of material
реакція	–	reaction
опорна реакція	–	support reaction
відкинута в'язь	–	rejected link
активна сила	–	active force
реактивна сила	–	reactive force
вільний (незакріплений) кінець	–	free end
опора	–	support
шарнірно-рухома опора	–	hinged-movable support
шарнірно-нерухома опора	–	hinged-fixed support
жорстке закріплення затиснення (защемлення)	–	rigid fastening, rigidly fixed (clamping)
злом (епюри)	–	breaking
закріплення на опорах	–	fixation on supports
перевірка	–	validation, verification
правильність	–	correctness
межа, границя	–	boundary
функція	–	function
ліва сторона	–	left side
права сторона	–	right side
екстремальний момент	–	extreme moment
лінія нахилена до осі	–	line inclined to the axis
лінія паралельна осі	–	line parallel to the axis
стрибок	–	jump
квадратична парабола	–	quadratic parabola
зростати	–	increase
спадати	–	decrease
диференціальна залежність	–	differential dependency
похідна	–	derivative
недеформована вісь	–	undeformed axis
зігнута вісь	–	bent axis
вигнута вісь	–	curved axis
пружна лінія	–	elastic line
викривлення (спотворення)	–	distortion
прогин	–	deflection
кутове переміщення	–	angular displacement
кут повороту	–	slope of the elastic curve
косий згин	–	oblique bending
чистий косий згин	–	pure oblique bending

нейтральна лінія перетину	–	neutral (zero) crossing line
СКЛАДНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН COMPLEX STRESSED STATE		
складний опір	–	complex strength (resistance to combined stress)
складний напружений стан	–	complex stressed state
головний елемент	–	main element
головна площина (площадка)	–	main plane
головне напруження	–	main stress
більше з головних напружень	–	maximum main stress
менше з головних напружень	–	minimum main stress
розрахункове напруження	–	calculated stress
лінійний напружений стан	–	linear stress state
плоский напружений стан	–	plane stress state
СТАТИЧНО-НЕВИЗНАЧУВАНІ СИСТЕМИ STATICALLY INDETERMINATE SYSTEMS		
статично невизначувана система	–	statically indeterminate system
ступінь статичної невизначеності	–	degree of static indeterminance
зайвий (надлишковий) зв'язок	–	redundant (auxiliary) junction
відкинутий зв'язок	–	removed junction
незмінна система	–	unchangeable system
основна система	–	main system
еквівалентна система	–	equivalent system
умова нерозривності	–	condition of continuity
умова сумісності деформацій	–	condition of strain compatability
гіперстатична система	–	hyperstatic system
одиничне навантаження	–	singular load
переміщення від одиничного навантаження (сили або моменту)	–	singular displacement
одинична сила	–	singular force
одиничний момент	–	singular moment
канонічне рівняння	–	canonic equation
вільний член рівняння	–	absolute term of equation
невідома сила	–	unknown force
повне переміщення	–	complete displacement
диференціальне рівняння	–	differential equation
безпосереднє інтегрування	–	direct integration
наближене диференціальне рівняння	–	approximate differential equation
рівняння пружної лінії	–	equation of the elastic line
викривлення осі (зміна кривизни осі)	–	curvature of axis

допоміжна балка	–	redundant (auxiliary) beam
многочлен	–	polynomial
перемноження	–	multiplication
розшаровано (побудова епюр окремих фігур)	–	layered form
адитивність (безперервність) функції	–	additivity (continuity) of the function
СТІЙКІСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СТИСНЕНИХ СТРИЖНІВ STABILITY OF CENTRALLY-COMPRESSED RODS		
критичний стан	–	critical state
поздовжній згин	–	longitudinal bending
рівновага стійка	–	stable equilibrium
рівновага байдужа	–	indifferent equilibrium
рівновага нестійка	–	unstable equilibrium
коефіцієнт запасу стійкості	–	stability margin factor
гнучкість стрижня	–	flexibility of the rod
коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження	–	coefficient of reduction of the main allowable strength stress
недонапруження	–	understressing
перенапруження	–	overstressing
дійсне напруження	–	actual stress
УДАРНІ НАВАНТАЖЕННЯ. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ УДАРІ DYNAMIC LOADS. DETERMINING IMPACT STRESSES AND DISPLACEMENTS		
наближена теорія удару	–	approximated theory of impact
удар	–	impact
осьовий удар	–	axial impact
коливання	–	vibration (oscillation)
миттєве навантаження	–	instantaneous load
ударне навантаження	–	impact load
ударна в'язкість	–	impact viscosity
розсіювання енергії	–	energy dissipation
абсолютно тверде тіло	–	perfectly rigid body
вільно падаюче тіло	–	free-falling body (falling body)
рівняння балансу енергії	–	equation of energy balance
динамічне вкорочення (переміщення)	–	dynamic shortening
вкорочення (переміщення) колони (при ударі)	–	shortening of the column
коефіцієнт динамічності	–	coefficient of impact

ОСНОВНІ СИМВОЛИ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

MAIN SYMBOLS OF STRENGTH OF MATERIALS

Термін Terms	Символ Symbols		Розмірність Measurements	
	укр.	англ.	укр.	англ.
Сила Force longitudinal (axial, normal) force, shear (cutting) force, critical force	F, Q, N		Н	N
Момент Moment bending moment, torque moment	M, T		Нм	Nm
Абсолютне видовження Total longitudinal elongation of the rod (absolute longitudinal deformation, linear elongation, linear deformation)	Δl			m
Відносна деформація Relative longitudinal deformation	ε		-	
Модуль пружності I-го роду Modulus of elasticity (modulus of elasticity of the first kind, Young's modulus, normal elastic modulus, longitudinal elastic modulus)	E		МПа	MPa
Модуль пружності II-го роду The shear modulus or modulus of elasticity of the second type, characterizing the material rigidity	G		МПа	MPa
Коефіцієнт Пуассона Mechanical characteristic of the material (coefficient of transverse deformation or Poisson)	μ		-	
Потужність Power	P		кВт	kW
Лінійне переміщення Linear displacement	y_A, f_A		м	m
Кутове переміщення Angular displacement	Θ_A		-	

Термін Terms		Символ Symbols		Розмірність Measurements	
		укр.	англ.	укр.	англ.
Напруження: Stresses:	нормальні the normal stresses	σ		МПа	MPa
	дотичні the tangential (shear) stresses	τ		МПа	MPa
	допустимі the allowable stresses	[σ], [τ]		МПа	MPa
Границі: Limits (strength):	міцності the tensile limit	σ_M	σ_t	МПа	MPa
	пружності of elasticity limit	σ_{np}	σ_{el}	МПа	MPa
	пропорційності of proportionality limit	σ_{nc}	σ_{pr}	МПа	MPa
	текучості the yield limit	σ_T	σ_{ye}	МПа	MPa
Геометричні характеристики поперечних перетинів Geometric characteristics of transverse sections	площа the area	A		м ²	m ²
	статичний момент площі static moments of the section area	S_X, S_Y		м ³	m ³
	осьовий момент інерції the axial moment of inertia	I_O		м ⁴	m ⁴
	полярний момент інерції the polar moment of inertia	I_P		м ⁴	m ⁴
	осьовий момент опору the axial moment of resistance	W_O		м ³	m ³
	полярний момент опору the polar moment of resistance	W_P		м ³	m ³



ДИПЛОМ І СТУПЕНЯ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

НАГОРОДЖУЄТЬСЯ

ДОВБУШ ТАРАС АНАТОЛІЙОВИЧ,

*студент Тернопільського національного технічного
університету імені Івана Пулюя*

**ПЕРЕМОЖЕЦЬ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ СТУДЕНТСЬКОЇ ОЛІМПАДИ**

**З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
„ОПР МАТЕРІАЛІВ”**

Міністр



Д.В. Табачник

Наказ від 27.06.2012
№ 759

Додаток В



Додаток Д

Міністерство освіти і науки України
ОДЕСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ БУДІВНИЦТВА
ТА АРХІТЕКТУРИ



ДИПЛОМ
III ступеня

нагороджується

Колісник Микола Богданович

Представник
Тернопільського національного технічного
університету ім. Івана Пулюя

за перемогу у II турі Всеукраїнської студентської
олімпіади
з дисципліни «Опір матеріалів»
серед учасників, які вивчали дисципліну
в минулих роках

Заступник голови оргкомітету,
проректор ННР Одеської
державної академії
будівництва
та архітектури



Ю.С. Крутій

15 - 17 травня 2018 року

**Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя**

Кафедра технічної механіки та сільськогосподарських машин

Довбуш Тарас Анатолійович

Хомик Надія Ігорівна

Бабій Андрій Васильович

Довбуш Анатолій Дмитрович

Цьонь Ганна Богданівна

ОШР МАТЕРІАЛІВ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

**до виконання розрахунково-графічних робіт і
самостійної роботи**

Комп'ютерний набір: Антончак Наталія

Графічне оформлення: Олендер Назар

Наклад 50прим.