

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Харківський політехнічний інститут»**

А.В. Бойко

ГІДРОГАЗОДИНАМІКА

Підручник для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за напрямом «Енергомашинобудування»

Затверджено Міністерством освіти і науки України

Харків НТУ «ХПІ» 2008

ББК 31.363

Б 77

УДК 621.438

Рецензенти *Е.Г. Братута*, д.т.н., проф., НТУ «ХПІ»,
В.П. Герасименко, д.т.н., проф., Національний аерокосмічний
університет ім. М.С. Жуковського «ХАІ»,
В.І. Гнесін, д.т.н., проф., Лауреат Державної премії України в
галузі науки і техніки, Інститут проблем машинобудування ім.
А.М. Підгорного НАН України,
Г.М. Любчик, д.т.н., проф., Національний технічний університет
України «КПІ».

Гриф наданий Міністерством освіти і науки України,
лист № 1.4/18–Г–1018 від 8.05.2008 р.

Бойко А.В.

Б 77 Гідрогазодинаміка : підручник. Х.: НТУ"ХПІ", 2007. – 444 с.

ISBN.....

Викладено основні закони і рівняння руху рідини. Описано закономірності одно-, дво- і тривимірного руху нестисливої, стисливої до – та надзвучової течії. Подано основні поняття теорії подібності. Висвітлено основи теорії приграничного шару і процеси, які проходять при витіканні газу з сопел і решіток турбомашин.

Призначено для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом "Енергомашинобудування".

Лл.. 198. Табл. 9. Бібліогр. назв 10.

ББК 31.363

ISBN

© А. В. Бойко, 2008

ПЕРЕДМОВА

Розвиток галузей техніки, пов'язаних з енергомашинобудуванням і теплотехнікою, постійно висуває перед інженерами нові задачі, рішення яких вимагає як загальнотеоретичних, загальнофізичних, так і спеціальних знань в області механіки рідини і газу. Слід враховувати при цьому, що в останнє десятиліття відбулися істотні зміни в системі підготовки технічних фахівців, покликаних зробити вагомий внесок у розвиток економіки України на початку XXI століття.

При підготовці фахівців необхідно прагнути до того, щоб дисципліни включали як фундаментальні основи, так і розділи, націлені на швидке освоєння студентом обраної спеціальності.

У запропонованому підручнику підбір викладеного матеріалу здійснений так, щоб зорієнтувати його на студентів вищих технічних навчальних закладів за напрямками енергомашинобудування та теплоенергетики.

У підручнику викладаються основи динаміки рідини і газу, основні закони руху рідини. Окремі розділи присвячені одновимірному, а також дво- і тривимірному руху газу. Розглянуті особливості течії стисливої рідини, плоскої до- і надзвукової течії газу з малими збурюваннями, метод характеристик для двовимірного надзвукового потоку, стрибки ущільнення в газовому потоці. Висвітлені окремі аспекти теорії приграничного шару.

Передостанній розділ описує процеси, що відбуваються при витіканні газу з сопел, що звужуються, отворів і сопел Лаваля.

Останній розділ присвячений питанню течії газу через решітки турбомашин.

У тих частинах підручника, в яких розглядаються базові концепції, наголос зроблено на розумінні фізики явищ, без чого неможливе глибоке засвоєння матеріалу.

Викладення матеріалу здійснено таким чином, щоб показати застосування загальних законів до вирішення конкретних технічних проблем.

Особлива увага звернута на можливість самостійної роботи студентів у процесі навчання. Всі розділи забезпечені питаннями для самоперевірки і задачами. Задачі підібрані таким чином, щоб допомогти вивчаючому курс глибше зрозуміти викладений теоретичний матеріал і навчитися загальні положення теорії застосовувати при вирішенні тих проблем, з якими доводиться стикатися фахівцю при проектуванні. В додатку наведені відповіді та розв'язання задач, що ставить за мету полегшити та прискорити засвоєння викладеного матеріалу.

Автор висловлює щире вдячність рецензентам за цінні зауваження при рецензуванні книги, а також колективу кафедри турбінобудування НТУ "ХП".

Автор буде вдячний читачам за усі критичні зауваження, що сприятимуть покращанню змісту та викладу матеріалу.

Основні умовні позначення

a – швидкість звуку, m/c ;	T – термодинамічна температура потоку, K ;
A – площа, m^2 ;	α – кут Маха;
F – сила, H ;	Γ – циркуляція швидкості, m^2/c ;
g – прискорення вільного падіння, m/c^2 ;	k – відношення питомих теплоємностей;
m – маса, $кг$;	c_p – питома теплоємність при постійному тиску, $Дж/(кг\cdot K)$;
ρ – масова густина, $кг/m^3$;	c_v – питома теплоємність при постійному об'ємі, $Дж/(кг\cdot K)$;
v – питомий об'єм, $m^3/кг$;	λ – приведена швидкість (безрозмірна);
V – швидкість, m/c ;	μ – коефіцієнт в'язкості, $Па\cdot c$, $бар\cdot c$;
u, v, w – компонент швидкості в x, y і z напрямі, m/c ;	ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості, m^2/c ;
x, y, z – декартові координати;	σ – напруга, $Па$, $бар$;
t – час, c ;	φ – потенціал швидкості, m^2/c ;
l – довжина, $мм$, m ;	ψ – функція струму, m^2/c ;
M – число Маха;	ω – кутова швидкість (вихор швидкості), $рад/c$;
\mathcal{V} – об'єм, m^3 ;	τ – дотична напруга, $Па$, $бар$;
p – тиск, $Па$, $бар$;	$z=x+iy$ – комплексна координата.
q – газодинамічна функція витрати;	
δ – товщина приграничного шару;	
$\Delta\theta, \Delta\Theta$ – кут відхилення течії, $рад.$, $град.$;	
R – газова стала, $Дж/(кг\cdot K)$;	
i – питома ентальпія, $Дж/кг$;	
s – питома ентропія потоку, $Дж/(кг\cdot K)$;	

ВСТУП

Аерогідромеханікою називається наука про закони руху і рівноваги рідин і газів і про силову взаємодію рідкого і газоподібного середовища з рухомим в ньому тілом або з обмежуючою його поверхнею.

Вона включає такі розділи:

Гідродинаміка (“*hidros*” – вода) – займається рухом нестисливих суцільних середовищ.

Аеродинаміка – визначає закони силової взаємодії газоподібного (зокрема, повітряного) середовища з рухомим в ньому тілом.

Газова динаміка займається вивченням руху газу з великою швидкістю, коли значною мірою виявляється властивість стисливості.

Магнітна гідродинаміка розглядає взаємодію іонізованого рухомого газу не тільки з твердими тілами, але і з електричними і магнітними полями.

До кінця XIX ст. ця наука в основному базувалася на гідравліці, корабельній науці, що займається головним чином *опором* середовища. Коло питань, якими цікавилася практика, було тоді порівняно вузьким.

Потужний поштовх розвитку аерогідромеханіки був даний на початку XX ст. з виникненням нової галузі техніки – авіації, яка ви-

сунула перед наукою ряд нових проблем і інакше поставила багато колишніх. Однією з нових проблем, висунутих авіацією перед аерогідромеханікою, була *проблема підйомної сили*.

Італійський художник і вчений Леонардо да Вінчі припускав (його нотатки з цього питання відносяться приблизно до 1505 р.), що причиною сили, яка підтримує птаха в повітрі, є швидкі удари його крил, під дією яких повітря під крилами ущільнюється. Проте, як тепер встановлено, стисливість повітря, в якій Леонардо да Вінчі бачив причину підйомної сили, насправді може помітно впливати на сили, що виникають при русі в повітрі, лише при великих швидкостях польоту – близько швидкості розповсюдження звуку.

Довгий час в науці панувала інша теорія, побудована на уявленнях Ньютона (1642–1727) про те, що повітря складається з окремих, не зв'язаних між собою частинок, які, рухаючись в потоці, що набігає на перешкоду, вдаряються об його передню сторону і віддають перешкоді свою кількість руху (рис. 1).

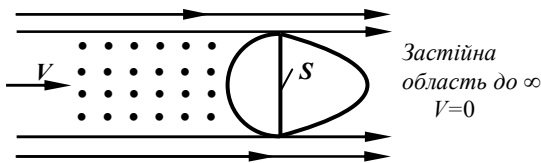


Рис. 1. Схема обтікання перешкоди за ударною теорією Ньютона

Справедливим в цій теорії, з сучасної точки зору, є те, що сила лобового опору

$$F = c \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S$$

Проте чисельна величина лобового опору виходить за цією теорією неправильною, оскільки не враховується вплив форми тіла на його лобовий опір. В той же час при русі в сильнорозрідженому газі або при русі з дуже великою швидкістю (значно більшій швидкості звуку) ударна теорія опору середовища справедлива.

Академік Російської Академії наук Леонард Ейлер (1707–1783) запропонував розглядати рідину і газ як безперервну, легкодеформовану матерію. Струминки, підходячи до перешкоди, не вдаряються в

неї (як дискретні частинки за ударною теорією), а відхиляються від перешкоди у її передній стороні, плавно з усіх боків її обходять (обтікають) і стуляються на задній стороні (рис. 2).

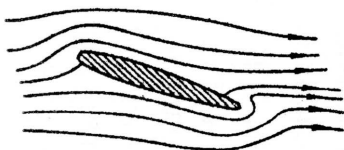


Рис. 2. Схема обтікання перешкоди за теорією безперервного середовища Ейлера

Ця точка зору ближча до дійсної (при не дуже великих швидкостях польоту), ніж *ударна теорія*, але оскільки в рідині за часів Ейлера не враховували сил тертя, то гіпотеза про безперервне середовище приводила до парадоксального результату про

відсутність сил опору.

Г. Гельмгольц (Германія) і Г. Кирхгоф у 1868 і 1869 рр. об'єднали дві протилежні точки зору Ейлера і Ньютона.

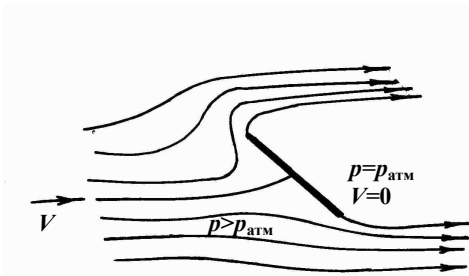


Рис. 3. Схема обтікання пластинки за струменевою теорією Гельмгольца–Кирхгофа

Проте, будучи кроком уперед у визначенні опору незручно-обтічних тіл, вона виявилася малопритатною для зручно-обтічних тіл (тобто тіл малого опору), що мають основне значення для авіаційної техніки. Тиск на задній стороні поверхні зручно-

обтічного тіла не дорівнює атмосферному тиску як це було б у разі утворення застійної зони за тілом.

Досліди показують, що насправді цей тиск може бути значно менше атмосферного. Підйомна сила крила є не тільки результатом підвищення тиску на передній стороні поверхні, але і результатом зниження тиску на задній стороні. Тому *струменева теорія* дає ве-

личини підйомної сили, значно зменшені щодо дійсних, не кажучи вже про те, що для зручнообтічних тіл вся картина явища за струменевою теорією абсолютно не відповідає дійсності.

Вирішення проблеми підйомної сили було вперше дане М.Є. Жуковським (1847–1921), чим і був покладений початок сучасної аеродинаміки. Він висунув свою знамениту теорему, що є і до теперішнього часу основою теорії крила:

підйомна сила, що припадає на одиницю довжини розмаху крила, дорівнює добутку густини середовища на швидкість набігаючого потоку і на величину, що характеризує циркуляційний потік, названу циркуляцією швидкості.

Таким чином, М.Є. Жуковській вперше побудував теорію підйомної сили з урахуванням дійсних причин, які цю силу визначають.

Учень М.Є. Жуковського С.А. Чаплигін (1869–1942) розробив теорію руху газу з великими швидкостями і тому є засновником сучасної газової динаміки. Їм також створені (1913 р.) основи теорії крила кінцевого розмаху.

Сучасна аеродинаміка так ставить питання: *задача тільки тоді вважається розв'язаною, коли швидкості, діючі сили та інші характеристики руху визначені в кожній точці і для кожного моменту часу.*

РОЗДІЛ 1. ОСНОВИ ДИНАМІКИ РІДИНИ І ГАЗУ

1.1. Визначення рідини. Концепція безперервності

Рідина – це речовина, яка деформується безперервно під дією тангенціальних (дотичних) сил.

Коли тангенціальні сили прикладені до твердого тіла, вони викликають кінцеву деформацію, яка не змінюється до тих пір, доки не

змінюється сила. У рідині є відносний рух між шарами рідини весь час, доки діє тангенціальна сила. Ми кажемо, що “рідина не може протистояти дотичним напругам.”

Висновок, який виходить з визначення рідини такий: якщо немає відносного руху в рідині, тобто якщо частинки рідини не деформуються, тоді не можуть існувати дотичні напруги, діючі на ці частинки.

Можна в багатьох аеродинамічних дослідженнях відмовитися від дійсної молекулярної будови матерії і припустити, що рідина або газ заповнюють простір суцільно без утворення будь-яких пустоток. У цьому полягає гіпотеза про безперервність, або *суцільність рідкого середовища*, яка вперше була введена в науку Д’Аламбером у 1744 р. і потім Ейлером у 1753 р., у протилежність уявленню Ньютона про те, що рідина складається з окремих частинок. Гіпотеза безперервності рідкого середовища одразу ж спрощує дослідження; вона дозволяє розглядати всі *механічні характеристики рідкого середовища*, якими є *швидкість, густина, тиск і т.д. як функції координат точки і часу*. Причому в більшості випадків ці функції передбачаються безперервними і диференційованими.

1.2. Властивості суцільності

Густина в точці. Розглянемо масу рідини δm в об’ємі $\delta \mathcal{V}$, що оточує точку P в безперервній рідині (рис. 1.1,*a*).

$\frac{\delta m}{\delta \mathcal{V}}$ – середня масова густина рідини в об’ємі $\delta \mathcal{V}$.

Припустимо, що $\delta \mathcal{V}$ достатньо великий об’єм. Нанесемо відношення $\frac{\delta m}{\delta \mathcal{V}}$ у функції $\delta \mathcal{V}$ (рис. 1.1,*b*). Спочатку середня густина

прямує наблизитися до асимптоти в міру того, як замкнена в об'ємі δV рідина стає все більш і більш однорідною.

Проте коли δV стає настільки малим, що містить відносно невелику кількість молекул, середня густина буде нестійкою в часі, залежною від потрапляння в об'єм δV або виходу з нього молекул при їх хаотичному русі. В цьому випадку неможливо говорити про певну величину для $\frac{\delta m}{\delta V}$. Можна навести як найменший об'єм $\delta V'$, який характеризується властивістю суцільності, і визначити *густину в точці*

$$\rho \equiv \lim_{\delta V \rightarrow \delta V'} \frac{\delta m}{\delta V}. \quad (1.1)$$

Це визначення висвітлює ідею суцільності і показує дійсну природу властивості суцільності “в точці” як фіктивну, але вельми корисну і

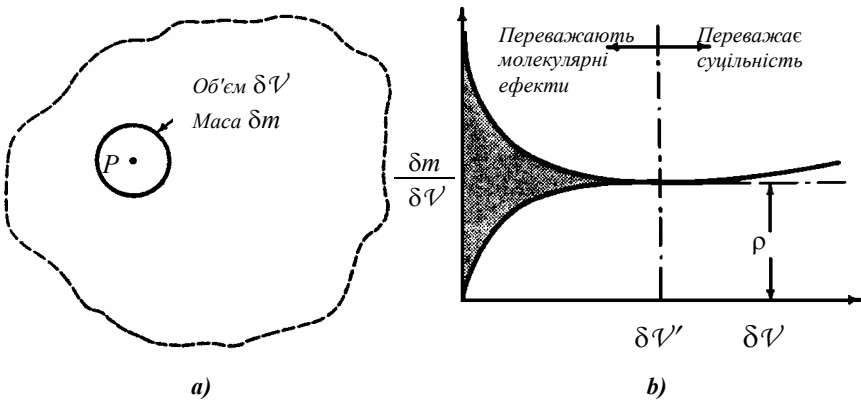


Рис. 1.1. Визначення густини в точці

широко використовувану концепцію.

Швидкість рідини в точці. Швидкість рідини в точці не пов'язана з миттєвою швидкістю молекули біля цієї точки.

Розглянемо рух центру ваги об'єму $\delta\mathcal{V}'$, миттєво оточуючого цю точку, і визначимо *швидкість рідини в точці* P як миттєву швидкість цього центру ваги. Так швидкість рідини в точці є миттєвою швидкістю центру ваги частинки рідини, що у цей момент проходить через точку. Під *частинкою рідини* маємо на увазі маленьку масу зафіксованої рідини за розмірами, порівнянною з $\delta\mathcal{V}'$.

Густина – скалярна величина, швидкість рідини в точці – вектор. Після введення системи координат можливе розкладання вектора швидкості на три скалярні компоненти.

Лінія струму. У будь-який час кожна точка суцільної рідини має відповідний вектор швидкості рідини. Крива, яка скрізь дотична до векторів швидкості, відома як *миттєва лінія струму потоку*. Сімейство ліній струму найчастіше використовується для графічного подання потоку. У нестационарному потоці лінії струму змінюються від миті до миті. Для стаціонарного потоку, проте, лінії струму є постійними в часі і представляють також траєкторії частинок рідини.

Трубка струму. Розглянемо елементарну площу dA , нормальну до вектора швидкості в деякій точці. Лінії струму, проходячи через границю (периферію) dA , утворюють поверхню, яка називається *трубкою струму*. Оскільки тут не має нормальних складових швидкостей до ліній струму, то стінки трубки струму непроникні для потоку.

Напруги в точці. Розглянемо площину, що проходить в даному напрямі через точку P безперервного середовища і виділимо площу δA навколо точки P в цій площині (рис. 1.2, a).

З експерименту знаємо, що частинки рідини, розділені цією поверхнею, мають силову дію одна на одну, і, згідно з третім законом

Ньютона, рідина на одній стороні чинить рівну, але протилежну дію на рідину з другої сторони. Такі сили називаються *поверхневими силами*.

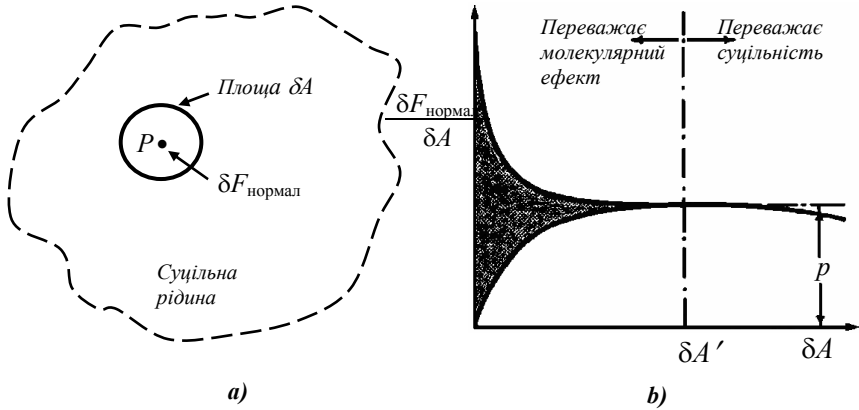


Рис. 1.2. Визначення нормальної напруги в точці

Нормальні напруги. Поверхнева сила, діюча на площу ΔA , може бути подана у вигляді нормальної компоненти до ΔA і компоненти, що лежить в площині ΔA . Розглядаючи нормальну складову сили (ілюструє наш розгляд рис. 1.2,b), визначимо *тиск рідини* в точці P в даному напрямку як границя нормальної складової сили на одиницю площі:

$$p \equiv \lim_{\Delta A \rightarrow \Delta A'} \frac{\Delta F_{\text{нормал}}}{\Delta A}. \quad (1.2)$$

Дотичні напруги. Аналогічно *дотичні напруги* τ визначені у вигляді границі тангенціальної складової сили, діючої на ΔA , на одиниці площі

$$\tau \equiv \lim_{\Delta A \rightarrow \Delta A'} \frac{\Delta F_{\text{танг}}}{\Delta A}. \quad (1.3)$$

І тиск, і дотичні напруги є звичайно векторами.

Гідростатичний тиск. Тепер виникає питання, чи залежить тиск в точці P (або нормальні напруги) від орієнтації площини δA . Для відповіді на це питання розглянемо нев'язку рідину, тобто рідину, в якій відсутні дотичні напруги навіть за наявності відносного зміщення (руху) шарів рідини.

Для спрощення розглянемо двовимірну задачу і дослідимо динаміку нескінченно малої трикутної в основі частинки рідини одиничної глибини, що оточує точку P (рис. 1.3).

У зв'язку з відсутністю дотичних напруг на три поверхні діють тільки нормальні напруги, тобто тиск. На рис. 1.3 показана схема дії сил на виділений об'єм рідини. Покладемо g_x і g_y – складові об'ємної сили (тобто сили тяжіння), діючої в рідині на одиницю маси. Тепер можемо записати другий закон Ньютона в x -напрямі таким чином:

$$\sum F_x = m \cdot a_x$$

$$p_x dy - p_\gamma \sqrt{dx^2 + dy^2} \cos \gamma + g_x \cdot \rho \frac{dx dy}{2} = \rho \frac{dx dy}{2} a_x,$$

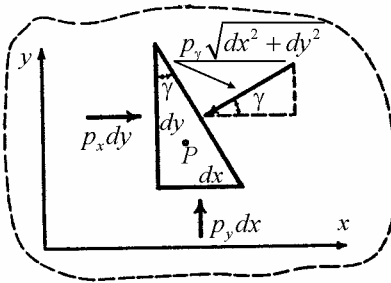


Рис. 1.3. Сили нормальної напруги в точці P :

p_x – тиск в точці P в x -напрямі;
 p_y – тиск в точці P в y -напрямі;
 p_γ – тиск в точці P в γ -напрямі.

де a_x – прискорення в x -напрямі. Беремо до уваги, що

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} \cos \gamma = dy,$$

потім нехтуємо добутком $dx dy$ як величиною другого порядку малості в порівнянні з dy . В результаті одержимо $p_x = p_y$.

Зробивши аналогічні перетворення другого закону Ньютона в y -на-

прямі, одержимо $p_x = p_y = p_z$.

Остаточно маємо

$$p_x = p_y = p_z$$

і, оскільки z -напрямок був вибраний довільно, то приходимо до висновку, що в невязкій рідині, яка рухома або знаходиться в стані спокою, тиск в точці є однаковим на всіх напрямках.

Для вязкої рідини у спокої приходимо до аналогічного висновку, оскільки в цьому випадку теж відсутні дотичні напруги через відсутність відносного руху шарів рідини.

Складові напруги у вязкій рідині. У загальному випадку для вязкої рухомої рідини маємо дотичні напруги. В цьому випадку p_x , p_y і p_z є різними. В цьому разі правильніше говорити про шість складових напруги в точці замість тиску в точці. Проте частіше говоримо про тиск в точці вязкої рідини, стверджуючи тим самим факт, що у такому разі (особливо, якщо число Рейнольдса набагато перевершує одиницю, у багато разів більше одиниці) дотичні напруги є малими в порівнянні з нормальними напругами, і зміною нормальних напруг з орієнтацією можна знехтувати.

Коефіцієнт вязкості. У всіх реальних рідинах експериментатори знаходили, що деформації зрушення завжди супроводжувалися дотичними напругами; дотичні напруги пропорційні швидкості деформацій зрушення.

Складаючи рівняння моментів щодо точки P (рис. 1.4), маємо

$$\tau_{xy} dy \frac{dx}{2} = \tau_{yx} dx \frac{dy}{2}.$$

Звідси одержуємо

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

За час dt точка P змістилася в P' . Кут γ_{xy} змінився на величину $d\gamma_{xy}$. Згідно з гіпотезою Ньютона дотичні напруги пропорційні

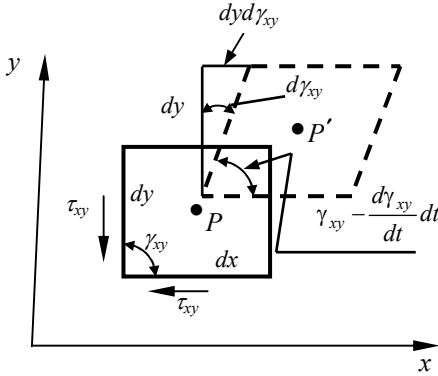


Рис. 1.4. Деформація рухомої частинки рідини при зміщенні однієї грані

швидкості відносного зрушення шарів рідини, тобто

$$\tau_{xy} \sim \frac{dV}{dy} = \frac{dy d\gamma_{xy}}{dt} \cdot \frac{1}{dy} = \frac{d\gamma_{xy}}{dt};$$

$$\tau_{xy} \sim \frac{d\gamma_{xy}}{dt}$$

Коефіцієнт пропорційності називається *коефіцієнтом в'язкості* і позначається μ

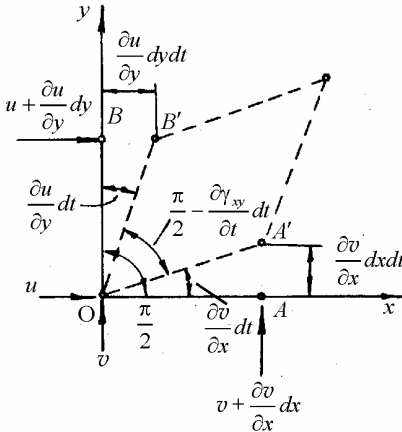


Рис. 1.5. Схема відносної деформації частинки рідини

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \frac{d\gamma_{xy}}{dt}. \quad (1.4)$$

При одночасному зміщенні граней (рис. 1.5) маємо

$$AA' = \frac{\partial v}{\partial x} dx dt,$$

$$\angle AOA' = \frac{\partial v}{\partial x} dt;$$

$$\angle BOB' = \frac{\partial u}{\partial y} dt;$$

$$\frac{d\gamma_{xy}}{dt} dt = \frac{\partial u}{\partial y} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dt; \quad \frac{d\gamma_{xy}}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

З урахуванням (1.4) маємо

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{yx}; \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{zy}; \\ \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \tau_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Ідеальна рідина. Визначається як рідина, що має коефіцієнт в'язкості, рівний нулю, що фізично означає відсутність дотичних напруг, незважаючи на наявність відносних деформацій зрушення.

Нев'язкі рідини відрізняються від в'язких однією дуже важливою якістю. Всі реальні, отже в'язкі, рідини прилипають до границь твердого тіла, з яким вони стикаються: це значить, що на границях твердого тіла рідина має однакову швидкість з твердими границями. Ідеальна рідина, проте, ковзає по твердих границях абсолютно вільно.

Приграничний шар. Оскільки багато реальних рідин мають невелику в'язкість, але прилипають до твердих границь, введене поняття приграничного шару. Згідно з цією концепцією силами в'язкості в рідині можна знехтувати в порівнянні з інерційними силами на деякій відстані від границі. У приграничному шарі біля твердої границі, проте, дотичні сили мають достатньо великі значення в зв'язку з великими деформаціями зміщення, викликаними збільшенням швидкості рідини на досить невеликій ділянці від стану спокою на границях твердого тіла. Таке розділення потоку на дві частини істотно спрощує задачі, дозволяє аналітично їх описати.

Математичний опис суцільності. Є дві можливі точки зору при описі руху рідин. Перша – метод Лагранжа, який використовується для опису динаміки окремих частинок. За допомогою цього

методу описується сутність окремих частинок рідини: у кожен момент часу місцеположення, густина, швидкість і т.д. визначаються для вибраної частинки рідини.

Метод Ейлера концентрує увагу на точці простору і визначає в кожен момент часу густину, тиск, швидкість і т.д. рідкої частинки, яка знаходиться в цій точці в даний момент часу.

Для більшості задач ейлеровський опис руху рідини більш зручний, і в основному будемо користуватися цим методом.

Розглядаючи густину як типову властивість суцільності, говоримо що за методом Ейлера густина є функцією координат і часу. В прямокутній системі координат математично це можна записати

$$\rho = \rho(x, y, z, t). \quad (1.6)$$

Для довільних приростів x , y , z і t відповідний приріст ρ може бути записаний залежно від часткових похідних

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt. \quad (1.7)$$

Рівняннями, подібними (1.6) і (1.7) можна записати всі властивості суцільності, визначені раніше.

Сталий потік. Цей випадок часто зустрічається на практиці. Під ним розумітимемо такий потік, в якому в кожній точці простору немає змін характеристик потоку за часом. Беручи для ілюстрації густину, можна записати для сталого потоку

$$\rho = \rho(x, y, z); \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

1.3. Системи і контрольні об'єми

Система (іноді її називають *вільне тіло*, або *ізольоване тіло*) визначається як довільна кількість матерії з однаковими властивос-

тями. Все, що знаходиться поза системою, називається *навколишнє середовище*. *Границя системи* – уявна поверхня, що відділяє систему від навколишнього середовища. При рішенні задач дослідник, вводячи поняття системи, вивчає взаємодії між системою і навколишнім середовищем.

Так, для ілюстрації розглянемо другий закон Ньютона $F = ma$. Тут F – результуючий вектор сили, з якою навколишнє середовище діє на систему; m – маса системи; a – вектор прискорення, яке зазнає *центр маси системи*.

Але іноді поняття “система” не дуже зручне, особливо коли маємо справу з рідиною, де іноді буває важко визначити границі рідини системи в будь-якому відрізку часу. Це особливо відноситься до течії в турбомашинах, де складні процеси мають місце і де різні частинки рідини, проходячи турбіну, зазнають різного впливу.

Контрольний об’єм. Беручи все сказане вище до уваги, визначаємо контрольний об’єм як довільний об’єм, *зафіксований у просторі* і через який протікає рідина. Рідина, що займає контрольний об’єм, міняється з кожною миттю. Поверхня, яка обмежує контрольний об’єм, називається *контрольною поверхнею*. Вона завжди замкнена.

1.4. Скалярні, векторні і тензорні поля в гідрогазодинаміці

Скалярним називається поле, яке характеризується в кожній точці простору одним числом. Таке поле описується однією функцією, залежною від трьох координат. Скалярним буде, наприклад, поле густини або температури. Основна властивість скалярної функції $a(x, y, z)$ полягає в тому, що її чисельне значення не змінюється при перетворенні координат.

Векторним називається поле, яке характеризується в кожній точці простору величиною і напрямом. Вектор \vec{a} (у просторі трьох вимірювань) може бути заданий трьома компонентами: $a_1(x, y, z)$, $a_2(x, y, z)$, $a_3(x, y, z)$, тобто трьома функціями від трьох змінних.

Це можна записати також у вигляді таблиці з трьох величин:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Вектор підпорядковується певному закону перетворення його компонент і відрізняється від скалярної величини, чисельне значення якої, як указувалося вище, не змінюється при перетворенні координат. Очевидно, що сам вектор не змінюється в нових координатах, а змінюються тільки його компоненти.

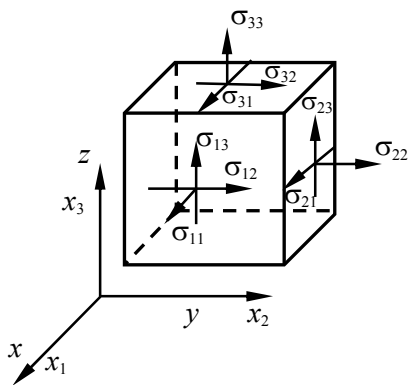


Рис. 1.6. До визначення напруг

Крім скалярних і векторних полів, в механіці суцільного середовища розглядаються ще *тензорні* поля. У прийнятому записі (рис. 1.6) кожна з напруг σ_{ij} має два індекси: перший індекс означає орієнтацію площини, на яку діє напруга, другий – вісь проєктування.

Наприклад, σ_{21} – напруга, яка діє на площину, перпендикулярну осі x_2 і паралельно осі x_1 . Компоненти напруг можна записати у вигляді таблиці (матриці тензора напруг)

$$\left\| \begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array} \right\| = \sigma_{ij}, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3; \\ j = 1, 2, 3. \end{array} \quad (1.9)$$

Тут перший номер – номер рядка, другий – номер стовпця. Нормальні напруги мають два однакових індекси (діагональ матриці), дотичні – різні індекси.

(1.9) – тензор другого рангу (за числом індексів у компонент);

вектор (1.8) – тензор першого рангу;

скаляр $a(x, y, z)$ – тензор нульового рангу.

Тобто тензор – більш загальне поняття, ніж вектор або скаляр.

При прийнятих нами раніше позначеннях

$$\Pi = \left\| \begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{array} \right\|. \quad (1.10)$$

Перед тиском p ставлять знак “–”, оскільки тиск звичайно стискає рідину, тобто діє проти позитивного напрямку нормалі до площини.

Тиск в точці визначимо як середнє арифметичне, взяте з негативним знаком з нормальних напруг на три взаємноперпендикулярні площини, проведені через цю точку

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (1.11)$$

Використовуючи формули векторного аналізу (див. додаток), можемо записати рівняння (1.7) для густини у вигляді

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}\rho. \quad (1.12)$$

1.5. Зв'язок між елементами напруг і відповідними швидкостями деформацій

Впишемо в квадрат, накреслений жирними лініями (рис. 1.7), другий, накреслений тонкими лініями.

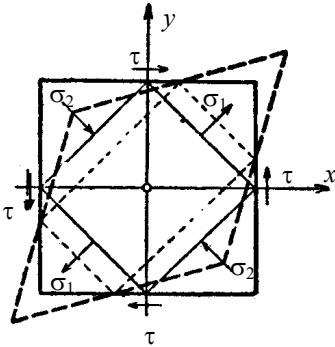


Рис. 1.7. До визначення зв'язку між елементами напруг і відповідними швидкостями деформації

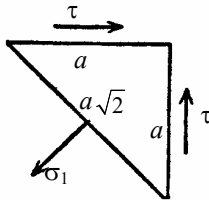


Рис. 1.8. Рівновага напруг зміщення і нормальної напруги

Коли перший (великий) квадрат деформується вказаним чином (жирний пунктир), другий переходить у прямокутник. Оскільки сили, прикладені до прямокутного трикутника, відокремлюваного від великого квадрата діагоналлю, повинні знаходитися в рівновазі, то по діагоналях повинні діяти стискаючі або розтягуючі сили. З рис. 1.8 одержуємо

$$2a\tau \cdot \sin 45^\circ - a\sqrt{2}\sigma_1 = 0.$$

. Звідси $\sigma_1 = \tau$.

Аналогічно з рівноваги прямокутного трикутника, відокремленого від великого квадрата іншою діагоналлю, одержуємо

$$\sigma_2 = -\tau \text{ (оскільки стиснення).}$$

Віднімаючи σ_2 з σ_1 , знаходимо:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau.$$

Визначимо тепер, наскільки діагональ квадрата подовжується (коротшає), коли останній деформується так, як показано на рис. 1.9.

$$BB' = EM' = AB \cdot \frac{d\gamma}{2}, \quad MM' = \frac{EM'}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d\gamma}{2}.$$

З другого боку,

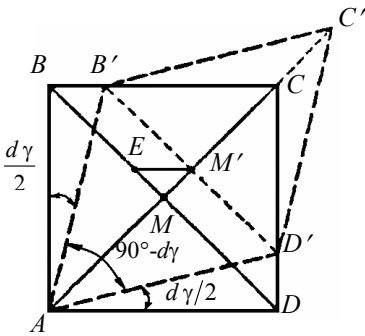
$$AM = \frac{AB\sqrt{2}}{2}.$$

Подовження ε_1 діагоналі AC дорівнює

$$\varepsilon_1 = \frac{CC'}{AC} = \frac{MM'}{AM} = \frac{d\gamma}{2}.$$

Аналогічно для другої діагоналі BD

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\gamma}{2}.$$



Віднімаючи ε_2 від ε_1 , маємо

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = d\gamma.$$

Якщо тепер квадрат, зображений на рис. 1.9, віднести до системи

координат, поверненої щодо сторін квадрата на 45° , матимемо

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\tau_{xy} = 2\mu \frac{d\gamma}{dt} = 2\mu \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{dt} \right).$$

У цій системі координат

Рис. 1.9. Зміна довжини діагоналей квадрата при нескінченно малій деформації під дією напруг зміщення

$$\frac{\varepsilon_x}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\varepsilon_y}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Отже,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y &= 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \sigma_x - \sigma_z &= 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

аналогічно

Додаючи до першого з рівнянь (1.13) тотожність $\sigma_x - \sigma_x \equiv 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ і складаючи потім обидва рівняння, одержуємо, беручи до уваги рівність (1.11),

$$3\sigma_x + 3p = 2\mu \left[3 \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right],$$

звідки

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma_y &= -p - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma_z &= -p - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Аналогічно отримуємо

Або

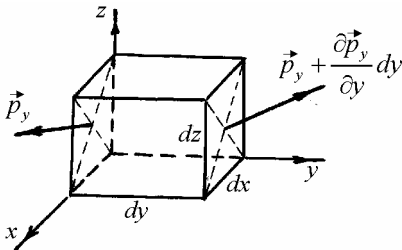
$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) = -p + \tau_{xx}, \\ \sigma_y &= -p + 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) = -p + \tau_{yy}, \\ \sigma_z &= -p + 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) = -p + \tau_{zz}. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Тут через τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{zz} , позначені складові *нормальних* напруг, *залежних від в'язкості*.

Розкладання поверхневої результуючої сили на елементи тензора напруг

Вектори поверхневих сил $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$, що діють на перпендикулярні осям x, y і z грані, складаються з раніше зазначених компонентів

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}_x &= \vec{i} \sigma_x + \vec{j} \tau_{xy} + \vec{k} \tau_{xz}, \\ \vec{p}_y &= \vec{i} \tau_{yx} + \vec{j} \sigma_y + \vec{k} \tau_{yz}, \\ \vec{p}_z &= \vec{i} \tau_{zx} + \vec{j} \tau_{zy} + \vec{k} \sigma_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$



Результуюча сила, діюча на поверхню нескінченно малого елемента рідини (рис. 1.10), об'єм якого дорівнює $dV = dx dy dz$, складається з трьох векторів:

Рис. 1.10 . Сили, прикладені до граней $dx dz$ елемента об'єму ($dx dy dz$) в'язкої рідини

$$\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx dy dz ;$$

$$\frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} dy dz dx ; \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} dz dx dy$$

і буде дорівнювати

$$\bar{R} = \left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right) dV. \quad (1.17)$$

Таким чином, приймаючи до уваги (1.16), (1.15) і (1.5), для R_x можна написати

$$R_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[-p + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

При $\mu = \text{const}$

$$\left. \begin{aligned} R_x &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \Delta u, \\ R_y &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \Delta v, \\ R_z &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \Delta w. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Одержані вище компоненти з врахуванням (1.16) отримуємо з (1.17):

$$\bar{R} = \vec{i} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \dots \text{компонент у напрямку } x,$$

$$+ \vec{j} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \dots \quad \text{компонент у напрямку } y,$$

$$+ \vec{k} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right). \quad \text{компонент у напрямку } z.$$

У векторній формі (1.18) при $\mu = const$ повна поверхнева сила, віднесена до одиниці об'єму, може бути подана у вигляді

$$\vec{R} = -\vec{\nabla} p + \frac{1}{3} \mu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}, \quad (1.19)$$

або

$$\vec{R} = -grad p + \frac{1}{3} \mu grad div \vec{V} + \mu \Delta \vec{V}. \quad (1.20)$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення рідини. У чому полягає концепція безперервності?
2. Дайте визначення системи, контрольного об'єму і контрольної поверхні.
3. Поля яких фізичних величин описують скаляри, вектори і тензори?
4. Що таке коефіцієнт в'язкості?
5. Який існує зв'язок між елементами напруг і відповідними швидкостями деформацій?
6. Одержите рівняння для повної поверхневої сили, віднесеної до одиниці об'єму.

РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ ЗАКОНИ РУХУ РІДИНИ

Весь аналіз, що стосується руху стисливої рідини, ґрунтується безпосередньо або побічно на чотирьох основних фізичних законах, що описують цей рух. Цими законами є:

- (i) закон збереження маси;
- (ii) другий закон руху Ньютона;

- (iii) перший закон термодинаміки;
- (iiii) другий закон термодинаміки.

На додаток до цих основних принципів звичайно використовують допоміжні співвідношення. Прикладом цього можуть бути рівняння стану ідеального газу, закон пропорційності між дотичними напругами і швидкістю деформації зміщення, рівняння теплообміну і т.д.

2.1. Закон збереження маси. Рівняння нерозривності руху

Виділимо в рідині, що рухається, систему об'ємом \mathcal{V} , яка складається у весь час руху з одних і тих же частинок рідини. Маса m цього об'єму у весь час руху залишається постійною, що математично описується рівнянням

$$\frac{d m}{d t} = 0.$$

Визначаючи масу m цього об'єму як $m = \rho_{cp} \mathcal{V}$, можна записати

$$\frac{d(\rho_{cp} \mathcal{V})}{d t} = 0.$$

Оскільки змінними тут є і густина рідини і величина виділеного об'єму, то

$$\mathcal{V} \frac{d \rho_{cp}}{d t} + \rho_{cp} \frac{d \mathcal{V}}{d t} = 0.$$

Ділячи почленно на масу об'єму, тобто на $\rho_{cp} \mathcal{V}$, одержуємо

$$\frac{1}{\rho_{cp}} \cdot \frac{d \rho_{cp}}{d t} + \frac{1}{\mathcal{V}} \cdot \frac{d \mathcal{V}}{d t} = 0,$$

де $d \mathcal{V}$ – зміна спочатку виділеного об'єму \mathcal{V} і є величиною об'ємної деформації;

$\frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}}$ – відносна об'ємна деформація, віднесена до одиниці об'єму;

$\frac{1}{\mathcal{V}} \cdot \frac{d\mathcal{V}}{dt}$ – швидкість відносної об'ємної деформації.

Аналогічно можемо записати

$\frac{1}{\rho_{cp}} \cdot \frac{d\rho_{cp}}{dt}$ – швидкість відносної зміни середньої густини.

Останнє рівняння містить не цілком певну величину ρ_{cp} , що залежить від довільно обраного об'єму \mathcal{V} . Щоб уникнути цієї невизначеності, будемо зменшувати об'єм \mathcal{V} , стягуючи його до деякої внутрішньої точки P . При цьому одержуємо

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \lim_{\mathcal{V} \rightarrow \delta\mathcal{V}'} \frac{1}{\mathcal{V}} \cdot \frac{d\mathcal{V}}{dt} = 0.$$

Поширимо умову суцільності й на об'єм $\delta\mathcal{V}'$. Тоді, зменшуючи \mathcal{V} до нуля, в границі при $\mathcal{V} \rightarrow 0$, одержимо:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \lim_{\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{V}} \cdot \frac{d\mathcal{V}}{dt} = 0. \quad (2.1)$$

Це рівняння *нерозривності руху*, у якому ρ – густина у тій точці, до якої стягується об'єм \mathcal{V} , а другий доданок є швидкістю відносної об'ємної деформації в тій же точці.

В окремому випадку, коли рідина нестислива ($\rho = const$), рівняння *нерозривності руху* приймає вигляд

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = 0.$$

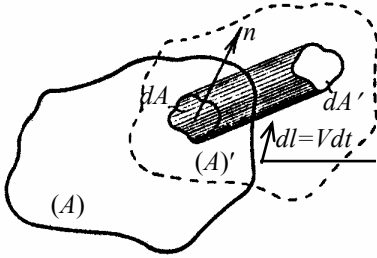


Рис. 2.1. Переміщення виділеного об'єму в просторі і його зміна за час dt

Закон збереження маси приймає в цьому випадку форму закону збереження об'єму ($\mathcal{V} = \text{const}$).

Швидкість відносної об'ємної деформації безпосередньо зв'язана зі швидкістю руху частинок на поверхні виділеного об'єму. Зміну $d\mathcal{V}$

виділеного об'єму можна розглядати як результат переміщення частинок, які перебували на початку проміжку часу dt на поверхні A .

За час dt площадка dA перемістилася в положення dA' (рис. 2.1), при цьому об'єм змінився на величину

$$dA \cdot dl_n = dA \cdot V_n \cdot dt = V_n \cdot dt \cdot dA.$$

Загальне збільшення виділеного об'єму

$$d\mathcal{V} = \iint_{(A)} V_n \cdot dt \cdot dA.$$

Виносячи dt за знак інтегралу, оскільки він однаковий для всіх циліндрів, одержимо швидкість об'ємної деформації у вигляді

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \iint_{(A)} V_n \cdot dA. \quad (2.2)$$

Вираз (2.2) має ще інший фізичний зміст. Уявимо, що A – нерухома замкнута поверхня, через яку протікає рідина. Тоді інтеграл (2.2) являє собою *об'ємну витрату рідини* крізь всю поверхню A .

Підставляючи в рівняння (2.1) отриманий вираз (2.2), матимемо

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \lim_{\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{\iint_{(A)} V_n \cdot dA}{\mathcal{V}} = 0.$$

Другий доданок являє собою питому об'ємну витрату рідини крізь поверхню, що стягується до точки; він називається *дивергенцією вектора швидкості* в даній точці й позначається

$$\operatorname{div} \vec{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\iint_{(A)} V_n \cdot dA}{V}.$$

Рівність (2.1) за допомогою виведеного тут позначення для другого доданка може бути записана так:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (2.3)$$

Або можемо записати $\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \vec{V} = 0$.

Використовуючи (1.12) рівність (2.3) запишемо

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \cdot \operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

Згадуючи формули векторного аналізу, можемо записати

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \cdot \operatorname{div} \vec{V} &= u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \\ &+ \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \operatorname{div}(\rho \vec{V}). \end{aligned}$$

Тоді рівняння нерозривності запишеться у вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0. \quad (2.4)$$

У декартовій прямокутній системі координат рівняння нерозривності прийме вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \quad (2.5)$$

У випадку стаціонарного поля густини

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0.$$

В окремому випадку нестисливої рідини ($\rho = \text{const}$) рівняння нерозривності переходить у *рівняння нестисливості*

$$\text{div } \vec{V} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.6)$$

Рівняння витрати для трубки струму. Виділимо в трубці струму контрольний об'єм, через який тече рідина. Контрольний об'єм залишається зафіксованим у просторі, але система рухається в напрямку ліній струму. Два положення системи показані на рис. 2.2 пунктирними лініями. Для зручності розглянемо три області простору, позначені I, II і III на рис. 2.2.

У момент часу t система займає простори I і III, а у момент часу $t+dt$ – простори I і II. Оскільки маса системи не міняється, можемо записати

$$m_{It} + m_{III t} = m_{It+dt} + m_{II t+dt},$$

де m_{It} – маса рідини в об'ємі I у момент часу t і т.д.

Прості перетворення дають

$$\frac{m_{It+dt} - m_{It}}{dt} = \frac{m_{III t}}{dt} - \frac{m_{II t+dt}}{dt}.$$

Доданок ліворуч являє собою швидкість зміни маси в просторі I у часі. Оскільки $dt \rightarrow 0$, то простір I збігається з контрольним об'ємом, тому в границі

$$\frac{m_{It+dt} - m_{It}}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(m_{к.об.}),$$

де $m_{к.об.}$ – миттєва маса в контрольному об'ємі.

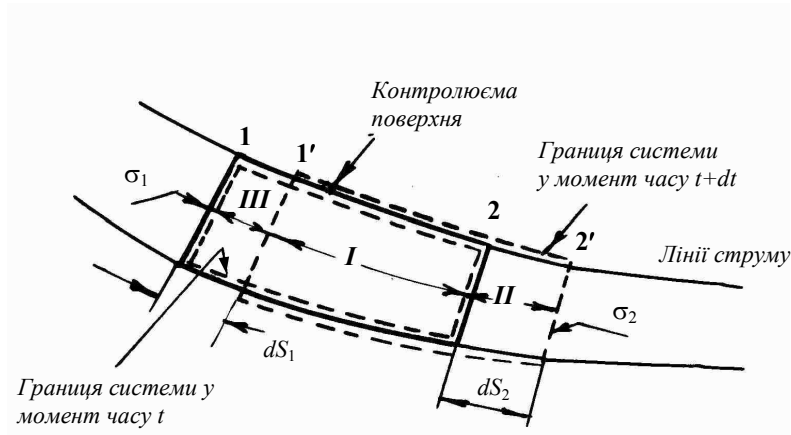


Рис. 2.2. Одновимірна течія

Позначимо:

- σ_1 – поперечний переріз трубки струму в перетині 1;
- V_1 – швидкість перерізу 1; ρ_1 – густина у просторі III;
- σ_2 – поперечний переріз трубки струму в перетині 2;
- V_2 – швидкість перерізу 2; ρ_2 – густина у просторі II.

Тоді запишемо

$$\frac{m_{III}}{dt} = \rho_1 \sigma_1 \frac{dS_1}{dt} = \rho_1 \sigma_1 V_1 = \int \rho V_n dA_{ex};$$

$$\frac{m_{III+dt}}{dt} = \rho_2 \sigma_2 \frac{dS_2}{dt} = \rho_2 \sigma_2 V_2 = \int \rho V_n dA_{вих}.$$

З урахуванням викладеного вище закон збереження маси для трубки струму запишемо так:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_{к.об.}) = \rho_1 V_1 \sigma_1 - \rho_2 V_2 \sigma_2.$$

Відзначимо, що в будь-яку мить

$$m_{к.об.} = \int_{к.об.} \rho d\mathcal{V},$$

де $d\mathcal{V}$ – елемент контрольного об'єму \mathcal{V} , ρ – місцева густина цього елемента.

Тоді

$$\frac{\partial m_{к.об.}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{к.об.} \rho d\mathcal{V} = \int_{к.об.} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}.$$

Тобто можемо записати

$$\int_{к.об.} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = \rho_1 V_1 \sigma_1 - \rho_2 V_2 \sigma_2. \quad (2.7)$$

У випадку стаціонарної течії (стаціонарного поля густини) рідина змінюється в контрольному об'ємі постійно, але загальна маса в ньому залишається незмінною. Математично це означає для кожного елемента контрольного об'єму $\partial\rho/\partial t=0$.

Тоді *рівняння витрати для елементарної струминки приймає вигляд:*

$$\rho_1 V_1 \sigma_1 = \rho_2 V_2 \sigma_2 \text{ або } \rho V \sigma = const \text{ або } d(\rho V \sigma) = 0. \quad (2.8)$$

Позначимо G [кг/с] – масова витрата рідини через трубку струму, що згідно (2.8) залишається постійною для будь-якого перетину трубки струму, тобто

$$\sigma \rho V = G = const.$$

Згадаємо, що питомий об'єм одиниці маси рідини є величиною, зворотною густині

$$v \equiv \frac{\mathcal{V}}{m} = \frac{1}{\rho},$$

тоді можна записати

$$\frac{\sigma V}{v} = G [\kappa z / c]$$

Позначивши σ через F (площа), швидкість V через C , одержуємо рівняння витрати, що найчастіше зустрічається в джерелах з турбінобудування

$$Gv = FC.$$

З рівняння витрати (2.8) випливають цікаві висновки щодо форми струминки: вільний кінець струминки не може перебувати всередині рідини. Справді, струминка не може закінчитися всередині рідини перетином кінцевого розміру, тому що це суперечило б припущенню про безперервний розподіл швидкостей у рідкому середовищі. Вона не може також зійти на нівець у формі вістря, оскільки в кінцевій точці вістря за рівнянням витрати вийшла б нескінченно велика густина або швидкість частинок, що фізично неможливо. Таким чином, *струминка не може мати всередині рідини ні початку, ні кінця. Отже вона повинна мати початок і кінець на вільних границях рідини або бути замкненою.*

2.2. Теорема імпульсів. Рівняння кількості руху

Другий закон Ньютона – основний принцип динаміки. Він лежить в основі теореми імпульсів, що, як відомо з курсу загальної механіки, формулюється таким чином: *диференціал кількості руху матеріальної системи дорівнює елементарному імпульсу діючих на систему зовнішніх сил.*

$$\sum \vec{F} dt = d(m\vec{V}).$$

На рис. 2.3 показаний довільний контрольний об'єм разом з положенням системи в момент часу t і $t+dt$; система визначена як кількість речовини, що заповнює контрольний об'єм у момент часу t .

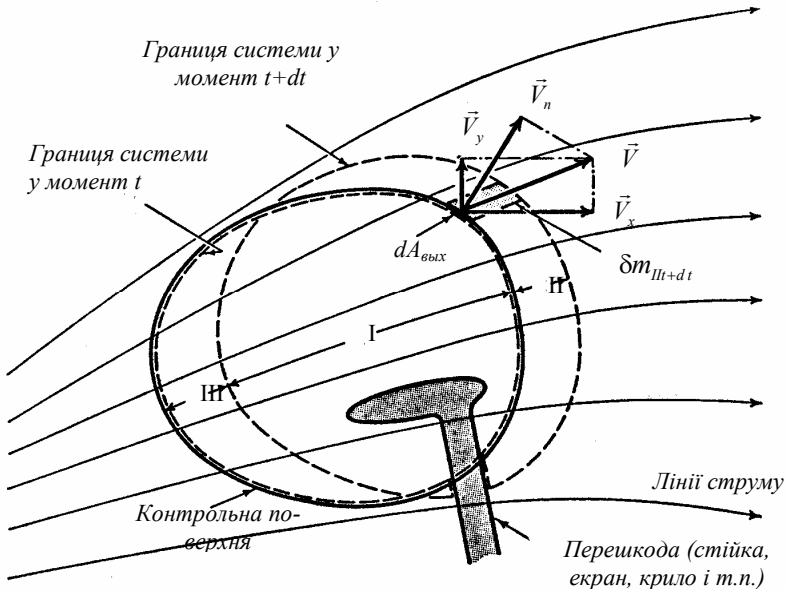


Рис. 2.3. Течія рідини через контрольний об'єм

Для спільності тут також показана проникла в контрольний об'єм перешокда типу “стійки”, “екрана”, “щита”, “тримача полум'я”, “направляючого крила”, “турбінної лопатки”.

Для вибраного контрольного об'єму та частина перешокди, що перебуває в ньому, є частиною системи, чий рух вивчається у перебігу часу dt .

Для системи в x -напрямку можемо записати

$$\sum F_x = \frac{d}{dt}(mV_x),$$

де ліворуч знаходиться алгебраїчна сума проєкцій на вісь x сил, що діють на систему в перебігу інтервалу часу dt ; праворуч маємо швидкість зміни кількості руху в напрямку осі x всієї системи.

Можемо записати

$$\frac{d}{dt}(mV_x) = \frac{(mV_x)_{It+dt} + (mV_x)_{III+dt} - (mV_x)_{It} - (mV_x)_{III}}{dt}.$$

Доданок

$$\frac{(mV_x)_{It+dt} - (mV_x)_{It}}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(mV_x)_{к.об.}$$

являє собою зміну в часі кількості руху в x -напрямку в просторі I.

В границі $dt \rightarrow 0$, простір I збігається з контрольним об'ємом. Тобто цей член являє собою зміну в часі проєкції кількості руху на вісь x контрольного об'єму.

Далі можемо записати

$$\frac{(mV_x)_{III+dt}}{dt} = \frac{\sum V_x \delta m_{III+dt}}{dt} = \sum V_x \frac{\delta m_{III+dt}}{dt} = \int V_x \cdot \rho V_n \cdot dA_{\text{ввлх}}.$$

Аналогічно маємо

$$\frac{(mV_x)_{III}}{dt} = \sum V_x \frac{\delta m_{III}}{dt} = \int V_x \cdot \rho V_n \cdot dA_{\text{влх}}$$

Тепер можемо записати

$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial t}(mV_x)_{к.об.} + \int V_x \cdot V_n \cdot \rho \cdot dA_{\text{ввлх}} - \int V_x \cdot V_n \cdot \rho \cdot dA_{\text{влх}}. \quad (2.9)$$

В границі, коли dt зникає, $\sum F_x$ стає алгебраїчною сумою проєкцій сил на вісь x , діючих миттєво на рідину, що перебуває в контрольному об'ємі.

Помітимо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(mV_x)_{к.об.} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{к.об.} V_x \cdot \rho \cdot d\mathcal{V} = \int_{к.об.} \frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) d\mathcal{V},$$

де ρ і V_x є місцевою густиною й x -швидкістю відповідно елемента рідини об'ємом $d\mathcal{V}$ у контрольному об'ємі.

Тоді можемо записати

$$\sum_{к.об.} F_x = \int_{к.об.} \frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) d\mathcal{V} + \int \rho V_n V_x dA_{внх} - \int \rho V_n V_x dA_{вх}. \quad (2.10)$$

Аналогічні вирази маємо в y і z напрямках. Використовуючи векторну форму запису, рівняння кількості руху для контрольного об'єму може бути подано одним рівнянням:

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{к.об.} \rho \vec{V} d\mathcal{V} + \oint_{к.пов.} \rho (\vec{V} \cdot d\vec{A}) \vec{V}. \quad (2.11)$$

У вираз $\sum \vec{F}$ або $\sum F_x$ для x -напрямку входить алгебраїчна сума всіх сил, які діють з боку навколишнього середовища на речовину, що у цей момент часу займає контрольний об'єм (краще сказати заповнює контрольний об'єм). Нагадаємо, що ці сили можна розділити на два класи: (і) об'ємні сили, (ii) поверхневі сили.

Об'ємні сили: сили гравітаційного прискорення, магнітні або електродинамічні сили, інерційні сили, сили Кориоліса.

Поверхневі сили. – сили, які діють на контрольну поверхню з боку речовини, що оточує контрольну поверхню, на речовину усе-

рідині контрольної поверхні. Часто поверхневі сили ділять на два типи: (i) викликані нормальною напругою або тиском, що діє на контрольній поверхні; (ii) викликані дотичними напругами або напругами в'язкості, що діють на контрольній поверхні.

Сили, діючі на поверхню, отриману від перетинання контрольної поверхні з перешкодою, повинні бути включені в $\sum \vec{F}$ і в основному містять у собі дотичні напруження або напруги стиску в металі. Однак тиск рідини й дотичні напруги, які діють на частину перешкоди, що перебуває в контрольному об'ємі, не входять у $\sum \vec{F}$, оскільки поверхня, на яку вони діють, не є частиною контрольної поверхні.

2.3. Рівняння руху

Отже теорему імпульсів для виділеного контрольного об'єму \mathcal{V} математично записують таким чином:

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \int_{\text{к.об.}} \frac{d}{dt}(\rho\vec{V}\delta\mathcal{V}).$$

Визначивши $\vec{f}(X, Y, Z)$ як вектор напруги масових сил, з урахуванням \vec{R} (1.17) як результуючої *поверхневої* сили, що діє на нескінченно малий об'єм рідини, можемо записати

$$\sum \vec{F} = \int_{\mathcal{V}} \vec{f}\rho d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \vec{R}d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{d}{dt}(\rho\vec{V})d\mathcal{V}.$$

Звідси для течії нескінченно малого елемента рідини $\left(\frac{d(\rho d\mathcal{V})}{dt} = 0\right)$ одержуємо

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} + \frac{1}{\rho}\vec{R}. \quad (2.12)$$

З урахуванням (1.20) маємо (пам'ятаючи, що $\mu = \nu\rho$)

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{3} \nu \text{grad } \text{div} \vec{V} + \nu \Delta \vec{V}. \quad (2.13)$$

Рівняння (2.13) є основним рівнянням руху аерогідродинаміки й відомо під назвою **рівняння Нав'є-Стокса**.

У координатній формі його можна записати так:

для проекції на вісь x

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \\ & = X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \end{aligned}$$

для проекції на вісь y

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \\ & = Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right); \end{aligned}$$

для проекції на вісь z

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \\ & = Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Рівняння Ейлера. Зважаючи, що в рівнянні (2.13) $\mu = 0$, прийдемо до рівняння руху *нев'язкої* рідини, отриманому і розглянутому вперше

Эйлером:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (2.14)$$

Або в проєкціях на осі декартової системи координат

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} (2.15)$$

Рівняння руху у формі Громеки. Виділяючи потенційну і вихорову частини конвективного прискорення і використовуючи відому формулу векторного аналізу

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 = (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + \vec{V} \times \text{rot} \vec{V},$$

або

$$\frac{1}{2} \text{grad} V^2 = (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} + \vec{V} \times \text{rot} \vec{V},$$

рівняння руху нев'язкої рідини можна записати у формі, даній в 1881 р. професором Казанського університету І.С. Громеко:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } V^2 - [\vec{V} \times \text{rot} \vec{V}] = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (2.16)$$

Тут $d\vec{V}/dt$ подана у вигляді суми локального і конвективного прискорень таким чином:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V}.$$

Переваги рівняння руху у формі (2.16) у тому, що в ньому явно виділений вихор швидкості.

У проєкціях на осі декартової системи координат рівняння (2.16) приймає вигляд

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V}{2} \right)^2 + 2(\omega_y w - \omega_z v) &= X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V}{2} \right)^2 + 2(\omega_z w - \omega_x w) &= Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V}{2} \right)^2 + 2(\omega_x v - \omega_y v) &= Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Одиниці і розмірності. Закони руху Ньютона включають незалежні чотири фізичні величини: силу, масу, довжину і час. Перед установленням закону руху ці одиниці були зовсім незв'язані, тому Ньютон міг затверджувати свій закон у вигляді пропорції $F \sim ma$, або

$$F = \frac{1}{g_0} ma,$$

де g_0 – експериментально знайдена постійна, значення якої залежить тільки від одиниць виміру чотирьох згаданих вище величин. Однак, як тільки пропорційність стане відома, можна перевизначити одну з одиниць виміру залежно від трьох інших, зменшивши таким чином для дослідника число первісних величин.

Ці ідеї ілюструються наступною таблицею п'яти систем одиниць.

Таблиця 2.1

	Маса	Довжина	Час	Сила	g_0
Технічна система	<i>кг</i>	<i>м</i>	<i>с</i>	<i>кгс</i>	$9,81 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кгс} \cdot \text{с}^2}$
СІ	<i>кг</i>	<i>м</i>	<i>с</i>	<i>ньютон</i>	$1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{н} \cdot \text{с}^2}$
Системи, застосовувані в США	<i>lbm</i>	<i>ft</i>	<i>sec</i>	<i>lbf</i>	$32,174 \frac{\text{lbm} \cdot \text{ft}}{\text{lbf} \cdot \text{sec}^2}$
	<i>lbm</i>	<i>ft</i>	<i>sec</i>	<i>poundal</i>	$1 \frac{\text{lbm} \cdot \text{ft}}{\text{poundal} \cdot \text{sec}^2}$
	<i>slug</i>	<i>ft</i>	<i>sec</i>	<i>lbf</i>	$1 \frac{\text{slug} \cdot \text{ft}}{\text{lbf} \cdot \text{sec}^2}$

У системі СІ, застосованій у даному курсі, g_0 чисельно дорівнює одиниці, тобто одиницю сили одержуємо, помножуючи одиницю маси на одиницю прискорення. Для такої системи одиниць можемо виключити g_0 з математичного опису закону і записати

$$F = ma .$$

2.4. Перший закон термодинаміки для контрольного об'єму. Рівняння збереження енергії

Перший початок термодинаміки формулюється так:

зміна енергії термодинамічної системи dE дорівнює різниці між отриманою системою кількістю тепла δQ і зробленою нею корисною зовнішньою роботою δW

$$dE = \delta Q - \delta W . \quad (2.18)$$

Згадаємо, що всяка термодинамічна система має енергію E , яка являє собою суму кінетичної енергії руху системи як цілого $E^{кин}$, потенційної енергії E^{nom} , зумовленої певним положенням усієї системи або її макроскопічних частин у якому-небудь зовнішньому полі сил, внутрішньої енергії U , яка складається з власної енергії окремих частин, що становлять розглянуту систему (рис. 2.4)

$$E = E^{кин} + E^{nom} + U .$$

Якщо m – маса системи, то позначаючи через $e = \frac{E}{m}$ – енергію системи, віднесену до одиниці маси системи, і $u = \frac{U}{m}$ – внутрішню енергію одиниці маси системи, можемо записати

$$e = \frac{V^2}{2} + u + gz ,$$

де g – місцеве прискорення гравітаційних сил.

Рівняння (2.18) можна записати

$$\frac{\delta Q}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{\delta W}{dt} ,$$

де $\frac{\delta Q}{dt} = Q \left[\frac{Дж}{c} \right]$ – швидкість теплового потоку через контрольну поверхню з навколишнього середовища.

Швидкість зміни енергії термодинамічної системи запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{(E_{It+dt} + E_{III t+dt}) - (E_{It} + E_{III t})}{dt} = \\ &= \frac{E_{It+dt} - E_{It}}{dt} + \frac{\int e \delta m_{III t+dt}}{dt} - \frac{\int e \delta m_{III t}}{dt} . \end{aligned}$$

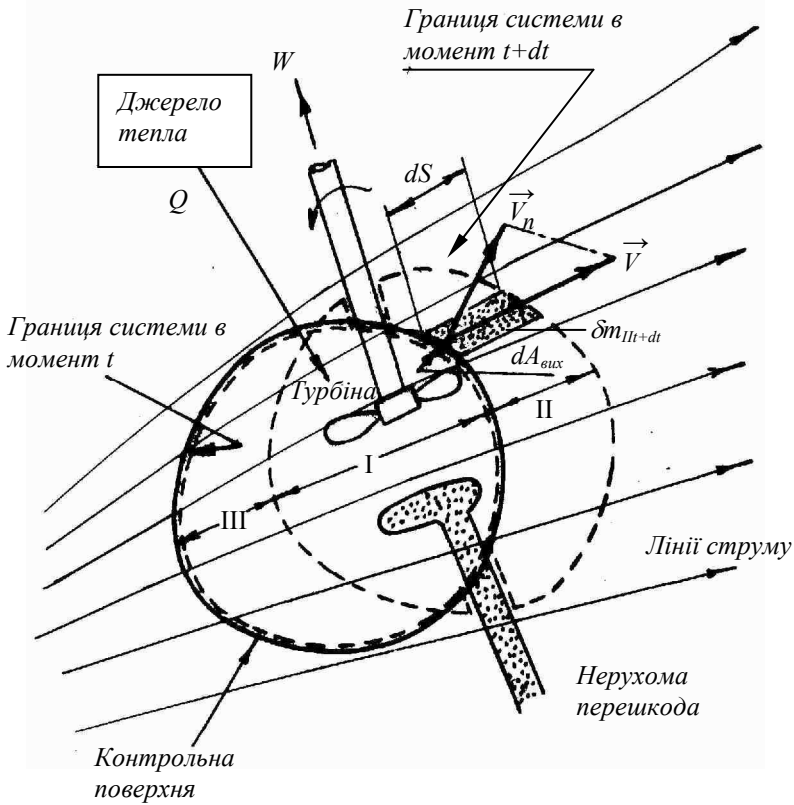


Рис. 2.4. Течія рідини через контрольний об'єм

Оскільки простір I збігається з контрольним об'ємом при $dt \rightarrow 0$,
можемо записати

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\text{к.об.}} + \int e_p V_n dA_{\text{вых}} - \int e_p V_n dA_{\text{вх}} .$$

Швидкість проведення корисної зовнішньої роботи. Випускаю-
чи з нашого розгляду капілярні, магнітні й електричні сили, робота,

зроблена протягом процесу, є результатом нормальних і дотичних напружень на границях системи, що рухається.

$$\frac{\delta W}{dt} = \left(\frac{\delta W}{dt} \right)_{\text{норм}} + \left(\frac{\delta W}{dt} \right)_{\text{касат}} .$$

Беручи нормальні напруги на границях системи як гідростатичний тиск, робота, виконана системою під впливом нормальних сил, що діють на елемент площі $dA_{\text{вих}}$, дорівнює $p dA_{\text{вих}} dn$, де dn – нормальна до елемента площі $dA_{\text{вих}}$ складова dS – шляху уздовж лінії струму.

$$p dA_{\text{вих}} dn = \frac{P}{\rho} \rho dA_{\text{вих}} dn = p v \cdot \delta m_{\text{III}+dt} .$$

А швидкість усієї роботи, виконаної під дією нормальних напруг протягом процесу, визначається виразом

$$\left(\frac{\delta W}{dt} \right)_{\text{норм}} = \frac{\int p v \delta m_{\text{III}+dt}}{dt} - \frac{\int p v \delta m_{\text{III}}}{dt} = \int p v \rho V_n dA_{\text{вих}} - \int p v \rho V_n dA_{\text{вх}} ,$$

оскільки $\frac{dn}{dt} = V_n$.

Робота, виконана під дією дотичних напружень може бути розділена на дві категорії:

(і) робота, зроблена частиною вала, що перебуває *всередині* системи, над частиною вала, яка перебуває *поза* системою, завдяки крутному моменту, створюваному дотичними напруженнями в площині перетину границі системи з валом

$$\left(\frac{\delta W}{dt} \right)_{\text{вала}} = W ;$$

(ii) робота, виконана на границях системи над суміжною рідиною, що перебуває в русі

$$\left(\frac{\delta W}{dt} \right)_{\text{в'язк}} = K .$$

Відзначимо, що дотичні напруги на стійці нерухомої перешкоди не входять у величину K , тому що стійка нерухома. Аналогічно, якщо контрольна поверхня збігається зі стійками труби або корпусом машини, то K дорівнює нулю (оскільки корпус або стійки труби нерухомі) незважаючи на те, що тут можуть бути істотні дотичні напруження. З іншого боку K відіграє важливу роль для контрольної поверхні, що проходить у в'язкому приграничному шарі.

Підсумовуючи всі отримані доданки, одержуємо

$$Q = \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\text{к.об.}} + W + K + \int \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho V_n dA_{\text{в'их}} - \int \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho V_n dA_{\text{вх}} . \quad (2.19)$$

Згадаємо, що

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\text{к.об.}} = \int_{\text{к.об.}} \frac{\partial}{\partial t} (edm) = \int_{\text{к.об.}} \frac{\partial}{\partial t} (e\rho) dV ,$$

а з термодинаміки відомо, що ентальпія $i = u + pv$. Використовуючи векторний аналіз, можна записати

$$Q = W + K + \int_{\text{к.об.}} \frac{\partial}{\partial t} (e\rho) dV + \oint_{\text{к.пов.}} \left(i + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} . \quad (2.20)$$

Рівняння (2.19) і (2.20) і являють собою рівняння збереження енергії в загальному виді.

У багатьох практичних інженерних завданнях потік є стаціонарним і може бути прийнятий одномірним (рис. 2.5).

У цьому випадку стаціонарного одномірного потоку і при збігу контрольної поверхні з внутрішнім корпусом машини $K = 0$,

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\text{к.об.}} = 0.$$

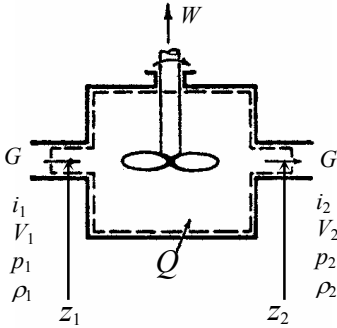


Рис. 2.5. Одновимірна течія

У перерізі 1 подані параметри вхідного потоку, у перерізі 2 – вихідного.

Масова витрата рідини $G = \text{const}$. Тоді зручно знайти $q = \frac{Q}{G}$ – кількість тепла, отримана одиницею маси рідини, що протікає; $w = \frac{W}{G}$ – робота вала, віднесена до одиниці маси рідини,

що протікає. Із цими позначеннями рівняння (2.20) спрощується до вигляду

$$q = w + i_2 - i_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1).$$

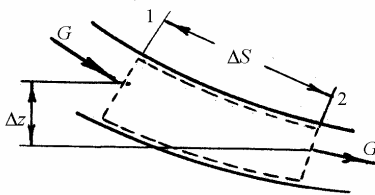


Рис. 2.6. Одновимірна течія рідини в трубці струму

Для стаціонарної одномірної течії рідини в трубці струму (рис. 2.6) рівняння (2.19) і (2.20) спрощуються.

Позначимо через $l = \frac{K}{G}$ роботу від сил в'язкості на одиницю маси рідини, що протікає.

Тоді рівняння збереження енергії для трубки струму запишемо у вигляді

$$q = l + (u_2 - u_1) + (p_2 v_2 - p_1 v_1) + \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1),$$

$$q = l + (i_2 - i_1) + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + g(z_2 - z_1).$$

Перейшовши до кінцевих різностей, маємо

$$\Delta q = \Delta l + \Delta u + \Delta p v + \frac{1}{2} \Delta V^2 + g \Delta z,$$

$$\Delta q = \Delta l + \Delta i + \Delta \frac{V^2}{2} + g \Delta z.$$

Або в диференціальній формі

$$dq = dl + du + d(pv) + \frac{1}{2} dV^2 + g dz, \quad (2.21)$$

$$dq = dl + di + \frac{1}{2} dV^2 + g dz. \quad (2.22)$$

2.5. Другий закон термодинаміки

Другий закон термодинаміки для нескінченно малої зміни стану термодинамічної системи аналітично записуємо у формі

$$ds \geq \frac{\delta Q}{T} \quad \text{або} \quad s_2 - s_1 \geq \frac{\delta Q}{T}.$$

Для ізольованої системи $\delta Q=0$ (адіабатичний процес) зі стаціонарною одномірною течією

$$s_2 \geq s_1. \quad (2.23)$$

Ідеальний газ

Рівняння стану для ідеального газу, як відомо, має вигляд

$$pv = RT = \frac{R}{\mu} T,$$

де R – універсальна газова постійна, що дорівнює 8314,19 Дж/кмоль град.

$$\text{Для повітря } R = R / \mu = \frac{8314,19}{29} = 287 \text{ Дж / кг} \cdot \text{град}$$

$$[R] = \frac{н \cdot м^3}{м^2 \cdot кг \cdot град} = \frac{н \cdot м}{кг \cdot град} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot град}.$$

$$c_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p; \quad c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v,$$

$$c_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p = \frac{di}{dT} = \frac{d}{dT}(u + pv) = \frac{du}{dT} + \frac{d}{dT}RT = c_v + R,$$

тому що i є функцією тільки температури.

$$c_p = c_v + R; \quad k = c_p / c_v; \quad c_p = \frac{k}{k-1} R;$$

$$c_v = \frac{R}{k-1}; \quad k = \frac{n+2}{n},$$

де n – число степенів вільності молекули. Так, для одноатомних газів $n = 3$, $k = 5/3$. Двохатомні гази (кисень, азот і т.д.) мають $n = 5$, $k = 7/5$.

Для повітря при не занадто великих температурах

$$c_p = 1004,5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}, \quad c_v = 717,5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}.$$

Внутрішня енергія ідеального газу залежить тільки від температури

$$u = u(v, T),$$

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv, \quad du = c_v dT + 0 dv, \quad du = c_v dT.$$

Ентальпія ідеального газу також є функцією тільки температури, тому що обидва доданки u і pv є функціями тільки температури

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p dT = c_p dT.$$

З термодинаміки також ми знаємо, що $dq = du + pdv$.

Тоді зміну ентропії запишемо у вигляді

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{pdv}{T} = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}.$$

Після інтегрування одержуємо

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1} = c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1}. \quad (2.24)$$

Використовуючи рівняння стану $pv = RT$, маємо

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{p_2}{p_1} + c_p \ln \frac{v_2}{v_1} = c_v \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^k; \quad (2.25)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^k \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-(k-1)}.$$

Для ідеального газу рівняння ізоентропійного процесу має вигляд

$$pv^k = const.$$

Для баротропної рідини $\rho = f(p)$.

Питання для самоперевірки

1. Виведіть рівняння нерозривності руху.
2. Отримайте рівняння кількості руху для контрольного об'єму.
3. Запишіть основне рівняння руху аерогідродинаміки. Які інші форми рівняння руху Вам відомі?
4. Виведіть рівняння збереження енергії в загальному вигляді і його окремий

- випадок – для стаціонарної одномірної течії рідини в трубці струму.
 5. Отримайте рівняння зміни ентропії для ідеального газу.

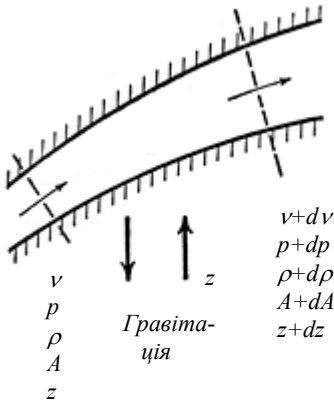
Задачі

2.1. Розглянути стаціонарну, без тертя течію стисливої рідини в нескінченно малій трубці струму.

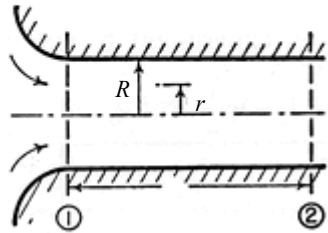
- а) Показати, використовуючи рівняння нерозривності й кількості руху, що

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0; \quad \frac{dp}{\rho} + VdV + g dz = 0.$$

- б) Визначити інтегральні форми цих рівнянь для *нестисливої* рідини.



Задача 2.1.



Задача 2.2.

2.2. Нестислива рідина тече в трубці радіусом R . На вході (переріз 1), швидкість однакова в усьому поперечному перерізі й дорівнює V_1 . У поперечному перерізі 2, де течія ламінарна і повністю розвинена, швидкість змінюється по радіусу відповідно до співвідношення

$$V = V_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

- а) Показати, що $V_1/V_{max} = 1/2$.

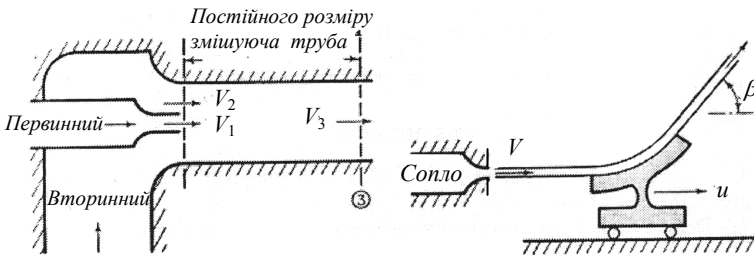
б) Якщо $\bar{\tau}_w$ – усереднене дотичне напруження на стінці, що гальмує потік між перерізами 1 і 2, визначити падіння тиску $(p_1 - p_2)$ у функції V_{max} , ρ , L , R і $\bar{\tau}_w$.

2.3. Рисунок зображує струмінний насос (ежектор або інжектор), у якому первинний потік рідини з високою швидкістю в перерізі 1 входить у вторинну течію тієї ж рідини, але з меншою швидкістю в перерізі 2. Наприкінці постійного діаметра змішуючої труби, тобто в перерізі 3, потік ретельно перемішаний і однорідний по швидкості в результаті тертя між потоками.

Для цілей даного аналізу припустимо, що в перерізах 1 і 2 обидва потоки мають однаковий статичний тиск і що дотичні напруження на стінках перемішуючої труби знехтувально малі.

Припустимо, що $A_1 = 0,01\text{ м}^2$, $A_3 = 0,1\text{ м}^2$, $V_1 = 30\text{ м/с}$, $V_2 = 3\text{ м/с}$ і $\rho = 1000\text{ кг/м}^3$.

Визначити V_3 , $(p_3 - p_1)$.



Задача 2.3

Задача 2.4

2.4. Рисунок зображує крило з кутом повороту β , що рухається з постійною швидкістю u . По крилу скочує струмінь, що залишає нерухоме сопло зі швидкістю V .

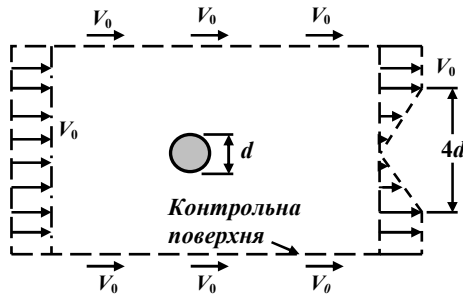
а) Припускаючи, що крило змонтоване на рейках, як показано на рисунку, показати, що виконана робота проти сил опору, максимальна, коли $u/V = 1/3$.

б) Припускаючи, що є нескінченно велика кількість таких крил, пов'язаних з обертовим колесом, яке має периферійну швидкість u , показати, що робота, вироб-

лена колесом, максимальна, коли $u/V = 1/2$.

2.5. Для експериментального визначення опору, циліндр діаметром d був поміщений у стаціонарний, двовірний нестисливий потік.

Виміри швидкості й тиску були зроблені на границях показаної контрольної поверхні. Тиск був однаковий на всій контрольній поверхні. Компонента швидкості уздовж осі x на границі контрольної поверхні була приблизно визначена як показано на рисунку.



Задача 2.5

З вимірних даних підрахувати коефіцієнт опору циліндра.

$$C_D = \frac{\text{Сила опору на одиницю довжини}}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 d}$$

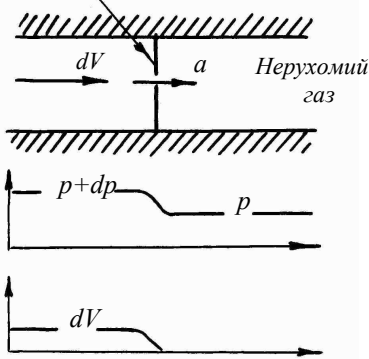
РОЗДІЛ 3. ОДНОМІРНИЙ РУХ ГАЗУ

3.1. Швидкість звуку

Визначимо швидкість звуку для випадку плоскої нескінченно малої хвилі тиску, що поширюється уздовж труби з постійним поперечним перерізом. Таку хвилю можна створити, наприклад, легким пересуванням поршня, розташованого в лівому кінці труби.

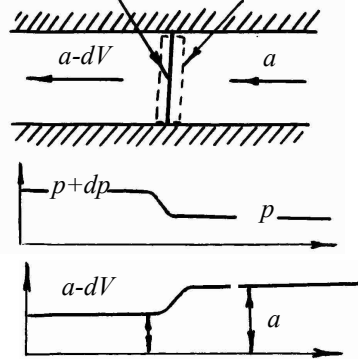
Фронт хвилі поширюється рівномірно вправо зі швидкістю a (рис. 3.1,*a*). Рідина, через яку пройшов фронт хвилі, має тиск $p+dp$, щільність $\rho+dp$ і рухається вправо зі швидкістю dV . Рідина перед фронтом хвилі праворуч має тиск p , щільність ρ і нерухома.

Фронт хвилі, рухомої зі швидкістю a



a)

Нерухомий фронт хвилі Контрольна поверхня



b)

Рис. 3.1. Поширення нескінченно малого імпульсу підвищення тиску:
 a) – стосовно нерухомого спостерігача; b) – спостерігач рухається разом із фронтом хвилі.

Для спрощення аналізу припустимо, що спостерігач рухається разом із фронтом хвилі. Тоді рис. 3.1, b показує процес щодо спостерігача, який рухається вправо, зі швидкістю a . Рідина протікає справа на ліва і як тільки проходить через фронт хвилі, її швидкість зменшується з величини a до величини $(a-dV)$. У той же час тиск зростає з p до $p+dp$ і щільність із ρ до $\rho+dp$.

Розглянемо нерухому контрольну поверхню, що оточує фронт хвилі (рис. 3.1, b). Дотичні напруження на цій контрольній поверхні знехтувально малі в порівнянні із силами тиску. Тоді, використовуючи теорему імпульсів, рівняння кількості руху в цьому випадку запишемо у вигляді

$$A[p - (p + dp)] = G[(a - dV) - a],$$

де A – поперечний переріз труби,

$$G = \rho A a.$$

Звідки одержуємо

$$dp = \rho a dV$$

(візьмемо до уваги, що dV – зменшення швидкості в напрямку руху).

Рівняння безперервності для рідини, що перебуває по обидва боки фронту хвилі, запишемо так:

$$\rho a = (\rho + d\rho)(a - dV) = \rho a + a d\rho - \rho dV - \cancel{d\rho dV}$$

$$\text{Звідси маємо } \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dV}{a}, \text{ або } dV = a \frac{d\rho}{\rho}.$$

Підставляючи отриманий вираз у формулу для dp , одержуємо

$$dp = \rho \cdot a^2 \cdot \frac{d\rho}{\rho} = a^2 d\rho.$$

Тоді швидкість поширення нескінченно малої хвилі тиску, тобто швидкість звуку, визначається виразом:

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \text{ або } a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} \quad (3.1)$$

Відношення $dp/d\rho$ записане в рівнянні (3.1) як часткова похідна при постійній ентропії, оскільки зміни в тиску й температури є нескінченно малими, процес близький до зворотного. Більше того, швидкість процесу разом з нескінченно малими змінами температури робить процес близьким до адіабатичного. У границі для нескінченно малої хвилі процес можна вважати й адіабатичним, і ізоентропійним.

Швидкість звуку для ідеального газу. Для ідеального газу залежності між тиском p і густиною ρ в ізоентропійному процесі виражається рівнянням

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}$$

або

$$\ln p - k \ln \rho = \text{const}, \text{ звідки } \frac{dp}{p} = k \frac{d\rho}{\rho}; \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = k \frac{p}{\rho} = kRT.$$

Підставляючи в (3.1), одержуємо формулу для швидкості звуку в ідеальному газі

$$a = \sqrt{kp/\rho} = \sqrt{kRT}. \quad (3.2)$$

Для повітря ($k=1,4$) швидкість розповсюдження звуку

$$a = 20,1\sqrt{T}. \quad (3.3)$$

Хвилі кінцевої потужності, звичайно звані стрибками ущільнення, завжди розповсюджуються зі швидкістю більшою, ніж вказано в рівнянні (3.1), і швидкість розповсюдження збільшується зі зростанням інтенсивності рухомого стрибка. Проте це питання буде обговорено пізніше.

Для **реального робочого тіла** як незалежні змінні можна узяти p і i . Тоді рівняння стану можна записати у вигляді

$$T = T(p, i); \quad \rho = \rho(p, i); \quad s = s(p, i). \quad (3.4)$$

Використовуючи вираз для густини, маємо

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial i} di + \frac{\partial \rho}{\partial p} dp. \quad (3.5)$$

З термодинаміки відомо, що $i = u + pv$, звідки $di = du + pdv + vdp$. Звідси $du + pdv = dq = di - dp/\rho$.

Для адіабатного і ізоентропійного процесу $dq = 0$. Тоді

$$di = dp/\rho. \quad (3.6)$$

З (3.5) з урахуванням (3.6) одержуємо

$$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial i} \cdot \frac{dp}{\rho} + \frac{\partial\rho}{\partial p} dp = \left(\frac{\partial\rho}{\partial i} \cdot \frac{1}{\rho} + \frac{\partial\rho}{\partial p} \right) dp.$$

З викладеного вище виходить, що

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s=const} = a^2 = \frac{\rho}{\frac{\partial\rho}{\partial i} + \rho \frac{\partial\rho}{\partial p}};$$

$$a^2 = \rho / \left(\frac{\partial\rho}{\partial i} + \rho \frac{\partial\rho}{\partial p} \right), \text{ або } a = \sqrt{\rho / \left(\frac{\partial\rho}{\partial i} + \rho \frac{\partial\rho}{\partial p} \right)}. \quad (3.7)$$

Рівняння (3.7) є рівнянням швидкості звуку для реального робочого тіла.

У разі ідеального робочого тіла

$$T = \frac{1}{c_p} i; \quad \rho = \frac{c_p}{R} \frac{p}{i}; \quad s = c_p \ln i - R \ln p. \quad (3.8)$$

Тоді

$$\frac{\partial\rho}{\partial i} = -\frac{c_p}{R} \cdot \frac{p}{i} \cdot \frac{1}{i}; \quad \frac{\partial\rho}{\partial p} = \frac{c_p}{R} \cdot \frac{1}{i};$$

$$a^2 = \frac{\frac{c_p}{R} \cdot \frac{p}{i}}{\frac{c_p}{R} \cdot \frac{p}{i} \cdot \frac{1}{i} - \frac{c_p}{R} \cdot \frac{p}{i} \cdot \frac{1}{i}} = \frac{Ri}{c_p - R} = \frac{Rc_p T}{c_p - c_p + c_v} = kRT.$$

Таким чином одержали (як і слід було чекати) раніше виведену формулу (3.2) для швидкості звуку в ідеальному газі.

3.2. Різні форми рівняння енергії

I. Для ідеальної нестисливої рідини за відсутності теплообміну між виділеною струминкою і навколишнім середовищем рівняння (2.21) істотно спрощується:

$dl = 0$ – в'язкість відсутня;

$dq = 0$, отож $du = 0$, оскільки в нестисливій рідині внутрішня енергія визначається кількістю підведеного тепла.

Тоді маємо

$$\frac{1}{2} dV^2 + \frac{1}{\rho} dp + g dz = 0.$$

Інтегруючи цей вираз уздовж струминки, знаходимо

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = const. \quad (3.9)$$

Це рівняння називається *рівнянням Бернуллі для струминки ідеальної нестисливої рідини*.

II. Для сталого руху ідеальної стисливої рідини, також у випадку відсутності теплообміну між виділеною струминкою і навколишнім середовищем, рівняння (2.22) приймає вигляд

$$di + \frac{1}{2} dV^2 + g dz = 0.$$

Інтегруючи це рівняння уздовж струминки, одержуємо

$$i + \frac{V^2}{2} + gz = i_0 = const. \quad (3.10)$$

III. Згідно з першим законом термодинаміки $dq = du + pdv$.

Підставимо цей вираз у рівняння (2.21). У випадку сталого руху ідеальної стисливої рідини маємо

$$du + pdv = du + d(pv) + \frac{1}{2}dV^2 + gdz,$$

$$du + pdv = du + pdv + vdp + \frac{1}{2}dV^2 + gdz.$$

Одержуємо рівняння енергії для струминки газу в диференціальній формі, що містить тільки механічні величини,

$$\frac{1}{2}dV^2 + \frac{1}{\rho}dp + gdz = 0. \quad (3.11)$$

Інтегруючи цей вираз, запишемо

$$\frac{V^2}{2} + gz + \int \frac{dp}{\rho} = const.$$

Для ізоентропійного процесу $\rho = \rho(p)$, оскільки $\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k}$.

Звідси маємо

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Тоді можемо записати

$$\begin{aligned} \int \frac{d\rho}{\rho} &= \frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} \int \frac{dp}{p^{1/k}} = \frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} \frac{1}{1-1/k} p^{1-1/k} = \\ &= \frac{k}{k-1} \frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} p^{(k-1)/k} = \frac{k}{k-1} \frac{p^{1/k}}{\rho} p^{(k-1)/k} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}. \end{aligned}$$

Підставляючи одержаний вираз у наведене вище рівняння, маємо

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = const. \quad (3.12)$$

Це рівняння називається *рівнянням Бернуллі для струминки ідеальної стисливої рідини*.

IV. Нехтуватимемо складовою gz для газу. Тоді, позначивши ρ_0 , p_0 , T_0 параметри гальмування, з рівняння (3.12) одержимо

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{k}{k-1} RT_0. \quad (3.13)$$

З урахуванням рівняння (3.2), можемо записати

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1}, \quad (3.14)$$

де a_0 – швидкість розповсюдження звуку в повністю загальмованому середовищі.

Можна також записати

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{V_{max}^2}{2}, \quad (3.15)$$

де V_{max} – максимальна швидкість, відповідна витіканню газу в пустку ($i = 0$, $p = 0$, $T = 0$).

Згідно з (3.14) уздовж осі трубки струму зі збільшенням швидкості V швидкість звуку a падає. В одному з перетинів можливий випадок, коли

$$V = a = a_*.$$

Тоді (3.14) запишемо як

$$\frac{a_*^2}{2} + \frac{a_*^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{a_*^2}{2},$$

а рівняння енергії прийме вигляд

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{a_*^2}{2}, \quad (3.16)$$

де a_* – швидкість течії, рівна місцевій швидкості звуку, звана *критичною швидкістю*.

Прирівнюючи праві частини рівнянь (3.13) – (3.16), одержуємо

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{a_0}{k-1} = \frac{V_{max}^2}{2} = \frac{a_*^2}{2} \cdot \frac{k+1}{k-1}.$$

Звідси одержуємо вирази для характерних швидкостей потоку через параметри гальмування

$$\left. \begin{aligned} V_{max} &= \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}}; & \text{Для повітря, що має} \\ & & \text{стандартні параметри в} \\ & & \text{стані спокою, } V_{max}=760 \text{ м/с} \\ a_* &= \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}}; & \text{Для повітря } k=1,4 \\ V_{max} &= a_0 \sqrt{\frac{2}{k-1}}; & \frac{V_{max}}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} = 2,24; \\ a_* &= a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}}; & \frac{a_*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}} = 0,913; \\ \frac{V_{max}}{a_*} &= \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}; & \frac{V_{max}}{a_*} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = 2,45. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

3.3. Газодинамічні функції одномірного адіабатичного потоку

Позначимо

$$\frac{V}{a} = M \text{ – число Маха.}$$

Цей безрозмірний параметр дуже зручний, але має два недоліки:

- (i) він залежить не тільки від швидкості;
- (ii) при великих швидкостях наближається до нескінченності.

Тому часто користуються іншим безрозмірним параметром – λ

$$\lambda = \frac{V}{a_*} \text{ – коефіцієнт швидкості.}$$

Запишемо рівняння енергії (3.16)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{a_*^2}{2}$$

Розділивши на a_*^2 , одержимо

$$\frac{V^2}{2a_*^2} + \frac{1}{k-1} \cdot \frac{a^2}{a_*^2} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{1}{2}$$

або

$$\lambda^2 + \frac{2}{k-1} \cdot \frac{a^2}{a_*^2} = \frac{k+1}{k-1}.$$

З другого боку, можемо записати

$$\lambda^2 = \frac{V^2}{a_*^2} = \frac{V^2}{a^2} \frac{a^2}{a_*^2} = M^2 \frac{a^2}{a_*^2}.$$

Виключаючи a^2/a_*^2 з цих двох рівнянь, одержуємо вирази через M і λ для адіабатичного потоку

$$\lambda^2 + \frac{2}{k-1} \cdot \frac{\lambda^2}{M^2} = \frac{k+1}{k-1},$$
$$\frac{k-1}{2} \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{M^2} = \frac{k+1}{2}; \quad \frac{k-1}{2} + \frac{1}{M^2} = \frac{k+1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda^2}.$$

Звідси

$$\lambda^2 = \frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}, \quad (3.18)$$

$$M^2 = \frac{\frac{2}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}. \quad (3.19)$$

З рівнянь (3.18) і (3.19) бачимо: якщо $M < 1$, то $\lambda < 1$, якщо $M > 1$, то $\lambda > 1$, коли $M = 1$, тоді $\lambda = 1$; коли $M = 0$, тоді $\lambda = 0$; коли $M = \infty$, тоді $\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = 2,45$ для $k=1,4$.

У дозвуковому потоці число Маха менше числа λ , в надзвуковому потоці число M більше λ .

Запишемо рівняння енергії у формі (3.13)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} RT_0.$$

Звідси, пам'ятаючи, що згідно з (3.2) $a^2 = k \frac{p}{\rho}$, а також використовуючи рівняння стану, можемо записати

$$\frac{V^2}{a^2} + \frac{2}{k-1} = \frac{2}{k-1} \cdot \frac{T_0}{T}.$$

Звідки маємо

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2. \quad (3.20)$$

Відношення для тиску, температури і густини для ізоентропійного процесу ідеального газу мають вигляд

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^k; \quad \frac{T_0}{T} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Підставляючи ці співвідношення в (3.20), одержуємо

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_0}{p} &= \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}, \\ \frac{\rho_0}{\rho} &= \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

У практиці розрахунків часто використовують газодинамічні функції залежно від числа λ .

Для цього знову запишемо рівняння енергії (3.16)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{a_*^2}{2}.$$

Розділивши на a_*^2 , одержуємо

$$\lambda^2 + \frac{2}{k-1} \cdot \frac{a^2}{a_*^2} = \frac{k+1}{k-1}.$$

З урахуванням того, що згідно з (3.17) $a_* = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}}$, можемо

записати

$$\frac{2}{k-1} \cdot \frac{a^2}{a_*^2} = \frac{2}{k-1} \cdot \frac{a^2}{a_0^2} \cdot \frac{a_0^2}{a_*^2} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{RT}{RT_0} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{T}{T_0}.$$

Тоді маємо

$$\lambda^2 + \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{T}{T_0} = \frac{k+1}{k-1}$$

або

$$\frac{k-1}{k+1}\lambda^2 + \frac{T}{T_0} = 1.$$

Звідси одержуємо

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2. \quad (3.22)$$

Використовуючи раніше наведені співвідношення для ізоентропійного процесу ідеального газу, можемо записати

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Параметри газу, швидкість руху якого дорівнює за величиною місцевій швидкості звуку в газі, називаються *критичними параметрами*.

Критичним параметрам відповідає число $M = \lambda = 1$.

Тоді з формул (3.20) – (3.21) або з (3.22) – (3.23) виходить

$$\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{k+1}; \quad \frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (3.24)$$

При $k=1,4$ маємо

$$\frac{T_*}{T_0} = 0,833; \quad \frac{p_*}{p_0} = 0,5283; \quad \frac{\rho_*}{\rho_0} = 0,634; \quad a_* = 18,3\sqrt{T_0}.$$

Останню формулу одержуємо з (3.17) $a_* = a_0\sqrt{\frac{2}{k+1}}$ і (3.3)

$$a_0 = 20,1\sqrt{T_0} : a_* = 20,1\sqrt{2/k+1}\sqrt{T_0} = 18,3\sqrt{T_0}.$$

Для отримання газодинамічної функції витрати скористаємося рівнянням витрати (2.8)

$$\rho AV = G = \text{const}.$$

Розглянемо питому витрату (витрата через одиницю площі):

$$\frac{G}{A} = \rho V.$$

Максимальна витрата через одиницю площі буде в мінімальному перетині, де параметри газу будуть ρ_* , p_* , T_* , а швидкість $V = a_*$.

$$\frac{G}{A_*} = \rho_* a_*.$$

Позначимо $q = \frac{\rho V}{\rho_* a_*} = \frac{A_*}{A}$ – приведена секундна витрата.

$$q = \frac{\rho V}{\rho_* a_*} = \frac{\rho_0}{\rho_*} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \lambda.$$

Використовуючи рівняння (3.24) і (3.23), одержуємо

$$q = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \lambda \cdot \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (3.25)$$

Підставляючи сюди вираз (3.18) для λ через M , також одержуємо

$$q = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \cdot M \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{k+1}{2(k-1)}}. \quad (3.26)$$

Або в зручнішому записі

$$q = \lambda \cdot \left[\left(\frac{k+1}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right) \right]^{\frac{1}{k-1}}, \quad (3.27)$$

$$q = M \cdot \left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}. \quad (3.28)$$

Для точних розрахунків газодинамічні функції протабульовані для ізоентропійного потоку при різних значеннях k з числом M або λ як незалежна змінна (таблиця 1 додатка).

Використовування газодинамічних функцій краще за все пояснити на прикладі.

Приклад. Надзвукове сопло спроектоване для $M = 2$ з площею горла сопла $0,01 \text{ м}^2$. Тиск і температура на вході в сопло, де швидкість знехтувально мала, дорівнюють відповідно 5 бар і $100 \text{ }^\circ\text{C}$. Конструктор ґрунтувався на припущенні, що потік ізоентропійний з $k = 1,4$, одномірний в горлі і в робочій частині сопла. Визначити масову витрату, площу робочої частини сопла і параметри потоку в горлі сопла і в робочій частині сопла.

$$p_0 = 5 \text{ бар}, \quad T_0 = 273,15 + 100 = 373,15 \text{ К},$$

$$1 \text{ бар} = 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad R = 287 \frac{\text{Н} \cdot \text{М}}{\text{кг} \cdot \text{град}} = 287 \frac{\text{дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}.$$

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{5 \cdot 10^3}{287 \cdot 373,15} = 4,67 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$a_0 = 20,1 \sqrt{T_0} = 20,1 \sqrt{373,15} = 388 \frac{\text{М}}{\text{с}}.$$

Далі визначаємо властивості в горлі, взявши з табл. 1 при $M = \lambda = 1$:

$$\begin{aligned} p^* / p_0 &= 0,528; & p^* &= 5 \cdot 0,528 = 2,54 \text{ бар}; \\ T^* / T_0 &= 0,833; & T^* &= 0,833 \cdot 373,15 = 310 \text{ К}; \\ \rho^* / \rho_0 &= 0,634; & \rho^* &= 0,634 \cdot 4,67 = 2,96 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \\ a^* / a_0 &= \sqrt{T^* / T_0} = 0,913; & a^* &= V^* = 354 \frac{\text{М}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Використовуючи таблицю тепер можемо підрахувати параметри в робочій частині сопла:

$$\lambda = \frac{V}{a_*} = 1,633; \quad V = 1,633 \cdot 354 = 579 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$p/p_0 = 0,1278; \quad p = 0,1278 \cdot 5 = 0,64 \text{ бар};$$

$$\rho/\rho_0 = 0,23; \quad \rho = 0,23 \cdot 4,67 = 1,074 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$T/T_0 = 0,556; \quad T = 0,556 \cdot 373,15 = 207 \text{ К};$$

$$A_* / A = q = 0,59; \quad A = 0,01 / 0,59 = 0,0169 \text{ м}^3.$$

На завершення визначимо масову витрату повітря

$$G = \rho_* A_* V_* = 2,96 \cdot 0,01 \cdot 354 = 10,48 \frac{\text{кг}}{\text{с}}.$$

3.4. Класифікація течії стисливої рідини

Використовуючи рівняння (3.14) і (3.15), можемо записати

$$V^2 + \frac{2}{k-1} a^2 = \frac{2}{k-1} a_0^2 = V_{max}^2.$$

Згідно з цим виразом можна всі стани в трубці струму подати у вигляді діаграми a у функції V , званої *еліпсом стаціонарної течії*.

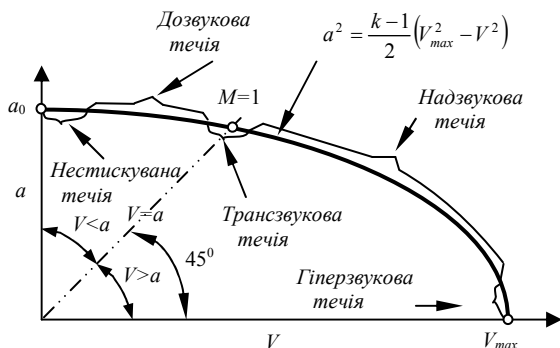


Рис. 3.2. Еліпс стаціонарної адиабатичної течії, що показує області впливу стисливості

Різні частини еліпса представляють схематично різні області течії стисливої рідини, що мають істотно різні фізичні характеристики.

Течія нестисливої рідини. Швидкість є невеликою в порівнянні зі швидкістю звуку. Зміни в a є вельми малими в порівнянні зі змінами в швидкості V .

Дозвукова течія. Швидкість V і швидкість звуку a є порівнянними величинами, але $V < a$. Число Маха M змінюється в результаті зміни V і лише трохи від зміни швидкості звуку a .

Транззвукова течія. Різниця між V і a є дуже малою в порівнянні з величинами V і a . Зміни в V і a є порівнянними величинами.

Надзвукова течія. Швидкість V і швидкість звуку a є порівнянними величинами, але $V > a$. Зміни в числах M мають місце в результаті обопільної зміни V і a .

Гіперзвукова течія. Швидкість течії V дуже велика в порівнянні зі швидкістю звуку a . Зміни в V є дуже малими і зміни числа Маха є результатом зміни швидкості звуку a .

3.5. Основи фізичного моделювання

Перевіряти кожне нове рішення і ефективність кожної нової конструкційної зміни в натурних умовах вельми складно, а часто і принципово неможливо. З цієї причини основні експериментальні дослідження проводяться на модельних установках, де можуть використовуватися різні робочі тіла, а саме випробування проводиться при швидкостях і параметрах рідини, відмінних від натурних. Тому в аеродинаміці особливо важливу роль виконує *теорія подібності* потоків, оскільки вона встановлює можливість перенесення експериментальних даних, одержаних при випробуваннях на моделі, на натурний об'єкт.

Два потоки називаються подібними, якщо в будь-яких подібних точках і в будь-які подібні моменти часу масштаби однорідних величин, що характеризують ці потоки, є постійними. Така подібність називається повною. Якщо ж цій умові задовольняють не всі масштаби, а тільки частина з них, то подібність називається частковою.

Для забезпечення подібності модельованих течій або явищ необхідно забезпечити рівність деяких безрозмірних комплексів, які називають критеріями (числами) подібності. Критерії подібності можна встановити шляхом запису основних рівнянь руху в'язкої рідини в безрозмірній формі. Для повної подібності двох потоків безрозмірні форми рівнянь повинні бути тотожними, тобто постійні коефіцієнти, що стоять перед безрозмірними членами, повинні бути однакові. Ці коефіцієнти і є критерії подібності:

$\frac{l}{Vt}$ – число Струхаля, є важливим критерієм нестационарного руху, де l – лінійний характерний розмір тіла; V – швидкість; t – характерний час (наприклад $1/t = f$ – частота коливань);

$\frac{V}{\sqrt{lg}}$ = Fr – число Фруда, оцінює роль масових сил в процесі руху рідини;

$\frac{P}{\rho V^2}$ = Eu – число Ейлера;

$\frac{Vl}{\nu}$ = Re – число Рейнольда, характеризує вплив сил в'язкості.
 $\nu = \mu / \rho$ – кінематичний коефіцієнт в'язкості;

$\frac{C_{p\mu}}{\lambda}$ = Pr – число Прандтля, характеризує обмін енергією у в'язкому газі за допомогою теплопередачі (λ – коефіцієнт теплопровідності);

$\frac{V}{a} = M$ – число Маха. Характеризує стисливість робочого тіла.

Таким чином, рухи подібні, якщо для них однакові числа: Sh , Fr , M , Re , Pr , Eu , k .

В окремих випадках деяких з умов може не бути. У разі стаціонарної течії з розгляду випадає число Sh ; у задачах, де вплив масових сил неістотний, можна до уваги не брати число Fr ; відсутність теплообміну виключає з розгляду критерій Pr .

Одночасне моделювання всіма критеріями часто неможливе. Так, у разі стаціонарної течії гідрогазодинаміки одночасна подібність за числами M і Re при збереженні незмінними параметрів потоку натури і моделі неможлива. Наприклад, при зменшенні масштабу геометричного моделювання в два рази необхідно для підтримки постійності Re збільшити швидкість потоку в два рази, а, отже, збільшити в 2 рази в порівнянні з натурою число M .

Одночасне моделювання за вказаних критеріями вимагає використання аеродинамічних труб зі змінною густиною потоку, коли збереження незмінним Re здійснюється не за допомогою зміни швидкості, а за рахунок зміни густини потоку. Установки подібного роду виявляються достатньо складними і коштовними. В результаті і у разі стисливої рідини доводиться користуватися частковим моделюванням, приймаючи як визначальний критерій число M , а вплив Re враховувати непрямим чином за допомогою введення відповідного поправкового коефіцієнта. Часто цей коефіцієнт взагалі виявляється близьким до одиниці. Як показують дослідні дані, для більшості задач при $Re > 5 \cdot 10^5$ його вплив стає неістотним. Настає так звана *практична автотельність* по цьому критерію, і в області автотельності єдиним критерієм залишається число M . Вплив показника ізоентропи k в аеродинаміці також виявляється неістотним, і ця об-

ставина допускає широке варіювання робочими тілами при моделюванні.

Значні труднощі виникають звичайно при моделюванні турбулентних потоків, оскільки одержати на моделі турбулентний потік, ідентичний за всіма характеристиками натурному, не можна. І тут також обмежуються частковим моделюванням, використовуючи як критерій тільки ступінь турбулентності E_0 . Якщо представити миттєву швидкість потоку V у вигляді суми середньостатистичної швидкості, не залежної від часу, і складової пульсації V' , мінючої своє значення з часом, то за наявності пульсацій по всім трьом координатним осям ($u = \bar{u} + u'$; $v = \bar{v} + v'$; $w = \bar{w} + w'$) ступінь збуреності зовнішнього потоку може бути охарактеризована ступенем турбулентності зовнішнього потоку E_0 . Ця величина дорівнює відношенню середньоквадратичних пульсацій швидкості до середньостатистичної подовжньої швидкості

$$E_0 = \frac{\sqrt{(1/3)(\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2)}}{\bar{u}}.$$

Таким чином, на практиці вся критерійна база подібності звичайно не зберігається і здійснюється тільки часткова подібність.

Незважаючи на це, при рішенні будь-якої задачі моделювання завжди необхідно мати повну базу. Відкидання того або іншого критерію можливе тільки після детального аналізу його ролі в досліджуваному процесі. При цьому абсолютно ясно, що часткове моделювання є вимушеною мірою і в деяких випадках може призводити до істотних помилок, які далеко не завжди вдається передбачати.

3.6. Одномірні течії при різних зовнішніх діяннях

Як зовнішні діяння на одновимірний потік можуть бути:

- 1) зміна поперечної площі каналу;

- 2) тертя на обмежуючих стінках каналу;
- 3) опір усередину вміщених тіл;
- 4) теплообмін із зовнішнім середовищем;
- 5) хімічні реакції;
- 6) зміна фаз, тобто випаровування або конденсація води або палива;
- 7) змішування газу, який підводиться до основного потоку;
- 8) зміни молекулярної ваги і питомої теплоємності, викликані горінням, випаровуванням, підведенням газу і т.д.

Розглянемо не одночасну дію всіх або більшої частини вказаних чинників (хоча така задача вирішувана і вирішена), а окремих з них з метою детальнішого якісного аналізу.

I. Течія при змінюючій поперечній площі каналу

Прологарифмувавши, а потім продиференціювавши рівняння нерозривності для струминки струму (2.8), маємо

$$d(\ln \rho VA) = 0; \quad d \ln \rho + d \ln V + d \ln A = 0.$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0; \quad \frac{dA}{A} = -\frac{dV}{V} - \frac{d\rho}{\rho}. \quad (3.29)$$

З диференціального рівняння енергії для струминки струму (2.21) у разі відсутності тертя ($dl = 0$) маємо

$$\frac{1}{2} dV^2 + \frac{dp}{\rho} = 0, \quad dp = -\rho V dV, \quad \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{\rho V^2}. \quad (3.30)$$

Підставляючи в рівняння (3.29) значення dV/V , одержимо

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho} \left(\frac{1}{V^2} - \frac{d\rho}{dp} \right).$$

Оскільки розглядається ізоентропійна течія, то $dp / d\rho = (\partial p / \partial \rho)_s = a^2$ а ,отже,

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2} (1 - M^2) = \frac{1 - M^2}{\rho V^2} dp = \frac{dV}{V} (M^2 - 1).$$

Тут скористалися виразом (3.30) для dp , $dp = -\rho V dV$.

Тоді маємо

$$\frac{dV}{V} = \frac{dA/A}{M^2 - 1}. \quad (3.31)$$

Проведемо якісний аналіз цієї залежності.

1. Дозвукова течія ($M < 1$). Якщо труба звужується у напрямку течії ($dA < 0$), то швидкість потоку зростає, оскільки $dV > 0$. Якщо труба розширяється ($dA > 0$), то швидкість уздовж труби зменшується ($dV < 0$).

2. Надзвукова течія ($M > 1$). Надзвуковий потік поводить ся протилежно дозвуковому. У звужуючому каналі ($dA < 0$) швидкість зменшується ($dV < 0$), а в тому, що розширюється, – зростає ($dV > 0$).

Отже, для того щоб розігнати дозвуковий потік до надзвукової швидкості, необхідно спочатку звужувати трубу, а потім розширювати. Перехід через швидкість звуку ($M = 1$) може відбутися тільки в мінімальному перетині каналу, оскільки при $M = 1$ тільки при $dA = 0$ ліва частина рівняння (3.31) не стає нескінченно великою. Такі канали називаються *соплами Лаваля*, що вперше застосував їх в парових турбінах для отримання надзвукових швидкостей.

Фізичну сутність цього явища неважко з'ясувати, використовуючи рівняння витрати $G = \rho \cdot V \cdot A = const.$. Звідси, пам'ятаючи що

$$\rho = 1/v, \text{ маємо } \frac{V}{v} \cdot \frac{A}{G} = 1.$$

Отриманий вираз наочно демонструє, що там, де швидкість уздовж сопла зростає швидше ніж питомий об'єм (має місце в дозву-

ковій частині сопла), площа поперечного перетину сопла повинна зменшуватись. Навпаки, для тієї частини сопла, де темп зростання швидкості уздовж сопла відстає від зростання питомого об'єму (має місце в надзвуковій частині сопла), площа перетину сопла повинна збільшуватись.

II. Рух в трубі постійного перетину з тертям

Течія стисливого газу в трубах постійного перетину має місце в багатьох інженерних областях, включаючи електростанції, хімічні підприємства, газоперекачуючі магістралі і т.д.

Одержимо диференціальні співвідношення для ідеального газу.

1. З рівняння стану

$$p = \rho RT \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}. \quad (3.32)$$

2. З виразу для числа Маха ідеального газу

$$M^2 = \frac{V^2}{kRT} \Rightarrow \frac{dM^2}{M^2} = \frac{dV^2}{V^2} - \frac{dT}{T}. \quad (3.33)$$

3. З рівняння енергії ідеального газу

$$c_p dT + d \frac{V^2}{2} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{T} + \frac{k-1}{2} M^2 \frac{dV^2}{V^2} = 0. \quad (3.34)$$

Цей вираз одержуємо, ділячи рівняння енергії ідеального газу на $c_p T$

$$\frac{dV^2/2}{c_p T} = \frac{k-1}{2} \cdot \frac{dV^2}{kRT} = \frac{k-1}{2} M^2 \frac{dV^2}{V^2}.$$

4. З рівняння нерозривності ($A = const$)

$$G = \rho VA = \text{const} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dV^2}{V^2} = 0. \quad (3.35)$$

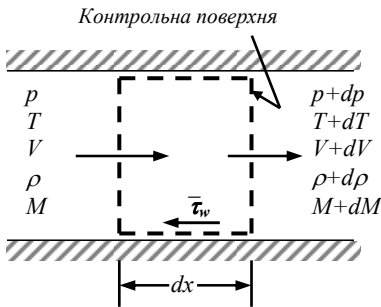
5. З рівняння кількості руху для контрольної поверхні (рис. 3.3)

$$\frac{\pi D^2}{4} [p - (p + dp)] - \pi D dx \tau_w = G(V + dV) - GV = \frac{\pi D^2}{4} \rho V^2 \frac{dV}{V};$$

$$-dp - 4\tau_w \frac{dx}{D} = \rho V^2 \frac{dV}{V}; \quad \frac{dp}{\rho V^2} + 4 \frac{\tau_w}{\rho V^2} \frac{dx}{D} + \frac{dV}{V} = 0;$$

$$\rho V^2 = \rho M^2 k \frac{p}{\rho} = k p M^2.$$

Тоді
$$\frac{dp}{k p M^2} + 2 \frac{\tau_w}{\rho V^2 / 2} \cdot \frac{dx}{D} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dV^2}{V^2} = 0.$$



Визначимо коефіцієнт тертя f як відношення величини дотичної напруги на стінці до динамічного натиску основного потоку

$$f \equiv \frac{\tau_w}{\rho V^2 / 2}$$

Рис. 3.3. Контрольна поверхня при аналізі адиабатної течії в трубі постійного перетину з тертям

Тоді одержуємо

$$\frac{dp}{p} + \frac{kM^2}{2} 4f \frac{dx}{D} + \frac{kM^2}{2} \cdot \frac{dV^2}{V^2} = 0. \quad (3.36)$$

6. Використовуючи рівняння (3.21)
$$p_0 = p \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

одержуємо

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{kM^2/2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \cdot \frac{dM^2}{M^2}. \quad (3.37)$$

Шість рівнянь – (3.32) – (3.37) дозволяють визначити шість диференціальних змінних: $-dp/p$, $d\rho/\rho$, dT/T , dM^2/M^2 , dV^2/V^2 і dp_0/p_0 , вибравши як незалежну змінну вираз $4fdx/D$. Вибір незалежної змінної ґрунтується на тому факті, що фізичне діяння, що викликає зміну стану робочого тіла, є в'язке тертя.

Використовуючи (3.32) і (3.34), одержуємо

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} - \frac{k-1}{2}M^2 \frac{dV^2}{V^2}.$$

Виключаючи $d\rho/\rho$ за допомогою (3.35), маємо

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{dV^2}{V^2} - \frac{k-1}{2}M^2 \frac{dV^2}{V^2} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{k-1}{2}M^2\right) \frac{dV^2}{V^2} = \\ &= -\frac{1+(k-1)M^2}{2} \cdot \frac{dV^2}{V^2}. \end{aligned}$$

Використовуючи (3.36) для заміни dV^2/V^2 , одержуємо наступне співвідношення

$$\frac{dp}{p} = -\frac{kM^2 \left[1 + (k-1)M^2\right]}{2(1-M^2)} 4f \frac{dx}{D}. \quad (3.38)$$

З рівняння (3.36), виключаючи dp/p за допомогою (3.38), маємо

$$\frac{dV}{V} = \frac{kM^2}{2(1-M^2)} 4f \frac{dx}{D}. \quad (3.39)$$

Використовуючи (3.34)

$$\frac{dT}{T} = -\frac{k-1}{2} M^2 \frac{dV^2}{V^2} = -\frac{k(k-1)M^4}{2(1-M^2)} 4f \frac{dx}{D}. \quad (3.40)$$

За допомогою (3.35) одержуємо

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dV^2}{V^2} = -\frac{kM^2}{2(1-M^2)} 4f \frac{dx}{D}. \quad (3.41)$$

Використовуючи (3.33), (3.39) і (3.40), маємо

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{kM^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)}{(1-M^2)} 4f \frac{dx}{D}. \quad (3.42)$$

Нарешті, з (3.37)

$$\frac{dp_0}{p_0} = -\frac{kM^2}{2} 4f \frac{dx}{D}. \quad (3.43)$$

Напрями в змінах властивостей потоку відповідно до (3.38) – (3.43) залежать від величини числа M (більше або менше одиниці). Це пов'язано з наявністю в знаменниках рівнянь виразу $(1-M^2)$. У результаті можна зробити такий висновок:

	Дозвук	Надзвук
Тиск, p	зменшується	збільшується
Число Маха, M	збільшується	зменшується
Швидкість, V	збільшується	зменшується
Температура, T	зменшується	збільшується
Густина, ρ	зменшується	збільшується
Тиск гальмування, p_0	зменшується	зменшується

Звідси бачимо, що число Маха завжди прямує до одиниці. Плавний перехід від дозвуку у надзвук або від надзвуку у дозвук неможливий. Якщо $M < 1$, то на деякій відстані, яку називають критичною

довжиною труби, потік досягає критичної швидкості ($M = 1$). Якщо критична швидкість досягається, то критичний перетин обов'язково повинен збігатися з вихідним перетином труби.

На перший погляд викликає здивування той факт, що тертя прискорює потік у дозвуковій зоні. І, можливо, ще дивовижнішим є той факт, що тертя викликає збільшення тиску в надзвуковій зоні течії.

Лінія Фанно. Розглянемо стаціонарну течію робочого тіла в трубі (рис. 3.4).

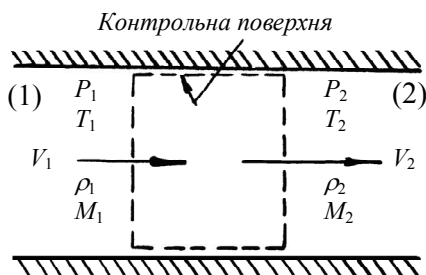


Рис. 3.4. Контрольна поверхня при аналізі течії в трубі постійного перетину

У разі відсутності тертя і теплообміну із зовнішнім середовищем основними рівняннями, що описують процес руху, будуть:

1. Рівняння енергії

$$i_1 + V_1^2/2 = i_2 + V_2^2/2. \quad (3.44)$$

2. Рівняння витрати

$$G/A = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2. \quad (3.45)$$

3. Рівняння зміни кількості руху

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (3.46)$$

одержуємо з

$$(p_1 - p_2)A = G(V_2 - V_1) = (\rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2)A.$$

4. Рівняння стану

$$\rho = \rho(p, i), \quad T = T(p, i), \quad s = s(p, i). \quad (3.47)$$

Для фіксованого стану (1), використовуючи рівняння енергії (3.44), витрати (3.45) і стану (3.47), в i - s – діаграмі можна легко побудувати сукупність станів (2), які утворюють криву, що проходить через точку 1, звану лінією Фанно (рис. 3.5). Побудову можна здійснити таким чином: задаємося значенням V_2 , потім ρ_2 визначаємо з (3.45), i_2 рахуємо за допомогою (3.44), p_2 знаходимо, використовуючи $\rho = \rho(p, i)$, s_2 визначаємо за $s = s(p, i)$. Повторюючи згадані вище обчислення для різних величин V_2 , можна легко побудувати лінію Фанно. Оскільки не береться до уваги рівняння кількості руху, то лінія Фанно представляє стани з однаковою масовою витратою на одиницю площі і однаковою ентальпією гальмування, але не обов'язково з однаковою силовою дією на контрольну поверхню. У загальному випадку наявність тертя в трубі і приводить із стану (1) уздовж лінії Фанно до будь-якого іншого стану. Лінія Фанно

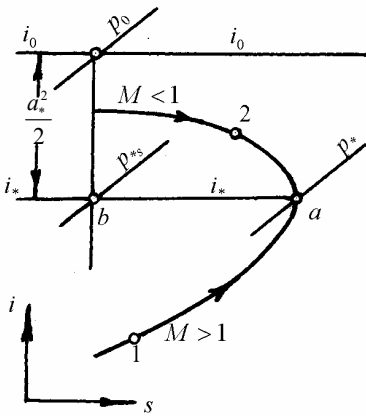


Рис. 3.5. Лінія Фанно

(рис. 3.5) і зображує процес течії в трубі постійного перетину з тертям в i - s – діаграмі.

Підкреслимо, що критичний тиск при течії з тертям не дорівнює критичному тиску при ізоентропійному русі, хоча критичні швидкості в обох випадках однакові. Критичним параметрам при ізоентропійній течії відповідає точка b , тоді як при течії в трубі з тертям критичним параметрам на i - s –

діаграмі відповідає точка a і, отже, критичній витраті через трубу. Досвід показує, що режими з надзвуковою швидкістю на вході в

трубу виявляються нестійкими і процес йде з утворенням стрибків ущільнення.

III. Рух в каналі постійного перетину з тепловою дією

Розглянемо процес без тертя, але зі зміною загальмованої ентальпії або температури гальмування.

Такий процес важко досягти на практиці. Якщо температура гальмування зростає або падає внаслідок теплообміну із зовнішнім середовищем, зв'язок механізмів тертя і теплопередачі забезпечує наявність тертя. Аналогічно, якщо загальмована температура змінюється в результаті згоряння, міняється хімічний склад. Далі зміна температури гальмування внаслідок випаровування рідини в газовому потоці означає, що і масова витрата, і хімічна структура змінюються.

Незважаючи на це, багато вельми важливих для практики висновків можна одержати шляхом аналізу процесу так званої простої T_0 зміни. Ці висновки справедливі, коли відхилення від допущеної моделі незначні. Наприклад, у разі теплообміну із зовнішнім середовищем ефектом тертя на одиницю довжини труби можна знехтувати, коли різниця температур між стінкою труби і рухомим потоком велика. Згоряння окремих видів палива в повітряному середовищі (наприклад, водню) приводить до незначної зміни хімічного складу в порівнянні з ефектом зміни температури гальмування.

Лінія Релея. Для фіксованого стану (1), використовуючи рівняння нерозривності (3.45), зміни кількості руху (3.46), стану (3.47), в i - s діаграмі можна побудувати сукупність станів (2), які утворюють криву, що проходить через точку 1, звану *лінією Релея* (рис. 3.6). Для її побудови задаємося величиною V_2 , визначаємо ρ_2 з (3.45), зна-

ходимо p_2 з допомогою (3.46), i_2 обчислюємо з $\rho = \rho(p, i)$, s_2 рахуємо за рівнянням $s = s(p, i)$. Оскільки при побудові лінії Релея не

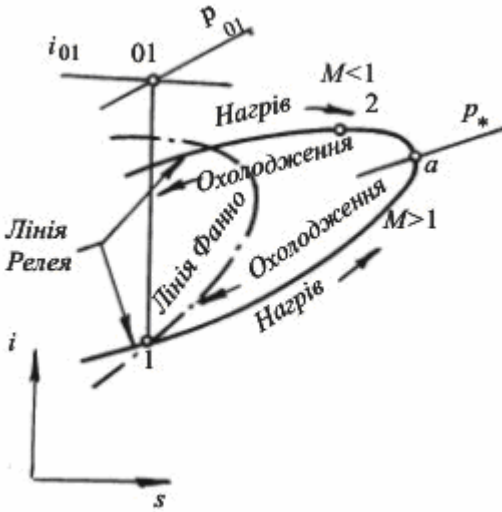


Рис. 3.6. Лінія Релея

користувалися рівнянням енергії, то всі точки на лінії Релея в загальному випадку мають різні ентальпії гальмування, і перехід від одного стану до іншого уздовж лінії Релея можливий тільки за допомогою теплообміну. В точці a (рис.3.6) дотична до лінії Релея вертикальна ($s_a = const$). Тобто в цій точці (точці максимальної ентропії на лінії Релея) швидкість потоку дорівнює швидкості звуку і $M = 1$. Гілка лінії Релея, розташована вище за точку a , відповідає дозвуковій течії, нижче – надзвуковій.

Те, що в точці a лінії Релея (рис. 3.6) швидкість досягає швидкості звуку, можна довести, одержавши для даного випадку вираз для швидкості потоку через зміну густини і тиску:

$$p + \rho V^2 = const, \quad (3.48)$$

$$\rho VA = G = const. \quad (3.49)$$

З рівняння нерозривності (3.49)

$$V = \frac{G}{A} \cdot \frac{1}{\rho}; \quad V^2 = \frac{G^2}{A^2} \cdot \frac{1}{\rho^2}; \quad \rho V^2 = \frac{G^2}{A^2} \cdot \frac{1}{\rho}.$$

Підставляючи знайдене значення ρV^2 в (3.48), маємо

$$p + \frac{G^2}{A^2} \cdot \frac{1}{\rho} = const; \quad dp = \frac{G^2}{A^2} \cdot \frac{d\rho}{\rho^2}; \quad \frac{dp}{d\rho} = \frac{G^2}{A^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} = V^2.$$

Тобто для процесу течії, що відповідає лінії Релея, $V = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$.

Для точки a

$$V_a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = V_* = a_*.$$

Оскільки процес термодинамічно оборотний, теплопідвід повинен супроводжуватися збільшенням ентропії, тепловідвід – її зменшенням. У дозвуковій зоні число Маха збільшується з підігрівом і зменшується з охолодженням. При надзвуковій швидкості, навпаки, число Маха зменшується з підведенням тепла і збільшується з охолодженням.

Отже, підведення тепла до дозвукового потоку приводить до зростання швидкості газу до досягнення швидкості звуку. Подальше прискорення потоку можливе шляхом відведення теплоти. Даний канал постійного перетину називають *тепловим соплом*.

Тобто підведення тепла, як і тертя, завжди має тенденцію наближити M до одиниці. Охолодження змінює значення числа Маха у напрямі віддалення від $M = 1$.

При підведенні тепла як при надзвуковій, так і дозвуковій течії, кількість підведеного тепла не може бути більше за таке, що забезпечує на виході число $M = 1$.

Якщо кількість тепла, що підводиться, дуже велике, відбувається *запирання* потоку, тобто первинне значення M буде зменшено до величини, яка дозволить підвести тепло. При горінні або хімічних

реакціях можлива поява в потоці *теплових стрибків*, коли виділення теплоти відбувається на дуже малій ділянці каналу.

Реальними виявляються теплові стрибки двох типів:

- 1) $M_1 > 1$ і $M_2 < 1$ – надзвукові стрибки, в яких виділення теплоти супроводжується стисненням газу ($p_2 > p_1$);
- 2) $M_1 < 1$ і $M_2 < 1$ – дозвукові стрибки, в яких виділення теплоти супроводжується розрідженням газу ($p_2 < p_1$).

На рис. 3.7 показані в i - s діаграмі криві станів, що беруть свій початок в точці 1, відповідні течії при змінюючій поперечній площі

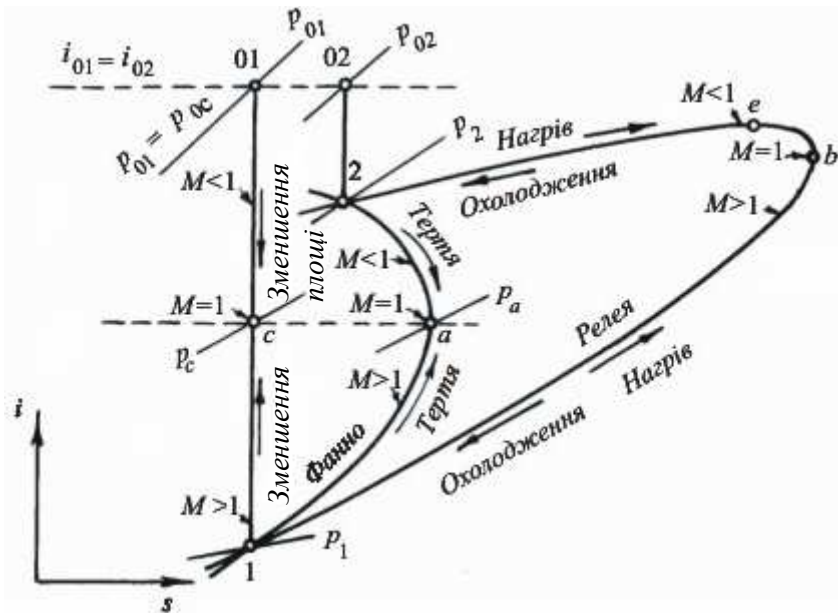


Рис. 3.7. Порівняння кривих процесів одновимірної течії в i - s діаграмі для випадків простої зміни площі, течії з тертям і зміною повної ентальпії i_0 (підведення і відведення тепла). Точка 1 характеризує початковий стан робочого тіла, точки c , a і b відповідають умові $M=1$

каналу, течії в трубі постійного перетину з тертям і течії в каналі постійного перетину з підведенням (відведенням) тепла.

Питання для самоперевірки

1. Як визначається швидкість звуку для ідеального газу і реального робочого тіла?
2. Які форми рівняння енергії вам відомі?
3. Як підрахувати параметри ізоентропійного гальмування?
4. Як підрахувати критичні параметри?
5. Одержіть вираз для характерних швидкостей потоку через параметри
6. Які умови подібності фізичних явищ?
7. Що таке “критерій подібності” і як їх обчислити?
8. Одержіть співвідношення газодинамічних функцій одновимірною адіабатичного потоку.
9. Як впливає тертя при русі газу в трубі постійного перетину на швидкість потоку в дозвуковій і надзвуковій зоні течії?
10. Що таке “лінія Фанно”? Як її побудувати?
11. Що таке “лінія Релея”? Опишіть її побудову.
12. Що таке “теплове сопло”? Поясніть принцип його роботи.

Задачі

3.1. Літак летить на висоті 12000 м ($t = -38^\circ\text{C}$, $p = 0,188$ бар) із швидкістю 640 км/год.

Нехтуючи ефектом тертя слід:

- a) визначити критичну швидкість повітря щодо літака;
- б) визначити максимально можливу швидкість повітря щодо літака.

3.2. Стисливість рідини звичайно виражається залежно від об’ємного модуля

стисливості $\beta = \rho \frac{dp}{d\rho}$. Показати, що $a = \sqrt{\beta/\rho}$.

3.3. До якого тиску повинна бути стиснута вода, щоб вона залишала сопло при атмосферному тиску зі швидкістю струменя, рівною швидкості звуку?

Припускаємо, що постійна об’ємного модуля стисливості дорівнює 20700 бар.

3.4. Показати, що для ідеального газу зміна тиску під час переходу через малий імпульс тиску визначається як

$$\frac{dp}{p} = k \frac{dV}{a}$$

і що зміна в абсолютній температурі визначається як

$$\frac{dT}{T} = (k-1) \frac{dV}{a}$$

3.5. Імпульс стиснення змінює швидкість рідини, через яку він проходить, на 3 м/с. Підрахувати підвищення тиску (*бар*) при проходженні імпульсу для (а) води і (б) повітря при 0,101325 МПа і 20 °С .

3.6. Потік повітря тече в трубі діаметром 10 см з витратою 1 кг/с. Температура гальмування 35 °С . В одному з перетинів труби статичний тиск дорівнює 0,4 бар.

Визначити число Маха, швидкість і тиск гальмування в цьому перетині.

3.7. Ідеальний газ ($k = 1,4$, $R = 287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$) підводиться до звужуючого соп-

ла при низькій швидкості, тиску 7 бар і температурі 280 °С . Витікання з сопла відбувається в атмосферу (тиск 0,101325 МПа).

Вважаючи що течія адиабатична, без тертя і масова витрата потоку дорівнює 0,5 кг/с, визначити:

- тиск у вихідній площині, *бар*;
- швидкість у вихідній площині, *м/с*;
- площу поперечного перетину вихідної площини, *м²*.

3.8. Показати, що для ізоентропійної течії ідеального газу відношення тиску, температури і густини до відповідних критичних значень визначається як

$$\frac{p}{p_*} = \left[\frac{k+1}{2 \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2 \right)} \right]^{\frac{k}{k-1}} ; \quad \frac{T}{T_*} = \frac{k+1}{2 \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2 \right)} ;$$

$$\frac{\rho}{\rho_*} = \left[\frac{k+1}{2 \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2 \right)} \right]^{\frac{1}{k-1}} .$$

3.9. Трубка Піто для вимірювання статичного тиску показує тиск 0,364 бар і різницю між повним і статичним тиском 493 мм рт. ст. Барометр показує 755 мм рт. ст., температура гальмування повітряного потоку 26,6 °С . Визначити швидкість повітря, припускаючи (а) повітря нестисливим, (б) повітря стисливим.

3.10. Повітряний потік, що протікає в трубі при тиску 1,4 бар, має число $M = 0,6$ і масову витрату 0,25 кг/с.

Площа поперечного перетину труби дорівнює 6,45 см².

а) Визначити температуру загальмованого потоку в °С ;

б) Яке максимальне відсоткове зменшення площі можливе без зменшення масової витрати?;

в) Для максимально зменшеної площі частини (б) визначити швидкість і тиск в мінімальному перетині, за припущення відсутності тертя і підведення або відведення тепла.

3.11. У заданій точці трубки струму повітря тече зі швидкістю 150 м/с, має тиск 0,6895 бар і температуру 5 °С відповідно.

а) Визначити наступні властивості в точці вниз по потоку трубки струму, де площа поперечного перетину на 15 % менше, ніж у верхньому перетині: загальмовані температуру і тиск, тиск і температуру потоку, швидкість, число Маха і величину λ .

б) Визначити максимально можливе зменшення в площі поперечного перетину трубки струму.

Для перетину з мінімальною площею визначити параметри, перелічені в (а).

3.12. Коли тіло поміщене в потік, який на нескінченно великій відстані вгору по потоку однорідний з параметрами V_∞ , p_∞ , M_∞ і т.д., місцевий тиск на поверхні тіла звичайно подають залежно від безрозмірного коефіцієнта C_p :

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2}.$$

а) Показати, що величина коефіцієнта тиску, відповідного появі критичної швидкості, визначається виразом

$$C_p^* = \frac{\left[\frac{2 + (k-1)M_\infty^2}{k+1} \right]^{\frac{k}{k-1}} - 1}{\frac{k}{2} M_\infty^2};$$

б) Побудувати залежність $\log(-C_p^*)$ від $\log M_\infty$ для $k = 1,4$ і величин M_∞ між 0,1 і 1,0;

в) Припустимо, що літак летить зі швидкістю 800 км/год. Який максимальний коефіцієнт тиску можна одержати на крилах без появи де-небудь надзвукової швидкості?

3.13. Число Маха на виході з сопла реактивного двигуна складає 1,8. Знайти величину приведеної витрати газу, якщо коефіцієнт адіабати дорівнює 1,33.

3.14. Визначити швидкість витікання газу з сопла, якщо число λ на виході складає 1,7, а температура гальмування, $t_0 = 150^\circ\text{C}$, $k = 1,4$.

3.15. При течії повітря з решітки профілів у атмосферу ($t = 15^\circ\text{C}$, $p = 0,101325 \text{ МПа}$) число $\lambda = 1,6$. Визначити T_* , p_* , ρ_* в горлі лопаточних каналів, а також знайти величину витрати повітря, якщо число каналів дорівнює 5, висота лопаток 25 мм, розмір геометричного горла 9 мм.

3.16. На висоті $H = 1100 \text{ м}$ літак досяг швидкості 300 м/с. З якою швидкістю відбувається політ – дозвуковою чи надзвуковою?

Примітка. На цій висоті $t = 7,6^\circ\text{C}$.

3.17. Визначити швидкість витікання повітря з баку якщо тиск в ньому складає 1100 мм рт. ст., температура $t = 100^\circ\text{C}$, а протитиск дорівнює атмосферному.

3.18. Визначити швидкість розповсюдження звуку в струмені повітря, що рухається зі швидкістю 260 м/с, якщо витікання проходить з бака з температурою 50°C .

3.19. Визначити швидкість витікання газів з реактивного сопла ракети ($k = 1,35$), що рухається в космосі, якщо температура гальмування газів $t_0 = 1100^\circ\text{C}$. Яка швидкість встановиться в горлі сопла?

3.20. Розглянути сопло з ККД η між входом і будь-яким довільним перетином вниз по потоку.

а) Вивести вираз

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 - \frac{1}{\eta} \frac{\frac{k-1}{2} M^2}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)} \right]^{\frac{k}{k-1}} ;$$

б) Одержати відповідні вирази для

$$\frac{G}{A} \sqrt{T_0} ;$$

в) Показати, що $M = 1$ не має місця в мінімальному перетині і визначити число Маха в горлі.

3.21. Розглянути надзвукове сопло, виконане з відношенням виходу до горла $2,0$ ($A/A_* = 2$). Сопло живиться повітрям при низькій швидкості його на входу при $p_0 = 10 \text{ бар}$ і $t_0 = 100^\circ \text{C}$. Загальний ККД сопла від входу до виходу дорівнює 90% , але течія ізоентропійна до горла.

Підрахувати тиск, швидкість і число Маха на виході і порівняти з відповідними величинами для ізоентропійної течії.

3.22. Бак, що має об'єм 30 м^3 , наповнений повітрям з $p_0 = 10 \text{ бар}$, $t_0 = 100^\circ \text{C}$. Раптово повітря починає витікати в атмосферу ($p = 0,101325 \text{ МПа}$) за відсутності тертя через звужуюче сопло з вихідною площею 5 см^2 . Припускаємо, що потік квазістаціонарний, тобто що рівняння стаціонарної течії можуть бути застосовні до сопла в будь-який момент часу. Більше того, вважаємо, що бак ідеально ізолюваний від навколишнього середовища. Побудувати графік зміни тиску в баці від часу витікання.

3.23. Повітря тече з бака через коротке звужуюче сопло, сполучене з теплоізолюваною трубою діаметром D . На вході в трубу $M_I = 0,5$. Коефіцієнт тертя

$$f = \frac{\tau_w}{\rho V^2 / 2} = 0,015 \quad (V - \text{середня за витратою швидкість повітря}).$$

Знайти відносну критичну довжину труби l^*/D , тобто максимально можливу за заданих умов, у вихідному перетині якої виникає критична швидкість.

3.24. За умовою задачі 3.23 побудувати залежність зміни безрозмірної швидкості $\lambda = V/a_*$ і безрозмірної температури $\tau = T/T_0$ уздовж труби.

3.25. За умовою задачі 3.23 знайти критичний тиск p^* , тобто тиск у вихідному перетині труби критичної довжини. Тиск в баку $p_0 = 1 \text{ МПа}$.

3.26. За умов задач 3.23 і 3.25 побудувати розподіл безрозмірного статичного тиску p/p_0 уздовж труби (p_0 – тиск ізоентропійного гальмування у вхідному перетині труби).

3.27. За умов задач 3.23 і 3.25 побудувати розподіл відносного тиску ізоентропійного гальмування уздовж труби p_0/p_{01} (p_0 – тиск ізоентропійного гальмування у довільному перетині труби, p_{01} – тиск ізоентропійного гальмування у вхідному перетині труби).

3.28. Повітря тече по трубі з постійною площею поперечного перетину із швидкістю $V = 100 \text{ м/с}$. Температура повітря $T = 280 \text{ К}$.

Яку максимальну кількість теплоти Q_{\max} можна підвести до одиниці маси текучого повітря?

Теплоємність повітря в даному діапазоні температур $c_p=1020 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}=\text{const}$. Тертям знехтувати.

РОЗДІЛ 4. ДВО – І ТРИВИМІРНИЙ РУХ РІДИНИ

4.1. Безвихоровий рух рідини. Потенціал швидкостей і функція струму

Вивчимо спочатку один окремий, але досить важливий випадок руху рідини – рух, що відбувається без обертання часток.

Обертання в площині. Щоб визначити аналітичний вираз для обертання рідини в точці двовимірного потоку, розглянемо нескінченно малі й взаємно перпендикулярні лінії рідини OA й OB на рис. 4.1.

Рух кожної з цих ліній може бути розкладений на поступальний й обертальний. Для лінії OA обертання може бути, якщо u -компонента швидкості в точці A буде відрізнятися від u -компоненти швидкості в точці O .

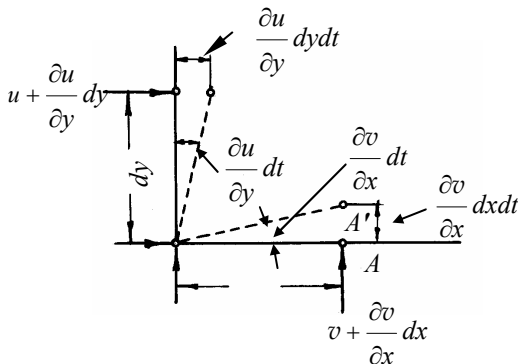


Рис. 4.1. До визначення обертання рідини в точці

Оскільки для нас має значення різниця у швидкостях, уявимо собі, що ми рухаємося разом із точкою O . Швидкість точки A стосовно O дорівнює $(\partial v / \partial x) dx$

$$AA' = \frac{\partial v}{\partial x} dx dt .$$

Тоді кут AOA' , взятий позитивним при відрахунку проти годинникової стрілки, дорівнюватиме

$$\angle AOA' = \frac{\partial v}{\partial x} dt ,$$

а швидкість зміни цього кута дорівнює $\partial v / \partial x$. Аналогічно кутова швидкість лінії OB дорівнює $-\partial u / \partial y$.

Визначаючи компоненти кутової швидкості обертання частинки (вони називаються іноді компонентами вихора) як середні арифметичні з відповідних кутових швидкостей ребер, одержуємо для цих компонентів наступні формули:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right). \quad (4.1)$$

У векторній формі вектор обертання $\vec{\omega}$ може бути поданий як

$$2\vec{\omega} = \vec{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Або в більш компактній формі

$$2\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V}. \quad (4.2)$$

Розписавши цей вираз, одержуємо

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}; \\ \vec{V} &= u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}; \\ \vec{\nabla} \times \vec{V} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\ &+ \vec{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Для добре обтічних тіл обертання часток фактично відсутнє, за винятком трьох областей:

- (i) приграничного шару;
- (ii) розриву швидкостей (тобто стрибки ущільнення);
- (iii) супутний струмінь за тілом.

Тобто для придатнообтічних тіл можна припустити, що обертання частинок у потоці відсутнє практично на всьому протязі тіла (розуміється поза перерахованими областями).

Тоді у випадку відсутності обертання $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ й з (4.1) одержуємо

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Розглянемо вираз

$$udx + vdy + wdz, \quad (4.3)$$

яке буде повним диференціалом у випадку рівності один одному хрест-навхрест узятих часткових похідних.

Ця умова повністю збігається з раніше написаними рівностями. Таким чином, можна сказати наступне: якщо рух рідини відбувається-

ся без обертання частинок, то вираз (4.3) є повним диференціалом деякої функції координат, позначеної нами через $\varphi(x, y, z)$.

$$d\varphi = udx + vdy + wdz .$$

З іншого боку можна записати

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz .$$

Оскільки в обох виразах dx, dy, dz є довільні збільшення координат, то з рівності виразів для $d\varphi$ випливає рівність коефіцієнтів відповідно при dx, dy, dz :

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} . \quad (4.4)$$

Або у векторній формі

$$\vec{V} = \text{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi ,$$

$$2\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0 .$$

Гельмгольц запропонував назвати функцію $\varphi(x, y, z)$, що тут відіграє таку ж роль, як потенціал сили в загальній механіці, *потенціалом швидкостей*.

Усякому руху рідини, що відбувається без обертання частинок, відповідає свій потенціал швидкостей, і навпаки, якщо існує потенціал швидкостей, то рух відбувається без обертання частинок; тому такий рух називається *потенційним*.

Функцію φ можна подати геометрично у вигляді сімейства поверхонь

$$\varphi(x, y, z) = \text{const} .$$

Такі поверхні, у всіх точках яких потенціал зберігає постійне для кожної поверхні значення, називаються *поверхнями рівного потенціалу*.

Лінії струму ортогональні до поверхонь рівного потенціалу.

Для нестисливої рідини рівняння нерозривності має вигляд (2.6)

$$\operatorname{div} \vec{V} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Підставляючи в цей вираз замість компонентів швидкості їх вираження через потенційну функцію φ (за формулами (4.4)), одержимо

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.5)$$

Це останнє рівняння відоме за назвою *рівняння Лапласа*; функції, які йому задовольняють, називаються гармонійними. Рівняння Лапласа відіграє важливу роль у таких областях, як теплопередача у твердих тілах, течія електроструму через провідник.

Багато рішень, які були знайдені для цих добре досліджених областей, можуть бути застосовані при рішенні в полі течії нестисливої рідини.

Рівняння (4.5) є *лінійним* і, отже, має ту властивість, що *сума будь-якого числа окремих рішень його також є рішенням*.

Нехай φ_1 і φ_2 – окремі розв'язки рівняння Лапласа. Це значить, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned}$$

Тоді $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ також є розв'язком рівняння Лапласа, тому що

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) = 0.$$

Таким чином, сума потенціалів швидкостей потоків нестисливої рідини завжди являє собою також потенціал швидкостей деякого потоку нестисливої рідини.

Тобто в потоці, що відповідає сумарному потенціалу, швидкість у кожній точці дорівнює геометричній сумі швидкостей складаємих потоків

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

Функція струму. Також як відсутність обертання є необхідною й достатньою умовою для існування потенціалу швидкостей, так рівняння нерозривності для *стаціонарного двомірного* потоку є необхідною й достатньою умовою для існування іншої функції – *функції струму*.

Під цю категорію потрапляє плоска і вісесиметрична течія рідини.

У випадку плоскої стаціонарної течії рівняння нерозривності (2.5) приймає вигляд

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0.$$

Звідси маємо

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = -\frac{\partial}{\partial y}(\rho v). \quad (4.6)$$

Введемо функцію струму $\psi(x, y)$.

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy.$$

Повний диференціал функції ψ припускає рівність хрест нахрест узятих похідних

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right). \quad (4.7)$$

Порівнюючи (4.6) і (4.7), можемо записати, що повний диференціал функції ψ визначається умовами

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \rho u, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\rho v.$$

Звідси одержуємо

$$u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (4.8)$$

Тепер, враховуючи рис. 4.2, масова витрата потоку dG крізь довільну поверхню AB (з висотою рівній одиниці перпендикулярної площини паперу), обмежену двома сусідніми поверхнями постійного ψ , дорівнює

$$dG = \rho u dy - \rho v dx.$$

Тут поставимо знак “мінус”, тому що вважаємо витрату рідини крізь елементарну площадку позитивною, якщо швидкість, нормальна до площадки, спрямована зліва направо, коли дивитися уздовж позитивного напрямку основи площадки.

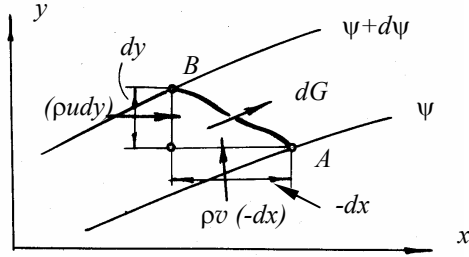


Рис. 4.2. До визначення фізичного значення функції струму

З іншого боку, згідно з визначенням функції струму ψ

$$d\psi = \rho v dy - \rho v dx ,$$

тобто

$$d\psi = dG .$$

Отже, бачимо, що зміни величини ψ між двома лініями постійного ψ визначаються масовою витратою рідини між цими двома лініями.

З того факту, що для стаціонарного потоку масова витрата потоку між лініями струму постійна, виходить, що лінії постійного ψ є лініями струму, звідси виходить назва “*функція струму*”.

Диференціальне рівняння ліній струму записується за допомогою функції ψ у вигляді

$$d\psi = 0 ,$$

а загальний його інтеграл – у вигляді

$$\psi(x, y) = const .$$

Остання рівність являє собою в кінцевій формі рівняння сімейства ліній струму.

Для нестисливої рідини

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Якщо в потоці відсутнє обертання частинок, то

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Підставляючи у формулу замість u і v їх вирази через ψ , одержуємо наступне рівняння для визначення функції струму плоского потоку

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (4.9)$$

Тобто функція струму в плоскому потенційному потоці повинна бути рішенням рівняння Лапласа, тобто повинна бути гармонійною функцією, так само як і потенціал швидкостей φ , що у цьому випадку задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Таким чином, як і у випадку потенціалів швидкостей, *сума функцій струму нестисливої рідини потенційного потоку являє собою також функцію струму.*

Тобто в розглянутому випадку маємо

$$\psi = \psi_1 + \psi_2,$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2.$$

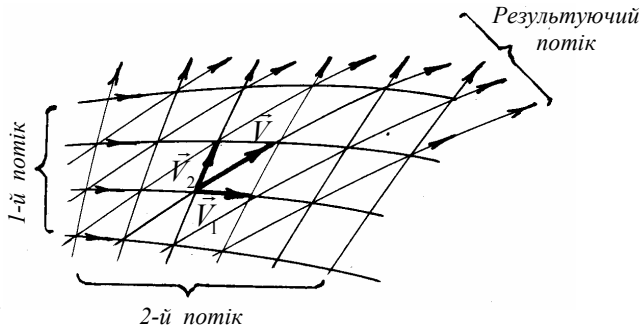


Рис. 4.3. Графічне визначення ліній струму результуючого потоку

Операцію додавання φ й ψ називають накладенням струмів.

Остання рівність дозволяє дати дуже простий спосіб *графічного визначення ліній струму результуючого потоку*, якщо відомі лінії струму потоків, що накладаються.

З'ясуємо, яким умовам повинно задовольняти креслення ліній струму потоків, що накладаються, для того, щоб сторони кліток відображали в певному масштабі (одному і тому же для всього креслення) відповідні вектори швидкостей.

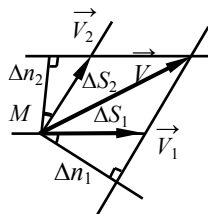


Рис. 4.4. До умови графічного накладення потоків

ΔS_1 і ΔS_2 – довжини сторін якої-небудь клітки. Рівність масштабів для векторів швидкості обох потоків запишемо у вигляді пропорції

$$\frac{V_1}{\Delta S_1} = \frac{V_2}{\Delta S_2}.$$

З умови подібності трикутників

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta n_1} = \frac{\Delta S_2}{\Delta n_2},$$

тоді попередню умову запишемо у вигляді

$$\frac{V_1}{\Delta n_1} = \frac{V_2}{\Delta n_2},$$

або

$$V_1 \cdot \Delta n_2 = V_2 \cdot \Delta n_1.$$

Добуток $V \cdot \Delta n$ можна розглядати як об'єм рідини, що протікає за одиницю часу між двома сусідніми лініями струму. Помноживши об'єми на густину, однакову для обох об'ємів (рідина нестислива), одержуємо

$$\Delta G_1 = \Delta G_2.$$

При дотриманні цієї рівності будуть однакові масштаби, в яких зображені вектори швидкостей обох потоків у *даній точці*.

Завдання кінематики потенціального потоку нестисливої рідини з математичної точки зору зводяться, таким чином, до розв'язання рівняння Лапласа або рівнянь (4.5), (4.9) за певних граничних умов. Однак це завдання представляє значні математичні труднощі. Основні труднощі полягають тут не в складанні загального інтеграла, а у визначенні такого частинного рішення, що задовольняло б граничним умовам даного завдання.

У загальному випадку, тобто для тіла будь-якої форми, вміщеного в потік, це завдання досить складне. Тому особливий інтерес і значення являють ті нечисленні найпростіші випадки потенціального потоку, для яких можна точно визначити потенціал швидкостей і функцію струму, виходячи з відомого розподілу швидкостей, тобто не розв'язуючи рівняння Лапласа. Сюди відносяться поступальний потік, джерело й стік, вихор на площині. Знаючи потенціали швид-

костей цих найпростіших потоків, можна потім, комбінуючи їх між собою так, як це докладно наводиться в [9], одержувати більш складні потоки. Виявляється, що при належній комбінації перелічених найпростіших потоків можна, загалом кажучи, одержати потенціальний потік, що обтікає будь-яке дане тіло.

4.2. Приклади найпростіших потенціальних потоків ідеальної нестисливої рідини і їхнє накладення. Теорема М.Є. Жуковського

Нижче розглянемо найбільш характерні приклади плоских, сталих потенціальних потоків нестисливої рідини, накладенням яких можуть бути отримані складні практично важливі потоки.

1. Прямолінійний рівномірний потік. Нехай плоскопаралельний потік заданий потенціалом

$$\varphi = ax + by, \quad (4.10)$$

де a і b – деякі дійсні числа.

Тоді

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = b, \quad V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Знайдемо лінії струму з рівняння

$$d\psi = udy - vdx$$

і маємо

$$d\psi = ady - bdx,$$

звідки

$$\psi = ay - bx.$$

Лінії струму являють собою сімейство паралельних прямих $\psi = ay - bx = const$, нахилених до осі x під кутом α , тангенс

якого $\operatorname{tg}\alpha = v/u = b/a$ (рис. 4.5).

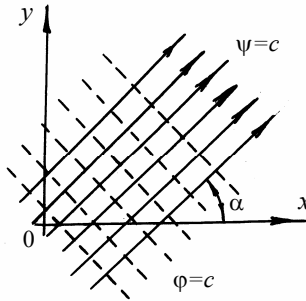


Рис. 4.5. Лінії струму й лінії рівного потенціалу для прямолінійного рівномірного потоку

Якщо потік спрямований паралельно осі x , функції φ і ψ мають вигляд $\varphi = ax$, $\psi = ay$; при напрямку потоку паралельно осі y – $\varphi = by$, $\psi = -bx$.

2. Течія усередині прямого кута. Припустимо, що плоскопаралельний потік заданий наступним потенціалом швидкості

$$\varphi = a(x^2 - y^2), \quad (4.11)$$

де a – постійна й більше нуля.

Згадаємо, що для нестисливої рідини

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (4.12)$$

З першого співвідношення (4.12) знаходимо

$\psi = \int \frac{\partial\varphi}{\partial x} dy + C(x)$, тому що інтегруємо тільки за y . Підставляючи

сюди $\partial\varphi/\partial x$ з (4.11), знаходимо

$$\psi = \int 2axy dy + C(x) = 2axy + C(x). \quad (4.13)$$

Диференціюючи (4.13) за x , маємо

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2ay + \frac{dC}{dx}.$$

Використовуючи другий вираз (4.12) для $\partial \phi / \partial y$, знайденого з (4.11), одержуємо

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -2ay = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2ay - \frac{dC}{dx}.$$

Або $dC/dx = 0$, $C(x) = \text{const}$.

Підставляючи $C(x)$ в (4.13), одержуємо $\psi = 2axy + \text{const}$. Для знаходження ліній струму зрівнюємо функцію струму ψ з постійною

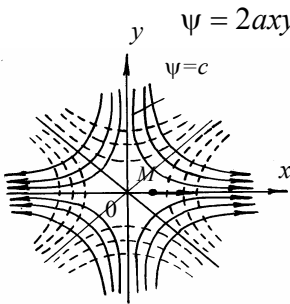


Рис. 4.6. Потенційна течія усередині прямого кута

$\psi = 2axy = \text{const}$, звідки $xy = C$.

Тобто лінії струму являють собою сімейство гіпербол з асимптотами, що є осями координат (рис. 4.6). При $C > 0$ ($x > 0, y > 0$, або $x < 0, y < 0$) вітки гіпербол розташовуються в першій і третій чвертях. При $C < 0$ (або $x < 0, y > 0$, або $x > 0, y < 0$) вітки гіпербол розташовані в другій і четвертій чвертях.

Якщо $C = 0$, то лініями струму є осі координат $x = 0, y = 0$, тобто осі координат є “нульовими” лініями струму. Незавжно перекопати, що на початку координат $u = v = 0$ і ця точка називається *критичною точкою*.

Знайдемо напрямок течії. Для точки M , у якій $x > 0, y = 0$, маємо $u_M = 2ax > 0, v_M = 0$, тобто потік тече в напрямку, показаному на рис. 4.6 суцільними лініями.

Рівняння сімейства екіпотенціальних ліній $\varphi = a(x^2 - y^2) = \text{const}$ являє собою сімейство гіпербол з асимптотами, що є бісектрисами координатних кутів, ортогональне до сімейства $xy = C$.

Якщо “нульові лінії” (позитивні частини осей x і y) прийняти за тверді стінки, то досліджувана течія буде являти собою течію усередині прямого кута.

3. Джерело і стік. Нехай потенціал швидкості заданий у наступному виді:

$$\varphi = \ln \sqrt{x^2 + y^2},$$

або в полярних координатах

$$\varphi = \ln r. \quad (4.14)$$

Далі

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy + C(x),$$

$$\psi = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dy + C(x) = \int \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + C(x).$$

Інтегруючи, маємо

$$\psi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + C(x). \quad (4.15)$$

Для визначення $C(x)$ продиференціюємо (4.15) за x :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) + C'(x) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + C'(x).$$

З іншого боку $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$.

Звідси $C'(x) = 0$, або $C(x) = const$.

Тобто функція струму для даної течії подається рівнянням (з точністю до довільної постійної)

$$\psi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \text{ або } \psi = \Theta. \quad (4.16)$$

Сукупність ліній струму $\psi = \Theta = const$ являє собою сімейство променів, що виходять із початку координат (рис. 4.7).

Очевидно, що $V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} > 0$, тобто напрямок швидкості збігається з позитивним напрямком полярного радіуса. Така течія називається течією від джерела. Дорівнявши потенціал швидкості постійному, одержуємо сімейство еквіпотенціальних ліній $\phi = \ln r = const$, тобто $r = const$.

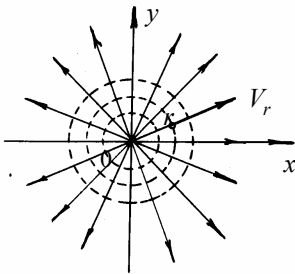


Рис. 4.7. Лінії струму й еквіпотенціальні лінії джерела

Це сімейство концентричних кіл. Нехай Q – секундна витрата рідини, що витікає, – потужність джерела.

З рівняння нерозривності $Q = 2\pi r V_r$.

$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{d\phi}{dr}$ (ϕ залежить тільки від r), тоді

$$Q = \frac{d\varphi}{dr} 2\pi r, \quad d\varphi = \frac{Q}{2\pi} \frac{dr}{r}, \quad \text{а} \quad \varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r.$$

Аналогічно, $\psi = \frac{Q}{2\pi} \Theta$.

Тобто нами показано, що вираз (4.14), (4.16) являють собою потенціал швидкості й функцію струму для джерела, потужність якого $Q = 2\pi$.

У випадку, коли рідина тече у зворотному напрямку, течія називається течією від *стоку*. У цьому випадку

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad \psi = -\frac{Q}{2\pi} \Theta. \quad (4.17)$$

4. Диполь. Це комбінація джерела потужністю $+Q$ і стоку потужністю $-Q$, поміщених на нескінченно малій відстані один від одного.

Потенціал диполя (рис. 4.8)

$$\varphi = \varphi_{\text{джер}} + \varphi_{\text{ст}} = \frac{Q}{2\pi} (\ln r_1 - \ln r_2) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2};$$

$$r_1 = \sqrt{(x+\varepsilon)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(x+\varepsilon)^2 + y^2}{(x-\varepsilon)^2 + y^2}} = \frac{Q}{4\pi} \ln \frac{(x+\varepsilon)^2 + y^2 + (x-\varepsilon)^2 - (x-\varepsilon)^2}{(x-\varepsilon)^2 + y^2} = \\ &= \frac{Q}{4\pi} \ln \left[1 + \frac{4x\varepsilon}{(x-\varepsilon)^2 + y^2} \right] \end{aligned}$$

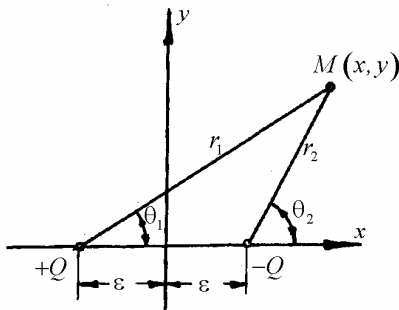


Рис. 4.8. Диполь

Розкладаючи в ряд за відомою формулою

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots,$$

де $z = \frac{4x\varepsilon}{(x-\varepsilon)^2 + y^2}$, зближуючи

джерело й стік ($\varepsilon \rightarrow 0$) і нехтуючи величинами другого порядку малості, одержимо

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \frac{4x\varepsilon}{(x-\varepsilon)^2 + y^2}. \quad (4.18)$$

Функція струму буде мати вигляд

$$\psi = \psi_{ист} + \psi_{ст} \frac{Q}{2\pi} (\Theta_1 - \Theta_2).$$

Оскільки $\operatorname{tg}\Theta_1 = \frac{y}{x+\varepsilon}$, $\operatorname{tg}\Theta_2 = \frac{y}{x-\varepsilon}$,

то

$$\operatorname{tg}(\Theta_1 - \Theta_2) = \frac{\operatorname{tg}\Theta_1 - \operatorname{tg}\Theta_2}{1 + \operatorname{tg}\Theta_1 \operatorname{tg}\Theta_2} = \frac{y(x-\varepsilon) - y(x+\varepsilon)}{x^2 - \varepsilon^2 + y^2} = \frac{-2y\varepsilon}{x^2 + y^2 - \varepsilon^2}$$

Звідси

$$\Theta_1 - \Theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{-2y\varepsilon}{x^2 + y^2 - \varepsilon^2},$$

тобто

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{-2y\varepsilon}{x^2 + y^2 - \varepsilon^2}.$$

Використовуючи відоме розкладання в ряд

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots,$$

де $z = \frac{-2y\epsilon}{x^2 + y^2 - \epsilon^2}$, і нехтуючи величинами другого порядку малості при $\epsilon \rightarrow 0$, одержуємо

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi} \frac{2y\epsilon}{x^2 + y^2 - \epsilon^2}. \quad (4.19)$$

При $\epsilon \rightarrow 0$ будемо вважати, що $2Q\epsilon \rightarrow M$ – деякій кінцевій величині (момент диполя). Величина M звичайно зображується у вигляді вектора, напрямком якого вказує на напрямок від стоку до джерела.

Вісь x – вісь диполя.

В границі при $\epsilon \rightarrow 0$ одержимо наступні вирази для функцій ϕ і ψ :

$$\phi = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (4.20)$$

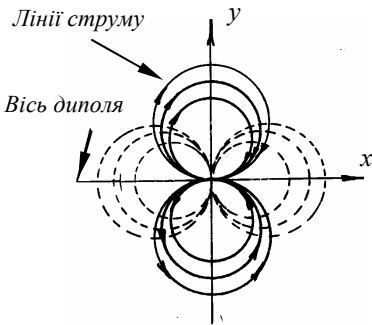


Рис. 4.9. Лінії струму й еквіпотенціальні лінії диполя

Для визначення ліній струму зрівняємо функцію струму ψ постійному, тобто $\frac{y}{x^2 + y^2} = C$, звідки

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}.$$

Це сімейство кіл із центрами на осі y , що дотикаються осі x на початку координат (рис. 4.9).

Рідина за зазначеними колами витікає з початку координат і знову в нього втікає. Очевидно, що витрата через довільний замкнений контур, що оточує диполь, дорівнює нулю.

Сукупність еквіпотенціальних ліній струму

$$y^2 + \left(x - \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}$$

являє собою сімейство кіл, ортогональних лініям струму, із центрами на осі x , що торкаються осі y на початку координат (рис. 4.9).

5. Вихор. Для плоского джерела відповідно до (4.17)

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \Theta.$$

Розглянемо тепер такий плоский потік, у якому потенціал швидкості φ й функція струму ψ поміняються місцями:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \Theta, \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \ln r,$$

де $Q > 0$ – деяка постійна, фізичний зміст якої для нового потоку потрібно визначити. У цьому випадку сукупність ліній струму – сімейство концентричних кіл із центрами на початку координат.

Знайдемо напрямок руху

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad V_s = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = \frac{Q}{2\pi r} > 0$$

Тобто швидкість V у точці M спрямована по дотичній до кола радіусом r у бік зростання кута Θ , тобто проти годинникової стрілки (рис. 4.10).

Такий рух називається плоским вихровим рухом.

Для з'ясування фізичного змісту постійної Q обчислимо значення циркуляції в розглянутому потоці

$$\Gamma = \oint V_s dS = \oint \frac{Q}{2\pi r} r d\Theta = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Theta = Q.$$

Тобто постійна Q дорівнює циркуляції Γ .

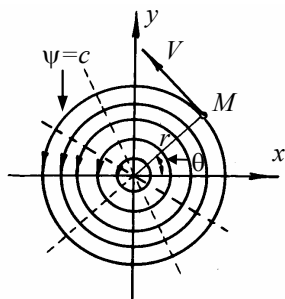


Рис. 4.10. Вихорова течія

Таким чином, вираз для потенціалу швидкості і функції струму плоского вихору приймає вигляд

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \Theta, \quad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (4.21)$$

Прийmemo за тверду границю одну з ліній струму $r = r_0$, що не порушить характеру потоку. Будемо розглядати течію поза цього кола.

Одержимо так зване *суто циркуляційне обтікання* нескінченно довгого (у напрямку осі z) круглого циліндра радіусом r_0 .

Швидкість V у будь-якій точці поза циліндром виражається так:

$V = \frac{\Gamma}{2\pi r}$. Максимального значення швидкість буде досягати на по-

верхні круглого циліндра $V_{max} = V_0 = \frac{\Gamma}{2\pi r_0}$.

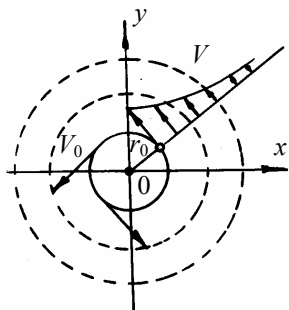


Рис. 4.11. Суто циркуляційне обтікання круглого циліндра

З віддаленням від циліндра швидкість буде спадати за гіперболічним законом

$$Vr = \frac{\Gamma}{2\pi} = const, \text{ що графічно}$$

зображено на рис. 4.11.

Як указувалося вище, комбінацією найпростіших потоків можна, загалом кажучи, одер-

жати потенційний потік, що обтікає будь-яке дане тіло. Наведемо приклади.

6. Безциркуляційне обтікання круглого циліндра. Одержуємо в результаті накладання один на одного:

1) рівномірного прямолінійного потоку, що рухається в напрямку осі x зі швидкістю, що дорівнює одиниці: $\varphi = x$, $\psi = y$;

2) потоку, одержуваного від диполя з моментом $M = 2\pi$:

$$\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Для функцій φ і ψ складного потоку маємо

$$\varphi = x + \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (4.22)$$

У випадку швидкості, відмінної від 1 і $M \neq 2\pi$:

$$\varphi = V_{\infty}x + \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = V_{\infty}y - \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (4.23)$$

Якщо скористатися полярними координатами ($x = r \cdot \cos \Theta$, $y = r \cdot \sin \Theta$), то

$$\varphi = V_{\infty} \cdot r \cdot \cos \Theta \left(1 + \frac{M}{2\pi V_{\infty}} \frac{1}{r^2} \right);$$

$$\psi = V_{\infty} \cdot r \cdot \sin \Theta \left(1 - \frac{M}{2\pi V_{\infty}} \frac{1}{r^2} \right).$$

Позначимо постійний комплекс $\frac{M}{2\pi V_{\infty}}$ через r_0 . Тоді

$$\varphi = V_{\infty} \cdot r \cdot \cos \Theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad \psi = V_{\infty} \cdot r \cdot \sin \Theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right). \quad (4.24)$$

Для знаходження лінії струму зрівняємо функцію струму постійній

$$V_{\infty} \cdot r \cdot \sin \Theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) = C.$$

Для нульової лінії струму ($C = 0$) одержуємо два рівняння: $\sin \Theta = 0$ (тобто $y=0$) і $1 - \frac{r_0^2}{r^2} = 0$ (тобто $x^2 + y^2 = r_0^2$). Звідси виходить, що нульова лінія струму являє собою два відрізки осі x (рис. 4.12), між якими розташовується коло радіусом $r = r_0$. Приймаючи нульову лінію струму за тверду обтічну поверхню і пам'ятаючи, що $r_0^2 = \frac{M}{2\pi V_{\infty}}$, одержуємо рішення задачі щодо руху рідини навколо довільного циліндра, радіус якого r_0 дає можливість знайти необхідний для цього випадку момент диполя M .

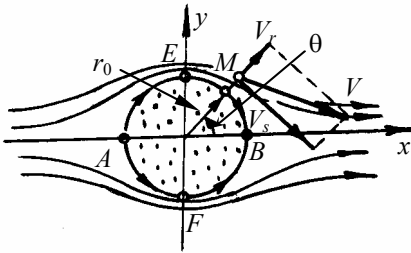


Рис. 4.12. Безциркуляційне обтікання круглого циліндра

Поле швидкостей по обох сторонах від нульової лінії струму визначається звичайним способом за відомими функціями (4.24):

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V_{\infty} \cos \Theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)$$

$$V_s = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = -V_{\infty} \sin \Theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right).$$

На поверхні циліндра

$$V_r|_{r=r_0} = 0,$$

$$V_s|_{r=r_0} = -2V_\infty \sin \Theta. \quad (4.25)$$

Знак “-” в (4.25) означає, що при напрямку швидкості V_∞ , яка збігається з позитивним напрямком осі x , швидкість на циліндрі V_s спрямована убік зменшення кутів Θ при $\sin \Theta > 0$, тобто в першій і другій чвертях квадранта, і убік зростання кутів Θ при $\sin \Theta < 0$, тобто в третій і четвертій чвертях.

Швидкість у точках A і B ($\Theta_2 = \pi$, $\Theta_1 = 0$), які називають *критичними точками*, дорівнює нулю. Максимальна швидкість досягається в точках E і F при куті $\Theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ($V_{s \max} = 2V_\infty$).

Розподіл тиску на поверхні циліндра знаходимо з рівняння Бернуллі, записаного для нульової лінії струму:

$$\frac{V_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{V_s^2}{2} + \frac{p}{\rho}.$$

Звідси

$$p - p_\infty = \frac{\rho V_\infty^2}{2} \left(1 - \frac{V_s^2}{V_\infty^2} \right)$$

або, переходячи до коефіцієнта тиску \bar{P} , використовуючи (4.25), одержуємо

$$\bar{P} = \frac{p - p_\infty}{\rho V_\infty^2 / 2} = 1 - \frac{V_s^2}{V_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2 \Theta. \quad (4.26)$$

Визначимо сили, що діють на одиницю довжини циліндра:

$$\begin{aligned} P_y &= - \int_0^{2\pi} p_y \cdot 1 \cdot dS = - \int_0^{2\pi} p r_0 \sin \Theta d\Theta; \\ P_x &= - \int_0^{2\pi} p_x \cdot 1 \cdot dS = - \int_0^{2\pi} p r_0 \cos \Theta d\Theta. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Оскільки $p = p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2}(1 - 4 \sin^2 \Theta)$, то

$$P_y = -r_0 \int_0^{2\pi} \left[p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2}(1 - 4 \sin^2 \Theta) \right] \sin \Theta d\Theta = 0;$$

$$P_x = -r_0 \int_0^{2\pi} \left[p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2}(1 - 4 \sin^2 \Theta) \right] \cos \Theta d\Theta = 0.$$

Тобто сила опору циліндра, що обтікається потоком ідеальної рідини, дорівнює нулю.

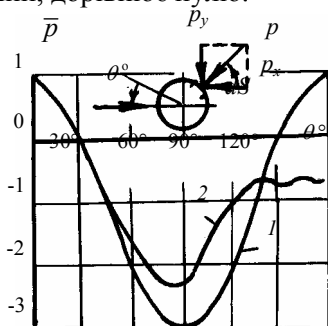


Рис. 4.13. Розподіл коефіцієнта тиску на циліндрі:

1 - ідеальна рідина; 2 - в'язка рідина

Факт відсутності опору при обтіканні будь-яких тіл потоком ідеальної рідини в гідродинаміці називають парадоксом Ейлера-Д'Аламбера.

У реальній рідині розподіл тиску відповідає кривій 2 на рис. 4.13. У дифузійній області потік відривається від стінок, $P_x \neq 0$.

7. Циркуляційне обтікання круглого циліндра. У цьому випадку складається плоскопаралельний потік, диполь і циркуляційна течія. У результаті сумарний потенціал і функція струму буде мати вигляд

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= V_\infty r \cdot \cos \Theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \Theta; \\ \psi &= V_\infty r \cdot \sin \Theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Звідси

$$\begin{aligned}
 V_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = V_\infty \cos \Theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad V_r|_{r=r_0} = 0; \\
 V_s &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = -V_\infty \sin \Theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}, \\
 V_s|_{r=r_0} &= -2V_\infty \sin \Theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}. \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

Зміщені критичні точки знаходимо, зрівнявши (4.29) до нуля:

$$\begin{aligned}
 -2V_\infty \sin \Theta_{кр} + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} &= 0. \\
 \sin \Theta_{кр} &= \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty r_0}. \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

У наслідок порушення симетрії щодо осі x на циліндр буде діяти вертикальна сила, яку визначаємо з рівняння Бернуллі (використовуючи (4.29))

$$p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} = p + \rho \frac{\left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0} - 2V_\infty \sin \Theta \right)^2}{2}.$$

Звідси

$$p = p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} - \frac{\rho V_\infty^2}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_\infty} - 2 \sin \Theta \right)^2.$$

Використовуючи вираз для P_y (4.27), одержуємо

$$P_y = -r_0 \int_0^{2\pi} \left[p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} - \frac{\rho V_\infty^2}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_\infty} - 2 \sin \Theta \right)^2 \right] \sin \Theta d\Theta.$$

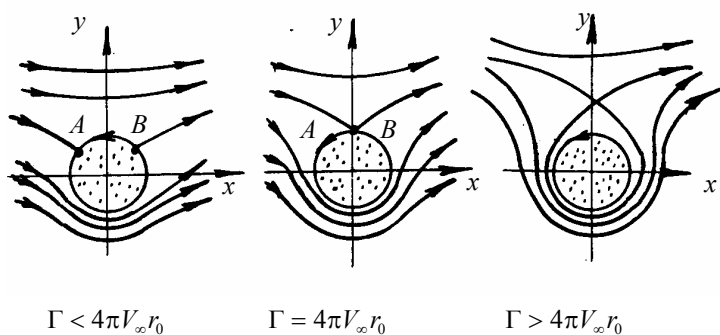


Рис. 4.14 . Лінії струму при обтіканні циліндра із циркуляцією

Перетворюючи і почленно інтегруючи, ряд доданків звертають в нуль, і залишається тільки один член

$$P_y = -\frac{\rho\Gamma V_\infty}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \Theta d\Theta = -\rho V_\infty \Gamma . \quad (4.31)$$

Формула (4.31) визначає підйомну силу, що діє на одиницю довжини циліндра, який обтікається плоскопаралельним потоком при наявності циркуляційної течії, і є окремим випадком формули М.С. Жуковського.

Факт появи підйомної сили на циліндрі, що обертається, був використаний на практиці німецьким інженером Антоном Флеттнером, який у 1924 році виготовив судно з вітряним двигуном. У травні 1926 р. це судно вперше перетнуло Атлантику, дійшовши до Нью-Йорка.

Сьогодні попит на такі двигуни диктується життям і спирається на екологічні та енергозберігаючі потреби. Німецька фірма Enercon планує весною 2008-го року спустити на воду перше торгове судно під назвою E-Ship довжиною 130 м. На ньому передбачені чотири сталеві циліндри висотою 27 м і діаметром 4 м (рис. 4.15). Згідно з

розрахунками новий привід дасть змогу зекономити 30 – 40 % палива і окупить себе менше ніж за 5 років.



Рис. 4.15. Нове торгове судно з вітряним двигуном фірми Enercon

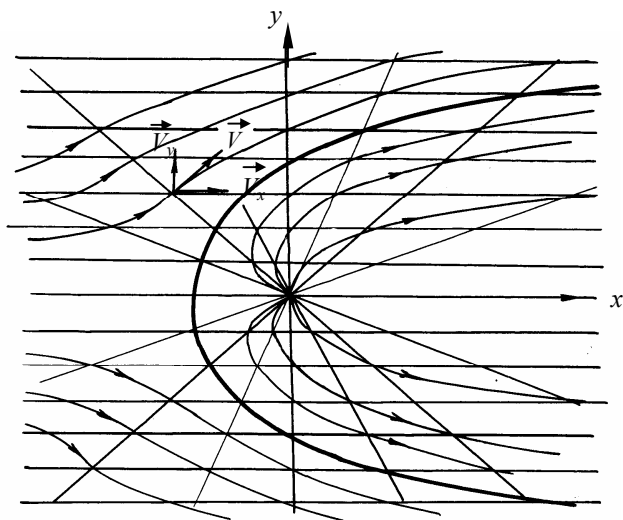


Рис. 4.16. Приклад накладення прямолінійно-поступального

потoku на плоске джерело
$$\psi(x, y) = V_{\infty}y + \frac{Q}{2\pi} \theta$$

Результат, що міститься у формулі (4.31), має назву *теорема М.Є. Жуковського* про підйомну силу, яка є основною теоремою аеродинаміки:

при циркуляційному обтіканні циліндра ідеальною нестисливою рідиною на циліндр діє сила, нормальна до швидкості на нескінченності V_∞ і дорівнює добутку цієї швидкості на циркуляцію Γ і густину ρ потоку. Для визначення напрямку підйомної сили треба вектор швидкості повернути на 90° у бік, зворотний циркуляції.

Теорема М.Є. Жуковського може бути доведена що до безвідривного обтікання довільного контуру нестисливою рідиною. Ця ж теорема справедлива і для стисливого газу при дозвукових швидкостях течії, що вперше було доведено М.В.Келдишем і Ф.І.Франклем.

4.3. Застосування теорії функцій комплексного змінного до вивчення плоскопаралельного потоку ідеальної рідини

Отже, плоский потенціальний потік характеризується двома функціями: потенціалом швидкостей $\varphi(x, y)$ і функцією струму $\psi(x, y)$. Кожна з цих функцій задовольняє у випадку нестисливої рідини рівнянню Лапласа. Лінії струму і лінії рівного потенціалу утворюють у випадку плоского потоку ортогональну мережу.

Ортогональність ліній струму і ліній рівного потенціалу. Для потоку без обертання часток, стаціонарного і двомірного, функція струму і потенціал швидкостей дають, використовуючи рівняння (4.4) і (4.8),

$$u = \varphi_x = \frac{1}{\rho} \psi_y, \quad v = \varphi_y = -\frac{1}{\rho} \psi_x. \quad (4.32)$$

Те, що лінії постійних ψ є також лініями струму можна показати, взявши до уваги, що, оскільки ψ є точковою функцією, то

$$d\psi = \psi_x dx + \psi_y dy .$$

Поклавши $d\psi = 0$ і використовуючи (4.32), знаходимо нахил лінії постійного ψ

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\psi} = - \frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{v}{u} .$$

Але за визначенням нахил лінії струму дорівнює

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\text{лінії струму}} = \frac{v}{u}$$

і, отже, ψ лінії і лінії струму одне і те ж.

Аналогічно розглядаючи для ліній рівного потенціалу, знаходимо

$$d\phi = \phi_x dx + \phi_y dy .$$

Використовуючи (4.32), одержуємо для нахилу еквіпотенціальної лінії

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\phi} = - \frac{\phi_x}{\phi_y} = - \frac{u}{v} .$$

Тобто

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\psi} \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\phi} = -1, \tag{4.33}$$

звідки встановлюємо, що лінії постійного ϕ нормальні до ліній постійного ψ . Інакше, еквіпотенціальні лінії і лінії струму складають ортогональну сітку (рис. 4.17).

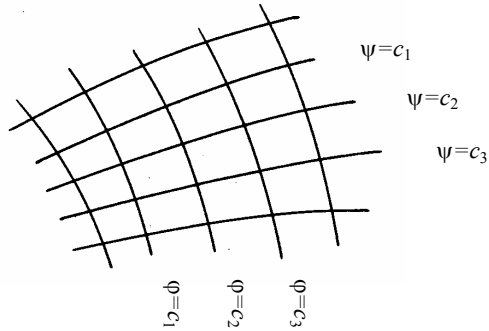


Рис. 4.17. Лінії струму і лінії рівного потенціалу

Комплексний потенціал. Ми знаємо, що для нестисливої рідини

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Зіставляючи ці рівності, знаходимо

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.34)$$

Рівняння (4.34) являє собою диференціальні рівняння Коші–Рімана, яким задовольняють дійсна й уявна частини всякої регулярної функції комплексного змінного $f(z)$ (де $z = x + iy$). І навпаки, якщо які б не було функції $\phi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ задовольняють диференціальним рівнянням (4.34), то ці функції можна розглядати відповідно як дійсну й уявну частини деякої регулярної функції комплексного змінного. На цьому засноване застосування комплексної змінної до теорії плоского потенціального потоку нестисливої рідини.

Функція $w = \phi + i\psi = f(z)$ називається *характеристичною функцією плоского потоку* або *комплексним потенціалом*.

Вказаний вище зв'язок аеродинаміки плоскопаралельного потоку нестисливої рідини з досконало розробленою теорією функцій комплексного змінного дозволяє з успіхом вирішувати для плоскопаралельного потоку задачі, що являють значні труднощі у випадку довільної течії в просторі. Особливе значення цей метод здобув у вирішенні проблем теорії крила.

Комплексна швидкість. Візьмемо похідну від комплексного потенціалу $w = \varphi + i\psi$ за комплексним змінним $z = x + iy$. Як відомо з теорії функцій комплексного змінного, вираз для похідної буде мати вигляд

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} = -i \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Раніше було встановлено, що для компонентів швидкості V

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Заміняючи похідні у виразі для dw/dz за допомогою цих формул, знаходимо

$$\frac{dw}{dz} = u - iv. \quad (4.35)$$

Цей вираз називається *комплексною швидкістю*.

Модуль комплексної швидкості буде давати величину самої швидкості V :

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{u^2 + v^2} = V.$$

Вектор, що визначає величину комплексної швидкості $u - iv$, одержуємо дзеркально щодо дійсної осі x вектора $u + iv$ (рис. 4.18).

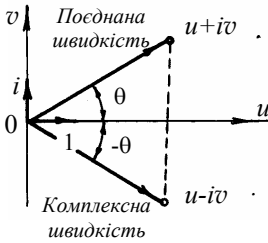


Рис. 4.18. Комплексна й поєднана швидкості

Виразу (4.35) для комплексної швидкості можна надати ще інший вигляд. Так, з рис. 4.18 слідує, що $u = V \cos \Theta$, $v = V \sin \Theta$. Тоді

$$\frac{dw}{dz} = V(\cos \Theta - i \sin \Theta) = V \cdot e^{-i\Theta}. \quad (4.36)$$

Приклади простих течій

Приклад 1. Нехай комплексний потенціал є простою лінійною функцією

$$w(z) = A \cdot z = (a - ib)(x + iy). \quad (4.37)$$

Тут A – комплексна величина, рівна $A = a - ib$; a і b – постійні величини; $z = x + iy$. Визначимо характер течії.

Підставляючи значення w , A і z , одержимо

$$\varphi + i\psi = (a - ib)(x + iy) = (ax + by) + i(ay - bx).$$

Рівняння екіпотенціальних ліній і ліній струму $\varphi = ax + by = \text{const}$ і $\psi = ay - bx = \text{const}$ визначають взаємно перпендикулярні лінії, наведені на рис. 4.5.

Комплексна швидкість буде дорівнювати

$$\frac{dw}{dz} = A = a - ib.$$

Складові швидкості і її напрям знаходяться по поєднаній швидкості: $u = a$, $v = b$. Отже, рідина тектиме по прямих, нахилених до

осі x під кутом α ($\text{tg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{v}{u}$) зі швидкістю

$$V = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

При $b = 0$ маємо прямолінійний рівномірний потік паралельно осі x . $a = V_\infty$.

Приклад 2. Потік заданий комплексним потенціалом

$$w = az^2, \quad (4.38)$$

де a – дійсна величина. В цьому випадку матимемо

$$\begin{aligned} w = \varphi + i\psi &= a(x + iy)^2 = a(x^2 - y^2) + i2axy, \\ \varphi &= a(x^2 - y^2); \quad \psi = 2axy. \end{aligned}$$

Це течія усередині прямого кута. Лінії $\varphi = a(x^2 - y^2) = \text{const}$ і $\psi = 2axy = \text{const}$ являтимуть два сімейства взаємно ортогональних гіпербол (рис. 4.6).

Комплексна швидкість у цьому випадку буде дорівнювати $\frac{dw}{dz} = 2az$, отже

$$u - iv = 2a(x + iy), \text{ тобто } u = 2ax, v = -2ay.$$

Рідина рухатиметься по гіперболічних лініях струму з швидкістю

$$V = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{(2ax)^2 + (-2ay)^2} = 2a\sqrt{x^2 + y^2} = 2ar.$$

Початок координат є критичною точкою ($V = 0$).

Приклад 3. Потік заданий комплексним потенціалом

$$w = a \ln z, \quad (4.39)$$

де a – дійсне число.

Підставимо комплексну змінну z в полярну систему координат

$$w(z) = \varphi + i\psi = a \ln(re^{i\Theta}) = a \ln r + ia\Theta,$$

звідки $\varphi = a \ln r$, $\psi = a\Theta$.

Рівняння екіпотенціальних ліній ($r = \text{const}$) і ліній струму ($\Theta = \text{const}$) є колами і прямими, що проходять через початок координат (рис. 4.7). Для комплексної швидкості матимемо $\frac{dw}{dz} = \frac{a}{z}$. Як

бачимо, в цьому випадку комплексний потенціал w і комплексна швидкість, що є аналітичними функціями змінного z , на початку координат перестають бути аналітичними, оскільки w і $\frac{dw}{dz}$ оберта-

ються при $z=0$ в нескінченність. В цьому випадку початок координат є так званою *особливою точкою*: для функції w – ізольованою логарифмічною точкою, а для комплексної швидкості $\frac{dw}{dz}$ – полюсом

першого порядку. Якщо постійна $a > 0$, маємо джерело, $a < 0$ – стік. Якщо потужність (об'ємна витрата) джерела (стоку) дорівнює Q , то $a = \frac{Q}{2\pi}$. Тобто комплексний потенціал джерела (стоку) матиме ви-

гляд

$$w = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln z. \quad (4.40)$$

Якщо джерело (стік) знаходиться не на початку координат, а в точці $z = a_1$, то

$$w = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln(z - a_1).$$

Нарешті, якщо на площині розташовано n джерел (стоків), що знаходяться відповідно в точках $z = a_1$, $z = a_2$, ..., $z = a_n$, то комплексний потенціал в цьому випадку прийме вигляд

$$w = \sum_{k=1}^n \pm \frac{Q_k}{2\pi} \ln(z - a_k). \quad (4.41)$$

Приклад 4. Потік заданий комплексним потенціалом

$$w = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}. \quad (4.42)$$

В цьому випадку

$$w = \varphi + i\psi = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2},$$

звідки

$$\varphi = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Одержуємо потік, розглянутий вище (диполь) (рис. 4.9).

Комплексна швидкість для диполя матиме вигляд $\frac{dw}{dz} = -\frac{M/2\pi}{z^2}$; початок координат буде *особливою точкою*: для функції w – полюсом першого порядку, а для комплексної швидкості – *полюсом другого порядку*.

Приклад 5. Комплексний потенціал заданий у вигляді

$$w = a \ln z, \text{ де } a \text{ – суто уявне число, } a = -\frac{\Gamma}{2\pi} i, \text{ тобто}$$

$$w = -\frac{\Gamma}{2\pi} i \ln z. \quad (4.43)$$

Неважко переконатися, що цей потенціал є комплексним потенціалом плоского вихору (рис. 4.10).

Насправді

$$w = \varphi + i\psi = a \ln r e^{i\Theta} = -\frac{\Gamma}{2\pi} i (\ln r + i\Theta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \Theta - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r.$$

Тобто

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \Theta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r.$$

Величина комплексної швидкості $\frac{dw}{dz} = -\frac{\Gamma}{2\pi} i \frac{1}{z}$. Тобто як і у разі джерела, початок координат буде для комплексного потенціалу вихору *логарифмічною особливою точкою*, а для комплексної швидкості – *полюсом першого порядку*.

Якщо вихор знаходиться не на початку координат, а в точці $z = a_1$, то вираз для w прийме вигляд $w = -\frac{\Gamma}{2\pi} i \ln(z - a_1)$. Якщо ж на площині знаходиться n вихорів, розташованих в точках $z = a_1, z = a_2, \dots, z = a_n$, то комплексний потенціал матиме вигляд

$$w = -\sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{2\pi} i \ln(z - a_k). \quad (4.44)$$

Приклад 6. Накладаючи плоскопаралельну течію на диполь, маємо

$$w = V_{\infty} z + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}. \quad (4.45)$$

Розділяючи дійсну і уявну частини, одержимо вирази для φ і ψ в наступному вигляді:

$$\varphi = V_{\infty} x + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = V_{\infty} y - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Позначаючи $\frac{M}{2\pi V_{\infty}}$ через r_0^2 , одержуємо вираз для комплексного потенціалу для безциркуляційного обтікання круглого циліндра плоскопаралельним потоком

$$w = V_{\infty} \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right). \quad (4.46)$$

В цьому випадку комплексна швидкість дорівнює

$$\frac{dw}{dz} = V_{\infty} \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right). \quad (4.47)$$

Звідси при $z = \infty$ $\frac{dw}{dz} = V_{\infty}$, тобто дійсна швидкість на нескінченності буде заданою швидкістю. Критичні точки в цьому випадку знаходяться на дійсній осі. Перевіримо це. Зрівнявши комплексну швидкість нулю, одержимо:

$$\frac{dw}{dz} = V_{\infty} \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right) = 0,$$

звідки

$$z = \pm r_0.$$

Тобто дійсно критичні точки знаходяться на дійсній осі в точках $(r_0, 0)$, $(-r_0, 0)$ (рис. 4.12).

Приклад 7. Для отримання потоку, обтікаючого циліндр радіусом r_0 з циркуляцією, необхідно на розглянутий потік накласти потік від вихору, помістивши останній на початку координат. У такому разі комплексний потенціал матиме вигляд

$$w = V_{\infty} \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln z. \quad (4.48)$$

Для знаходження критичних точок зрівняємо комплексну швидкість нулю

$$\frac{dw}{dz} = V_{\infty} \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} i \frac{1}{z} = 0.$$

На поверхні циліндра змінне $z = r_0 e^{i\Theta}$, підставляючи яке в описаний вище вираз, одержуємо $V_{\infty} (1 - e^{-2i\Theta}) = \frac{\Gamma}{2\pi r_0} i e^{-i\Theta}$.

Помножуючи на $e^{i\Theta}$ і ділячи на V_{∞} , маємо

$$e^{i\Theta} - e^{-i\Theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_{\infty}} i, \quad \frac{e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}}{2i} = \frac{\Gamma}{4\pi r_0 V_{\infty}}.$$

Враховуючи, що $\frac{e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}}{2i} = \sin \Theta$, знаходимо

$$\sin \Theta_{кр} = \frac{\Gamma}{4\pi r_0 V_{\infty}}, \text{ тобто вираз (4.30).}$$

4.4. Метод конформного перетворення

Раніше було встановлено, що для вивчення плоськопаралельного потоку ідеальної рідини, обтікаючого який-небудь контур, достатньо знати комплексний потенціал цього потоку $w(z)$. Оскільки безпосереднє визначення цієї функції навіть для простих контурів являє значні труднощі, то в багатьох задачах комплексний потенціал знаходять непрямым шляхом за допомогою методу так званого *конформного відображення*, що виконує велику роль як в задачах теорії крила, так і в інших задачах гідроаеродинаміки плоськопаралельного потоку ідеальної рідини.

Метод конформних відображень дозволяє перейти від окремого випадку – обтікання круглого циліндра до побудови комплексних потенціалів потоків, обтікаючих тіла (профілі) довільної форми.

Сутність методу. S – область площини комплексного змінного z , в якій задана аналітична функція

$$\zeta = f(z), \quad (4.49)$$

яка в кожній точці області S площини $z = x + iy$ однозначна і диференційована.

Геометрично це означає, що кожній точці $z = x + iy$ області S відповідає цілком певна точка на площині $\zeta = f(z) = \xi + i\eta$. Сукупність точок, відповідних точкам області S , утворює в площині ζ нову область S_1 . Отже, однозначна аналітична функція $\zeta = f(z)$ здійснює відображення області S площини $z = x + iy$ на область S_1 площини $\zeta = \xi + i\eta$.

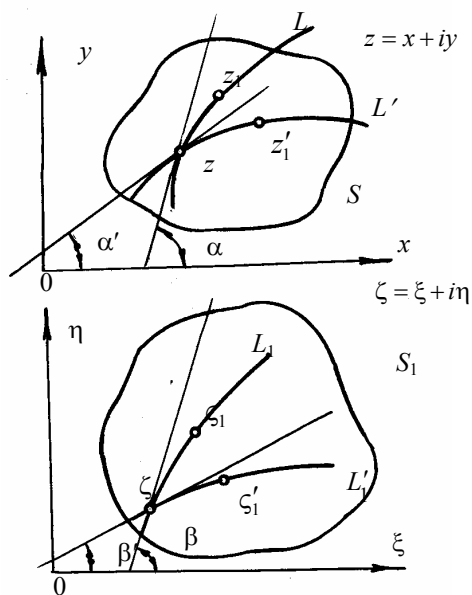


Рис. 4.19. Конформне відображення

Зокрема, якщо в області S провести деяку лінію L , що проходить через довільну точку z , то в області S_1 їй відповідатиме деяка лінія L_1 , що проходить через точку $\zeta = f(z)$ (рис. 4.19).

Можна показати, що відображення за допомогою аналітичних функцій має властивість збереження кутів в усіх точках, де похідна не дорівнює нулю ($\beta' - \beta = \alpha' - \alpha$), і подібність в нескінченно малому.

Відображення, що має вказану вище властивість збереження кутів і постійності розтягувань, називається конформним відображенням.

Звідси робимо висновок, що всяке відображення, встановлюване за допомогою аналітичної функції, буде конформним в усіх точках, де похідна аналітичної функції відмінна від нуля.

Приклади конформних відображень

Перетворення інверсії. Розглянемо відображаючу функцію наступного вигляду:

$$\zeta = \frac{l^2}{z}, \quad (4.50)$$

де l – дійсна величина.

Для вивчення властивостей цього перетворення, званого *перетворенням інверсії*, покладемо $z = re^{i\alpha}$, $\zeta = Re^{i\beta}$. Підставляючи

значення z і ζ в (4.50), одержимо $R = \frac{l^2}{r}$, $\beta = -\alpha$. Звідси виходить,

що перетворення (4.50) приводить і до зміни масштабу, і до повороту будь-яких кривих, розташованих в площині z . Сумістимо площини комплексного змінного z і ζ на одному кресленні і побу-

дуємо в площині z коло радіусу l з центром на початку координат (рис. 4.20). Це коло назвемо *колом інверсії*.

Узявши яку-небудь точку $A (z = re^{i\alpha})$ усередині кола радіусу l , визначимо, в яку точку площини ζ перейде ця точка в результаті перетворення, здійсненого над її модулем r .

Для цього продовжимо лінію OA до деякої точки K поза колом і з точки A проведемо перпендикуляр AB до перетину його з колом в точці B . У точці B проведемо дотичну до кола до перетину з лінією OK в точці A' . З подібності трикутників OBA' і OBA слідує, що $OA'/OB = OB/OA$, звідки

$$OA' = OB \cdot OB/OA = l^2/r = R.$$

Тобто перетворення $\frac{l^2}{r}$ переводить точку A в точку A' , звану дзеркальним відображенням точки A щодо кола радіуса l . Тепер неважко побудувати відображення точки A , відповідне відображаючій функції (4.50).

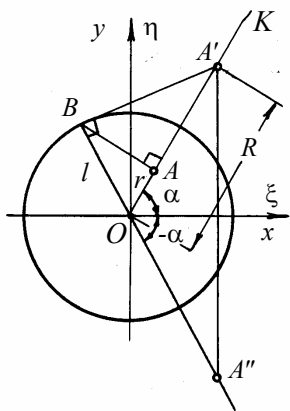


Рис. 4.20. Коло інверсії

Вираз для аргументу в площині ζ $\beta = -\alpha$ показує, що точку A' треба дзеркально відобразити щодо дійсної осі. Тоді точка A'' , розташована в площині ζ , буде відображенням точки A за допомогою (4.50).

Оскільки при цьому перетворенні точка $z = 0$ переходить в точку $\zeta = \infty$, то, очевидно, всі точки площини z , що знаходяться усередині кола інверсії, переходять в точки площини ζ , розташовані поза колом інверсії, або, що те ж саме, зов-

нішність круга площини ζ переходить у внутрішність круга площини z .

Можна довести теорему, що *перетворення інверсії перетворює кола і прямі в площині z в кола або прямі в площині ζ .*

Розглянемо метод побудови кола в площині ζ , в яку переходить за допомогою перетворення інверсії коло довільного радіусу R , центр якого розташований у точці $M_1(a_1, b_1)$ площини z .

K_l – коло в площині $z = x + iy$ радіуса R з центром в точці $M_1(a_1, b_1)$. Позначимо $OA=l$. Відобразимо коло K_l за допомогою перетворення інверсії $\zeta = \frac{l^2}{z}$.

З попереднього робимо висновок, що коло K_l , як не проходить через початок координат, перейде в площині ζ також в коло, що не проходить через початок координат. Визначимо рівняння відображеного кола.

$$\text{Рівняння даного кола } K_l \text{ має вигляд } (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R^2.$$

З рівняння відображаючої функції $\zeta = \frac{l^2}{z}$, знаходимо

$$\zeta = \frac{l^2}{x + iy} = \xi + i\eta; \quad \frac{l^2}{\xi + i\eta} = x + iy = \frac{l^2(\xi - i\eta)}{\xi^2 + \eta^2}$$

або

$$x + iy = \frac{l^2\xi}{\xi^2 + \eta^2} - i \frac{l^2\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

тобто

$$x = \frac{l^2\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = -\frac{l^2\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

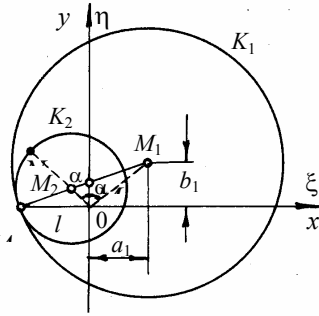


Рис. 4.21. До перетворення інверсії $\zeta = \frac{l^2}{z}$

Підставляючи ці значення x і y в рівняння кола K_1 , перетворюючи вираз і пам'ятаючи, що $R^2 = (l + a_1)^2 + b_1^2$ (рис. 4.21), одержуємо рівняння відображеного кола K_2 з центром в точці $M_2(a_2, b_2)$.

$$a_2 = -\frac{a_1 l}{2a_1 + l}, \quad b_2 = \frac{b_1 l}{2a_1 + l}.$$

У результаті ми одержуємо наступне правило побудови кола K_2 , отриманого з кола K_1 шляхом перетворення інверсії (рис. 4.21): з початку координат провести пряму ON під кутом $\angle MON$ до осі y рівним куту $\angle MOM_1$ (тобто α); з точки M_2 перетину прямої ON з прямою AM_1 описати коло K_2 радіуса AM_2 , яке і буде відображенням кола K_1 за допомогою перетворення інверсії.

Перетворення М.Є. Жуковського. Однією із задач теорії крила є визначення геометричних і аеродинамічних характеристик профілів, одержуваних конформним відображенням круга за допомогою спеціально підібраних з цієї метою відображаючих функцій.

Подібна задача полягає, отже, по-перше, у виборі відображаючої функції і, по-друге, у вираженні аеродинамічних характеристик

профілю через деякі параметри, що входять у вибрану функцію, при зміні яких отримують різні профілі одного і того ж сімейства.

До числа простого сімейства теоретичних профілів належить серія профілів М.Є. Жуковського – С.А. Чаплигіна, одержуваних з кола за допомогою перетворення М.Є. Жуковського

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{l^2}{z} \right). \quad (4.51)$$

За допомогою цього перетворення коло радіусу l з центром на початку координат (рис. 4.22) відображається у відрізьку прямої AB завдовжки $2l$ в площині ζ .

Насправді для точок кола радіусу l матимемо $z = le^{i\Theta}$.

Підставляючи значення z у формулу (4.51), знаходимо

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{l^2}{z} \right) = \frac{l}{2} (e^{i\Theta} + e^{-i\Theta}) = l \cos \Theta,$$

тобто для всіх точок кола (при зміні Θ від 0 до 2π) ζ є дійсною величиною і змінюється в межах від $+l$ до $-l$ (при зміні Θ від 0 до π) і

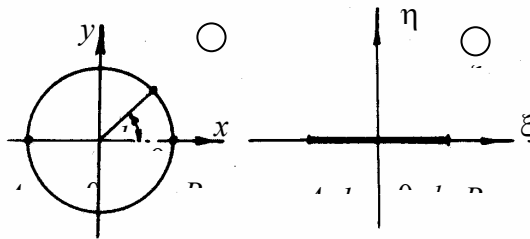


Рис. 4.22. Перетворення кола за допомогою перетворення М.Є. Жуковського

від $-l$ до $+l$ (при зміні Θ від π до 2π).

Профілі М.Є. Жуковського – С.А. Чаплигіна

Помістимо в площині z коло K радіусу a з центром M_2 на уявній осі на деякій відстані $OM_2 = f$ від початку координат. Позначимо довжину $OA=l$ (рис. 4.23).

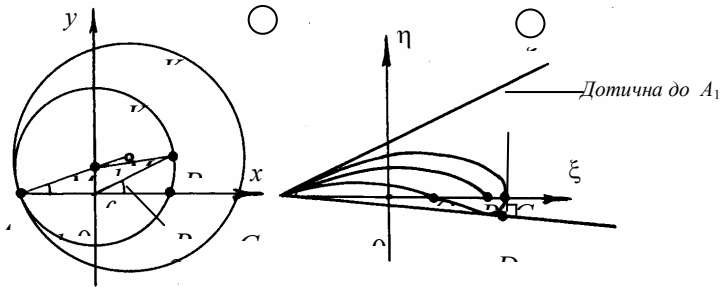


Рис. 4.23. До побудови профілів Жуковського-Чаплигіна

Для точок кола K маємо $z = \rho e^{i\theta}$, де ρ – величина змінна, оскільки початок координат θ не збігається з центром M_2 кола K .

Отже,

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2} \left(\rho e^{i\theta} + \frac{l^2}{\rho} e^{-i\theta} \right) = \frac{1}{2} \left(\rho \cos \theta + i \rho \sin \theta + \frac{l^2}{\rho} \cos \theta - i \frac{l^2}{\rho} \sin \theta \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{l^2}{\rho} \right) \cos \theta + i \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{l^2}{\rho} \right) \sin \theta = \xi + i\eta, \end{aligned}$$

тобто

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{l^2}{\rho} \right) \cos \theta, \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{l^2}{\rho} \right) \sin \theta.$$

Перемножуючи перший вираз на $\sin \theta$, другий – на $\cos \theta$, підносячи в квадрат і віднімаючи, маємо

$$\xi^2 \sin^2 \theta - \eta^2 \cos^2 \theta = l^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (4.52)$$

Для точки P , положення якої визначається величинами ρ і θ , з трикутників OM_2P і OM_2A слідує $a^2 = l^2 + f^2 = f^2 + \rho^2 - 2f\rho \sin \theta$, звідки $\rho - \frac{l^2}{\rho} = 2f \sin \theta$, тобто $\eta = f \sin^2 \theta$, $\sin^2 \theta = \frac{\eta}{f}$.

Підставляючи значення $\sin^2 \theta$, одержане вище, в рівняння (4.52), після простих перетворень одержимо рівняння відображеної кривої

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\frac{l^2}{f} - f \right) \eta = l^2,$$

яке легко привести до вигляду

$$\xi^2 + \left[\eta + \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{f} - f \right) \right]^2 = l^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{l^2}{f} - f \right)^2.$$

Як бачимо, нами одержано рівняння кола, центр якого розташований на уявній осі в точці $\xi = 0$, $\eta = -\frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{f} - f \right)$ і радіус якого дорівнює

$$\sqrt{l^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{l^2}{f} - f \right)^2}.$$

Вираз $\sin^2 \theta = \frac{\eta}{f}$ показує, що відображена крива буде не повним колом, а тільки її дугою, розташованою над дійсною віссю.

Якщо в площині z узяти коло K радіусу l з центром на початку координат, то (як вже відомо) перетворення (4.51) переведе її у відрізок дійсної осі завдовжки $2l$. Отже, перетворення (4.51) переводить точки A і B кола K в точки A_1 і B_1 , розташовані на дійсній осі ξ , від-

стань між якими дорівнює $2l$. Тобто відрізок A_1B_1 є хордою дуги A_1B_1 , стріла прогину якої дорівнює f (виходить з $\eta = f \cdot \sin^2 \theta$, при $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\eta_{max} = f$).

Проведемо в площині z коло K_1 з центром в точці M_1 так, щоб воно торкалося кола K в точці A ; відстань M_2M_1 позначимо через d . Центр M_1 кола K_1 природно лежить на продовженні прямої AM_2 .

Із загальної властивості конформних перетворень (збереження кутів) виходить, що в точці A_1 контур профілю повинен мати загальну дотичну з дугою A_1B_1 , а також з опуклою і увігнутою частинами профілю (оскільки кола K і K_1 в точці A торкаються один одного). Крім того, ясно, що точка C кола K_1 повинна перейти в деяку точку C_1 , що лежить на продовженні відрізка A_1B_1 . Окрім точки A_1 профіль не має загальних точок з дугою A_1B_1 , тобто в околиці точки C_1 він повинен мати плавне закруглення.

Приблизний вигляд одержуваного таким способом профілю, званого профілем Жуковського–Чаплигіна, показаний на рис. 4.23.

З побудови профіля очевидно, що довжина його хорди A_1D_1 визначається величиною l , його товщина – величиною d , його опуклість – величиною f .

A_1D_1 – хорда профілю, A_1C_1 – *теоретична хорда*.

Таким чином, певний клас профілів може бути одержаний, як вперше показав М.Є. Жуковській, за допомогою перетворення (4.51) методом округлення дуги кола. Незалежно від М.Є. Жуковського даний клас профілів був одержаний С.А. Чаплигіним в роботі «Протиск плоськопаралельного потоку на перегороджуючі тіла».

4.5. Графічний метод побудови профілів

Жуковського–Чаплигіна. Теорема Жуковського–Чаплигіна про результуючу силу тиску

У 1912 р. відомий російський механік професор А.П.Котельніков вказав простий графічний спосіб побудови профіля Жуковського–Чаплигіна, пізніше застосований німецьким аеродинаміком Трефтцом.

Сумістимо площини z і ξ (рис. 4.24). $AO = l$; $MO = f$ – параметр, що характеризує вгнутість профілю. На продовженні гіпотенузи AM

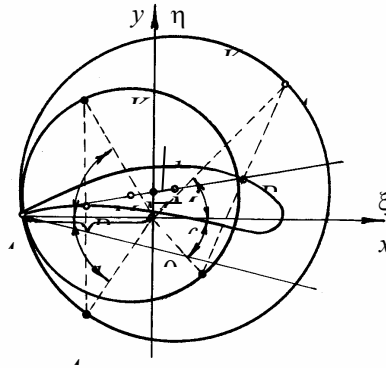


Рис. 4.24. Графічна побудова профілю М.Є. Жуковського–С.А. Чаплигіна

трикутника AOM відкладемо $MM_1 = d$ – параметр, що характеризує товщину профілю. З точки M_1 опишемо коло K_1 радіусу AM_1 . Допоміжне коло K_2 з центром в точці M_2 одержуємо з кола K_1 за допомогою перетворення $\zeta = \frac{l^2}{z}$ інверсії, розглянутого раніше.

Відповідні точки цих кіл лежать на прямих, що є дзеркальним відображенням одна одної щодо дійсної осі. Отже, проводячи з початку координат ряд прямолінійних променів, нахилених до дійсної

осі під кутами ε_1 і $-\varepsilon_1$, ε_2 і $-\varepsilon_2$, і т.д., в точках їх перетину з колами знайдемо відповідні одна одній точки A_1 і A_1' , A_2 і A_2' , і т.д.

Враховуючи, що перетворення $\xi = z$ переводить довільну точку кола K_1 саму в себе, робимо висновок, що перетворення

$\zeta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{l^2}{z} \right)$ зводиться до того, що потрібно з'єднати відповідні

точки кіл K_1 і K_2 прямолінійним відрізком і розділити його пополам.

Таким чином будуть знайдені точки профілю P_1, P_2 і т.д., тобто побудований і сам профіль.

При практичній побудові профілів Жуковського – Чаплигіна вводять параметри вгнутості f і товщини d , виражені не в абсолютних величинах, а у вигляді відношення їх до радіусу круга інверсії l ,

тобто вводять параметри p і q : $p = \frac{f}{l}$, $q = \frac{d}{l}$.

Теорема Жуковського–Чаплигіна про результуючу силу тиску. До теперішнього часу розглядалися комплексний потенціал w з кінематичної точки зору. Виникає питання: як, знаючи w потоку, обтікаючого яке-небудь тіло, вчислити результуючу силу тиску потоку на тіло. Вперше ця задача була розв'язана в 1906 р. М.Є. Жуковським в роботі «Про приєднані вихори», а потім узагальнена в 1910 р. С.А. Чаплигіним.

Припустимо, що заданий плоский потік обтікає без зриву циліндричне тіло довільної форми, яке обмежене в площині x – y контуром L ; V – швидкість на контурі.

$$\text{Тиск } p \text{ в точці } M \quad p = C - \frac{\rho V^2}{2},$$

$p dS$ – елементарна сила в M .

Проекції результуючої сили на координатні осі

$$X = -\int_L p \sin \alpha dS, \quad Y = +\int_L p \cos \alpha dS. \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} Y + iX &= \int_L \left(C - \frac{\rho V^2}{2} \right) (\cos \alpha - i \sin \alpha) dS = \\ &= -\frac{\rho}{2} \int_L V^2 (\cos \alpha - i \sin \alpha) dS, \end{aligned} \quad (4.54)$$

оскільки

$$\int_L C \cos \alpha dS = C \int_L \frac{dx}{dS} dS = C \int_L dx = 0,$$

$$\int_L C \sin \alpha dS = C \int_L \frac{dy}{dS} dS = C \int_L dy = 0,$$

бо координати x і y при повному обході контура L приймають первинне значення.

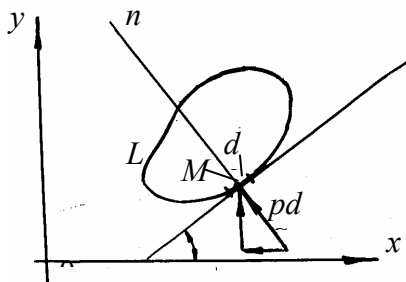


Рис. 4.25. До доведення теореми Жуковського–Чаплигіна про результуючу силу тиску

Перетворемо (4.54). Оскільки на контурі швидкість направлена по дотичній, то $\frac{d\varphi}{dS} = V$, або $d\varphi = V dS$. З другого боку, оскільки контур L є лінією струму, на якій $\psi = \text{const}$, то на контурі L

$$dw = d(\varphi + i\psi) = d\varphi \text{ і тому}$$

$$VdS = dw. \quad (4.55)$$

Крім того, на контурі L для комплексної швидкості dw/dz маємо (див. (4.35))

$$\frac{dw}{dz} = u - iv = V \cos \alpha - iV \sin \alpha = V(\cos \alpha - i \sin \alpha). \quad (4.56)$$

Підставляючи (4.55) і (4.56) у рівняння (4.54), одержуємо $Y + iX = -\frac{\rho}{2} \int_L \frac{dw}{dz} dw$, а оскільки $dw = \frac{dw}{dz} dz$, то остаточно

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz. \quad (4.57)$$

Ця формула, що дозволяє для потоку, заданого комплексним потенціалом w , знайти X і Y , а отже, і вираз для повної сили тиску $P = \sqrt{X^2 + Y^2}$, має назву *формули Жуковського–Чаплигіна*.

Визначення величини підйомної сили теоретичного профіля М.Є.Жуковського – С.А.Чаплигіна.

Для відомого комплексного потенціалу $w(\zeta)$ обтікання цього профілю на підставі (4.57)

$$Y + iX = -\frac{1}{2} \rho \oint \left(\frac{dw}{d\zeta} \right)^2 d\zeta = P_y + iP_x$$

задача про обчислення підйомної сили зводилася б до знаходження квадрата комплексної швидкості. Проте безпосередня побудова комплексного потенціалу для профілю Жуковського–Чаплигіна пов'язана зі значними труднощами. Тому задачу обчислення підйомної сили профілю Жуковського-Чаплигіна розв'язуватимемо ме-

тодом, заснованим на конформному відображенні цього профілю на круглий циліндр.

Для циркуляційного обтікання циліндра радіусу r_0 (рис. 4.26) комплексний потенціал, як відомо, має вигляд

$$w(z) = -V_\infty \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln z.$$

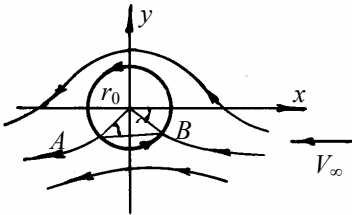


Рис. 4.26. Циркуляційне обтікання циліндра радіуса r_0

Знак “мінус” перед V_∞ пов’язаний з напрямом швидкості на нескінченності V_∞ паралельно дійсній осі в протилежний бік позитивного напрямку. Вираз для циркуляції Γ має вигляд (див. (4.30)):

$$\Gamma = -4\pi r_0 V_\infty \sin \varphi. \quad (4.58)$$

Знак “мінус” в цьому виразі з’явився у зв’язку з тим, що для кутів, розташованих в третьому і четвертому квадрантах, що визначає положення критичних точок A і B , синус негативний (а $\Gamma > 0$).

Величина циркуляції визначається величиною V_∞ і величиною кута φ , що визначає положення критичних точок.

Циркуляція швидкості при конформному відображенні не змінюється. Це виходить з виразу для циркуляції в площині z

$\Gamma = \oint \left(\frac{dw}{dz} \right) dz$. При переході від площини z до площини ζ за допо-

могою конформного перетворення $\zeta = f(z)$ маємо $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}$,

а $dz = \frac{dz}{d\zeta} d\zeta$. Підставляючи ці вирази у формулу для Γ , одержуємо

$$\Gamma_z = \oint \left(\frac{dw}{dz} \right) dz = \oint \left(\frac{dw}{d\zeta} \right) d\zeta = \Gamma_\zeta.$$

Визначимо залежність між швидкостями обтікання кола і профілю крила.

$w(z)$ – комплексний потенціал потоку, оточуючого циліндр;

$\zeta(z)$ – функція, що реалізує конформне відображення зовнішньої області циліндра на зовнішню область профілю.

Тоді

$$\bar{v} = \frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \frac{\frac{dw}{dz}}{\frac{d\zeta}{dz}} = \frac{\bar{V}}{\frac{d\zeta}{dz}},$$

де \bar{v} – комплексна швидкість в площині ζ профілю,

\bar{V} – комплексна швидкість в площині z циліндра.

Функція, що реалізує конформне відображення в даному ви-

падку має вигляд $\zeta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{l^2}{z} \right)$, звідки

$$\bar{v} = \frac{2\bar{V}}{1 - l^2/z^2}. \quad (4.59)$$

Звідси очевидно, що швидкість на профілі (див. рис. 4.23) може перетворитися в нескінченність в точці $z = -l$, відповідній задній кромці профілю. Це можна усунути (див. (4.59)), якщо швидкість в точці на колі, відповідній задній кромці профілю, буде дорівнювати нулю. Таким чином, приходимо до відомої гіпотези. Жуковського –

Чаплигіна про схід потоку з профілю, яка в даному випадку може бути сформульована таким чином: *відображення повинне бути виконане, щоб критичній точці на колі відповідала задня кромка крила.*

Гіпотеза Жуковського–Чаплигіна дає можливість *однозначно* визначити величину циркуляції, і тому має в аеродинаміці виключно велике значення.

Як відзначає проф. Л.Г. Лойцянській :“Ці дві глибокі ідеї великих російських аеродинаміків М.Є. Жуковського і С.А.Чаплигіна: *приєднаний вихор* (виникнення циркуляції – прим. авт.) і *постулат кінцевої швидкості на задній кромці крила* – лягли в основу всієї сучасної теорії крила”.

Через доведену властивість постійності циркуляції при конформному відображенні і користуючись теоремою М.Є. Жуковського для профілю, можна записати

$$P_y = Y = \rho v_\infty |\Gamma|,$$

або, враховуючи (4.58)

$$P_y = \rho v_\infty 4\pi r_0 V_\infty \sin \varphi,$$

де v_∞ – швидкість обтікання профілю крила. У нашому випадку, як випливає з (4.59),

$$2V_\infty = v_\infty.$$

Отже,

$$P_y = 2\pi r_0 \rho v_\infty^2 \sin \varphi. \quad (4.60)$$

Значення кута φ легко визначити з побудови самого профілю. Насправді, нехай маємо коло K_I радіуса r_0 ($AM_I = r_0$), що обтікається потоком, швидкість якого на нескінченності складає кут β з дійсною віссю (див. рис. 4.27). A і B – критичні точки. Тоді

$$\varphi = \alpha + \delta = \beta + \gamma, \quad (4.61)$$

де α – кут атаки, відрахований від хорди профілю;
 β – кут атаки, відрахований від теоретичної хорди;
 γ і δ – кути побудови і для різних профілів Жуковського-Чаплігіна мають різне значення.

Таким чином,

$$P_y = 2\pi r_0 \rho v_\infty^2 \sin(\delta + \alpha). \quad (4.62)$$

З (4.62) виходить, що при $\alpha = -\delta$ сила $P_y = 0$, тому кут $\alpha = -\delta$ називають кутом атаки нульової підйомної сили.

Ввівши безрозмірний коефіцієнт підйомної сили C_y , можна записати

$$P_y = C_y \cdot S \cdot \rho \frac{v_\infty^2}{2}, \quad (4.63)$$

де $S = b \cdot l$ (b – довжина хорди).

Порівнюючи (4.62) і (4.63), знаходимо

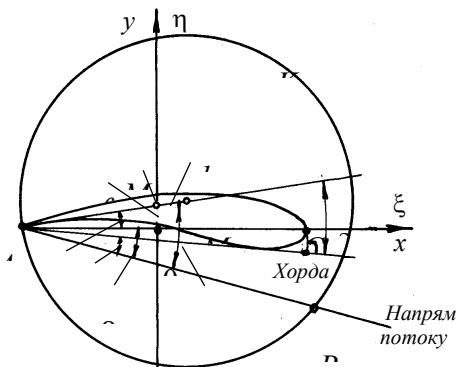


Рис. 4.27. До визначення величини підйомної сили для профіля Жуковського-Чаплігіна

$$C_y = 4\pi \frac{r_0}{b} \sin(\delta + \alpha) = 4\pi \frac{r_0}{b} \sin(\gamma + \beta). \quad (4.64)$$

Для тонких профілів з малою вгнутістю можна приблизно вважати, що $b \approx 2r_0$, отже $C_y = 2\pi \sin(\delta + \alpha)$. Цей вираз справедливий і для ряду профілів, що не належать до серії профілів Жуковського–Чаплигіна.

Для малих кутів атаки $\sin(\alpha + \delta) \approx \alpha + \delta$, а $dC_y/d\alpha = 2\pi$, тобто теоретичний нахил кривої залежності коефіцієнта підйомної сили від кута атаки $C_y(\alpha)$ дорівнює 2π .

Зі співвідношень (4.64) і (4.63) виходить, що при $\beta = 0$

$$C_y = 4\pi \frac{r_0}{b} \sin \gamma, \quad \text{а} \quad P_y = 2\pi r_0 \rho v_\infty^2 \sin \gamma. \quad (4.65)$$

З рис. 4.27 для r_0 і $\sin \gamma$ одержуємо $r_0 = \sqrt{f^2 + l^2} + d$, $\sin \gamma = \frac{f}{\sqrt{f^2 + l^2}}$. Тоді вираз для підйомної сили P_y можна привести до вигляду

$$P_y = 2\pi \rho v_\infty^2 f \left(1 + \frac{d}{\sqrt{f^2 + l^2}} \right).$$

Поклавши в цій формулі $d=0$, одержуємо

$$P_y = 2\pi \rho v_\infty^2 f, \quad (4.66)$$

тобто величина підйомної сили дугового профілю при $\beta = 0$ залежить тільки від його стріли прогину. Цей результат вперше одержаний С.А.Чаплигіним в 1910 р. в роботі «Про тиск плоськопаралельного потоку на перегороджуючі тіла», в якій він досліджував теорію дугоподібних профілів.

З сказаного вище виходить, що встановлення конформної відповідності між досліджуваним профілем крила і колом радіуса r_0 дозволяє повністю вирішити задачу про обтікання профілю плоским потоком нестисливої рідини. Проте знаходження такого конформного перетворення в явному вигляді для профілю довільної форми являє великі труднощі. Тому застосовують наближені методи рішення задачі обтікання крилових профілів довільної форми. Обтікання профілів довільної форми будується в основному або методом наближеного конформного відображення, або методом, заснованим на заміні профілю крила системою вихорів, безперервно розташованих уздовж його середньої лінії.

4.6. Основи теорії вихорів. Основні теореми вихорової течії ідеальної рідини

Вихорова течія на відміну від потенційної характеризується тим, що вектор кутової швидкості $\vec{\omega} \neq 0$. Вивчення вихорових рухів в рідині має велике практичне значення, оскільки в реальній рідині спостерігається досить часто. Так, спостерігаючи рух води в річці, легко помітити утворення вихорів за опорами мостів, за кормою човнів і катерів, при ударі весел об воду, при обтіканні перешкод і т.д.

На утворення вихорової області витрачається енергія, що є джерелом особливого типу опору, який називається *вихоровим опором* і який треба вміти обчислювати для різних тіл.

Смерчі, що спостерігаються в атмосфері, і циклони також є вихорами. Дрібні вихори складають основу турбулентних течій, вивчення яких являє одну зі складних проблем сучасної аерогідродинаміки.

Вихорова лінія – лінія, дотична до якої в кожній точці визначає напрям вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$.

Вихорова трубка – трубка, поверхня якої утворена вихоровими лініями. За визначенням жодна вихорова лінія не може перетинати вихорову трубку.

За аналогією з лініями струму диференціальне рівняння вихорових ліній можна подати у вигляді

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \quad (4.67)$$

Для характеристики вихорових трубок в аеродинаміці використовують поняття про *напругу*, або *інтенсивність* вихору. Під напругою (інтенсивністю) вихору \aleph розуміють подвоєний добуток кутової швидкості ω на площу нормального перетину вихорової трубки σ_n . Якщо вектор $\vec{\omega}$ в усіх точках перетину σ_n має одне і те ж значення, то

$$\aleph = 2\omega\sigma_n. \quad (4.68)$$

Напруженість пов'язана з циркуляцією швидкості Γ по деякому контуру. Цей зв'язок встановлюється на підставі *теорему Стокса*.

Для елементарного прямокутного контуру зі сторонами dx і dy в плоскому русі ідеальної рідини (у припущенні, що уздовж кожної сторони контуру швидкості однакові) циркуляція при русі проти годинникової стрілки буде дорівнювати

$$d\Gamma = udx + \left(v + \frac{\partial x}{\partial x} dx \right) dy - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dx - vdy,$$

$$d\Gamma = (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y) dx dy = 2\omega_z d\sigma_z.$$

Поширюючи одержаний результат на довільно розташовану в просторі нескінченно малий прямокутний майданчик, матимемо

$$d\Gamma = 2\omega_n d\sigma = 2\omega d\sigma_n, \quad (4.69)$$

де ω_n – складова вектора $\vec{\omega}$ на нормаль до майданчика.

Отже, циркуляція по нескінченно малому прямокутному контуру дорівнює подвоєній інтенсивності вихору, що пронизує цей контур.

Одержаний результат можна легко розповсюдити на довільний кінцевий плоский контур L (див. рис. 4.28).

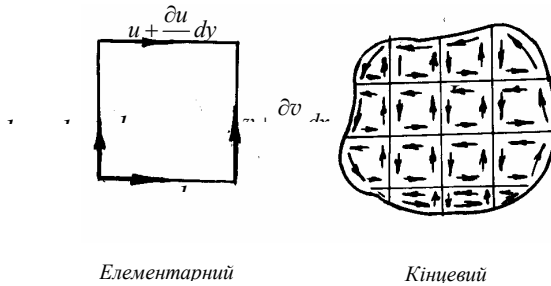


Рис. 4.28. До доведення теореми Стокса

Підсумовуючи циркуляції по всіх нескінченно малих прямокутниках, помічаємо, що циркуляції по суміжним сторонам прямокутників взаємно знищуватимуться як різні за знаком. Отже, в границі при необмеженому збільшенні числа нескінченно малих прямокутників сумарна циркуляція дасть циркуляцію уздовж контуру L (оскільки в границі вписаний багатокутник перетвориться на контур L), і тому

$$\Gamma = 2 \int_A \omega_n d\sigma. \quad (4.70)$$

Цей висновок узагальнюється і на випадок довільної просторової поверхні, що спирається на контур L . Формула (4.70) є математичним записом наступної теореми Стокса: *циркуляція швидкості по довільному контуру дорівнює подвоєній сумі напруг вихорів, охоплених цим контуром.*

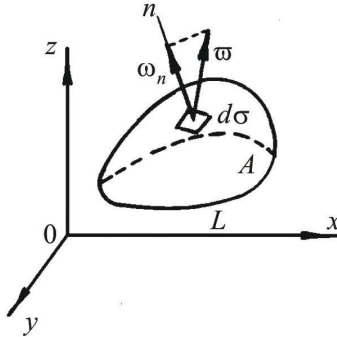


Рис. 4.29. Довільна поверхня A в просторі, пронизувана потоком вихорів

Теорема Томсона. Вирішує питання про існування вихорів в ідеальній рідині в часі. Виділимо в потоці рідинний контур L , тобто контур, що з'єднує одні і ті ж частинки рідини і що рухається разом з ними, і обчислимо зміну циркуляції в часі $d\Gamma/dt$.

За визначенням циркуляції

$$\Gamma = \int_L (u dx + v dy + w dz),$$

звідки

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_L (u dx + v dy + w dz) = \int_L \frac{d}{dt} (u dx + v dy + w dz).$$

В результаті почленного диференціювання добутку двох змінних, що стоять під знаком інтеграла, одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (u dx) &= \frac{du}{dt} dx + u \frac{d}{dt} dx = \frac{du}{dt} dx + u du, \\ \frac{d}{dt} (v dy) &= \frac{dv}{dt} dy + v \frac{d}{dt} dy = \frac{dv}{dt} dy + v dv, \\ \frac{d}{dt} (w dz) &= \frac{dw}{dt} dz + w \frac{d}{dt} dz = \frac{dw}{dt} dz + w dw. \end{aligned}$$

Використовуючи рівняння Ейлера (2.15), одержуємо

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_L \left[(f_x dx + f_y dy + f_z dz) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) + d \frac{V^2}{2} \right].$$

Масові сили, за припущенням, мають потенціал $U(x, y, z)$. Тоді маємо

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = dU(x, y, z),$$

тобто

$$f_x = X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad f_y = Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad f_z = Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Таким чином, під інтегралом стоять повні диференціали від потенціалу масових сил U , від функції тиску p і квадрата швидкості V , тобто

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_L d \left(\frac{V^2}{2} + U - \frac{p}{\rho} \right). \quad (4.71)$$

Оскільки розглядається циркуляція по замкнутому контуру, коли початкова A і кінцева B точки інтегрування збігаються, то

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \left(U + \frac{V^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right)_B - \left(U + \frac{V^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right)_A = 0, \quad \frac{d\Gamma}{dt} = 0.$$

Одержаний результат виражає теорему Томсона: *циркуляція рідини по замкнутому рідинному контуру в ідеальній баротропній рідині, що має однозначний масовий потенціал, не міняється з часом.*

Теорема Томсона нами доведена для випадку нестисливої рідини $\rho = const$. Проте вона залишається справедливою і для стислової

рідини. В цьому випадку $\frac{d\Gamma}{dt}$ прийме вигляд

$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_L d \left[U + \frac{V^2}{2} - \int \frac{dp}{\rho} \right]$, а далі слідуєть ті ж міркування, які приво-
 водять до рівності $\frac{d\Gamma}{dt}$ нулю.

З теореми Томсона виходить важливий висновок. Якщо в ідеальній рідині відсутні вихори, тобто циркуляція по будь-якому замкнутому контуру усередині рідини дорівнює нулю, то, отже, в рідині вихорів не було раніше і не буде надалі. Навпаки, якщо в ідеальній рідині існують вихори, то вони не можуть зникнути. До цього висновку легко прийти з простих фізичних міркувань. Дійсно, в ідеальній рідині відсутні дотичні напруги, тобто, в ній відсутні сили, які могли б привести в обертання рідку частинку або, навпаки, зупинити це обертання. А це і означає, що вихоровий рух в ідеальній рідині не може мимоволі виникнути, а якщо він в ній існує, то затухнути вже не може.

Теорема Томсона справедлива лише для ідеальної рідини. Проте з цього не можна зробити висновок про непридатність теореми для пояснення окремих явищ, що відбуваються і у в'язкій рідині. В деяких випадках доводиться розглядати різні стани рідини, слідуєть один за одним через короткий проміжок часу; тоді з достатнім для практичних цілей наближенням можна розглядати циркуляцію незмінною по замкнутому рідинному контуру, тобто вважати, що за цей малий проміжок часу в'язкість не робить істотного впливу на дане явище.

Вказане дозволяє застосувати теорему Томсона для пояснення виникнення циркуляції навколо тіла в рідині.

Припустимо, що в рідину у стані спокою занурено вертикально циліндровий профіль (рис. 4.30,а). У початковий момент часу циркуляція по деякому контуру C , охоплюючому циліндр, буде дорівнювати нулю.

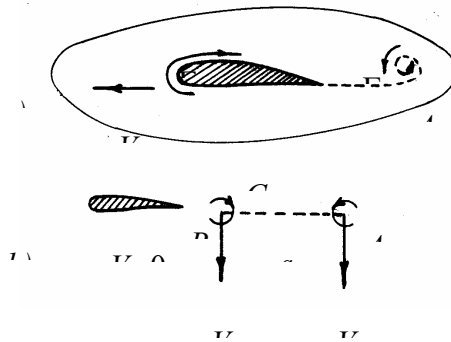


Рис. 4.30. Виникнення циркуляції навколо обтічного потоком тіла

a) – у стані спокою; b) – при виникненні циркуляції.

Зсунемо тепер циліндр ривком вліво. При цьому, як показує дослід, з циліндра збіжить так званий *розгінний вихор* A , володіючий циркуляцією Γ . Оскільки циркуляція по контуру C (за теоремою Томсона) залишається рівною нулю, то, очевидно, навколо профілю виникає циркуляція, що в точності дорівнює циркуляції вихору A , але протилежна за знаком. Наявність циркуляції навколо циліндра легко довести, якщо його швидко зупинити. В цьому випадку з профілю збігає другий вихор B (рис. 4.30, b), циркуляція якого дорівнює циркуляції вихору A , але зворотна за знаком. Пара вихорів, що утворюється, рухатиметься поступально вниз зі швидкістю

$$V_1 = V_2 = \frac{\Gamma}{2\pi a}, \text{ де } a - \text{відстань між вихорами } A \text{ і } B.$$

Теореми Гельмгольца про вихори. У роботі «Про вихоровий рух» (1858 р.) Гельмгольц сформулював і довів три теореми, встановлюючи умови збереження вихорового руху в ідеальній рідині.

Теорема 1. *Інтенсивність (напряга) вихорової трубки не міняється по її довжині.*

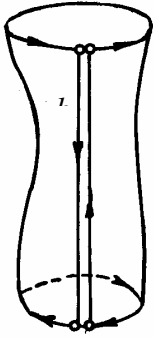


Рис. 4.31. До доказу незмінності інтенсивності (напруги) вихорової трубки по її довжині

Розглянемо елемент вихорової трубки (рис. 4.31), провівши розріз уздовж її утворюючої. Циркуляція по контуру “манжети” $\Gamma = \Gamma_{ab} + \Gamma_{bc} - \Gamma_{cd} - \Gamma_{da}$. Знак “мінус” визначає протилежні напрями обходу ліній ab і bc . $|\Gamma_{bc}| = |\Gamma_{da}|$. Тобто $\Gamma = \Gamma_{ab} - \Gamma_{cd}$. Даний контур охоплює вихорову трубку, але його поверхню жодна вихорова нитка не перетинає. Отже, за теоремою Стокса

знайдена вище циркуляція швидкості повинна дорівнювати нулю:

$$\Gamma = \Gamma_{ab} - \Gamma_{cd} = 0.$$

Звідси $\Gamma_{ab} = \Gamma_{cd}$. Поверхні, охоплювані контурами ab (σ_1) і cd (σ_2), перетинають всю вихорову трубку і згідно з тією ж теоремою Стокса $\Gamma_{ab} = 2\omega_1\sigma_1 = 2\omega_2\sigma_2$. Оскільки перетини вихорової трубки були вибрані абсолютно довільно, то

$$\omega\sigma = const. \quad (4.72)$$

Рівняння (4.72) аналогічно рівнянню нерозривності для нестисливої рідини ($V\sigma = const$). Звідси можна зробити (дуже важливий) висновок про збереження в просторі вихорових трубок.

Стійке існування вихорової трубки можливе, якщо вона або буде замкненою на себе, тобто утворює вихорові кільця, або кінці вихору лежатимуть на границях даної рідини, або один кінець спіралитиметься на границю рідини, а інший – на тверду поверхню (землю, стінку і т.д.).

Теорема 2. *В ідеальній рідині, що знаходиться під дією потенційних масових сил, вихорова трубка не руйнується і завжди залишається вихоровою трубкою.*



Рис. 4.32. До доказу незруйнівності вихорової трубки

Для доказу візьмемо на бічній поверхні даної вихорової трубки замкнений контур L , що проходить через одні й ті ж частинки рідини. Оскільки площа, охоплювана контуром L вихорами не пронизується ($\omega_n = 0$), то циркуляція по цьому контуру згідно з теоремою Стокса дорівнює нулю, тобто $\Gamma_L = 0$.

Але оскільки за теоремою Томсона циркуляція в цьому випадку з часом не змінюватиметься, то, отже, вона завжди буде дорівнювати нулю. Це означає, що через контур L ніколи вихорові лінії не пройдуть, і контур L залишиться лежати на бічній поверхні вихорової трубки, тобто вихорова трубка не зруйнується.

Вказана властивість вихорів справедлива тільки для ідеальної рідини. У реальній рідині відбувається процес загасання – дифузія вихору.

Теорема 3. *В ідеальній рідині, що знаходиться під дією потенційних масових сил, напруга вихорової трубки не міняється з часом.*

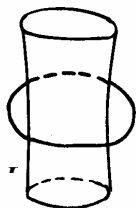


Рис. 4.33. До доказу незмінності напруги вихорової трубки з часом

Нехай контур L охоплює дану вихорову трубку (рис. 4.33). Циркуляція по цьому контуру згідно з теоремою Томсона залишається незмінною. Але оскільки за теоремою Стокса циркуляція Γ_L

дорівнює напрузі вихорової трубки, то, отже, і напруга з часом міняється не буде.

Формула Біо-Савара про вихоровий вплив. Знайдемо швидкість, індуковану вихором довільної форми і напругою Γ в довільній точці M (рис. 4.34)

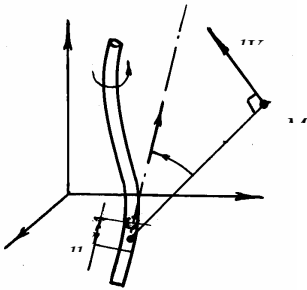


Рис. 4.34. До розрахунку швидкостей, викликаних вихором довільної форми

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{r^2} dl. \quad (4.73)$$

Елемент вихорової нитки напругою Γ і завдовжки dl індукує в точці $M(x, y, z)$ швидкість dV , що визначається за формулою (4.73), направлену по нормалі до площини, що містить \vec{dl} і \vec{r} .

Формула (4.73) встановлює цікаву аналогію з електродинамікою. Тут r – відстань від елемента до точки M , α – кут між радіусом і вектором, проведеним між точкою M і елементом, і напрямом елемента вихору.

Прямолінійна вихорова нитка. Відомо, що напруга прямолінійного вихору $\mathfrak{N} = \Gamma, h, \alpha_1$ і α_2 .

$$dl = CD = \frac{CK}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \alpha} d\alpha.$$

З $\triangle OMC$: $r = \frac{h}{\sin \alpha}$. Підставляючи в (4.73), знаходимо:

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin^2 \alpha}{h^2} \sin \alpha \frac{hd\alpha}{\sin^2 \alpha},$$

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi h} \sin \alpha d\alpha.$$

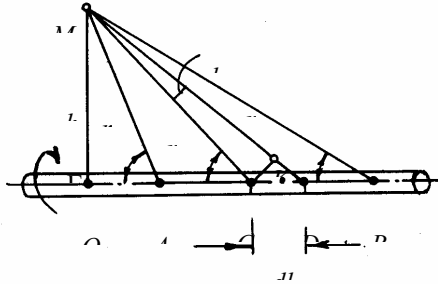


Рис. 4.35. До розрахунку швидкостей, викликаних прямолінійним нескінченно довгим вихором

Швидкість, індукована ділянкою вихору AB в точці M , дорівнює

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \sin \alpha d\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1).$$

Для нескінченно довго-

го “напівшнура” $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = 0$.

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h}.$$

Для нескінченно довгого вихорового шнура $\alpha_1 = \pi$, $\alpha_2 = 0$.

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi h}.$$

4.7. Загальне рівняння для потенціала швидкостей

Виведемо диференціальне рівняння, що описує стаціонарну, без обертання частинок, без тертя, ізоентропійну течію ідеального газу.

Відсутність обертання частинок рідини дозволяє ввести потенціал рівняннями (4.4).

При виведенні рівняння для потенціалу швидкостей виходитимемо з рівняння нерозривності руху (2.5), яке у разі сталого руху у функції потенціалу швидкостей приймає форму

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho\varphi_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\varphi_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\varphi_z) = 0.$$

Тут позначаємо

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varphi_x, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi_y, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \varphi_z.$$

Або, розкриваючи дужки, одержуємо

$$\rho(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) + \varphi_x \frac{\partial\rho}{\partial x} + \varphi_y \frac{\partial\rho}{\partial y} + \varphi_z \frac{\partial\rho}{\partial z} = 0. \quad (4.74)$$

Звідси виключимо густину ρ за допомогою рівнянь руху ідеальної рідини – *рівнянь Ейлера*. У векторній формі рівняння Ейлера можна записати у вигляді (2.14)

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \quad (4.75)$$

де $\vec{f}(X, Y, Z)$ – вектор об'ємної сили, віднесеної до одиниці маси.

Оскільки $p_x = p_y = p_z = p$, то в проекціях на прямокутну систему координат рівняння (4.75) запишемо

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4.76)$$

Повна похідна складної функції має вигляд

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Або можна записати

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\}$$

Нехтуючи об'ємними силами, одержимо у разі сталого руху через потенціал швидкостей рівняння (4.76) у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho (\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_y \varphi_{xy} + \varphi_z \varphi_{xz}), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho (\varphi_x \varphi_{xy} + \varphi_y \varphi_{yy} + \varphi_z \varphi_{yz}), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho (\varphi_x \varphi_{xz} + \varphi_y \varphi_{yz} + \varphi_z \varphi_{zz}). \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

Оскільки середовище баротропне ($\rho = f(p)$), то

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial y}; \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial z}. \end{aligned}$$

Звідси, використовуючи (4.77), можемо записати

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{a^2} (\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_y \varphi_{xy} + \varphi_z \varphi_{xz});$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{\rho}{a^2} (\varphi_x \varphi_{yx} + \varphi_y \varphi_{yy} + \varphi_z \varphi_{yz});$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\rho}{a^2} (\varphi_x \varphi_{zx} + \varphi_y \varphi_{zy} + \varphi_z \varphi_{zz}).$$

Підставляючи ці вирази в рівняння (4.74), одержуємо

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\varphi_x^2}{a^2}\right) \varphi_{xx} + \left(1 - \frac{\varphi_y^2}{a^2}\right) \varphi_{yy} + \left(1 - \frac{\varphi_z^2}{a^2}\right) \varphi_{zz} - \\ & - 2 \frac{\varphi_x \varphi_y}{a^2} \varphi_{xy} - 2 \frac{\varphi_y \varphi_z}{a^2} \varphi_{yz} - 2 \frac{\varphi_z \varphi_x}{a^2} \varphi_{zx} = 0. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Місцева швидкість звуку звичайно не є постійною, а змінюється зі зміною φ згідно з (3.14):

$$a^2 = a_0^2 - \frac{k-1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) = a_0^2 - \frac{k-1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2). \quad (4.79)$$

Підставляючи (4.79) у рівняння (4.78), одержуємо диференціальне рівняння для φ у функціях x , y і z , яке задовольняє закону збереження маси, рівнянням руху (одержаним на базі другого закону Ньютона) і законам термодинаміки.

Рівняння (4.78) є рівнянням другого порядку. Диференціальне рівняння називається *лінійним*, коли залежна змінна і її похідна входять у рівняння тільки в лінійній формі. У рівнянні (4.78), проте, маємо квадратні члени вигляду φ_x^2 і кубічні члени вигляду $\varphi_x^2 \varphi_{xx}$ і $\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy}$, це означає, що рівняння (4.78) є *нелінійним*.

Важливою особливістю лінійних рівнянь є те, що рішення можуть бути складеними; тобто якщо $\varphi_1(x, y, z)$ і $\varphi_2(x, y, z)$ є відповідно рішеннями лінійного диференціального рівняння, то $A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2$ також є рішенням, де A_1 і A_2 є довільними постійними.

Багато математичних труднощів механіки стисливої рідини є слідством того факту, що рівняння є нелінійними, у зв'язку з чим неможливо побудувати складне рішення шляхом складання простих відомих рішень.

Слід ще раз підкреслити, що диференціальне рівняння для ϕ , одержане вище, відноситься до потоку, який є і стаціонарним, і не обертається. Якби потік був нестаціонарним, рівняння (4.78) повинне бути в іншому вигляді.

Питання для самоперевірки

1. Який рух називається потенціальним?
2. Дайте визначення потенціалу швидкості і функції струму.
3. Чому припустиме складання потенціальних потоків нестисливої рідини?
4. Наведіть приклади простих потенціальних потоків ідеальної нестисливої рідини і їх накладання.
5. Сформулюйте теорему М.Є. Жуковського.
6. Що таке конформне відображення? Наведіть приклади конформних відображень.
7. Продемонструйте графічний метод побудови “профілів Жуковського”.
8. Сформулюйте постулат Жуковського–Чаплигіна.
9. Що таке “вихорова лінія”, вихорова трубка?
10. Сформулюйте теореми Стокса, Томсона і Гельмгольца про вихори.
11. Одержте загальне рівняння для потенціалу швидкостей.

РОЗДІЛ 5. ОСОБЛИВОСТІ ТЕЧІЇ СТИСЛИВОЇ РІДИНИ

5.1. Розповсюдження збурень в газі при русі в ньому матеріальної точки

Для простоти уявлятимемо собі спочатку, що в стисливому середовищі, рухається прямолінійно і рівномірно тіло малих розмірів (матеріальна точка), що є джерелом малих, пружних збурень. Для

нерухомої точки збурення розповсюджуються рівномірно у всі напрямки по прямих, витікаючих з цієї точки (рис. 5.1,а).

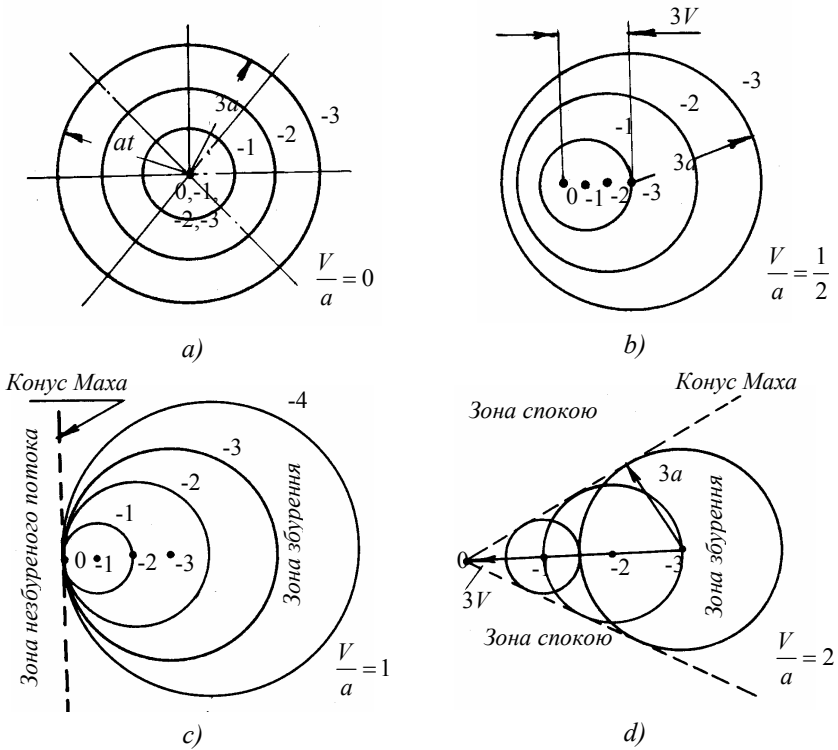


Рис. 5.1. Розповсюдження малих збурень в газі, що генеруються рухомою в ньому матеріальною точкою (джерелом збурень):
 а) – джерело збурення нерухоме ($V/a=0$); б) – дозвукова течія ($V/a=1/2$); в) – трансзвуковий рух ($V/a=1$); д) – надзвукова швидкість переміщення джерела збурення ($V/a=2$)

Через рівні проміжки часу зміна тиску досягає сферичних поверхонь з центром в джерелі збурень і з рівномірно наростаючим радіусом (швидкість його наростання дорівнює a).

Як тільки джерело збурення почне рухатися, відбудеться порушення симетрії в цій картині. Центри сферичних поверхонь, що обмежують в різні моменти часу збурену область, зміщуватимуться з тією ж швидкістю V , з якою рухається джерело збурень. Якщо $V < a$, то картина буде така, як зображено на рис. 5.1,*b*: збурення, викликані джерелом, випереджають його.

Якщо джерело збурення рухається з такою ж швидкістю, з якою розповсюджуються збурення, то воно весь час знаходиться на границі збуреної області (рис. 5.1,*c*). Збурення, викликані джерелом, в цьому випадку не розповсюджуватимуться в область, що знаходиться перед ним.

Розглянемо тепер випадок, коли джерело збурення рухається з надзвуковою швидкістю i , отже, з такою ж швидкістю рухається центр сферичної поверхні, що обмежує в даний момент часу зону розповсюдження збурення для кожного положення джерела (рис. 5.1,*d*).

Оскільки джерело збурення рухається з постійною швидкістю, то пройдений ним шлях пропорційний часу, що справедливо і для радіуса сферичної поверхні розповсюдження збурень. Тому сферичні поверхні, відповідні положенням джерела в різні моменти часу, мають огинаючу поверхню у вигляді конуса, вершина якого знаходиться в центрі джерела, а вісь збігається з напрямом руху. Цей конус називається *конусом збурення*. В область поза цим конусом не проникають викликані джерелом збурення, вони розповсюджуються тільки усередині конуса. Спостерігач, що знаходиться поза конусом, не почує видаваного джерелом звуку, навіть якщо джерело пройде мимо нього. Звук дійде до спостерігача лише тоді, коли поверхня конуса досягне спостерігача.

Рис. 5.1,*d* ілюструє три правила надзвукового потоку, запропоновані фон-Карманом. Ці правила точно застосовні тільки для малих збурень, але звичайно є якісно прийнятні і для сильних збурень.

Правило заборонених сигналів. Ефект зміни тиску, одержаного від тіла, що рухається зі швидкістю, яка перевищує швидкість звуку, не може досягти точок, що знаходяться попереду тіла.

Зона збурення і зона незбуреного потоку. Стаціонарне (нерухоме) точкове джерело в надзвуковому потоці впливає тільки на точки, що лежать на або всередині конуса Маха, що розповсюджується вниз від точкового джерела.

Навпаки, тиск і швидкість в довільній точці потоку можуть бути змінені тільки під впливом збурень, викликаних точками, що лежать на або всередині конуса, який розташований вгору по потоку від даної точки і має ту ж вершину, що і конус Маха (рис. 5.2).

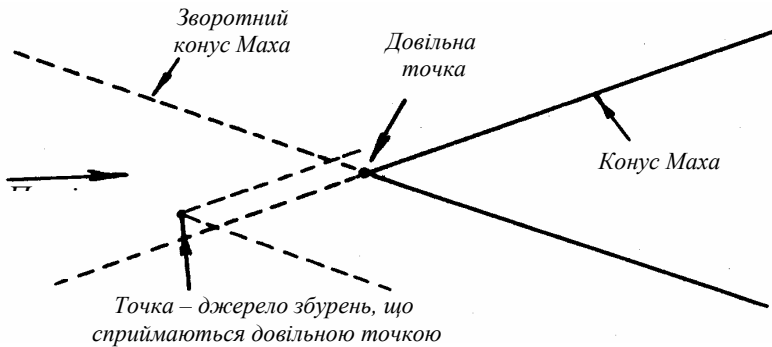


Рис. 5.2. До ілюстрації правила Кармана про зону збурення і зону незбуреного потоку

Правило концентрованого збурення. Близькість кіл, що являють собою різні імпульси тиску на рис. 5.1, є мірою інтенсивності зміни тиску в кожній точці в полі потоку. Так, для нерухомого (ста-

ціонарного) джерела інтенсивність зміни тиску є симетричною щодо джерела. При дозвуковому русі джерела (рис. 5.1,*b*) інтенсивність є несиметричною. У разі надзвукового джерела маємо правило концентрованого збурення: зміна тиску є сильно сконцентрованою в безпосередній близькості конуса Маха, який формує зовнішню межу зони збурень.

5.2. Число Маха і кут Маха

Отже, раніше показано, що природа течії залежить від порівняльної величини швидкості потоку і швидкості звуку.

Відношення цих двох швидкостей, як вже вказувалось у р.3, називається числом Маха:

$$M = \frac{V}{a}.$$

Нагадаємо, що швидкість звуку в цьому рівнянні узята при місцевій температурі і тиску потоку і звичайно змінюється від точки до точки в полі потоку.

Півкут конуса Маха (рис. 5.1,*d*), званий кутом Маха, є величиною, обернено пропорційною числу Маха

$$\sin \alpha \equiv \frac{1}{M}.$$

Візьмемо до уваги, що кут Маха є величиною нереальною для дозвукового потоку.

5.3. Критичне значення числа Маха. Стрибки ущільнення в газовому потоці

Уявимо собі, що в стисливому середовищі рухається тіло кінцевих розмірів, а не матеріальна точка. В цьому випадку в різних місцях поверхні тіла будуть різні швидкості. Розглянемо для простоти

симетричне обтікання тіла. У носовій точці тіла швидкість дорівнює нулю.

При віддаленні від носової точки вздовж контуру подовжнього перетину тіла швидкість спочатку наростає, стає більше швидкості набігаючого потоку, досягає максимального для даного випадку значення V_{max} і потім убыває аж до хвостової точки тіла (рис. 5.3).

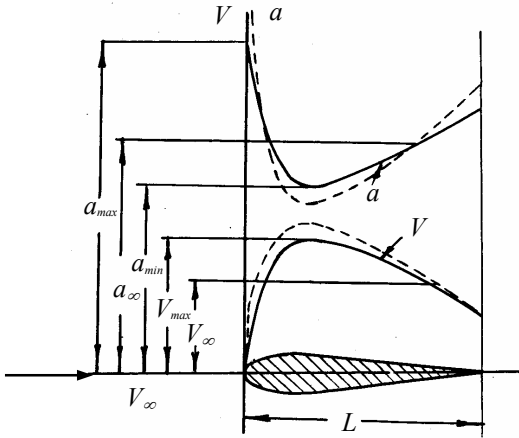


Рис. 5.3. Розподіл швидкості потоку і швидкості звуку на поверхні тіла кінцевих розмірів

З рівняння (3.14) ми знаємо, що

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = const.$$

Звідси бачимо, що чим більше в тому або іншому перетині даної струминки швидкість руху газу, тим менше в цьому перетині швидкість розповсюдження звуку.

При малих швидкостях набігаючого потоку V скрізь залишається меншим a , тобто графік a розташований над графіком V .

Проте в міру збільшення V_∞ ці дві криві зближуються одна з одною в тому місці, де одна має максимум, а друга – мінімум.

Значення числа Маха M_∞ , за яким на поверхні тіла досягається місцева швидкість течії, рівна місцевій швидкості звуку, називається *критичним значенням числа $M_{кр}$* для даного тіла. Воно завжди менше або дорівнює одиниці і залежить перш за все від відносної товщини тіла: чим тонше тіло, тим більше значення $M_{кр}$; для подовжень обтічної нескінченно тонкої пластинки воно дорівнює одиниці.

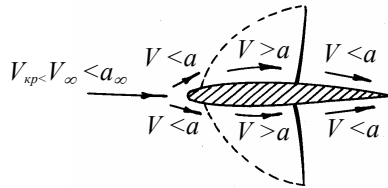


Рис. 5.4. Обтікання тіла кінцевих розмірів дозвуковою швидкістю $M_\infty > M_{кр}$

При обтіканні тіла потоком газу, що має на нескінченності дозвукову швидкість (рис. 5.4), у поверхні тіла утворюються у випадку $M_\infty > M_{кр}$ замкнуті області, де газ рухається з надзвуковою швидкістю. Досліди показують, що наростання швидкості течії газу при переході від дозвукових швидкостей до надзвукових відбувається плавно, тоді як зменшення швидкості при переході від надзвукових швидкостей до дозвукових (у випадку $M_\infty > M_{кр}$) відбувається не плавно, а розривно, стрибкоподібно.

Причина цього полягає в тому, що малі коливання тиску, розповсюджуючись в газі зі швидкістю звуку, не можуть проникнути *проти потоку* з області дозвукового руху в хвостовій частині тіла в область надзвукового руху в середній частині. Границя, що замикає

надзвукову область, є в той же час границею розповсюдження збурень, що виходять з хвостової частини. Тому потік в надзвуковій області не встигає перебудуватися відповідно до розподілу тиску в дозвуковій області. Він ніби сліпо натикається на дозвуковий потік. Відбувається різке стиснення середовища і в результаті цього на границі між надзвуковою і наступною за нею дозвуковою областями виникає стрибкоподібне підвищення тиску і густини; воно називається *стрибком ущільнення*, або *ударною хвилею*. Розташування стрибка ущільнення на даному тілі залежить від числа M_∞ .

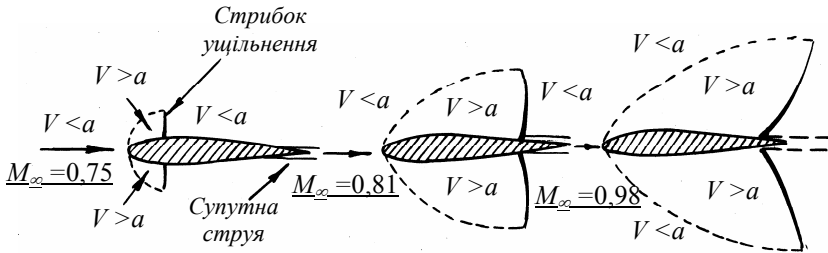


Рис. 5.5. Розташування стрибків ущільнення на поверхні обтікаючого тіла кінцевих розмірів залежно від M_∞ ($M_{кр} < M_\infty < 1$)

Коли число M_∞ збільшується, наближаючись до одиниці, стрибки ущільнення переміщуються разом з границею надзвукової області в напрямку до хвостика тіла (рис. 5.5). При числі M_∞ дещо більшим одиниці, з'являється ще один стрибок ущільнення. Він розташовується перед тілом поблизу носика. Його походження таке ж, як походження тих стрибків ущільнення, про яких йшлося вище. Набігаючий потік є в даному випадку надзвуковим, тоді як біля носової точки, яка є точкою гальмування потоку, знаходиться область малих, в усякому разі, дозвукових швидкостей.

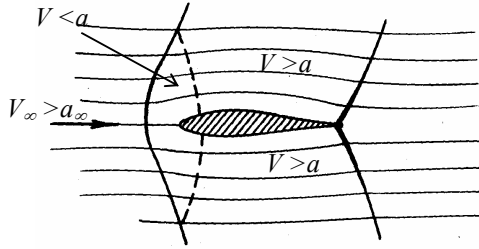


Рис. 5.6. Обтікання тіла кінцевих розмірів при числі M_∞ дещо більшим одиниці

На границі між надзвуковою областю і дозвуковою областю, що знаходиться перед носиком, відбувається різке стиснення потоку і виникає стрибок ущільнення (рис. 5.6).

При подальшому збільшенні числа M_∞ розміри дозвукової області перед носиком зменшуються, стрибок ущільнення стає нахиленим і наближається до тіла.

5.4. Класифікація стрибків ущільнення.

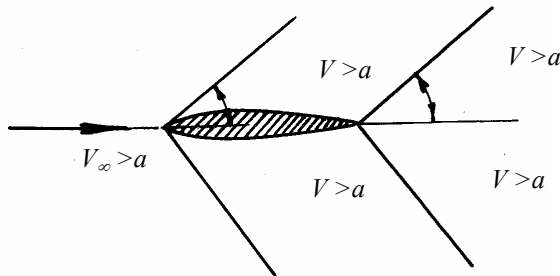


Рис. 5.7. Обтікання загостреного тіла кінцевих розмірів надзвуковим потоком

Якщо носик достатньо загострений, то стрибок ущільнення впритул присувається до носика (рис. 5.7). Такий стрибок ущільнення називається *присьднаним стрибком* на відміну від попереднього, який можна назвати *від'єднаним*.

Лінії струму можуть перетинати поверхню стрибка ущільнення під різними кутами.

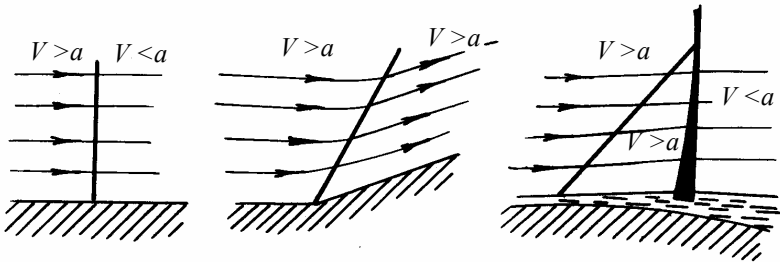


Рис. 5.8. До класифікації стрибків ущільнення (прямий, косий і лямбдаподібний стрибки)

Якщо лінії струму перпендикулярні до поверхні стрибка ущільнення, то він називається *прямим стрибком*. Лінії струму можуть перетинати стрибок ущільнення під гострим кутом; такий стрибок ущільнення називається *косим стрибком*. Косі стрибки ущільнення можуть перетинати надзвукову область, спираючись одним зі своїх кінців в прямий стрибок, що замикає цю область. В цьому випадку виходить так званий *лямбдаподібний стрибок* (від грецької букви λ , на яку він схожий) (рис. 5.8).

На рис. 5.8. зображені прямий, косий і лямбдаподібний стрибки ущільнення.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте три правила фон-Кармана для надзвукового потоку.
2. Що таке “число Маха”, “кут Маха”, критичне значення числа Маха?”
3. У чому причина виникнення стрибків ущільнення? Які види стрибків Вам відомі?

Задачі

5.1. Літальний снаряд у польоті рухається з більш– менш конічно обкресленим стрибком перед ним. З фізичних міркувань очевидно, що на великій відстані від снаряда ця хвиля стрибка стає строго конічною і зміна в швидкості і густині під час переходу через стрибок стає нескінченно малою.

Фотографії польоту кулі показують, що на великій відстані від кулі загальний кут нахилу конуса дорівнює $50,3^\circ$.

Тиск і температура незбуреного повітря $0,101325 \text{ МПа}$ і 38°C відповідно.

Визначити швидкість кулі в м/с і число Маха кулі відносно незбуреного потоку.

5.2. Надзвуковий літак рухається на висоті $H = 8000 \text{ м}$ зі швидкістю 450 м/с ($T_H = 236 \text{ К}$).

Через скільки часу спостерігач почує звук від літака, що пролетів мимо нього?

5.3. Стрілоподібне крило з кутом $\gamma = 40^\circ$ рухається в зустрічному потоці зі швидкістю 250 м/с . Швидкість потоку, що набігає на крило 250 м/с , а температура 20°C . З'ясуйте, чи знаходиться крило в збуреній області і з якою швидкістю буде обтікатися нормальний перетин крила.

5.4. Кут Маха при русі точки складає $\alpha = 30^\circ$. Визначити швидкість розповсюдження звуку, якщо швидкість руху точки дорівнює $V = 400 \text{ м/с}$.

5.5. Визначити кут нахилу крил для надзвукового літака, якщо максимальна швидкість його руху складає $V = 2500 \text{ км/год}$. Стеля польоту літака $H = 22000 \text{ м}$, де температура складає $t = -70^\circ\text{C}$.

5.6. Знайти швидкість звуку, числа M і λ для струму повітря, витікаючого з балона зі швидкістю, рівній половині максимальної теоретичної швидкості витікання.

Температура в балоні 127°C .

5.7. Які параметри (тиск, температуру) повинно мати повітря у форкамері надзвукової труби, щоб при розрахунковому розширенні воно витікало в атмосферу зі швидкістю 800 м/с при $t = -70^\circ\text{C}$

Яким при цьому буде співвідношення між густиною повітря в струмені і густиною за нормальних умов?

Мається на увазі проста труба з соплом, відкритим в атмосферу.

5.8. Яку максимальну швидкість повітря можна одержати в надзвуковій трубці без підігріву, якщо врахувати, що повітря зріджується при $T = 78 \text{ К}$?

Примітка. Досліди показують, що в рухомому повітрі зріджування наступає при температурі нижче $T = 78 \text{ К}$.

5.9. Повітря тече по трубі змінного перетину. Число Маха в першому перетині труби $M_1 = 1$, а в другому перетині $M_2 = 2$. Яке співвідношення між швидкостями повітря в першому і другому перетинах ?

5.10. Як зміниться кінетична енергія одиниці об'єму повітря при русі по трубі, що розширюється, зі збільшенням числа M від $M_1 = 1$ до $M_2 = 2$?

Поясніть результат.

РОЗДІЛ 6. ПЛОСКА ДО- І НАДЗВУКОВА ТЕЧІЯ ГАЗУ З МАЛИМИ ЗБУРЕННЯМИ

6.1. Сутність методу лінеаризації

Хоча диференційне рівняння у функції потенціалу швидкостей для стаціонарного, що не обертається, ізоентропійного руху одержане нами раніше (4.76), точне рішення таких рівнянь для аеродинамічних задач вельми складне. Тому можна йти двома шляхами: (і) знайти точне рішення для порівняно невеликого числа задач з метою якісного розуміння природи інших аеродинамічних задач, для яких точні рішення не одержані (не можливі); або (ii) знайти прості, навіть наближені рішення, що задовольняють практичним розрахункам. Обидва методи важливі в решті-решт доповнюють один одного. Так, декілька точних рішень служать оціночним критерієм щодо точності і можливості застосування наближених методів.

Нижче розглянемо, як другий спосіб може бути застосований до деяких важливих задач двомірного дозвукового потоку.

Припущення двомірного потоку служить першим наближенням до задач течії через осьові турбіни і компресори, обтікання крил літака і лопастей пропелерів. У багатьох перелічених вище випадках зміни швидкостей, викликані тілом або тілами, що знаходяться в потоці, є малими внаслідок малої товщини тіл. Отже, маємо сутність методу лінеаризації – потік може бути представлений як комбінація однорідної паралельної швидкості, на яку накладаються невеликі

зміни швидкостей. Доцільність такого припущення, як побачимо пізніше, полягає в тому, що рівняння руху істотно спрощується і стає лінійним. Тому цей метод називається *теорією лінеаризації* або *методом малих збурень*.

6.2. Лінеаризація рівняння для потенціалу швидкостей

Рівняння руху. Для стаціонарного, що необертається, ізоентропійного руху диференціальне рівняння для потенціалу швидкостей визначається (4.76) і (4.77):

$$\left(1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2}\right) \Phi_{xx} + \left(1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2}\right) \Phi_{yy} - 2 \frac{\Phi_x \Phi_y}{a^2} \Phi_{xy} = 0. \quad (6.1)$$

$$a^2 = a_0^2 - \frac{k-1}{2} (\Phi_x^2 + \Phi_y^2), \quad (6.2)$$

$$\Phi = [m^2/сек], \Phi_x = [m/сек], \Phi_{xx} = [1/сек],$$

де символ Φ являє собою складний потенціал швидкості, на відміну від потенціалу зміни швидкості, позначеного ϕ у цьому параграфі.

Становлячі збурення. Визначимо швидкість в будь-якій точці як суму векторів постійної швидкості V_∞ уздовж осі x і швидкості збурення u і v в x і y напрямках відповідно (див. рис.6.1).

Для тонкого профілю, що рухається через нескінченне середовище зі швидкістю $-V_\infty$, швидкість газу щодо профілю буде V_∞ в точках, віддалених від профілю. Поблизу профілю x і y складові швидкості будуть $(V_\infty + u)$ і v відповідно.

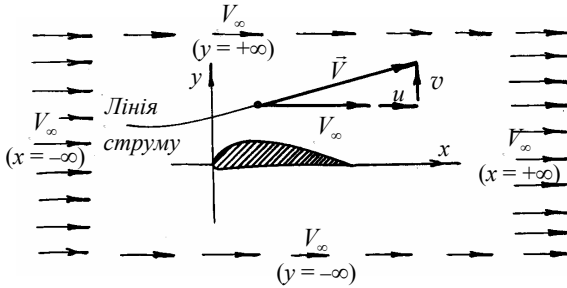


Рис. 6.1. Визначення швидкості обтікання тіла кінцевих розмірів через складові збурення

Швидкості збурення u і v є вельми малими в порівнянні зі швидкістю вільного струму V_∞ . Виразимо потенціал швидкості Φ як суму потенціалу головної швидкості V_∞ і потенціалу збурення φ , пов'язаного зі швидкостями збурення u і v

$$\Phi = V_\infty x + \varphi$$

Беручи похідні, за умови, що $V_\infty = const$, одержуємо

$$\Phi_x = V_\infty + \varphi_x = V_\infty + u; \quad \Phi_{xx} = \varphi_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \Phi_y = \varphi_y = v;$$

$$\Phi_{yy} = \varphi_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \Phi_{xy} = \Phi_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Використовуючи рівняння (6.2), одержуємо, при $a_0 = const$,

$$a^2 + \frac{k-1}{2} [(V_\infty + u)^2 + v^2] = a_\infty^2 + \frac{k-1}{2} V_\infty^2,$$

де a_∞ є швидкістю звуку в точках, в яких швидкість течії дорівнює V_∞ .

Перетворимо цей вираз

$$\begin{aligned}
 a^2 + \frac{k-1}{2} [V_\infty^2 + 2uV_\infty + u^2 + v^2] &= a_\infty^2 + \frac{k-1}{2} V_\infty^2; \\
 a^2 + \frac{k-1}{2} V_\infty^2 + \frac{k-1}{2} V_\infty^2 \left[2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} \right] &= a_\infty^2 + \frac{k-1}{2} V_\infty^2; \\
 a^2 &= a_\infty^2 - \frac{k-1}{2} V_\infty^2 \left[2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} \right]; \\
 a^2 &= a_\infty^2 \left(1 - \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \left[2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} \right] \right).
 \end{aligned}$$

Остаточню одержуємо

$$\frac{a_\infty^2}{a^2} = \frac{1}{1 - \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \left[2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} \right]},$$

де $M_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty}$.

З геометричної прогресії

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

одержуємо співвідношення

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1 - q}.$$

Тоді попередній вираз запишемо у вигляді

$$10 \frac{a_\infty^2}{a^2} = 1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \left(2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} \right) + [O] \left(M_\infty^4 \frac{u^2}{V_\infty^2} \right) + \dots,$$

де символ [O] означає “величину порядку”.

Дослідимо відносні величини коефіцієнтів при Φ_{xx} , Φ_{yy} і Φ_{xy} в рівнянні (6.1).

Для коефіцієнта при Φ_{xx} маємо

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2} &= 1 - \frac{(V_\infty + u)^2}{a^2} = 1 - \frac{(V_\infty + u)^2}{V_\infty^2} \cdot \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} \cdot \frac{a_\infty^2}{a^2} = \\ &= 1 - \frac{(V_\infty + u)^2}{V_\infty^2} \cdot \frac{a_\infty^2}{a^2} M_\infty^2 = 1 - \left(1 + \frac{u}{V_\infty} \right)^2 M_\infty^2 \frac{a_\infty^2}{a^2} = \\ &= 1 - M_\infty^2 \frac{a_\infty^2}{a^2} - 2 \frac{u}{V_\infty} M_\infty^2 \frac{a_\infty^2}{a^2} - \frac{u^2}{V_\infty^2} M_\infty^2 \frac{a_\infty^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Підставляючи сюди значення для $\frac{a_\infty^2}{a^2}$, яке запишемо у вигляді

$$\frac{a_\infty^2}{a^2} = 1 + (k-1) M_\infty^2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} + \dots,$$

одержуємо

$$1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2} = 1 - M_\infty^2 - (k-1) M_\infty^4 \frac{u}{V_\infty} - 2 M_\infty^2 \frac{u}{V_\infty} - [O] \left(M_\infty^4 \frac{u^2}{V_\infty^2} \right) - \dots$$

Припустимо тепер, що збурення швидкості є настільки малими в порівнянні з V_∞ , що можемо записати

$$M_\infty^2 \left(\frac{u}{V_\infty} \right)^2 \ll 1; \quad M_\infty^2 \left(\frac{v}{V_\infty} \right)^2 \ll 1; \quad M_\infty^2 \left(\frac{u \cdot v}{V_\infty^2} \right)^2 \ll 1.$$

Остаточно маємо

$$1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2} \cong 1 - M_\infty^2 - [2M_\infty^2 + (k-1)M_\infty^4] \frac{u}{V_\infty}.$$

Другий коефіцієнт в рівнянні (6.1) можна записати у вигляді

$$1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2} = 1 - \frac{v^2}{a^2} = 1 - \frac{v^2}{V_\infty^2} \cdot \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} \cdot \frac{a_\infty^2}{a^2}.$$

Підставляючи сюди значення для $\frac{a_\infty^2}{a^2}$, одержуємо як і раніше

$$1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2} = 1 - M_\infty^2 \frac{v^2}{V_\infty^2} - [\text{O}] \left(M_\infty^4 \frac{uv^2}{V_\infty^3} \right) - \dots$$

Спростуючи, маємо

$$1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2} \cong 1.$$

Для третього коефіцієнта в (6.1) одержуємо

$$\begin{aligned} 2 \frac{\Phi_x \Phi_y}{a^2} &= 2 \frac{(V_\infty + u)v}{a^2} = 2 \frac{V_\infty v + uv}{V_\infty^2} \cdot \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} \cdot \frac{a_\infty^2}{a^2} = \\ &= 2 \frac{v}{V_\infty} M_\infty^2 \frac{a_\infty^2}{a^2} + 2 \frac{uv}{V_\infty^2} M_\infty^2 \frac{a_\infty^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Знову підставляючи сюди значення для $\frac{a_\infty^2}{a^2}$, одержуємо

$$2 \frac{\Phi_x \Phi_y}{a^2} = 2M_\infty^2 \frac{v}{V_\infty} + [\text{O}] \left(M_\infty^2 \frac{uv}{V_\infty^2} \right) + \dots$$

Спростуючи, маємо

$$2 \frac{\Phi_x \Phi_y}{a^2} \cong 2M_\infty^2 \frac{v}{V_\infty}.$$

Підставляючи в (6.1) набуті значення коефіцієнтів, маємо наближене диференціальне рівняння (при підстановці маємо на увазі,

що $\Phi_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\Phi_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\Phi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$), яке запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} (1 - M_\infty^2) \left[1 - \left(\frac{2M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \right) \left(\frac{u}{V_\infty} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right) \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \\ + \frac{\partial v}{\partial y} - 2M_\infty^2 \frac{v}{V_\infty} \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Проте, незважаючи на вже зроблені припущення, це рівняння не є лінійним, оскільки містить квадратичні члени $u \frac{\partial u}{\partial x}$ і $v \frac{\partial v}{\partial x}$. Введе-

мо додаткові припущення

$$\frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \cdot \frac{u}{V_\infty} \ll 1 \quad \text{і} \quad M_\infty^2 \frac{v}{V_\infty} \ll 1$$

і одержуємо наступне лінійне рівняння

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

або

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (6.3)$$

Як указувалося вище, рівняння (6.3) є лінійним диференціальним рівнянням. Розглянутий метод має назву методу лінеаризації, а сам потік – лінеаризованого потоку. При $M_\infty < 1$ рівняння (6.3) є рівнянням еліптичного типу, при $M_\infty > 1$ – гіперболічного типу.

6.3. Лінеарізоване рівняння Бернуллі

Одержимо спеціальну форму рівняння Бернуллі, засновану на припущеннях теорії лінеаризації.

Нами одержано раніше (стор. 167) для $\frac{a^2}{a_\infty^2}$:

$$\frac{a^2}{a_\infty^2} = \frac{T}{T_\infty} = 1 - \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \left(2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} \right).$$

Для ізоентропійної течії маємо

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left[1 - \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \left(2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} \right) \right]^{\frac{k}{k-1}}.$$

За формулою бінома Ньютона

$$(1+q)^n = 1 + nq + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} q^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} q^3 + \dots + q^n$$

можемо записати

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 - \frac{k}{2} M_\infty^2 \left(2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} \right) + [O] \left(M_\infty^4 \frac{u^2}{V_\infty^2} \right) + \dots$$

Використовуючи прийняті нами припущення

$$M_\infty^2 \left(\frac{u}{V_\infty} \right)^2 \ll 1, \quad M_\infty^2 \left(\frac{v}{V_\infty} \right)^2 \ll 1,$$

а також те, що

$$M_\infty^2 = \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} = \frac{V_\infty^2}{\left(k \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \right)},$$

одержимо
$$\frac{p}{p_\infty} = 1 - \frac{k}{2} \frac{V_\infty^2}{V_\infty} 2 \frac{u}{k p_\infty} \rho_\infty = 1 - \frac{u \rho_\infty}{p_\infty} V_\infty.$$

Звідси маємо

$$p - p_\infty = -\rho_\infty V_\infty u. \quad (6.4)$$

Цей вираз називається *лінеаризоване рівняння Бернуллі*.

6.4. Двомірний дозвуковий потік з малими збуреннями

Перетворимо рівняння (6.3), привівши його до рівняння Лапласа. Для цього, роблячи наступну заміну змінних

$$x_1 = x, \quad y_1 = y \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad (6.5)$$

обчислимо похідні від потенціалу φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \frac{d y_1}{d y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \sqrt{1 - M_\infty^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{d y_1}{d y} = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \sqrt{1 - M_\infty^2} \right) \cdot \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

або

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} (1 - M_\infty^2).$$

Підставляючи значення похідних в рівняння (6.3), приведемо його до вигляду рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} = 0. \quad (6.6)$$

Відомо, що рівнянню Лапласа задовольняє потенціал швидкості потоку нестисливої рідини. Перехід від рівняння (6.3) до рівняння (6.6) за допомогою заміни змінних дозволяє, користуючись рівнянням Лапласа, знайти потенціал швидкості потоку нестисливої рідини, обтікаючої деякий новий контур. Якщо в знайденому за рівнянням Лапласа потенціалі швидкості замінити x_1 через x , а y_1 через $y\sqrt{1-M_\infty^2}$, одержимо потенціал швидкості для потоку стисливої рідини, обтікаючої заданий тонкий профіль. При переході від змінних x, y до змінних x_1, y_1 форма профілю мінятиметься.

Розглянемо характер зміни форми профілю при такому переході. Припустимо, що в площині x, y розташований тонкий профіль з хордою b , направлений уздовж осі x , і потік стисливої рідини обтікає цей профіль під малим кутом атаки зі швидкістю V_∞ . У такому разі в площині x_1, y_1 матимемо якийсь інший профіль з тією ж хордою b , обтічний потоком нестисливої рідини зі швидкістю $V_{1\infty}$ під новим кутом атаки α_1 .

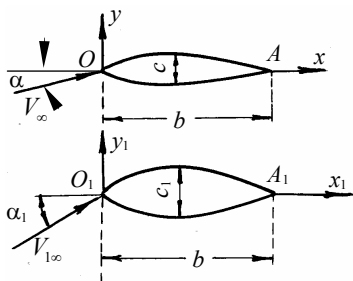


Рис. 6.2. Тонкому профілю в стисливій рідині відповідає потовщений в $1/\sqrt{1-M_\infty^2}$ раз профіль в нестисливій рідині, обтічний під більшим кутом атаки

Покажемо, що профіль, який знаходиться в потоці нестисливої рідини, буде потовщений у напрямі осі y у відношенні $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$.

Для цього звернемося до розгляду зміни швидкостей у напрямі координатних осей.

Оскільки

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \quad \text{і} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} \sqrt{1-M_\infty^2},$$

то

$$u = u_1, \quad v_1 = \frac{v}{\sqrt{1-M_\infty^2}}.$$

З останніх формул робимо висновок, що складові швидкості по осі x при такому переході не міняються і у відповідних точках профілю виявляються рівними, а складові швидкості по осі y збільшуються в $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$ раз. Це означає, що тангенс кутів нахилу дотичної

до лінії струму з віссю x , рівні $\frac{v}{V_\infty + u}$, також збільшуються в тому ж відношенні і, отже, в такому ж відношенні збільшується кут атаки, тобто

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1-M_\infty^2}}.$$

Зміни кутів нахилу дотичних показує, що контур профілю, що є лінією струму, у всіх своїх точках матиме нахил дотичних, збільше-

ний в порівнянні з нахилом дотичних до контора OA в стисливій рідині в $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$ раз.

Звідси робимо висновок, що максимальна товщина c_1 профілю O_1A_1 буде пов'язана з максимальною товщиною профілю OA співвідношенням

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{1-M_\infty^2}},$$

тобто *тонкому профілю в стисливій рідині відповідає потовщений профіль в нестисливій рідині, обтічний під більшим кутом атаки.*

Таким чином, для визначення обтікання тонкого профілю крила потоком стислої рідини необхідно розглянути обтікання нестислою рідиною профілю, потовщеного у напрямі осі y в $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$

раз, під кутом атаки, збільшеним в стільки ж раз. Визначивши для цього фіктивного профілю за допомогою рівняння Лапласа потенціал $\varphi(x_1, y_1)$, треба знов перейти, користуючись перетворенням (6.5), до потоку стислового газу.

Грунтуючись на лінеаризованому рівнянні Бернуллі (6.4), можемо зробити висновок, що підйомна сила для профілю в стисливому газі і підйомна сила для потовщеного фіктивного профілю в нестисливій рідині однакові. Відомо, якщо в потоці нестислої рідини профіль, хорда якого розташована уздовж осі x , розтягується у напрямі осі y в n раз і одночасно в n раз збільшується кут атаки α , то коефіцієнт підйомної сили також збільшується в n раз. Але, з другого боку даний профіль в стисливому газі поводитья так, як потов-

щений в $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$ раз фіктивний профіль в потоці нестисливої рідини. Отже, профіль в стисливому газі має підйомну силу в $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$ раз більшу, ніж в нестисливій рідині. Звідси висновок – вплив стисливості при $M < M_{кр}$ приводить до збільшення коефіцієнта підйомної сили. Для знаходження коефіцієнта підйомної сили профілю в стисливому газі треба взяти значення коефіцієнта підйомної сили для даного кута атаки на малих швидкостях обтікання і помножити на $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$.

6.5. Двомірний надзвуковий потік з малими збуреннями

Нижче розглянемо наближений аналітичний метод, що застосовується до двомірного надзвукового потоку, який не обертається, з невеликими відхиленнями від однорідного паралельного потоку. Треба, однак, відзначити, що більшість надзвукових течій включають стрибки, однак (як покажемо нижче) зміною ентропії при переході через слабкий стрибок можна нехтувати.

Метод малих збурювань можна застосовувати при рішенні таких практичних задач, як обтікання тонкого крила літака з різкими входними й вихідними кромками, при течії через турбіну й компресорні решітки з тонких профілів з малими кутами повороту потоку, при течії всередині двомірних труб, при витіканні з надзвукового сопла в область змінного протитиску.

Раніше одержано лінеаризоване рівняння для потенціалу швидкостей (6.3)

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

При цьому прийняли припущення, що

$$\frac{M_\infty^2 \frac{u}{V_\infty}}{1 - M_\infty^2} \ll 1 \quad \text{и} \quad M_\infty^2 \frac{v}{V_\infty} \ll 1$$

Рівняння (6.3) втрачає сенс у трансзвуковій області, тобто в області, де $M_\infty \approx 1$.

Для надзвукової течії M_∞ не може бути занадто великим. Для практичних цілей максимальна величина M_∞^2 повинна дорівнювати близько десяти. Або, більш точно, оскільки $\frac{u}{V_\infty}$ і $\frac{v}{V_\infty}$ є величиною того ж порядку, що і відношення товщини тіла $\delta \equiv \frac{c}{b}$ (див. рис. 6.2), можемо сказати, що лінеаризована теорія може бути використана, коли $M_\infty^2 \cdot \delta$ є величиною малою в порівнянні з одиницею.

Для дозвукового потоку рівняння (6.3) є *еліптичного* типу й може бути зведене до рівняння Лапласа даним вище методом. Для надзвукового потоку рівняння (6.3) є *гіперболічного* типу й може бути зведене до класичного хвильового рівняння простим перетворенням. Отже лінеаризований надзвуковий потік має багато властивостей, подібних властивостям коливної металевої пластини, колонки повітря або стрижнів, струн. Більш повне тлумачення математичних властивостей еліптичних і гіперболічних диференціальних рівнянь буде дано трохи нижче.

Покажемо, що для надзвукового потоку загальний розв'язок рівняння (6.3) можна подати у вигляді

$$\varphi = \varphi_1 \left(x + y\sqrt{M_\infty^2 - 1} \right) + \varphi_2 \left(x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1} \right),$$

де φ_1 є довільною функцією аргументу $x + y\sqrt{M_\infty^2 - 1}$, φ_2 є довільною функцією аргументу $x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1}$.

Щоб показати це, досліджемо часткове розв'язання φ_1 . Беручи похідні, ми одержуємо (пам'ятаючи, що $Q = Q(x, y)$):

$$d\varphi_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial Q} dQ = \frac{\partial\varphi_1}{\partial Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right).$$

Звідси

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial x} = \varphi_1' \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \varphi_1' \frac{\partial Q}{\partial y},$$

де φ_1' є перша похідна φ_1 щодо аргументу Q .

$$Q = x + y\sqrt{M_\infty^2 - 1}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \sqrt{M_\infty^2 - 1}.$$

Тоді

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \varphi_1'; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \sqrt{M_\infty^2 - 1}\varphi_1';$$

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} = \varphi_1''; \quad \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} = (M_\infty^2 - 1)\varphi_1''.$$

Підставляючи в (6.3) бачимо, що довільна функція φ_1 задовольняє рівнянню (6.3) і тому є його частковим розв'язанням. Аналогічно можна показати, що φ_2 також є частковим розв'язанням (6.3).

Наше завдання тепер полягає в тому, щоб знайти часткову форму цих функцій, що відповідають будь-якій узятій картині течії. Ви-

гляд цих функцій визначається обрисом обтікаючого тіла й початковими умовами течії.

Надзвуковий потік з малими збурюваннями може бути поданий прийняттям двох простих випадків, коли або функція φ_1 , або φ_2 є вироджуючою, тобто функція є постійною через все поле потоку. Часткові рішення, отримані таким чином, відомі як рішення простої хвилі, або рішення із хвилями одного сімейства.

Визначимо лінії, уздовж яких φ_1 або φ_2 зберігають постійні значення. Ці лінії є лініями рівного потенціалу в тих випадках, коли φ визначається тільки однією з функцій φ_1 або φ_2 , тобто коли за граничними умовами задачі другу функцію можна покласти рівною нулю. Функція φ_1 буде зберігати постійне значення, якщо

$$x + y\sqrt{M_\infty^2 - 1} = \text{const} ,$$

функція φ_2 буде зберігати постійне значення, якщо

$$x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1} = \text{const} .$$

Перше із цих рівнянь являє собою сімейство паралельних одна одній прямих

$$y = -\frac{x}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + c_1 ,$$

кутовий коефіцієнт яких дорівнює $-\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$; друге рівняння, що

можна записати у вигляді

$$y = \frac{x}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + c_2 ,$$

являє собою сімейство паралельних одна одній прямих з кутовим

коефіцієнтом $\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$.

Кожна з ліній як першого, так і другого сімейства, називається *характеристичною лінією* або *характеристикою* рівняння (6.3)

Знайдемо кут нахилу A характеристичних ліній до осі x . З рівності $\operatorname{tg} A_2 = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$ виходить, що $\sin A_2 = \frac{1}{M_\infty}$.

Аналогічно для другого сімейства

$$\operatorname{tg} A_1 = -\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \text{ і, отже, } \sin A_1 = -\frac{1}{M_\infty}.$$

Звідси виходить, що кут A являє собою кут, який характеризує збурену область, а характеристики є лініями Маха (рис. 6.3).

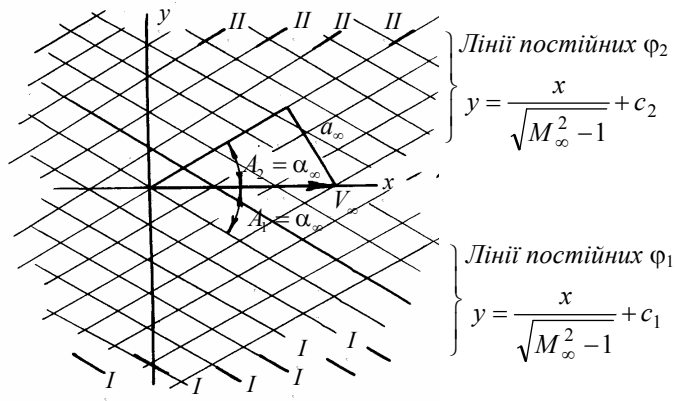


Рис. 6.3. Лінії Маха першого й другого сімейств

Оскільки градієнт потенціалу збурення дорівнює вектору зміни швидкості й оскільки градієнт потенціалу збурення нормальний до ліній постійного потенціалу збурення, то виходить, що зміна у

векторі швидкості відбувається в напрямку, перпендикулярному лініям сімейства II.

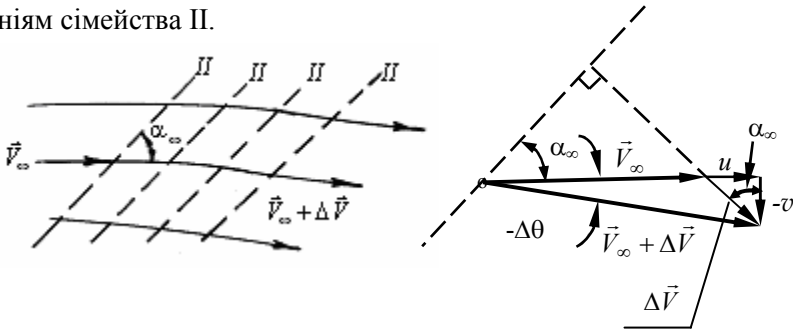


Рис. 6.4. Діаграма вектора швидкості для лінії струму, що перетинає хвилю тиску другого сімейства

Для одержання співвідношення між зміною в тиску й зміною в напрямку ліній струму, що перетинає область, де є хвилю тиску сімейства II, згадаємо лінеаризоване рівняння Бернуллі (6.4)

$$p - p_\infty = -\rho_\infty V_\infty u .$$

З геометричних фігур рис. 6.4 можемо записати

$$u = -v \cdot \operatorname{tg} \alpha_\infty .$$

Далі, якщо $\Delta\theta$ являє собою зміну в напрямку лінії струму, яку будемо вважати позитивною при відліку проти годинникової стрілки, то, нехтуючи порівняно малою величиною $u\Delta\theta$, можемо записати

$$v = V_\infty \Delta\theta .$$

Тоді знаходимо

$$(p - p_\infty) = \rho_\infty V_\infty^2 \Delta\theta \cdot \operatorname{tg} \alpha_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \Delta\theta .$$

Знаючи, що $a_\infty^2 = k \frac{p_\infty}{\rho_\infty}$, остаточно маємо

$$(p - p_\infty)_{II} = \frac{kp_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \Delta\theta, \quad \Delta p_{I,II} = \mp \frac{kp_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \Delta\theta. \quad (6.7)$$

При одержанні рішення за допомогою хвиль можемо побудувати зображення течії відповідно до граничних умов, що впливають з чотирьох основних типів зміни, які залежать (і) від того, чи є хвилі сімейством I або II і (ii) чи є потік прискорюваним або що, гальмується. Ці випадки зображені на рис. 6.5. Із цих рисунків і рівняння (6.7) бачимо, що тиск збільшується при гальмуванні й зменшується при прискоренні потоку. Далі, при стиску лінія струму прямує в напрямку до лінії Маха (лінія струму і лінія Маха зближуються), у той час як при розширенні лінія струму відхиляється геть від лінії Маха.

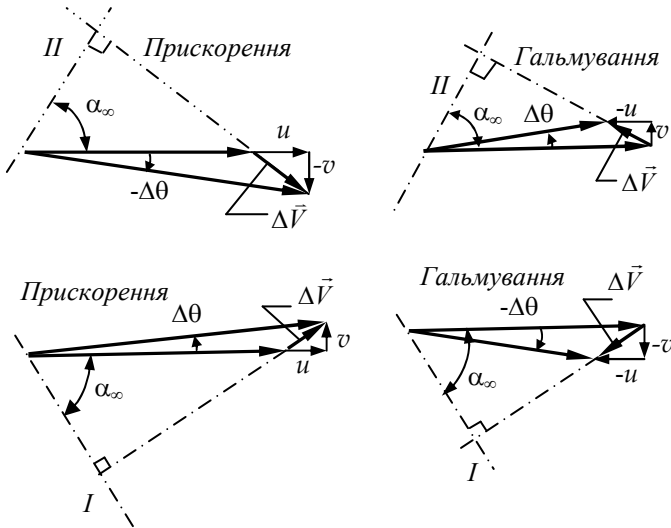


Рис. 6.5. Чотири основних типи картин течії при одержанні рішення за допомогою хвиль

Для зручності розрахунків введемо

$$\Theta = \frac{180}{\pi} \theta,$$

де Θ є відхиленням лінії струму від осі x у градусах, θ – відповідне відхилення в радіанах.

Також введемо безрозмірний коефіцієнт тиску

$$P = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{k p_\infty M_\infty^2} p + const,$$

де постійна вибирається так, щоб P приймав зручну числову величину. Тоді з рівняння (6.7) виходить, що для лінії струму, який *перетинає* хвилі другого сімейства,

$$\Delta P_{II} = \Delta \Theta$$

і для лінії струму, що *перетинає* хвилі сімейства I,

$$\Delta P_I = -\Delta \Theta.$$

Місцеве значення P визначає місцеве значення числа Маха через ізоентропійні співвідношення.

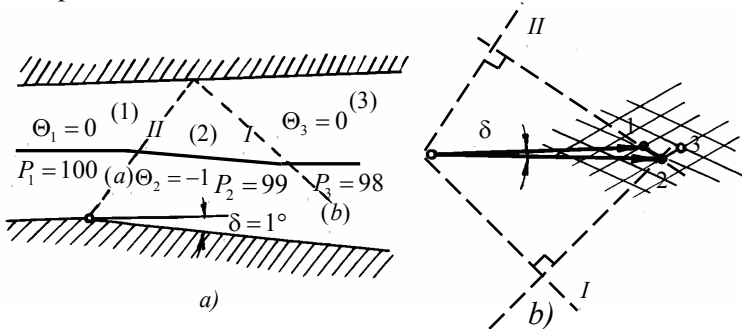


Рис. 6.6. Відбиття хвилі розрідження від прямої стінки:

a) – хвильова картина течії у фізичній площині;

b) – діаграма годографа швидкості

На рис. 6.6,а,б наведено приклад відбиття хвилі від прямої стінки й годограф швидкості для цього випадку.

Питання для самоперевірки

1. У чому полягає сутність методу малих збурювань?
2. Одержіть лінеарізоване рівняння для потенціалу швидкостей.
3. Виведіть лінеарізоване рівняння Бернуллі.
4. Одержіть співвідношення між зміною в тиску і зміною в напрямку лінії струму для надзвукового потоку з малими збуреннями.

Задачі

6.1. При малих збуреннях потенціал швидкості Φ виражається як сума головної швидкості V_∞ й потенціалу збурення φ , зв'язаного зі швидкостями збурювання u і v , тобто $\Phi = V_\infty x + \varphi$. Нехай $V_\infty = 250 \text{ м/с}$, $\varphi = 6x^2 - 3y^2$, газ-повітря.

а) показати, що потенціал швидкості Φ на всьому протязі осі x ($0 < x < \infty$) задовольняє основне лінеарізоване рівняння для потенціалу швидкостей.

б) показати, що уздовж осі x $M_\infty = 0,707$, $T_1 = 309 \text{ К}$, $T_2 = 304,7 \text{ К}$, $\rho_1/\rho_2 = 1,05$ для перетинів $x_1 = 0$ і $x_2 = 1,5 \text{ м}$.

в) для лінії струму, що проходить через точку 1 ($x_1 = 0$ і $y_1 = 1$) визначити в точці 2 величину y_2 і нахил лінії струму ($x_2 = 1,5$).

6.2. У точці простору 1 (x_1, y_1), де $\Phi_1 = 1008 \text{ м}^2/\text{с}$, визначити величину, напрямком швидкості й T_∞ , якщо газ-повітря і $\varphi = x^2 - 0,5y^2$. При цьому в точці 1 $x_1 = 4 \text{ м}$, $\varphi_1 = 8 \text{ м}^2/\text{с}$.

6.3. Профіль обтікається паралельним потоком $V_\infty = 200 \text{ м/с}$.

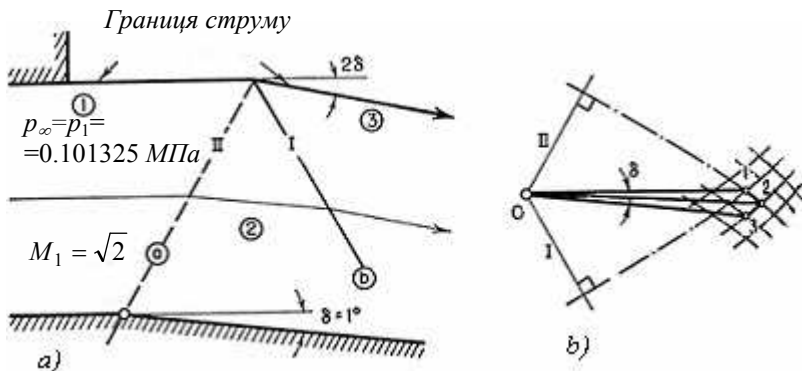
У точці 1: $x_1 = 0,3 \text{ м}$, $y_1 = 0,15 \text{ м}$, $\Phi_1 = 70 \text{ м}^2/\text{с}$, $V_1 = 210 \text{ м/с}$, $\theta_1 = 1,5^\circ$.

У точці 2: $x_2 = 0,33 \text{ м}$, $y_2 = 0,165 \text{ м}$, $V_2 = 215 \text{ м/с}$, $\theta_2 = 1,25^\circ$.

Визначити φ_1 і φ_2 , u_1 , v_1 і u_2 , v_2 , Φ_2 .

6.4. Однорідний паралельний струмінь залишає сопло й піддається на верхній границі постійному атмосферному тиску. Нижня стінка відхиляється на 1° .

Визначити властивості потоку вниз по течії.

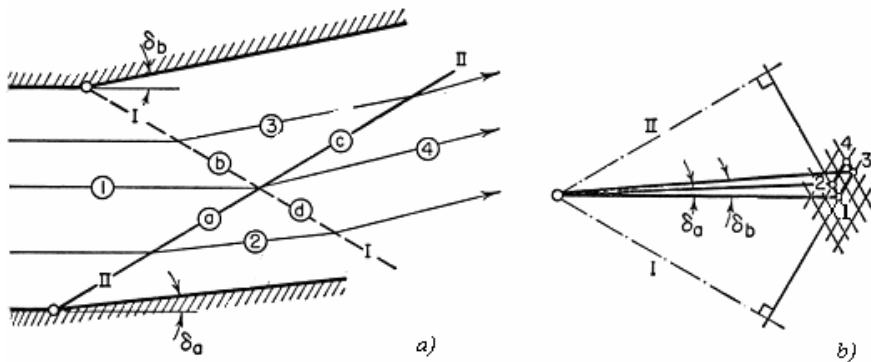


Задача 6.4:

a) – хвильова схема, лінії струму й властивості потоку;

b) – картина течії в площині годографа.

6.5. Визначити стан в області 4 за відомим станом в області 1 і відомим поворотним кутам δ_a і δ_b ($\delta_a = 2^\circ$, $\delta_b = 4^\circ$, $M_1 = 1,988$, $p_1 = 5 \text{ бар}$).

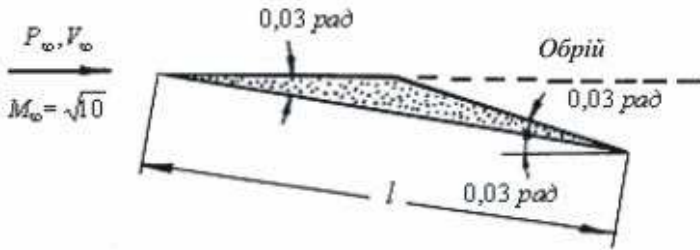


Задача 6.5

a) – хвильова схема, лінії струму і властивості потоку;

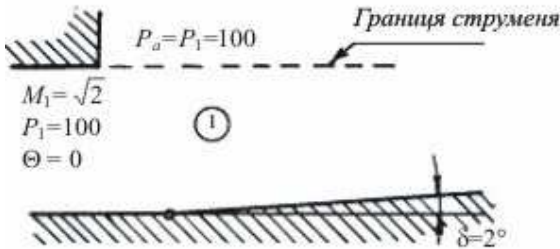
b) – картина течії в площині годографа

6.6. Визначити коефіцієнт підйомної сили C_L і коефіцієнт опору C_D для наступного крила літака.



Задача 6.6

6.7. Зобразити хвильову схему, картину течії в площині годографа і визначити параметри потоку в кожній області за відомим станом в струмені на виході з сопла в області 1. Тиск на виході $p_a = p_1$, поворот нижньої стінки $\delta = 2^\circ$.

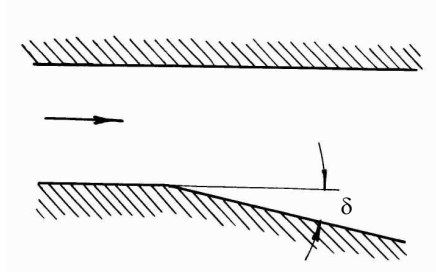


Задача 6.7

6.8. Двовимірний канал має пряму верхню стінку і злам у нижній.

Число Маха і тиск спочатку дорівнюють 2 і 10 бар відповідно. Використовуючи теорію лінеаризації, накресліть хвильову схему, лінії струму й визначте тиск у різних областях з постійною швидкістю при а) $\delta = -2^\circ$; б) $\delta = +2^\circ$.

Зобразьте картину течії в площині годографа.



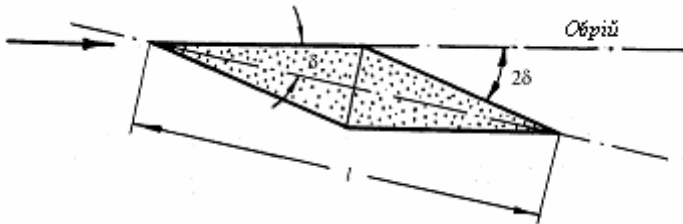
Задача 6.8

6.9. Використовуючи $M_\infty = \sqrt{2}$, $p_\infty = 10 \text{ бар}$ і кут повороту стінки $|\delta| = 0,05 \text{ радіан}$ дати графічні й чисельні приклади для:

a)– погашення падаючої хвилі розрідження.

b)– хвиля стиску падає на тверду границю. В місці падіння виникає хвиля сти-ску з інтенсивністю, вдвічі більшою падаючої хвилі.

6.10. Визначити коефіцієнт підйомної сили C_L і коефіцієнт опору C_D для наступного крила літака, що обтікається потоком зі значенням $M_\infty = \sqrt{10}$, $\delta = 0,03 \text{ радіан}$.



Задача 6.10

6.11. Надзвукове сопло, що розширюється, із прямими стінками у своїй над-звуковій частині приєднано до прямої труби.

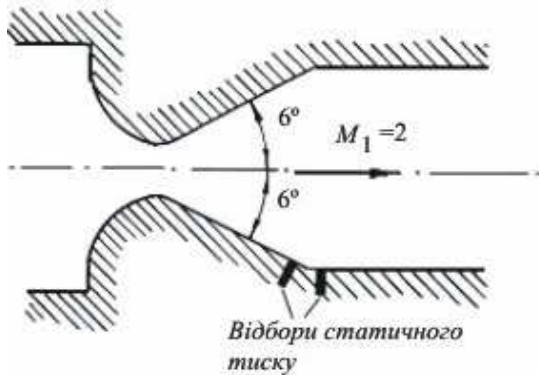
Загальний кут між прямими, що утворюють надзвукову частину сопла, дорівнює 12° . На виході із сопла $M = 2,0$.

Два відбори статичного тиску виконані в стінці біля перехідного кута сопла в пряму трубу: один отвір– нижче, а другий– вище вершини кута.

Визначити підвищення тиску при переході через кут:

a) у відсотках від тиску на виході сопла;

б) у відсотках від тиску на вході в сопло.



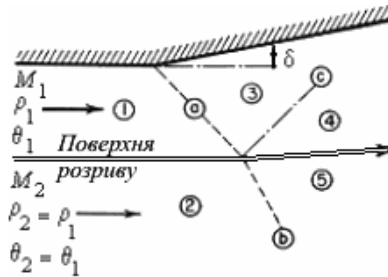
Задача 6.11

6.12. Рисунок зображує двовірний надзвуковий потік із хвилею розрідження a , що падає на поверхню розриву, яка розділяє дві області течії, що мають однакові тиски й напрямки, але різні швидкості.

Визначити параметри повітря в областях 3, 4 і 5, а також вигин вихрової завіси β , якщо $\delta = 0,1 \text{ рад}$.

$$M_1 = \sqrt{5}, \quad p_1 = 10 \text{ бар}, \quad \theta_1 = 0; \quad M_2 = \sqrt{2}, \quad p_2 = 10 \text{ бар}, \quad \theta_2 = 0.$$

Побудувати схему течії в площині годографа.



Задача 6.12.

6.13. Розв'язати задачу аналогічну 6.12, але за умов:

$$\delta = -0,05 \text{ радян}; \quad M_1 = \sqrt{2}; \quad M_2 = \sqrt{5}, \quad p_2 = p_1 = 10 \text{ бар}, \quad \theta_2 = \theta_1 = 0.$$

6.14. Показати, що

$$\frac{\theta_5}{\delta} = \frac{2}{1 + \frac{M_2^2}{M_1^2} \sqrt{M_1^2 - 1}}, \text{ і що } \frac{p_4 - p_1}{p_3 - p_1} = \frac{2}{1 + \frac{M_1^2}{M_2^2} \sqrt{M_2^2 - 1}}.$$

6.15. Рисунок зображує турбінне сопло, зрізане під кутом 30° до осі сопла. Сопло, спроектоване для числа Маха, рівного $\sqrt{2}$, працює при тиску 10 бар у площині різку і розширюється в область, де тиск $p_a = 9,9 \text{ бар}$.

Нехтуючи тертям, зобразити хвильову картину і границю струму. Зобразити хвилі стиску суцільними лініями, а лінії розрідження – переривчастими.

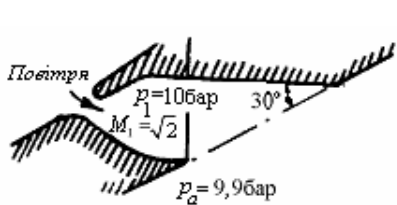
У кожній області течії вказати тиск (бар) і напрямок (градуси).

Продовжити рисунок принаймні до точки, де хвильова схема починає повторюватися й вказати, яка частина рисунка повторюється нескінченно.

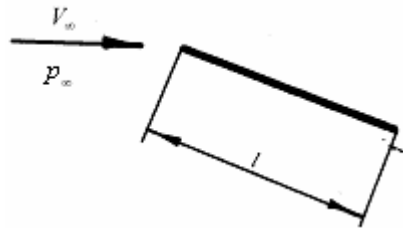
6.16. Показати, що підйомна сила на одиницю довжини для плоскопластинчастого профілю при малому куті натікання потоку визначається рівнянням

$$L = -\rho_\infty V_\infty \Gamma,$$

де Γ – циркуляція навколо профілю.

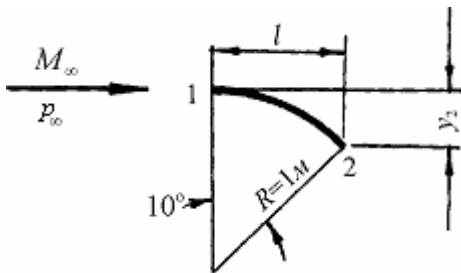


Задача 6.15



Задача 6.16

6.17. Розглянути тонкий криволінійний профіль, обкреслений по дузі кола.



Задача 6.17.

Вхідна кромка профілю тангенціальна до напрямку набігаючого потоку. Використовуючи лінеаризовану теорію, визначити підйомну силу L і силу опору D для цього профілю при $M_\infty = \sqrt{2}$, $p_\infty = 1 \text{ бар}$.

РОЗДІЛ 7. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ДВОМІРНОГО НАДЗВУКОВОГО ПОТОКУ

Лінеаризоване наближене рішення, розглянуте вище, широко застосовується для отримання аналітичних співвідношень для тонкого надзвукового профілю і для швидкого отримання спрощених рішень інших задач надзвукового потоку. Звичайно, є багато випадків, коли потрібні точніші рішення. Для цих цілей застосовують *метод характеристик*.

7.1. Опис методу характеристик

Наш аналіз буде придатний для двомірного, без обертання частинок, ізоентропійного, надзвукового потоку. Крім того, зробимо припущення, що рідина – ідеальний газ, потік стаціонарний, гравітаційними силами можна нехтувати.

Як показали раніше (4.78), при таких припущеннях потік математично описується диференціальним рівнянням для потенціалу швидкостей

$$\left(1 - \frac{\varphi_x^2}{a^2}\right)\varphi_{xx} - 2\frac{\varphi_x\varphi_y}{a^2}\varphi_{xy} + \left(1 - \frac{\varphi_y^2}{a^2}\right)\varphi_{yy} = 0 \quad (7.1)$$

Наша задача тепер полягає в тому, щоб знайти рішення (7.1), яке задовольняє даним граничним умовам. Це диференціальне рівняння в загальному вигляді записується як

$$A\varphi_{xx} + 2B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} = D, \quad (7.2)$$

де коефіцієнти A , B , C і D є функціями в загальному випадку x , y , φ_x і φ_y .

Пригадаємо, що $a^2 = a_0^2 - \frac{k-1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)$. Розглянемо тут тільки область потоку, де властивості рідини є нерозривними. Це озна-

час, що похідні φ_x і φ_y (компоненти швидкості) є безперервними функціями від x і y . Отже, можна записати для довільних приростів dx і dy

$$d\varphi_x = \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi_x}{\partial y} dy = \varphi_{xx} dx + \varphi_{xy} dy, \quad (7.3)$$

$$d\varphi_y = \frac{\partial\varphi_y}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi_y}{\partial y} dy = \varphi_{yx} dx + \varphi_{yy} dy. \quad (7.4)$$

Будь-який розв'язок рівняння (7.2) може бути поданий у вигляді тривимірної поверхні в x, y, φ просторі, званої *інтегральною поверхнею*, і визначений функцією, яка задовольняє (7.2).

Можна уявно провести на інтегральній поверхні різні криві, кожна з яких матиме відповідну проекцію в x, y площині. Невеликий крок уздовж однієї з цих проекцій кривих в даній точці визначає відповідну величину $d\varphi_x$ і $d\varphi_y$, згідно з наведеним вище рівнянням.

Визначення характеристик. Тепер поставимо собі питання: чи можливо, що на деяких кривих, які лежать на інтегральній поверхні, похідні від φ_x і φ_y (тобто похідні від компонентів швидкості і, отже, від всіх властивостей рідини) можуть зазнавати розрив? Такі криві, якщо вони існують, називають *характеристичними кривими* рішення, а їх проекції на x, y - площину називають *фізичними характеристиками*.

Рівняння (7.2) задовольняється в будь-якій точці інтегральної поверхні. Більш того, рівняння (7.3) і (7.4) застосовні до приростів, відповідних нескінченно малій довжині будь-якої кривої, що лежить на цій поверхні. Оскільки нас цікавлять можливі невизначеності в похідних φ_{xx} , φ_{yy} і φ_{xy} , запишемо всі три ці рівняння в наступному порядку

$$\left. \begin{aligned} A\varphi_{xx} + 2B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} &= D \\ dx\varphi_{xx} + dy\varphi_{xy} &= d\varphi_x \\ dx\varphi_{xy} + dy\varphi_{yy} &= d\varphi_y \end{aligned} \right\}$$

Ці рівняння можна розглядати як систему лінійних, алгебраїчних рівнянь із змінними φ_{xx} , φ_{yy} і φ_{xy} . Розв'язуючи для φ_{xy} , одержуємо, використовуючи визначник системи,

$$\varphi_{xy} = \frac{\begin{vmatrix} A & D & C \\ dx & d\varphi_x & 0 \\ 0 & d\varphi_y & dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & 2B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix}} = \frac{A dy d\varphi_x - D dy dx + C dx d\varphi_y}{A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2}. \quad (7.5)$$

У будь-якій точці (x, y, φ) на інтегральній поверхні величини φ_x і φ_y відомі з контурів поверхні. Відповідно коефіцієнти A, B, C і D відомі в усіх точках поверхні. У загальному випадку значення φ_{xy} (і, слідує подібним міркуванням, значення φ_{xx} і φ_{yy}) визначені рівнянням (7.5) за виключенням, коли і чисельник, і знаменник (7.5) дорівнюють нулю. Остання умова дає відповідь на наше питання: у разі, коли φ_{xy} , φ_{xx} і φ_{yy} не визначені, вони можуть мати розрив.

Криві фізичних характеристик. Поклавши знаменник (7.5) рівним нулю, одержимо диференціальне рівняння проєкцій характеристичних кривих у фізичній площині, а саме

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \left(\frac{dy}{dx} \right) + C = 0. \quad (7.6)$$

Розв'язуючи це квадратичне рівняння, одержуємо

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (7.7)$$

Годограф фізичних кривих. За допомогою рівняння (7.7) нахили характеристик у фізичній площині можуть бути визначені. Проте коефіцієнти A , B і C , відповідно до яких визначаються нахили (dy/dx), залежать зокрема від φ_x і φ_y . Для того щоб побудувати характеристики у фізичній площині, необхідно визначити, як φ_x і φ_y змінюються уздовж характеристик. Це найлегше зробити, знайшовши рівняння характеристик в φ_x, φ_y - площині.

Оскільки φ_{xy} загалом кінцеве, необхідно, щоб також як і знаменник рівняння (7.5), чисельник цього рівняння прямував до нуля. Отже, запишемо

$$Ad\varphi_x dy + Cd\varphi_y dx = Ddx dy.$$

Розв'язуючи відносно $d\varphi_y/d\varphi_x$, одержуємо

$$\left(\frac{d\varphi_y}{d\varphi_x}\right) = -\frac{A}{C} \frac{dy}{dx} + \frac{D}{C} \frac{dy}{d\varphi_x}.$$

Підставляючи сюди значення рівняння (7.7), одержуємо

$$\left(\frac{d\varphi_y}{d\varphi_x}\right) = -\frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C} + \frac{D}{C} \left(\frac{dy}{d\varphi_x}\right). \quad (7.8)$$

Рівняння (7.8) дає нахил характеристик у φ_x, φ_y - площини у функції φ_x, φ_y, x і y . Пригадаємо, що рівняння (7.7) дає нахил характеристик у x, y - площини також у функції φ_x, φ_y, x і y . Отже, виходячи з початкових даних, характеристичні криві у фізичній площині і в площині годографа можуть бути побудовані і одержані чисельно або графічно кінцевими різницями. Оскільки фізичні властивості потоку (такі, як тиск, швидкість і т.д.), що цікавлять нас, можуть бути ви-

значені за значеннями φ_x і φ_y в кожній точці, то задача вважається розв'язаною.

Класифікація диференціальних рівнянь. Дослідження рівнянь (7.7) і (7.8) показує, що диференціальне рівняння (7.2) може бути трьох типів, залежних від знаку $(B^2 - AC)$. Ці типи визначаються таким чином.

Гіперболічний тип. Значення $(B^2 - AC)$ позитивне, так що кожне рівняння (7.7) і (7.8) має по два дійсні корені. Дві характеристичні криві проходять через кожену точку фізичної площини і площини годографа.

Параболічний тип. Значення $(B^2 - AC)$ дорівнює нулю, так що є один дійсний корінь у рівнянь (7.7) і (7.8). Цей тип не має великого практичного значення.

Еліптичний тип. Значення $(B^2 - AC)$ негативне, так що рівняння (7.7) і (7.8) не мають дійсних коренів і характеристичні криві є уявними.

Обчислимо значення $(B^2 - AC)$

$$A = 1 - \frac{\varphi_x^2}{a^2} = 1 - \frac{u^2}{a^2}, \quad B = -\frac{\varphi_x \varphi_y}{a^2} = -\frac{uv}{a^2}, \quad C = 1 - \frac{\varphi_y^2}{a^2} = 1 - \frac{v^2}{a^2};$$

$$\begin{aligned} (B^2 - AC) &= \frac{u^2 v^2}{a^4} - 1 + \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2} - \frac{u^2 v^2}{a^4} = \\ &= \frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1 = \frac{V^2}{a^2} - 1 = M^2 - 1. \end{aligned}$$

Таким чином, можна сказати:

- (i) у разі *стаціонарної* течії диференціальне рівняння (7.2) буде гіперболічним для надзвукового потоку і еліптичним для дозвукового потоку;
- (ii) у разі *нестаціонарної* течії це диференціальне рівняння завжди гіперболічне.

Отже, реальні характеристики завжди існують для нестаціонарного руху, але для стаціонарної течії існують тільки тоді, коли потік надзвуковий.

Отже, характеристичні криві мають спеціальні властивості, а саме:

- (i) дійсні характеристичні криві існують для надзвукового, але не для дозвукового потоку;
- (ii) характеристичні криві задовольняють диференціальне рівняння (7.1) і, отже, можуть представляти рішення цього диференціального рівняння;
- (iii) на характеристичних кривих можуть бути розриви в *похідних* від властивостей рідини.

Характеристичні криві описуються звичними диференціальними рівняннями першого порядку

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_I = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{II} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \quad (7.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\phi_y}{d\phi_x}\right)_I &= -\frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{C} + \frac{D}{C} \left(\frac{dy}{d\phi_x}\right)_I, \\ \left(\frac{d\phi_y}{d\phi_x}\right)_{II} &= -\frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{C} + \frac{D}{C} \left(\frac{dy}{d\phi_x}\right)_{II}. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Підставляючи в (7.9) і (7.10) значення коефіцієнтів

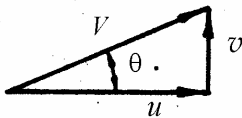
$$A = 1 - \frac{u^2}{a^2}; \quad B = -\frac{uv}{a^2}; \quad C = 1 - \frac{v^2}{a^2}; \quad D = 0,$$

одержуємо рівняння характеристичних кривих для двомірного надзвукового потоку

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{I,II} = \frac{-\frac{uv}{a^2} \pm \sqrt{\frac{u^2+v^2}{a^2} - 1}}{1 - \frac{u^2}{a^2}}; \quad (7.11)$$

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_{I,II} = \frac{\frac{uv}{a^2} \mp \sqrt{\frac{u^2+v^2}{a^2} - 1}}{1 - \frac{v^2}{a^2}}. \quad (7.12)$$

Покажемо тепер, що фізичні характеристики нахилені під місцевим кутом Маха до місцевого вектора швидкості. Використовуючи полярні координати V і θ для площини годографа, маємо



$$u = V \cos \theta = aM \cos \theta, \\ v = V \sin \theta = aM \sin \theta,$$

$$\frac{uv}{a^2} = M^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \alpha}, \quad M = \frac{V}{a} = \frac{1}{\sin \alpha},$$

$$\sqrt{M^2 - 1} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Підставляючи в рівняння (7.11), одержуємо

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{I,II} = \frac{-\frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \alpha} \pm \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}}{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \alpha}}.$$

Дещо перетворивши і спростивши за допомогою тригонометричних функцій, маємо

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_I = \operatorname{tg}(\theta - \alpha); \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{II} = \operatorname{tg}(\theta + \alpha). \quad (7.13)$$

Звідси бачимо, що кожна з двох фізичних характеристик нахилена під кутом Маха до вектора швидкості і що напрям лінії струму в точці фізичної площини служить бісектрисою кута, утвореного напрямками характеристик в цій точці. Тобто, фізичні характеристики тотожні лініям Маха потоку. Цього ж результату можна дійти значно простіше, розмістивши паралельно осі x вектор швидкості в даній точці поля потоку. Тоді в цій точці матимемо $u = V, v = 0, M = V/a$ і $\theta = 0$, а рівняння (7.11) буде

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{I,II} = \frac{\pm \sqrt{\frac{V^2}{a^2} - 1}}{1 - \frac{V^2}{a^2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} = \mp \operatorname{tg} \alpha.$$

Оскільки вектор швидкості збігається з віссю x , робимо висновок, що фізичні характеристики I сімейства відкладаються під кутом Маха вниз від вектора швидкості, а II сімейства – вгору.

Алгеброїчним спрощенням, використовуючи рівняння (7.11) і (7.12), можна показати

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_I \left(\frac{dv}{du}\right)_{II} = -1; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{II} \left(\frac{dv}{du}\right)_I = -1. \quad (7.14)$$

Це означає, що фізична характеристика одного сімейства перпендикулярна до характеристики в площині годографа протилежного сімейства (рис. 7.1).

Рівняння (7.11) показує, що диференціальне рівняння фізичних характеристик містить складові швидкості і тому повинне бути розв'язане одночасно з диференціальним рівнянням характеристик в

площині годографа. У протилежність цьому, проте, диференціальне рівняння (7.12) характеристик в площині годографа містить тільки компоненти швидкості і може бути, отже, проінтегроване незалежно від фізичної задачі і дає універсальні характеристики в площині годографа, які не залежать від картини течії у фізичній площині.

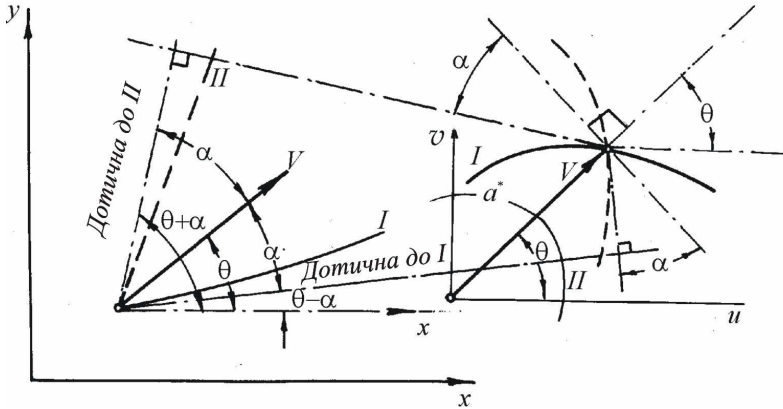


Рис. 7.1. Характеристики у фізичній площині і площині годографа

Щоб одержати універсальний вираз характеристик в площині годографа, зручно застосувати полярні координати V і θ . Тоді $u = V \cos \theta, v = V \sin \theta$.

Підставляючи ці вирази для u і v у рівняння (7.12), після алгебраїчних перетворень одержуємо

$$\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{d\theta} \right)_{I,II} = \mp \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} = \mp \operatorname{tg} \alpha. \quad (7.15)$$

Простіший метод отримання (7.15) може бути за допомогою правила, яке стверджує, що перпендикуляр до I-характеристики годографа лежить під кутом $+\alpha$ до вектора швидкості, тоді як для II-характеристики – під кутом $-\alpha$. Застосовуючи це правило до графічної побудови рис. 7.2, рівняння (7.15) стає негайно очевидним.

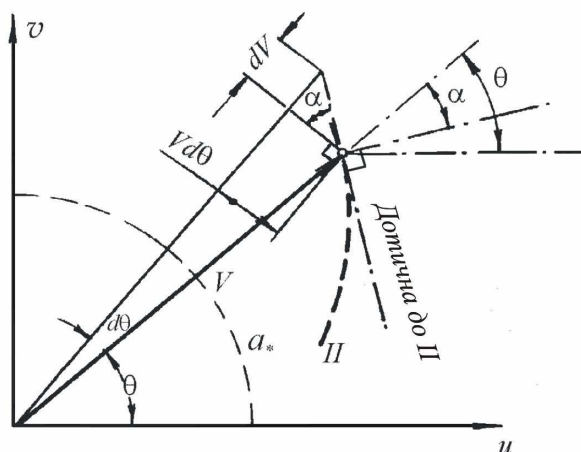


Рис. 7.2. Геометричне тлумачення диференціального рівняння характеристик в площині годографа

Наведений вище метод характеристик був одержаний, ґрунтуючись на формальних математичних методах. Аналогічний результат можна отримати іншим шляхом: розширенням теорії лінеаризації; в цьому випадку на перший план виступає фізична сутність проблеми.

Уявимо, що хвиля Маха сімейства II (рис. 7.3) повертає потік, який обтікає позитивний кут $d\theta$ з відповідною нескінченно малою зміною в усіх властивостях потоку.

Діаграма в площині годографа побудована, виходячи з правила, що *вектор* зміни швидкості, викликаний хвилею, перпендикулярний до напрямку хвилі.

З геометрії рисунка, визначаючи, що du в границі є алгебраїчною зміною в швидкості dV , одержуємо

$$dv = Vd\theta, \quad du = dV, \quad -\frac{du}{dv} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{d\theta}.$$

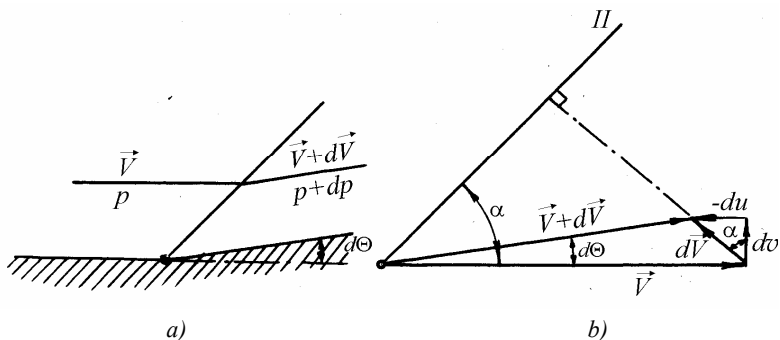


Рис. 7.3. До визначення диференціального рівняння характеристики першого сімейства шляхом розвитку теорії лінеаризації:

a) – фізична площина; b) – площина годографа

Тобто маємо

$$\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{d\theta} \right) = -\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} = -tg\alpha = \frac{1}{V} \frac{dV}{d\theta}; \quad d\theta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (7.16)$$

Це рівняння є точною копією рівняння (7.15) стосовно характеристик годографа I сімейства. Використовуючи адіабатичні співвідношення (3.2) і (3.20), можемо записати

$$V^2 = a^2 M^2 = kRTM^2, \quad 2 \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} + \frac{dM^2}{M^2},$$

$$T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right), \quad 0 = \frac{dT}{T} + \frac{\frac{k-1}{2} dM^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}.$$

З цих двох рівнянь одержуємо:

$$\frac{2dV}{V} = \frac{-\frac{k-1}{2} dM^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} + \frac{dM^2}{M^2} = \frac{dM^2}{M^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)}.$$

Або остаточно

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM^2}{2M^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)}.$$

Отже, рівняння (7.16) можна записати

$$d\theta = -\frac{\sqrt{M^2-1}}{2M^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} dM^2. \quad (7.17)$$

Інтегрування цього рівняння стандартними методами дає

$$\theta = -\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctg \sqrt{\frac{k-1}{k+1} (M^2-1)} + \arctg \sqrt{M^2-1} + const. \quad (7.18)$$

Дуже часто зручніше оперувати з безрозмірним коефіцієнтом $\lambda = V/a_*$, ніж з числом Маха M . Пригадаємо, що згідно з рівнянням (3.19) число Маха M виражається через безрозмірний коефіцієнт швидкості λ співвідношенням

$$M^2 = \frac{\frac{2}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}.$$

Тоді рівняння (7.18) може бути записане у формі

$$\theta_I = -\omega(\lambda) + (2I-1000), \quad (7.19)$$

де функція $\omega(\lambda)$ визначається виразом

$$\omega(\lambda) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctg \sqrt{\frac{\lambda^2-1}{\frac{k+1}{k-1} - \lambda^2}} - \arctg \sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}}, \quad (7.20)$$

а $(2I-1000)$ – постійна інтегрування.

Постійна інтегрування (2I–1000) в рівнянні (7.19) визначається з початкових величин θ і λ для будь-якої окремої задачі.

З рівняння (3.18) виходить (стор. 61), що при $M=\infty$

$\lambda_{max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = 2,45$. Підставляючи це значення λ_{max} у формулу (7.20), одержуємо

$$\begin{aligned} \omega(\lambda_{max}) &= \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\frac{k+1}{k-1} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \frac{k+1}{k-1}}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\frac{k+1}{k-1} - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{k+1}{k-1}}} = \\ &= \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot 90^\circ - 90^\circ = (2,45 - 1) \cdot 90^\circ = 1,45 \cdot 90^\circ = 130,5^\circ. \end{aligned}$$

Якби мали справу із задачею, в якій були б тільки хвилі Маха I сімейства, то знак справа в рівнянні (7.16) змінився б на протилежний і врешті–решт мали б

$$\theta_{II} = +\omega(\lambda) + (2II - 1000). \quad (7.21)$$

Для прискорення чисельних розрахунків співвідношення між M , λ і ω протабульовані для різних k (табл. 2 додатка).

Характеристики в площині годографа. Якщо всі швидкості розділити на a_* , то діаграма годографа стає безрозмірною з полярними координатами λ і θ . Потім, якщо рівняння (7.19) і (7.21) побудувати в площині годографа, одержимо сімейства двох кривих (рис. 7.4). Криві, позначені I, описуються рівнянням (7.19), аналогічно криві сімейства II описуються рівнянням (7.21). Очевидно, що два сімейства кривих є дзеркальним відображенням один одного, і крива даного сімейства може бути визначена з кривої другого сі-

мейства простим обертанням навколо осі. Лінії Маха в даній точці фізичної площини є нормальними до характеристики годографа.

$$\left. \begin{aligned} \theta_I &= -\omega + 2I - 1000 \\ \theta_{II} &= \omega + 2II - 1000 \end{aligned} \right\}.$$

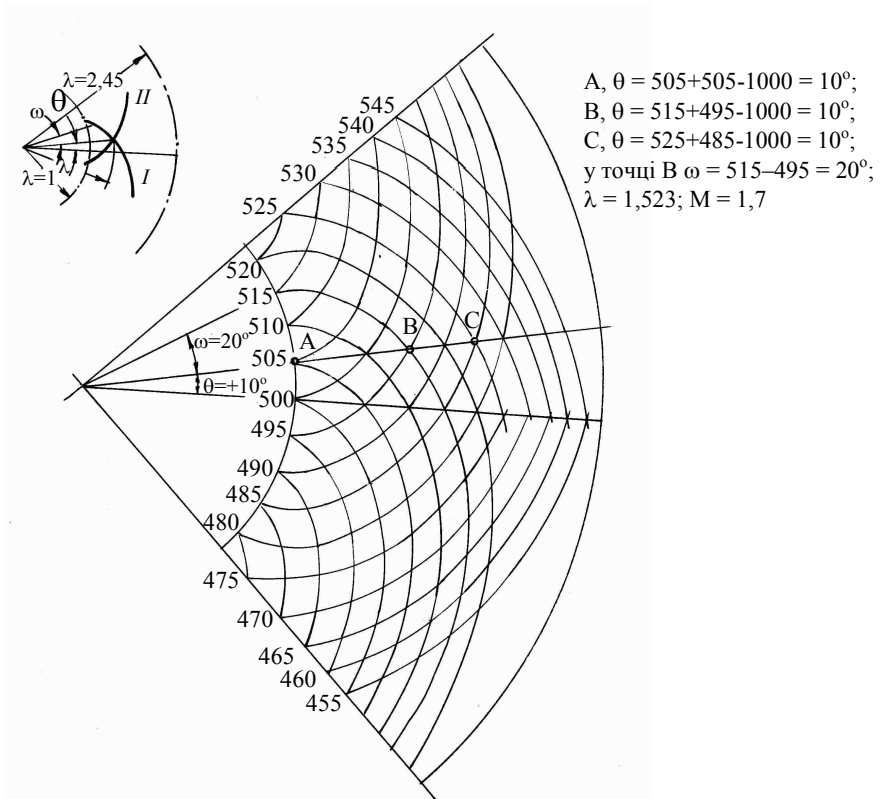


Рис. 7.4. Характеристичні криві в площині годографа

Складаючи і віднімаючи ці два рівняння, одержуємо

$$\theta_I + \theta_{II} = 2(I + II) - 2000, \quad \theta_I - \theta_{II} = -2\omega + 2(I - II).$$

При $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ маємо

$$\theta = I + II - 1000; \quad \omega = I - II. \quad (7.22)$$

Для ідеального газу можна показати, що характеристична крива в площині годографа $\lambda - \theta$ є епіциклоїдою, створеною точкою кола радіуса $\frac{1}{2} \left[\sqrt{(k+1)/(k-1)} - 1 \right]$, що котиться без ковзання по іншому колу радіусом, що дорівнює, одиниці.

7.2. Течія Прандтля–Майєра. Використання характеристик годографа. Одиничні процеси

Течія Прандтля–Майєра. Спеціальним, але важливим випадком потоку з простими хвилями, є такий потік, у якому лінії струму мають такий обрис, що всі лінії Маха проходять через загальну точку O (рис. 7.5,а).

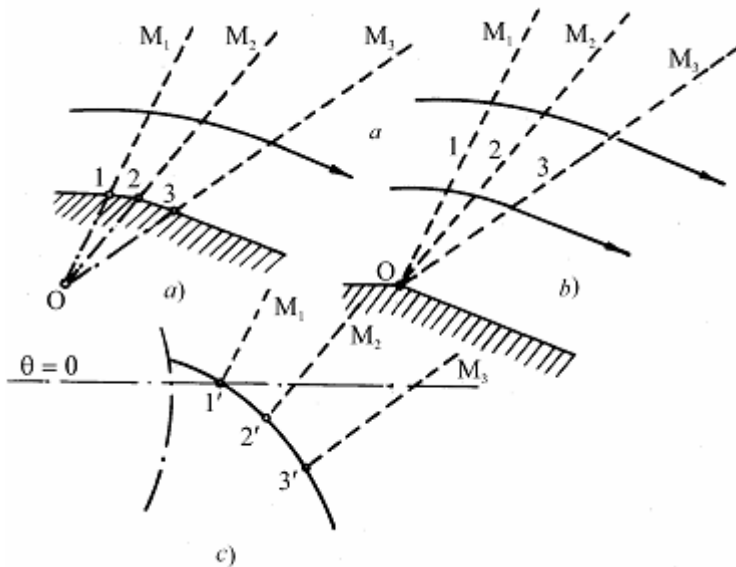


Рис. 7.5. Центровані прості хвилі

На рис. 7.5,*b* зображений спеціальний випадок цієї спеціальної течії, що має навіть більш важливе практичне значення, у якому гранична лінія струму проходить через центр O . Цей потік із центральними простими хвилями і називається *обтіканням кута*, або течією *Прандтля–Майєра*. Така течія характеризується наступними правилами:

- (i) всі властивості є однорідними на прямих променях, що виходять із кута;
- (ii) ці промені становлять кут Маха з місцевим напрямком потоку.

Закінченим потоком із простими хвилями є такий потік, що обтікає кут, у якому число Маха змінюється від одиниці до нескінченності.

На рис. 7.6,*b* показаний годограф течії, фізична картина якої і лінія струму показані на рис. 7.6,*a*.

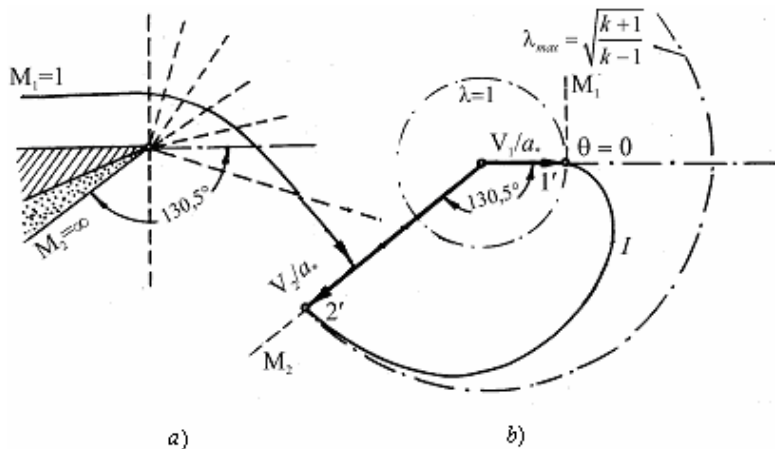


Рис. 7.6. Завершений потік із простими хвилями

З рівняння (7.20) для $k=1,4$ $\omega=130,5^\circ$ при λ_{max} . З рівняння (7.18) виходить, що максимально можливий кут повороту потоку також

дорівнює $130,5^\circ$. З поворотом навколо кута потік буде розширюватися до нульового тиску і температури. Оскільки $\alpha_1 = 90^\circ$ і $\alpha_2 = 0$, то дотична до характеристики в площині годографа йде уздовж радіуса при $\lambda=1$ і перпендикулярна до радіуса при λ_{max} (рис. 7.6,b).

Якою буде картина течії, коли потік при $M=1$ наблизиться до кута повороту більш ніж $130,5^\circ$, як показано на рис. 7.6,a. Коли потік розшириться до нульового тиску, він повернеться на кут $130,5^\circ$. За цим кутом буде зона кавітації, суміжна зі стінкою. Однак це не буде точно так, тому що при дуже низьких температурах термодинамічні властивості відрізняються від властивостей ідеального газу. Більше того, при низькому тиску припущення суцільності недійсне, і тому, щоб одержати дійсну картину, необхідно застосувати кінетичну теорію газів.

Опис лінії струму при течії Прандтля–Майєра легко отримати з розгляду наступної картини течії. Відстань r_* пропорційна мінімальній площі поперечного перерізу для ізоентропійного потоку, а відстань $r \cdot \sin \alpha$ пропорційна площі поперечного перерізу в будь-якому іншому перетині. Тому, пам'ятаючи, що $\sin \alpha = \frac{1}{M}$, можна записати:

$$\frac{r \cdot \sin \alpha}{r_*} = \frac{A}{A_*} \quad \text{або} \quad \frac{r}{r_*} = M \frac{A}{A_*}.$$

За формулою приведеної секундної витрати (3.28), отриманої для ізоентропійної течії, маємо

$$q = \frac{A_*}{A} = M \left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{1}{2} \frac{k+1}{k-1}},$$

звідки одержуємо

$$\frac{A}{A_*} = \frac{1}{M} \sqrt{\left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{k+1}{k-1}}},$$

або остаточно маємо

$$\frac{r}{r_*} = \sqrt{\left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{k+1}{k-1}}}. \quad (7.23)$$

По цій формулі можна побудувати лінії струму в течії Прандтля–Майєра з r і $(\alpha - \omega)$ полярними координатами (рис. 7.7).

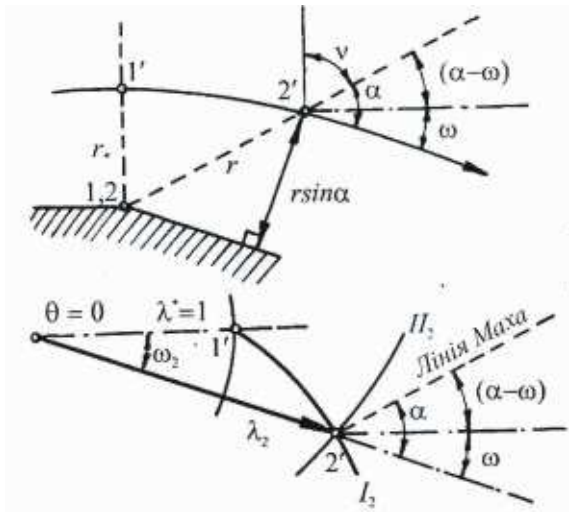


Рис. 7.7. Побудова лінії струму при течії Прандтля–Майєра

Використання характеристик годографа істотно спрощує розрахунки надзвукових течій (при цьому використовуються криві характеристик годографа на рис. 7.4). З попереднього викладу одержуємо наступні правила для використання діаграми характеристик.

(і) коли лінія струму *перетинає* хвилю Маха сімейства II, годограф лінії струму (тобто точка в площині годографа, що являє собою

кінцеву точку вектора швидкості) рухається уздовж характеристик годографа сімейства I. Лінія Маха є перпендикуляром до характеристики годографа сімейства I і лежить під кутом $(\theta + \alpha)$ до горизонтальної лінії;

(ii) коли лінія струму *перетинає* хвилю Маха сімейства I, годограф лінії струму рухається уздовж характеристики годографа сімейства II. Лінія Маха є перпендикуляром до характеристики годографа сімейства II і лежить під кутом $(\theta - \alpha)$ до горизонталі.

Для даної точки в площині годографа рівняння (7.19) і (7.21) можна записати

$$\left. \begin{aligned} 1000 + \omega + \theta &= 2I \\ 1000 - \omega + \theta &= 2II \end{aligned} \right\}. \quad (7.24)$$

Додаючи, а потім віднімаючи цю пару рівнянь, одержуємо

$$\left. \begin{aligned} \theta &= I + II - 1000 \\ \omega &= I - II \end{aligned} \right\}. \quad (7.25)$$

Ці рівняння раніше записані під номером (7.22).

Маючи θ і ω , можна визначити I і II за рівняннями (7.24). Навпаки, знаючи I і II, можна визначити θ і ω з рівнянь (7.25).

Останні співвідношення також показують, що в площині годографа радіальні лінії (лінії постійного напрямку потоку, що виходять із центру, є лініями постійного значення $(I + II)$, у той час як концентричні кола (коло постійної швидкості й тиску) є лініями постійного значення $(I - II)$.

Приклад розрахунку. Послідовність розрахунку найкраще може бути розглянута за допомогою специфічного прикладу.

Нехай на виході сопла в полі (1) маємо $M_1 = 1,435$, $\theta_1 = 0$ і $p_1 = 5 \text{ бар}$. Тиск навколишнього середовища дорівнює $3,0205 \text{ бар}$. За таблицею параметрів ізоентропійного потоку повітря у функції характеристичних чисел (табл. 2 і 1 додатка) має-

мо $\omega_1 = 10^\circ$, $p_1/p_0 = 0,299$. З рівнянь (7.24) визначаємо $I_1 = 505$ й $II_1 = 495$.

На границі струму тиск скрізь повинен бути $3,205 \text{ бар}$. Раптове падіння тиску на куті A від 5 бар до $3,205 \text{ бар}$ відбувається при розширенні навколо кутової точки. Якщо (3)– стан після розширення, то

$$p_3/p_0 = (p_1/p_0)(p_3/p_1) = 0,299 \cdot (3,205/5) = 0,299 \cdot 0,641 = 0,1917$$

Отже, з табл. 2 по значенню M_3 , знайденому за допомогою табл. 1, одержуємо $\omega_3 = 20^\circ$. Потім, оскільки стани (1) і (3) лежать на загальній I-характеристиці, маємо $I_3 = I_1 = 505$. Рівняння (7.25) дають $\theta_3 = -10^\circ$ і $II_3 = 485$. Визначено, що струмів (вірніше границя струму) відхиляється на 10° від напрямку в соплі.

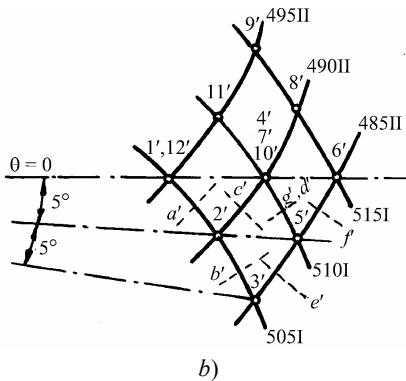
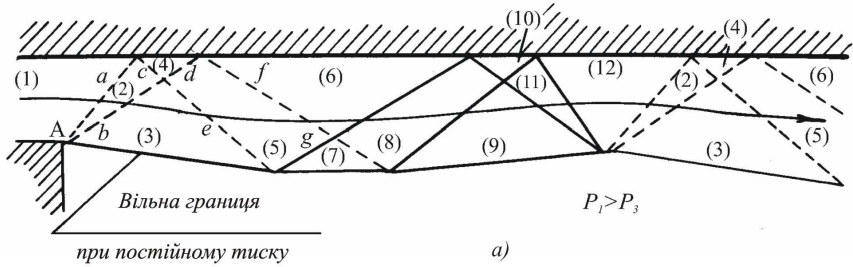


Рис. 7.8. Течія на виході з сопла в простір зі знизеним тиском (недорозширяюче сопло):

a) – картина течії у фізичній площині (пунктиром у хвильовій схемі показані хвилі розрідження, суцільною лінією - хвилі стиску);
b)– картина течії в площині годографа.

Заміняємо дійсну Прандтль–Майєровську течію, яка є безперервною, кінцевим числом хвиль Маха, що змінюють східчато стан газу. Для зручності ілюстрації

беремо дві окремі хвилі a й b для кутової течії. Припускаючи рівні кути повороту потоку при проходженні через кожен хвилю, маємо

$$\theta_2 = \frac{\theta_3}{2} = -5^\circ, \quad I_2 = I_1 = 505.$$

Потім за рівнянням (7.25) одержуємо

$$II_2 = 490, \quad \omega_2 = 15.$$

Точки $1'$, $2'$ і $3'$ позначені на діаграмі годографа (рис. 7.8, b). Хвиля a проводиться за напрямком a' , тобто перпендикулярно до характеристики годографа сімейства I при середніх умовах між полями (1) і (2). Аналогічно хвиля b проводиться в напрямку b' перпендикулярно до характеристики годографа сімейства I при середніх умовах між полями (2) і (3).

Коли хвиля a вдаряється об верхню стінку, вона повинна відбитися у вигляді хвилі c для того, щоб напрямок потоку збігався з верхньою стінкою. Якщо область униз по потоку від хвилі c позначити полем (4), будемо мати $\theta_4 = 0$, $II_4 = II_2 = 490$ і згідно з (7.25) $I_4 = 510$, $\omega_4 = 20$.

Хвилю c тепер проводимо в напрямку c' перпендикулярно до характеристики годографа сімейства II при середніх умовах між полями (2) і (4).

Тепер уявимо, що хвиля d є продовженням хвилі b , хвиля e є продовженням хвилі c і що вони обмежують поле (5). Але поле (5) досягається з поля (4) уздовж характеристики сімейства I і з поля (3) уздовж характеристики сімейства II. Отже, $I_5 = I_4 = 510$ і $II_5 = II_3 = 485$ й згідно з (7.25) $\omega_5 = 25$, $\theta_5 = -5^\circ$.

Хвилі e і d тепер проводимо відповідно до напрямків e' і d' .

Що трапиться, якщо хвиля e вдариться об вільну границю струменя? Оскільки поле (5) має тиск нижчий, ніж навколишнє середовище на виході, хвиля e повинна відбитися у вигляді хвилі g , щоб зберегти граничну умову постійного тиску. Якщо поле за хвилею g позначимо через (7), будемо мати $\omega_7 = \omega_3 = 20$, $I_7 = I_5 = 510$ і згідно з (7.25) $II_7 = 490$, $\theta_7 = 0$.

Хвиля g може бути тепер накреслена в напрямку g' , що збігається з напрямком d' . Нижня частина поля (7) є границею струму, що проводиться як лінія струму в напрямку $\theta_7 = 0$.

Схема течії, що залишилася, може бути побудована аналогічно вищенаведеним рішенням. Якщо лінія струму перетинає хвилю розрідження, тиск зменшується в напрямку течії. Зворотну картину спостерігаємо для хвилі стиску. На рис. 7.8, a

хвилі розрідження показані переривчастими лініями, а хвилі стиску – суцільними. Різні лінії струму можуть бути також проведені, виходячи з відомого напрямку потоку в кожному полі, а розподіл тиску – за відомими числами Маха в кожному полі.

Значення параметрів у кожному полі об'єднано в табл. 7.2. Для кожного поля два з чотирьох параметрів I , Π , ω і θ підкреслені і виділені жирним шрифтом, указуючи на ті два параметри в даному полі, які визначаються першими. Два параметри, що залишилися, визначаються за допомогою рівнянь (7.25) або графічно за рис. 7.8, *b*.

Таблиця також дає в кожному полі напрямок $(\theta+\alpha)$ для хвиль лівого напрямку й $(\theta-\alpha)$ для хвиль правого напрямку. Ці значення зібрані в табл. 7.1, даючи кут нахилу для кожної хвилі. За допомогою такої таблиці напрямки хвиль Маха можуть бути визначені без графічних маніпуляцій у площині годографа.

Таблиця 7.1

Хвиля	Перед ($\theta+\alpha$)	За ($\theta+\alpha$)	Середнє ($\theta+\alpha$)	Перед ($\theta-\alpha$)	За ($\theta-\alpha$)	Середнє ($\theta-\alpha$)
<i>a</i>	44,2	33,6	38,9			
<i>b</i>	33,6	24,3	29,0			
<i>c</i>				-43,6	-34,3	-39,0
<i>d</i>	34,3	25,8	30,0			
<i>e</i>				-44,3	-35,8	-40,0
<i>f</i>				-35,8	-28,0	-31,9
<i>g</i>	25,8	34,3	30,0			
6-8	28,0	35,8	31,9			
7-8				-34,3	-25,8	-30,0
8-9	35,8	44,3	40,0			
9-10				-25,8	-34,3	-30,0
10-11	34,3	43,6	39,0			
9-11				-24,3	-33,6	-29,0
11-12				-33,6	-44,2	-38,9

Таблиця 7.2

Поле	I	II	ω	θ	α	$\theta+\alpha$	$\theta-\alpha$	p/p_0
1	505	495	<u>10°</u>	<u>0°</u>	44,18°	44,2°	-44,2°	0,299
2	<u>505</u>	490	15	<u>-5</u>	38,55	33,6	-43,6	0,2334
3	<u>505</u>	485	<u>20</u>	-10	34,29	24,3	-44,3	0,1808
4	510	<u>490</u>	20	<u>0</u>	34,29	34,3	-34,3	0,1808
5	<u>510</u>	<u>485</u>	25	-5	30,85	25,8	-35,8	0,1381
6	515	<u>485</u>	30	<u>0</u>	27,95	28,0	-28,0	0,1037
7	<u>510</u>	490	<u>20</u>	0	34,29	34,3	-34,3	0,1808
8	<u>515</u>	<u>490</u>	25	5	30,85	35,8	-25,8	0,1381
9	<u>515</u>	495	<u>20</u>	10	34,29	44,3	-24,3	0,1808
10	510	<u>490</u>	20	<u>0</u>	34,29	34,3	-34,3	0,1808
11	<u>510</u>	<u>495</u>	15	5	38,55	43,6	-33,6	0,2334
12	505	<u>495</u>	10	<u>0</u>	44,18	44,2	-44,2	0,299

Одиничні процеси. Всі можливі картини течії можуть бути складені з відповідних хвильових схем. Хвильові схеми у свою чергу будуються повторним застосуванням наступних відносно невеликих операцій, названих *одиничними процесами*.

Генерація (виникнення) хвилі. Це має місце, коли тверда границя потоку є криволінійною (рис. 7.5,*a*) або коли струмінь витікає в простір зі змінним тиском, як на куті сопла (рис. 7.8,*a*). З міркувань про кількість руху одержуємо загальне правило, що *при перетинанні*

хвилі розрідження лінія струму відхиляється від хвилі; при перетинанні хвилі стиску потік наближається вбік хвилі.

Відбиття хвилі від плоскої границі. Це проілюстровано на рис. 7.8,а хвилею a , що відбивається у вигляді хвилі c для того, щоб зберегти заданий напрямок потоку біля стінки. Тут бачимо, що відбита хвиля c , як і хвиля a , є хвилею розрідження і, отже, приходимо до основного правила: *відбита хвиля від твердої границі є однаковою за природою з падаючій хвилі.*

Відбиття хвилі від вільної границі. Проілюстровано на рис. 7.8,а хвилею e , що відбивається у вигляді хвилі g , для того, щоб зберегти заданий тиск на границі струму. Оскільки хвиля e є хвилею розрідження, а хвиля g – хвилею стиску, приходимо до правила, що *відбита від границі постійного тиску хвиля є протилежною за природою падаючій хвилі.*

Погашення хвилі. Використовується при проектуванні надзвукових сопел, якщо необхідно уникнути відбиття хвиль, падаючих на стінку границі.

Це досягається окресленням границі таким чином, що необхідність у відбитті, щоб зберегти умову нерозривності біля стінки, відпадає. Цього легко досягти, якщо в точці A , куди падає хвиля a , стінку зігнути так, щоб вона мала той же напрямок, що й потік у полі (2) (рис. 7.9).

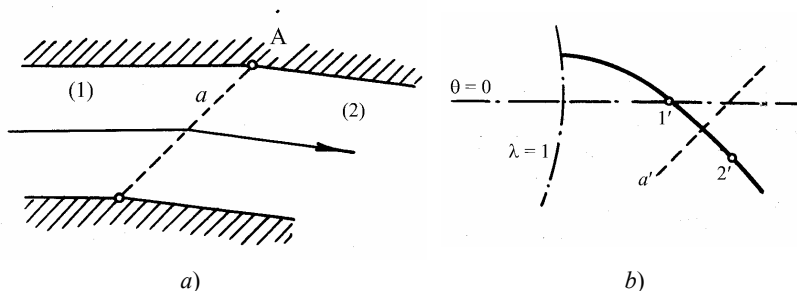


Рис. 7.9. Погашення хвилі шляхом відповідного скривлення стінки

Подивимося на це з іншого боку: якщо верхня стінка була б прямою, хвиля a , що є хвилею розрідження, відбилася б як хвиля розрідження. Згинаючи стінку в точці A , однак, на кут, рівний куту повороту при перетинанні a , хвиля стиску повинна виникнути в точці A . Ця хвиля стиску гасить хвилю розрідження, що є відбитою хвилею a .

Перетинання хвиль. Це проілюстровано хвилями b і c на рис. 7.8, a що пересікаються і далі продовжуються хвилями d і e відповідно. Тобто при перетинанні хвилі не міняють свою природу.

7.3. Приклади застосування методу характеристик

Тонкий профіль. У будь-якій точці профілю місцевий тиск залежить від місцевого нахилу поверхні й від того, де перебуває точка – на верхній чи на нижній стороні профілю. Відзначимо, що хвилі стиску виникають на нижній поверхні профілю, що є ввігнутою. Як покажемо далі, вони остаточно утворять похилий стрибок ущільнення в місці перетинання.

Коли профіль має товщину, похилі стрибки звичайно виникають на самому профілі, й аналіз такого профілю вимагає комбінованого застосування методу характеристик і теорії косоного стрибка. Такі профілі розглянемо пізніше.

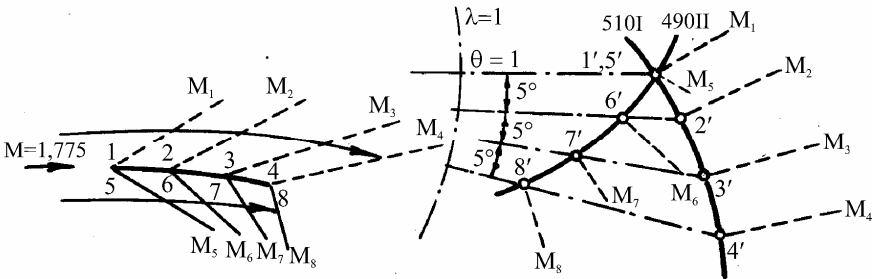


Рис. 7.10. Обтікання тонкого профілю. (Картини течії у фізичній площині й площині годографа)

Недорозширююче сопло. Уздовж кожної характеристики швидкість змінюється неперервно, але має розрив у першій і вище похідної швидкості.

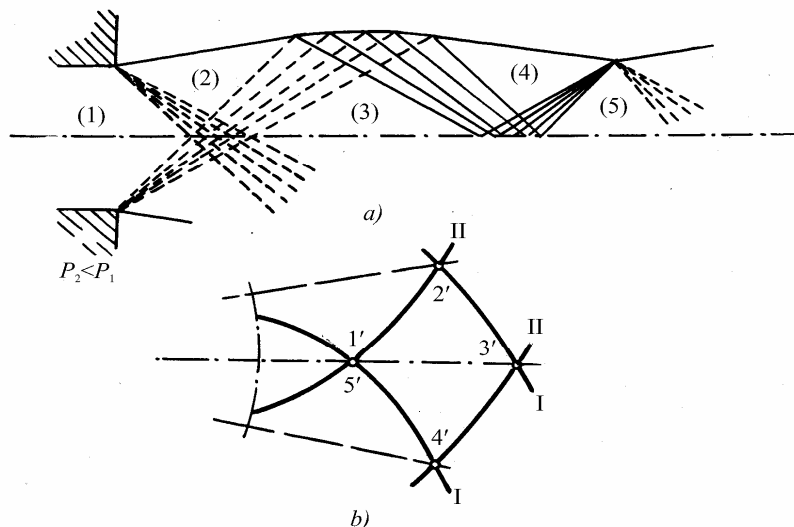
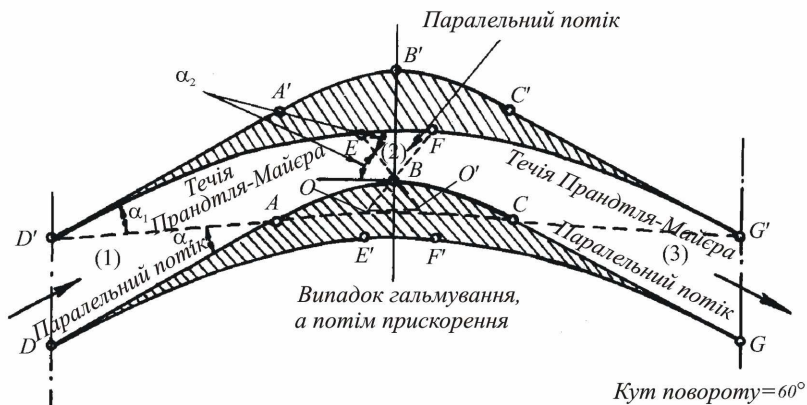


Рис. 7.11. Витікання з сопла в простір зі зниженим тиском (хвильова схема у фізичній площині й картина течії в площині годографа).

Картина течії (рис. 7.11) повторювана, тому що поле (5) ідентичне з полем (1). Фотографії, отримані методом шлір, точно підтверджують теоретично побудовану картину течії з експериментом, за винятком того, що в результаті тертя між струменем і навколишнім середовищем аналітичне рішення порушується після одного або двох циклів.

Надзвукова активна турбінна лопатка. Якщо потік щодо лопатки надзвуковий, тоді форма каналу, зображена на рис. 7.12, є теоретично прийнятною.



$$\theta_1 = 532,5 + 497,5 - 1000 = 30^\circ$$

$$\omega_1 = 532,5 - 497,5 = 35^\circ$$

$$M_1 = 2,3287$$

$$\alpha_1 = 25,43^\circ$$

$$\theta_2 = 502,5 + 497,5 - 1000 = 0^\circ$$

$$\omega_2 = 502,5 - 497,5 = 5^\circ$$

$$M_2 = 1,2565$$

$$\alpha_2 = 52,738^\circ$$

$$\theta_3 = 502,5 + 467,5 - 1000 = 30^\circ$$

$$\omega_3 = 502,5 - 467,5 = 35^\circ$$

$$M_3 = 2,3287$$

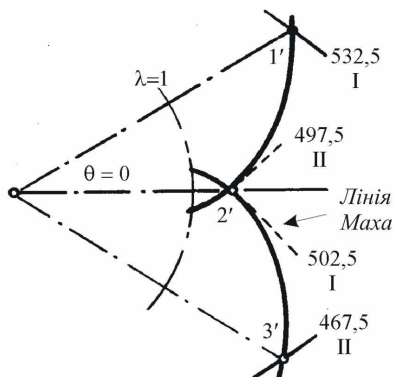


Рис. 7.12. Конструювання активної надзвукової лопатки (фізична площина й площина годографа).

Обрис кривих $D'E$, AB і FG' і BC одержуємо за рівнянням (7.23) – Прандтль–Майєрівська течія навколо точок O' і O відповідно.

Одним з найважливіших практичних застосувань методу характеристик є побудова надзвукових сопел двовірного потоку.

Конструювання надзвукового сопла. Побудова хвильової картини і контуру стіни для сопла з різко розкриваючими напрямними

(злам напрямних стінок сопла в горлі) з використанням методу полів графічно подано на рис. 7.13.

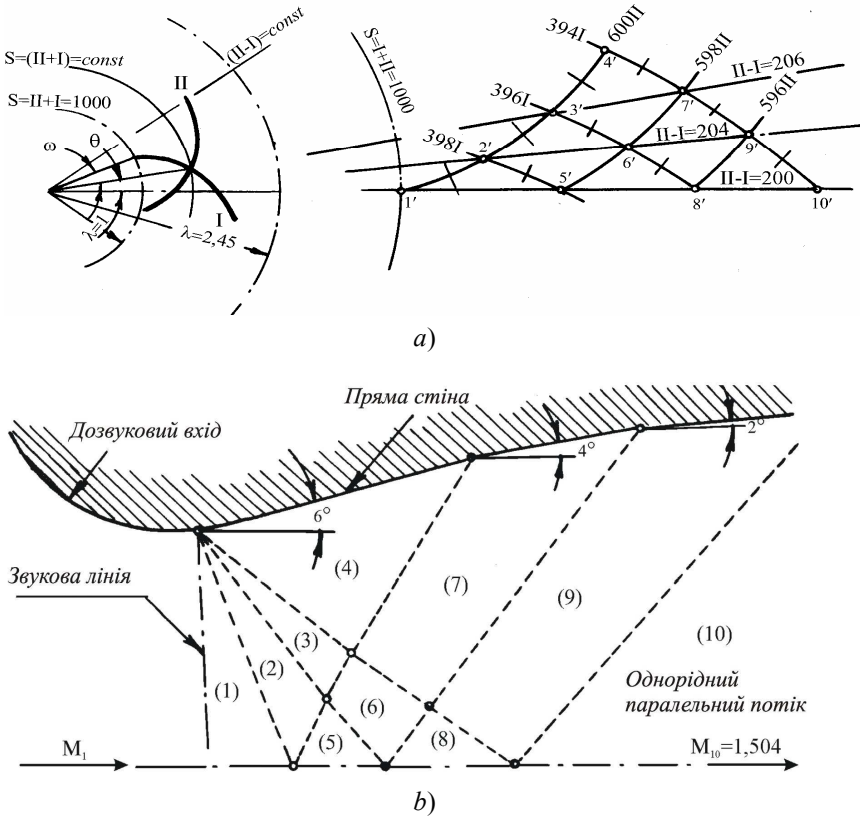


Рис. 7.13. Побудова надзвукового сопла

Конструкція контуру, що розширюється, залежить від обрису звукової лінії в горлі. В нашому прикладі за умову прийнято, що звукова лінія пряма й перпендикулярна осі.

Дозвуковий вхід. Обрис звукової лінії, від якої починається побудова надзвукової частини сопла, залежить від обрису дозвукового

входу. Немає теоретичних передумов, який обрис звукової лінії є кращим, але важливо знати цей обрис. Для цього є кілька можливостей:

(і) підпорядковуючись обмеженню товщини приграничного шару, дозвуковий вхід повинен бути за можливістю досить довгим і мати таке поступове скривлення, щоб бути впевненим, що звукова лінія буде точно пряма і перпендикулярна осі;

(іі) для даного обрису вхідної частини сопла контур звукової лінії може бути визначений аналітично;

(ііі) для даного обрису вхідної частини попередні дослідження (можливо на моделі) можна провести, щоб знайти звукову лінію.

В кожному разі, щоб уникнути відриву або стовщення приграничного шару, дозвуковий контур повинен бути сконструйований так, щоб не було місцевих областей підвищення тиску.

У вітчизняній літературі постійні інтегрування в рівняннях (7.19) і (7.21) відрізняються від раніше прийнятих:

$\theta_I = -\omega(\lambda) + (800 - 2I)$; $\theta_{II} = +\omega(\lambda) + (2II - 1200)$, що приводить до наступних розрахункових рівнянь:

$$\theta = (II - I) - 200; \quad \omega = 1000 - (I + II);$$

$$I = 400 - \frac{\theta + \omega}{2}; \quad II = 600 + \frac{\theta - \omega}{2}.$$

Надзвукове сопло зі зломом у горлі для одержання швидкості на виході з числом $M_{10} = 1,504$ показане на рис. 7.13, *b*. Площина годографа для цього випадку показана на рис. 7.13, *a*. Результати розрахунків із прийнятими у вітчизняній літературі постійними інтегрування рівнянь (7.19) і (7.21) наведені в табл. 7.3 і 7.4.

Таблица 7.3

Точка поля	I	II	ω	θ	α	$\theta+\alpha$	$\theta-\alpha$	M
1	400	600	0°	<u>0°</u>	90°	90°	-90°	<u>1</u>
2	398	<u>600</u>	2°	<u>2°</u>	62°	64°	-60°	1,147
3	396	<u>600</u>	4°	<u>4°</u>	55°08'	59°08'	-51°08'	1,262
4	<u>394</u>	<u>600</u>	6°	6°	50°36'	56°36'	-44°36'	1,294
5	<u>398</u>	598	4°	<u>0°</u>	55°08'	55°08'	-55°08'	1,219
6	<u>396</u>	<u>598</u>	6°	2°	50°36'	52°36'	-48°36'	1,294
7	<u>394</u>	<u>598</u>	8°	4°	47°	51°	-43°	1,367
8	<u>396</u>	596	8°	<u>0°</u>	47°	47°	-47°	1,367
9	<u>394</u>	596	10°	2°	44°10'	46°10'	-42°10'	1,435
10	394	594	12°	<u>0°</u>	41°40'	41°40'	-41°40'	<u>1,504</u>

Таблица 7.4

Хвиля	Перед ($\theta+\alpha$)	За ($\theta+\alpha$)	Середнє ($\theta+\alpha$)	Перед ($\theta-\alpha$)	За ($\theta-\alpha$)	Середнє ($\theta-\alpha$)
1-2				-90°	-60°	-75°
2-3				-60°	-51°08'	-55°34'
3-4				-51°08'	-44°36'	-47°52'
2-5	64°	55°08'	59°34'			
3-6	59°08'	52°36'	55°52'			
4-7	56°36'	51°	53°48'			
6-8	52°36'	47°	49°48'			
7-9	51°	46°10'	48°35'			
5-6				-55°08'	-48°36'	-51°52'
6-7				-48°36'	-43°	-45°48'
8-9				-47°	-42°10'	-44°35'
9-10	46°10'	41°40'	43°55'			

Отже, прийняття різних постійних інтегрування приводить до того, що розрахункові формули при використанні характеристик го-дографа відрізняються в США й у нас.

Вітчизняна література	Література США
$\begin{cases} \theta = (II - I) - 200 \\ \omega = 1000 - (I + II) \end{cases}$	$\begin{cases} \theta = (I + II) - 1000 \\ \omega = (I - II) \end{cases}$
$\begin{cases} 2I = 800 - \omega - \theta \\ 2II = 1200 - \omega + \theta \end{cases}$	$\begin{cases} 2I = \omega + \theta + 1000 \\ 2II = \theta - \omega + 1000 \end{cases}$

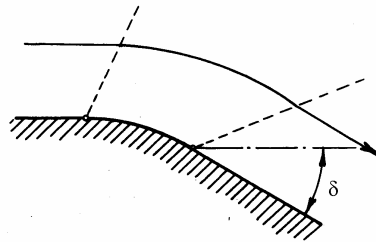
Питання для самоперевірки

1. Які властивості мають характеристики?
2. Дайте визначення течії Прандтля–Майєра.
3. Сформулюйте правила для використання діаграми характеристик.
4. Що таке одиничні процеси? Сформулюйте їх.

Задачі

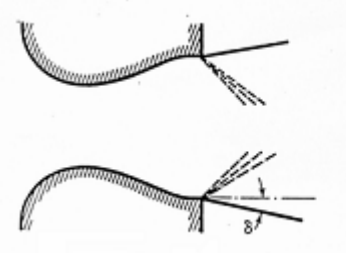
7.1. Розгляньте потік, що розширюється навколо скривленої стінки (див. рис.7.1).

Порівняйте точну теорію з теорією лінеаризації, побудувавши криву p_2/p_1 від зміни M_1 для двох значень δ , а саме, 2° і 10° . Використайте зміну числа M від 1 до 3.

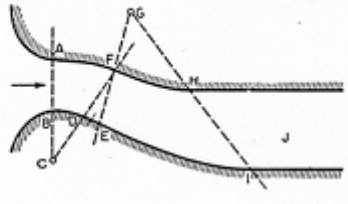


Задача 7.1

7.2. Побудуйте криву Прандтля–Майєра при зміні числа Маха від $M_1 = 1$ до $M_2 = 5$.



Задача 7.3



Задача 7.4

7.3. Плоский струмінь залишає звужуюче–розширяюче сопло і паралельним потоком витікає в атмосферу, де тиск дорівнює 1,01325 бар. Відношення площ сопла дорівнює 2,0.

Визначте кут δ у градусах, якщо: а) $p_0 = 14$ бар, б) p_0 дорівнює нескінченності.

7.4. Спрофілювати сопло, щоб одержати паралельний однорідний потік повітря при числі Маха, що дорівнює 1,775. Принципи побудови сопла показані на рисунку.

Припускаємо, що вхідна ділянка має обрис, що дозволяє одержати горизонтальний паралельний потік у горловому перетині AB .

РОЗДІЛ 8. СТИБКИ УЩІЛЬНЕННЯ В ГАЗОВОМУ ПОТОЦІ

Стрибки ущільнення в газовому середовищі являють собою не тільки цікаве фізичне явище, але мають і величезне практичне значення. Справа в тому, що, як буде показано надалі, стиск газу в стрибках ущільнення супроводжується необоротним переходом частини його механічної енергії в енергію теплову, котра розсіюється в середовищі. В результаті такого переходу ентропія газу при його течії крізь стрибок наростає і, таким чином, стиск газу в стрибку не є

ізоентропічним. У цьому сенсі будемо говорити далі про втрати механічної енергії в стрибках ущільнення.

При русі тіла в газовому середовищі втрати енергії в стрибках ущільнення компенсуються енергією тіла, що рухається. Тому, як тільки з'являються стрибки ущільнення (тобто при $M_\infty > M_{кр}$), лобовий опір тіла різко зростає; цей приріст лобового опору називається *хвильовим опором* і залежно від форми тіла і числа M_∞ може виявитися значно більшим, ніж вся інша частина лобового опору. Поява стрибків ущільнення різко змінює також розподіл тисків по поверхні тіла, підйомну силу й аеродинамічний момент. Стрибки ущільнення є практично в усіх випадках надзвукового потоку, хоча варто відзначити, що просто наявність надзвукового потоку не означає, що стрибки ущільнення повинні з'явитися де-небудь у полі потоку. Вивчення стрибків ущільнення необхідно для розрахунку сопел, дифузорів, швидкісних літальних апаратів (ракет і літаків), реактивних двигунів, газових турбін, надзвукових компресорів і т.п.

Розглянемо більш загальний випадок стрибків ущільнення – *косі стрибки*. Іноді косий стрибок є приєднаним до поверхні тіла, але це має місце тільки коли потік змушений різко (раптово) змінити напрямок, як це має місце у випадку різко скривленого ввігнутого кута. В інших випадках похилий стрибок звичайно є від'єднаним.

При вивченні стрибка ущільнення в ідеальному середовищі будемо вважати, що він не має товщини, а являє собою поверхню розриву неперервності для швидкості, тиску і густини. В дійсності стрибок ущільнення має досить малу товщину близько довжини вільного пробігу молекул газу (експерименти показують товщину стрибка $\sim 10^{-3}$ мм).

Неможливість Прандтль–Майєровського тиску для ввігнутого кута. Якби припустили можливість Прандтль–Майєровського тиску для різкого кута (рис. 8.1), дотримуючись викладеного вище

аналізу в попередньому розділі, повинні були б констатувати, що лінії струму повертаються і перетинаються. Це означає, що в кожній точці області стиску повинні були б існувати одночасно три різних тиски і швидкості.

Але це фізично неможливо. Косий стрибок ущільнення дозволяє уникнути ці труднощі, допускаючи раптову зміну напрямку руху.

З рис. 8.1,*b* ми бачимо, що кут нахилу стрибка

$$\sigma = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \delta).$$

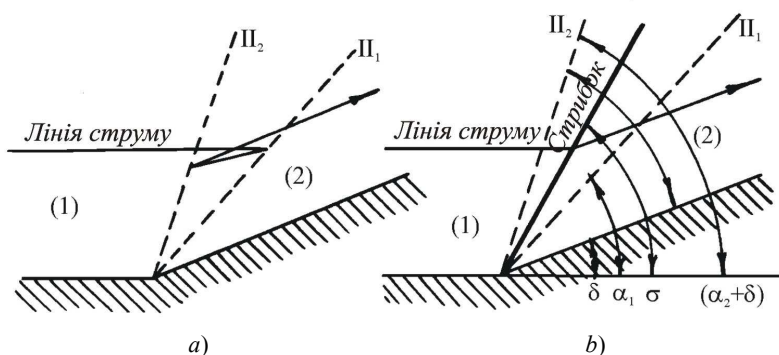


Рис. 8.1. Течія уздовж увігнутого кута:
a) – неможливість Прандтль-Майєровського стиска;
b) – похилий стрибок фізично можливий

8.1. Основні рівняння косого стрибка ущільнення

Аналіз косого стрибка будемо проводити, записавши рівняння нерозривності, зміни кількості руху й енергії для потоку, що проходить через контрольну поверхню (рис. 8.2).

Прийнявши до уваги, що контрольна поверхня обмежена з боків двома лініями струму, можемо записати:

рівняння нерозривності

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}; \quad (8.1)$$

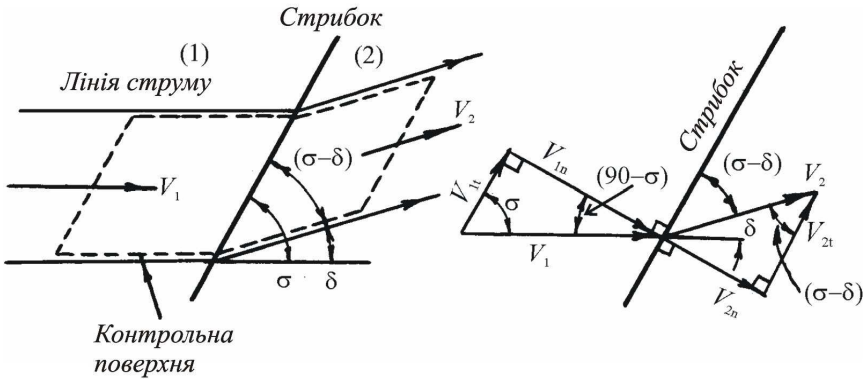


Рис. 8.2. Позначення при аналізі похилих стрибків

рівняння кількості руху в t -напрямку

$$(\rho_1 V_{n1}) V_{t1} = (\rho_2 V_{n2}) V_{t2}; \quad \therefore V_{t1} = V_{t2} = V_t. \quad (8.2)$$

рівняння кількості руху в n -напрямку

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_{n2}^2 - \rho_1 V_{n1}^2; \quad (8.3)$$

рівняння енергії

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{a_*^2}{2} \frac{k+1}{k-1}.$$

Або, тому що

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = \frac{V_{n1}^2 + V_t^2 - V_{n2}^2 - V_t^2}{2} = \frac{V_{n1}^2 - V_{n2}^2}{2},$$

можемо записати

$$\frac{V_{n1}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_{n2}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{a_*^2}{2} \frac{k+1}{k-1} - \frac{V_t^2}{2}. \quad (8.4)$$

Рівняння (8.1) – (8.4) разом зі співвідношеннями для ідеального газу повністю визначають залежність між станами по обидві сторони стрибка. Наприклад, припустимо, що стан (1) повністю визначе-

ний величинами p_1 , ρ_1 , V_{n1} і V_{t1} . Потім, розв'язуючи наведені вище чотири рівняння, визначаємо p_2 , ρ_2 , V_{n2} і V_{t2} . Оскільки V_{n1} й V_{t1} спільно визначають кут нахилу стрибка σ і оскільки V_{n2} й V_{t2} спільно визначають кут $(\sigma - \delta)$, знаходимо кут повороту потоку δ . Величини p і ρ визначають швидкість звуку a , так що значення числа Маха до і після стрибка – M_1 й M_2 можуть бути знайдені.

Чотири основних рівняння – (8.1), (8.2), (8.3) і (8.4) можуть бути по-різному скомбіновані, що приводить до безлічі алгебраїчних співвідношень для різних параметрів стрибка. Постараємося одержати такі співвідношення, які дозволяють прості чисельні розрахунки або приводять до основних висновків, що стосуються природи косого стрибка.

З рівняння енергії, записаного у формі рівняння (3.10)

$$i_1 + \frac{V_1^2}{2} = i_2 + \frac{V_2^2}{2} = i_0 = c_p T_0,$$

робимо висновок, що при проходженні газу крізь стрибок ущільнення зберігаються повна ентальпія i_0 , температура адиабатично загальмованого газу T_0 і, отже, a_0 , a_* , T_* .

$$T_{01} = T_{02}, \quad i_{01} = i_{02}, \quad T_{*1} = T_{*2}, \quad a_{01} = a_{02}, \quad a_{*1} = a_{*2}.$$

Рівняння Ренкіна–Гюгоніо. Цікаве співвідношення, що зв'язує відношення тисків і відношення густин, відомо під цією назвою. Переписавши рівняння (8.3) і використовуючи рівняння (8.1), одержуємо

$$p_2 - p_1 = \rho_1 V_{n1}^2 - \rho_2 V_{n2}^2 = \rho_1 V_{n1}^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{V_{n2}^2}{V_{n1}^2} \right) = \rho_1 V_{n1}^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right),$$

звідки маємо

$$V_{n1}^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Аналогічно з рівнянь (8.3) і (8.1) для V_{n2} одержуємо

$$V_{n2}^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Перемноживши ці два співвідношення, маємо

$$V_{n1} V_{n2} = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (8.5)$$

Рівняння енергії (8.4) можна переписати як

$$\frac{k}{k-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{V_{n1}^2 - V_{n2}^2}{2}.$$

Підставляючи сюди раніше отримані співвідношення для V_{n1}^2 і V_{n2}^2 і трохи перетворивши їх, одержимо відношення тисків у функції відношення густин або відношення густин у функції відношення тисків.

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}; \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{p_2}{p_1} + 1}{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_2}{p_1}}. \quad (8.6)$$

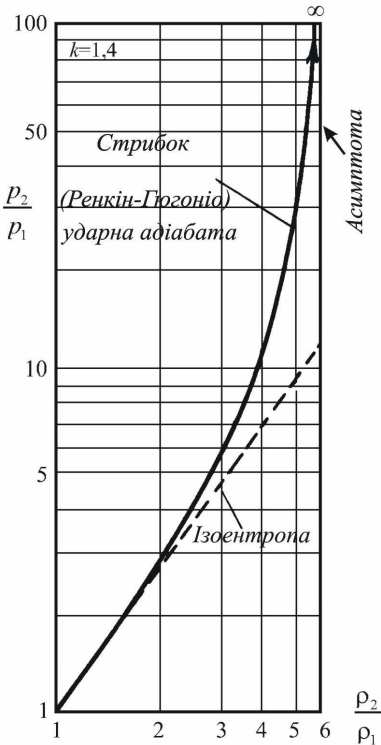


Рис. 8.3. Рівняння Ренкіна-Гюгоніо в порівнянні з ізоентропійною течією ($k=1,4$)

Це співвідношення зображене на рис.8.3 разом з ізоентропійним співвідношенням між тиском і густиною (p/ρ^k). З рис. 8.3 і рівнянь (8.6) бачимо, що для двоатомних газів густина не може збільшитися більше ніж у шість разів, у той час як відношення тисків може досягати нескінченно великої величини. Криві вказують також на іншу важливу рису – *слабкі стрибки, близькі до ізоентропи*. «Слабкий стрибок» – у якому підвищення тиску у відсотках невелике. Рівняння Ренкіна–Гюгоніо справедливе як для прямого, так і для косоного стрибків з будь-яким кутом нахилу стрибка.

Рівняння Прандтля. Цікаве співвідношення між компонентами швидкості може бути отримано виключенням тиску й густини з основних рівнянь.

Запишемо рівняння енергії

$$\frac{V_{n1}^2 + V_t^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_{n2}^2 + V_t^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{a_*^2}{2} \frac{k+1}{k-1}.$$

Із цього рівняння визначаємо p_1 і p_2

$$p_1 = \rho_1 \left[\frac{k+1}{2k} a_*^2 - \frac{k-1}{2k} (V_{n1}^2 + V_t^2) \right],$$

$$p_2 = \rho_2 \left[\frac{k+1}{2k} a_*^2 - \frac{k-1}{2k} (V_{n2}^2 + V_t^2) \right].$$

Підставляючи ці вирази в рівняння кількості руху в n -напрямку (8.3), маємо

$$\rho_1 \left[\frac{k+1}{2k} a_*^2 - \frac{k-1}{2k} V_t^2 \right] - \rho_1 V_{n1}^2 \frac{k-1}{2k} - \\ - \rho_2 \left[\frac{k+1}{2k} a_*^2 - \frac{k-1}{2k} V_t^2 \right] + \rho_2 V_{n2}^2 \frac{k-1}{2k} = \rho_2 V_{n2}^2 - \rho_1 V_{n1}^2.$$

Згрупуємо складові рівняння, у які входять $\rho_1 V_{n1}^2$ і $\rho_2 V_{n2}^2$

$$\rho_1 V_{n1}^2 \left(1 - \frac{k-1}{2k}\right) = \frac{k+1}{2k} \rho_1 V_{n1}^2, \quad -\rho_2 V_{n2}^2 \left(1 - \frac{k-1}{2k}\right) = -\frac{k+1}{2k} \rho_2 V_{n2}^2.$$

Тоді написане вище рівняння прийме вигляд

$$\rho_1 \left[\frac{k+1}{2k} a_*^2 - \frac{k-1}{2k} V_t^2 \right] + \frac{k+1}{2k} \rho_1 V_{n1}^2 = \rho_2 \left[\frac{k+1}{2k} a_*^2 - \frac{k-1}{2k} V_t^2 \right] + \frac{k+1}{2k} \rho_2 V_{n2}^2.$$

Помножимо обидві частини рівності на $V_{n1} V_{n2}$ і винесемо $\frac{k+1}{2k}$

$$V_{n2} \rho_1 V_{n1} \frac{k+1}{2k} \left[V_{n1}^2 + a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} V_t^2 \right] = V_{n1} \rho_2 V_{n2} \frac{k+1}{2k} \left[V_{n2}^2 + a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} V_t^2 \right].$$

Після скорочення, враховуючи (8.1), одержуємо

$$V_{n2} V_{n1}^2 + V_{n2} \left[a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} V_t^2 \right] = V_{n1} V_{n2}^2 + V_{n1} \left[a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} V_t^2 \right];$$

$$V_{n2} V_{n1} (V_{n1} - V_{n2}) = \left[a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} V_t^2 \right] (V_{n1} - V_{n2}).$$

Тоді остаточно одержуємо рівняння, що носить ім'я Прандтля:

$$V_{n2} V_{n1} = a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} V_t^2. \quad (8.7)$$

З рівняння (8.7) бачимо, що *нормальна складова швидкості за стрибком – дозвукова*. Зокрема, якщо стрибок прямий, тобто $V_t = 0$, будемо мати

$$V_1 V_2 = a_*^2, \quad \text{або} \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1.$$

Звідси робимо висновок: в зв'язку з тим, що перед стрибком швидкість надзвукова, то *за прямим стрибком швидкість завжди повинна бути дозвуковою*.

Інше, часто використовуване співвідношення одержуємо, комбінуючи рівняння (8.5) і (8.7)

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} V_t^2. \quad (8.8)$$

Робочі формули для косого стрибка. Одержимо тепер зручні формули для чисельних підрахунків.

З геометрії рис. 8.2 маємо

$$\begin{aligned} V_{t1} &= V_1 \cdot \cos \sigma; & V_{t2} &= V_2 \cdot \cos(\sigma - \delta); \\ V_{n1} &= V_1 \cdot \sin \sigma; & V_{n2} &= V_2 \cdot \sin(\sigma - \delta). \end{aligned}$$

Оскільки $V_{t1} = V_{t2}$, то з першого ряду рівнянь

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\cos(\sigma - \delta)}{\cos \sigma}.$$

Використовуючи рівняння нерозривності (8.1) і другий ряд рівнянь, одержуємо

$$\rho_1 V_1 \sin \sigma = \rho_2 V_2 \sin(\sigma - \delta).$$

Отже,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} \frac{\sin \sigma}{\sin(\sigma - \delta)} = \frac{\cos(\sigma - \delta)}{\cos \sigma} \frac{\sin \sigma}{\sin(\sigma - \delta)} = \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg}(\sigma - \delta)}. \quad (8.9)$$

Видозмінимо рівняння (8.3) за допомогою рівняння (8.1), другого ряду геометричних співвідношень і рівняння (8.9)

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= \rho_1 V_{n1}^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{V_{n2}^2}{V_{n1}^2} \right) = \rho_1 V_1^2 \sin^2 \sigma \left(1 - \frac{V_{n2}}{V_{n1}} \right) = \\ &= \rho_1 V_1^2 \sin^2 \sigma \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \frac{\sin(\sigma - \delta)}{\sin \sigma} \right) = \rho_1 V_1^2 \sin^2 \sigma \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right). \end{aligned}$$

Оскільки $\rho_1 V_1^2 = \rho_1 \frac{V_1^2}{a_1^2} a_1^2 = \rho_1 M_1^2 k \frac{p_1}{\rho_1} = k p_1 M_1^2$, можемо одержати

жати

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + k M_1^2 \sin^2 \sigma \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right). \quad (8.10)$$

Шляхом аналогічних перетворень, виносячи $\rho_2 V_{n2}^2$ з рівняння (8.3), одержуємо

$$\frac{p_1}{p_2} = 1 + k M_2^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \sin^2 (\sigma - \delta). \quad (8.11)$$

Рівняння (8.6), (8.9), (8.10) і (8.11) є співвідношеннями між змінними σ , δ , M_1 , M_2 , p_2/p_1 і ρ_2/ρ_1 . Будь-які з цих двох змінних можна прийняти за незалежні параметри, значення яких повністю визначають величини залишившихся чотирьох змінних. Відношення температур, зміна ентропії і відношення тисків ізоентропійно загальмованих потоків до і після стрибка можна визначити після того, як згадані вище змінні будуть визначені.

Таблиці й діаграми. Майже в усіх книгах таблиці, що наводять рівняння стрибка, дані з M_1 і δ як незалежні аргументи. Досить поширені діаграми, в яких M_1 і δ узяті як незалежні змінні (наприклад, діаграма 1 додатка), а σ , M_2 , p_2/p_1 і p_{02}/p_{01} – визначаються. Відповідні величини ρ_2/ρ_1 можна визначити за рис. 8.3 або, знаючи p_2/p_1 , за рівнянням (8.6), або по таблицях прямого стрибка (через сказане вище, що рівняння Ренкіна–Гюгоніо справедливе як для прямого, так і для косого стрибків з будь-яким кутом нахилу стрибка σ).

8.2. Прямий стрибок ущільнення. Правила взаємодії стрибків

Прямий стрибок є частковим випадком косоного стрибка, у якого $\sigma = 90^\circ$ і $\delta = 0$. Тоді для нашої схеми течії будемо мати

$$V_x = V_{n1} = V_1, \quad V_y = V_{n2} = V_2.$$

На прикладі прямого стрибка одержимо деякі алгебраїчні співвідношення між параметрами до і після стрибка. Використовуючи адіабатичне співвідношення (3.20) між T , T_0 і M , можемо записати

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{T_0}{T_y} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_y^2}.$$

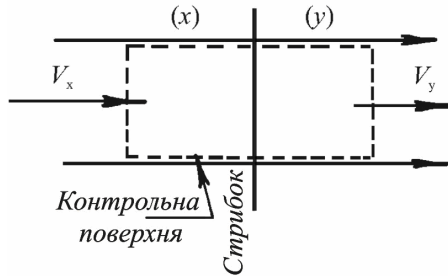


Рис. 8.4. Контрольна поверхня навколо прямого стрибка

З рівняння нерозривності (8.1) і співвідношення $p = \rho RT$ одержуємо

$$\frac{RT_y}{\rho_y} V_x = \frac{RT_x}{\rho_x} V_y,$$

звідки

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{p_y}{p_x} \frac{M_y}{M_x} \frac{a_y}{a_x} = \frac{p_y}{p_x} \frac{M_y}{M_x} \sqrt{\frac{T_y}{T_x}}$$

і можемо записати

$$\frac{T_y}{T_x} = \left(\frac{p_y}{p_x} \right)^2 \left(\frac{M_y}{M_x} \right)^2.$$

Порівнюючи отримані два вирази для T_y/T_x , маємо

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{M_x}{M_y} \frac{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2}}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_y^2}}.$$

З рівняння кількості руху (8.3), пам'ятаючи що $\rho V^2 = k\rho M^2$, одержуємо

$$p_x + k\rho_x M_x^2 = p_y + k\rho_y M_y^2,$$

звідки маємо

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{1 + kM_x^2}{1 + kM_y^2}.$$

Порівнюючи отримані два вирази для p_y/p_x , одержуємо співвідношення між M_x і M_y

$$\frac{M_x \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2}}{1 + kM_x^2} = \frac{M_y \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_y^2}}{1 + kM_y^2}.$$

Піднісши до квадрата й трохи перетворивши це рівняння, вирішимо його відносно M_y . Одержуємо два рішення

$$M_y = M_x$$

i

$$M_y^2 = \frac{M_x^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1} M_x^2 - 1} = \frac{(k-1)M_x^2 + 2}{2kM_x^2 - (k-1)}. \quad (8.12)$$

Підставляючи сюди вираз для M_x і M_y через λ_x і λ_y (3.19), одержуємо вже відоме нам рівняння Прандтля для прямого стрибка ущільнення

$$\lambda_x \lambda_y = 1 \quad \text{або} \quad V_x V_y = a_*^2.$$

Для одержання відношення тисків підставимо (8.12) в отримане раніше відношення тисків через M_x і M_y

$$\begin{aligned} \frac{p_y}{p_x} &= \frac{1 + kM_x^2}{1 + kM_y^2} = \frac{(1 + kM_x^2)[2kM_x^2 - (k-1)]}{2kM_x^2 - (k-1) + k(k-1)M_x^2 + 2k} = \\ &= \frac{(1 + kM_x^2)[2kM_x^2 - (k-1)]}{(k+1)(1 + kM_x^2)} = \frac{2kM_x^2 - (k-1)}{k+1}. \\ \frac{p_y}{p_x} &= \frac{2k}{k+1} M_x^2 - \frac{k-1}{k+1}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Підставляючи (8.12) в отримане раніше відношення температур через M_x і M_y , одержуємо

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_y^2} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_x^2\right) \left(\frac{2k}{k-1} M_x^2 - 1\right)}{\left(\frac{2k}{k-1} M_x^2 - 1\right) + \frac{k-1}{2} \left(M_x^2 + \frac{2}{k-1}\right)}.$$

Після елементарних спрощень остаточно маємо

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_x^2\right) \left(\frac{2k}{k-1} M_x^2 - 1\right)}{\frac{(k+1)^2}{2(k-1)} M_x^2}. \quad (8.14)$$

Відношення густин залежно від M_x можна знайти, використавучи рівняння стану для ідеального газу й рівнянь (8.13) і (8.14)

$$\frac{\rho_y}{\rho_x} = \frac{p_y T_x}{p_x T_y}. \quad (8.15)$$

Відношення швидкостей знаходимо з рівняння нерозривності (8.1)

$$\frac{V_y}{V_x} = \frac{\rho_x}{\rho_y}.$$

Відношення загальмованих тисків можна визначити так:

$$\frac{p_{oy}}{p_{ox}} = \frac{p_{oy}}{p_y} \frac{p_y}{p_x} \frac{p_x}{p_{ox}}.$$

p_y/p_x нам дано рівнянням (8.13), p_{oy}/p_y і p_x/p_{ox} можуть бути визначені з рівняння (3.21), для якого M_y визначаємо за (8.12), а M_x задано.

Прямий стрибок задовольняє рівнянням енергії, нерозривності, кількості руху і стану робочого тіла одночасно. Тому для заданого стану x перед стрибком точка y , що характеризує стан робочого тіла за прямим стрибком, повинна належати як лінії Фанно, так і лінії Релея. Отже, перетинання цих двох ліній, що виходять із точки x , і являє собою точку, яка характеризує стан робочого тіла за прямим стрибком, тобто точку y (рис. 8.5).

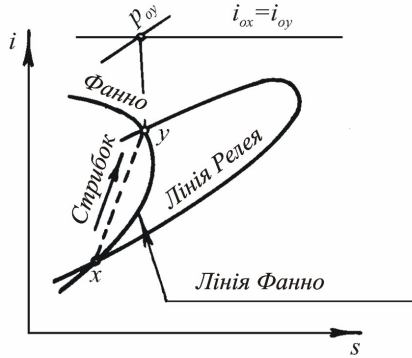


Рис. 8.5. Лінія Фанно й лінія Релея й точки, що характеризують стан робочого тіла до (точка x) і після (точка y) прямого стрибка

Залежності між параметрами потоку для прямого стрибка ущільнення протабульовані і є в усіх підручниках і задачниках по газодинаміці (табл. 3 додатка). Вони можуть бути використані для розрахунку косих стрибків. Косий стрибок зі значенням M_1 потоку, що набігає, перетворенням системи координат може бути зведений до прямого стрибка зі значенням числа Маха потоку, що набігає, рівним $M_1 \cdot \sin \sigma$. Отже, якщо M_x в таблицях прямого стрибка взято рівним $M_1 \cdot \sin \sigma$, то p_y/p_x , ρ_y/ρ_x , T_y/T_x і p_{oy}/p_{ox} в цій таблиці є відповідно величинами p_2/p_1 , ρ_2/ρ_1 , T_2/T_1 і p_{01}/p_{02} для косого стрибка із вхідним кутом Маха M_1 й кутом стрибка σ . З геометрії рис. 8.2 бачимо, що $M_2 = M_y / \sin(\sigma - \delta)$.

Правила взаємодії. З аналізу, наведеного на рис. 8.1, b приходимо до наступних висновків про можливість взаємодії хвиль того чи іншого сімейства:

a) стрибок завжди прагне до взаємодії з хвилями безперервності, що знаходяться за стрибком (рис. 8.6, a).

b) стрибок завжди прагне до взаємодії з хвилями безперервності, що знаходяться перед ним (рис. 8.6,*b*).

c) два стрибки одного сімейства завжди прагнуть зустрітися (рис. 8.6,*c*).

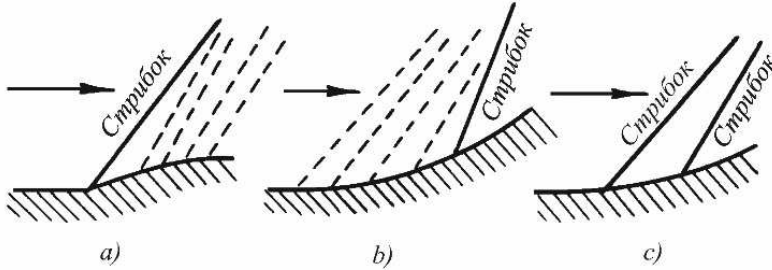


Рис. 8.6. Взаємодія хвиль однакового сімейства

8.3. Ударні поляри

Два типи графічного подання співвідношень косоного стрибка, які можуть бути побудовані, є досить широко використовувані, тому що включають деякі геометричні параметри стрибка.

Годограф ударної поляри. Позначимо x і y компоненти швидкості через u і v відповідно і припустимо, що потік наближається до стрибка в x -напрямку, так що $u_1 = V_1$ і $v_1 = 0$. Тоді стан до і після стрибка може бути розміщений в площині годографа, як показано на рис. 8.7,*a*.

Для даного кута повороту δ всі необхідні параметри для розміщення вектора V_2 і кут стрибка σ можуть бути визначені за наведеними вище формулами, точка 2 може бути розміщена в площині годографа. Компоненти швидкостей, паралельні лінії стрибка, повинні збігтися, оскільки $V_{11} = V_{12} = V_t$, як це показано на рис. 8.7,*a*.

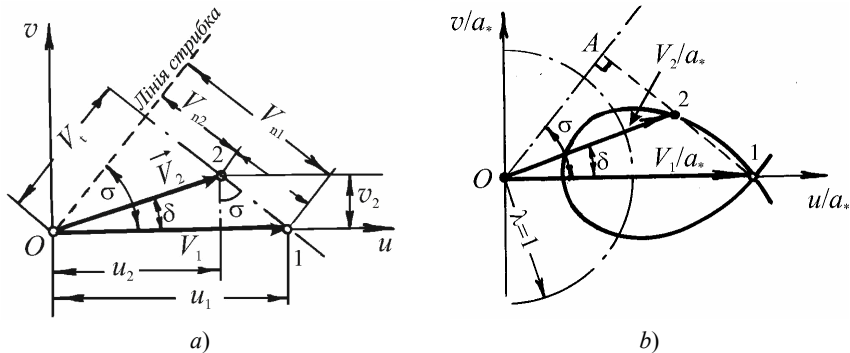


Рис. 8.7. Годограф ударної поляри:

а) – положення векторів швидкості до і після стрибка; б) – годограф ударної поляри

Варто також відзначити, що рис. 8.7,а може бути знайдений простим зрушенням трикутників швидкостей (рис. 8.2).

Тепер, для кожного значення V_1/a_* є нескінченне число кінцевих станів (відповідні різним значенням δ) у площині годографа, які можуть бути досягнуті зі стану 1. Сімейство цих точок відомо як годограф ударної поляри для λ_1 . Типова ударна поляра показана на рис. 8.7,б. Вона симетрична щодо горизонтальної осі, оскільки є дві можливі хвилі стрибка для даних значень M_1 і δ , одна ліворуч, якщо дивитися убік течії, друга – праворуч. Маючи один раз побудовану ударну поляру для даного значення V_1/a_* , рішення для заданого значення кута повороту δ знаходять, відступивши від осі на кут δ . У місці перетинання ударної поляри з лінією, проведеної під кутом δ , знаходиться кінцева точка вектора швидкості V_2/a_* . Перпендикуляр OA до продовження прямої 1–2 дає напрямок лінії стрибка. Сімейство ударних поляр у площині годографа з V_1/a_* в якості параметра показано на рис. 8.8.

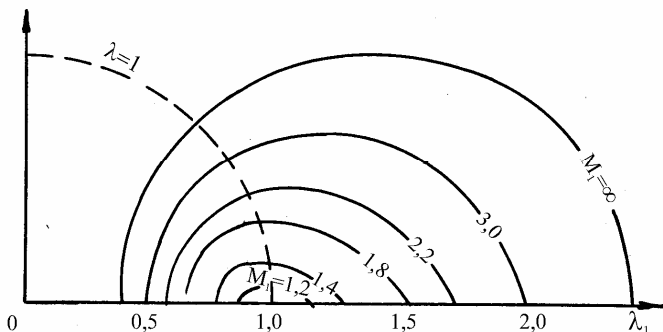


Рис. 8.8. Сімейство ударних поляр ($k=1,4$)

Рівняння ударної поляри. З геометрії рис. 8.7,*a* знаходимо

$$V_{n1} = V_1 \sin \sigma, \quad V_{n2} = u_2 \sin \sigma - v_2 \cos \sigma, \quad V_t = V_1 \cos \sigma.$$

З геометрії рис. 8.7,*a* також одержуємо

$$\sin \sigma = \frac{V_1 - u_2}{N}, \quad \cos \sigma = \frac{v_2}{N},$$

де $N = \sqrt{(V_1 - u_2)^2 + v_2^2}$, тобто гіпотенуза 1-2.

Підставляючи отримані співвідношення в рівняння Прандтля (8.7), одержуємо

$$\frac{V_1(V_1 - u_2)[u_2(V_1 - u_2) - v_2^2]}{N^2} = a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} \frac{V_1^2 v_2^2}{N^2};$$

$$V_1 u_2 (V_1 - u_2)^2 - V_1^2 v_2^2 + V_1 u_2 v_2^2 = a_*^2 N^2 - \frac{k-1}{k+1} V_1^2 v_2^2;$$

$$V_1 u_2 (V_1 - u_2)^2 - \frac{2}{k+1} V_1^2 v_2^2 + V_1 u_2 v_2^2 = a_*^2 N^2;$$

$$V_1 u_2 (V_1 - u_2)^2 - \frac{2}{k+1} V_1^2 v_2^2 + V_1 u_2 v_2^2 = a_*^2 (V_1 - u_2)^2 + a_*^2 v_2^2;$$

$$v_2^2 \left(\frac{2}{k+1} V_1^2 - V_1 u_2 + a_*^2 \right) = (V_1 - u_2)^2 (V_1 u_2 - a_*^2).$$

Звідси одержуємо

$$v_2^2 = \frac{(V_1 - u_2)^2 (V_1 u_2 - a_*^2)}{\frac{2}{k+1} V_1^2 - V_1 u_2 + a_*^2}.$$

Розділивши ліворуч і праворуч рівності на a_*^2 і пам'ятаючи, що в нашому випадку $V_1 = u_1$, остаточно одержуємо формулу

$$\left(\frac{v_2}{a_*} \right)^2 = \left[\frac{u_1}{a_*} - \frac{u_2}{a_*} \right]^2 \frac{\frac{u_1}{a_*} \frac{u_2}{a_*} - 1}{\frac{2}{k+1} \left(\frac{u_1}{a_*} \right)^2 - \frac{u_1}{a_*} \frac{u_2}{a_*} + 1}. \quad (8.16)$$

Ця формула дозволяє побудувати v_2/a_* залежно від u_2/a_* для будь-якої заданої величини параметра u_1/a_* .

Криві сімейства (8.16) являють “строфоїди” (їх ще називають “гіпоцисоїдами”, або “декартовими листами”), графічна побудова яких не становить труднощів.

Ударна поляра в площині тиск – поворотний кут. Пізніше побачимо, що поверхня розриву, як правило, утворюється, коли два стрибки взаємодіють один з одним або коли стрибок взаємодіє з хвилею безперервності. Такі поверхні розриву звичайно називають “лініями ковзання” або “вихоровими завісами”. Вони є також лініями струму і розділяють дві області, що мають рівні тиски і напрямом потоку, але різні швидкості.

Для такого роду задач зручно подавати співвідношення косоного стрибка ударною полярою, для якої координатами є кут повороту δ і

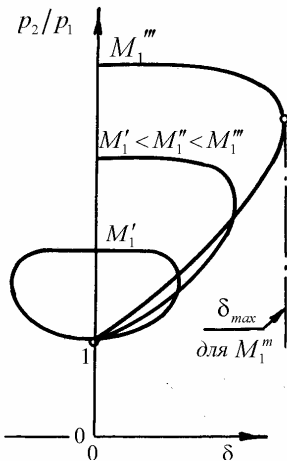


Рис. 8.9. Ударні поляри в площині тиск - поворотний кут

відношення тисків. Для заданого початкового числа Маха формули косоного стрибка дозволяють нам визначити відношення тисків p_2/p_1 як функцію кута повороту δ . Розміщаючи ці значення, як показано на рис. 8.9, одержуємо сімейство $\delta - \bar{p}$ ударних поляр з M_1 як параметр.

8.4. Деякі специфічні аспекти косих стрибків

Інтенсивні й слабкі стрибки. Цікавим фактом, очевидним із графічних подань рис. 8.9 і 8.10, є те, що для заданого початкового значення M_1 і заданого кута повороту δ є або два рішення співвідношень похилого (косоного) стрибка, або їх немає зовсім.

Розглянемо випадок натікання потоку M_1 , як це показано на рис. 8.10. З ударних поляр бачимо: якщо рішення існує, то це може бути або (і) *інтенсивний стрибок* ($2s$) з відносно великим кутом стрибка, відносно великим відношенням тисків і зі станом за стрибком звичайно дозвуковим, або (ii) *слабкий стрибок* ($2w$) з відносно малим кутом стрибка, відносно малим відношенням тисків і зі станом за стрибком звичайно надзвуковим.

Яке з цих двох рішень має місце в дійсності?

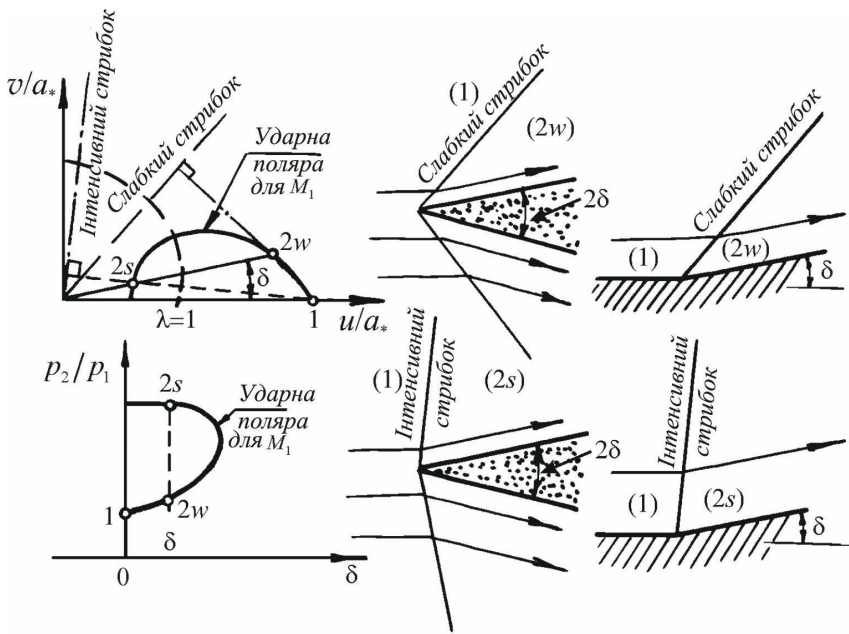


Рис. 8.10. Слабкі й інтенсивні стрибки

Нажаль немає простої й однозначної відповіді на це питання, але кілька загальних міркувань служать як путівник.

Випадок однорічної течії. Для початку розуміння цієї проблеми обговоримо спеціальний випадок однорічної надзвукової течії в трубі постійного перетину. Для цього випадку δ дорівнює 0, і інтенсивне рішення на ударній полярі (рис. 8.11) є прямий стрибок, в той час як слабким рішенням є нескінченно мала хвиля нульового підйому тиску.

З наших раніше наведених міркувань однорічної течії в трубі очевидно, що існує рішення в дійсності залежить від граничних умов, зокрема від відношення тиску внизу по потоку до тиску вгорі

по потоку. Якщо тиск унизу по потоку порівняно низький, має місце слабе рішення, інакше можна сказати, що немає стрибка зовсім.

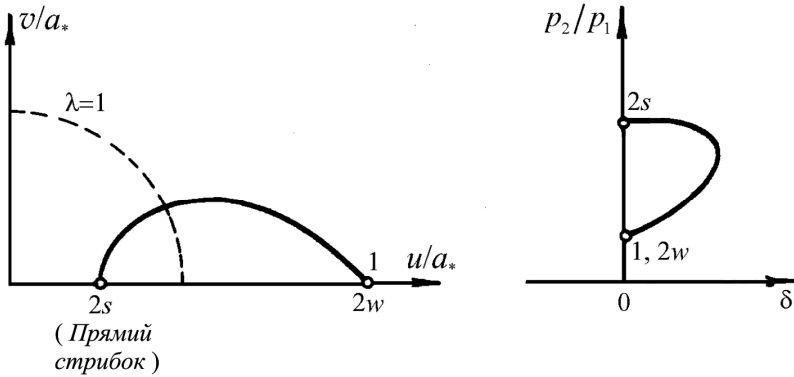


Рис. 8.11. Інтенсивний і слабкий стрибки при $\delta=0$

Якщо тиск унизу по потоку досить високий, маємо прямій стрибок у трубі, тобто має місце інтенсивне рішення .

Двовірна течія. Повертаючись тепер до основного випадку ко-сого стрибка, узагальнюючи міркування п. 8.3 , можемо сказати, що яким буде косий стрибок – інтенсивним або слабким, залежить в остаточному підсумку від граничних значень тиску. Якщо тиск унизу по потоку для двовірної течії (рис. 8.12,*a*) є досить малим, слабкий стрибок буде мати місце на розі *A*, і потік, досягаючи кут *B*, буде, як правило, надзвуковим.

Якщо протитиск досить високий, стрибок, що виходить із кута *A*, буде інтенсивним і потік, що наближається до кута *B*, буде, як правило, дозвуковим. Як буде показано пізніше, похилий стрибок скривиться, як показано на рис. 8.12,*b*, і перетвориться в прямій у верхньої стінки. Кожна лінія струму тому проходить через стрибок різної інтенсивності й кожна точка на лінії стрибка подана відповідною точкою на сегменті між $2s$ і 4 ударної поляри (рис. 8.12,*c* і

рис. 8.12, *d*). Течія за стрибком – дозвукова, лінії струму скривлені, є зміни ентропії від лінії струму до лінії струму.

Коли симетричний клин рухається в атмосфері з надзвуковою швидкістю, тільки слабкі стрибки спостерігаються на практиці.

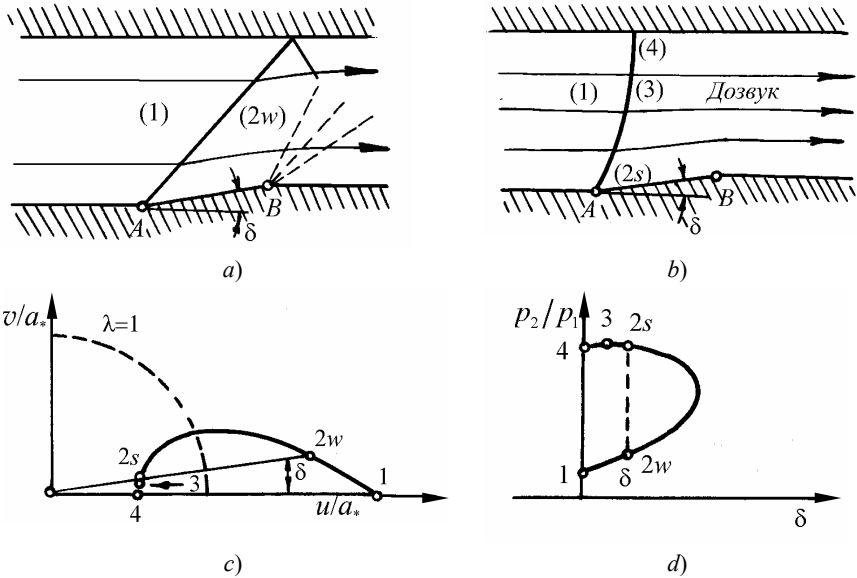


Рис. 8.12. Вплив протитиску на форму стрибка:

a – слабкий стрибок (малий протитиск); *b* – інтенсивний скривлений стрибок (підвищений протитиск); *c* – годограф ударної поляри; *d* – ударна поляра в площині тиск – поворотний кут

В атмосфері далеко за клином тиск може відрізнитися від такого перед клином тільки на нескінченно малу величину i , отже, граничні умови є такими, що має місце слабкий стрибок .

Від’єднані стрибки. Різні графічні подання рис. 8.8 і 8.9 показують, що для заданого початкового значення числа Маха M_1 є максимальне значення поворотного кута δ_{max} , для якого існує рішення

косою стрибка. І навпаки, для заданого кута повороту δ є мінімальне початкове число Маха M_{1min} , для якого існує рішення косою стрибка.

З рис. 8.13,а і 8.13,б очевидно, що при цій граничній умові слабкий і інтенсивний похилі стрибки збігаються. Співвідношення між M_1 і δ_{max} , або між M_{1min} і δ показано на рис. 8.13с. Рішення не може бути отримане в затемненій області нижче кривої на цьому рисунку.

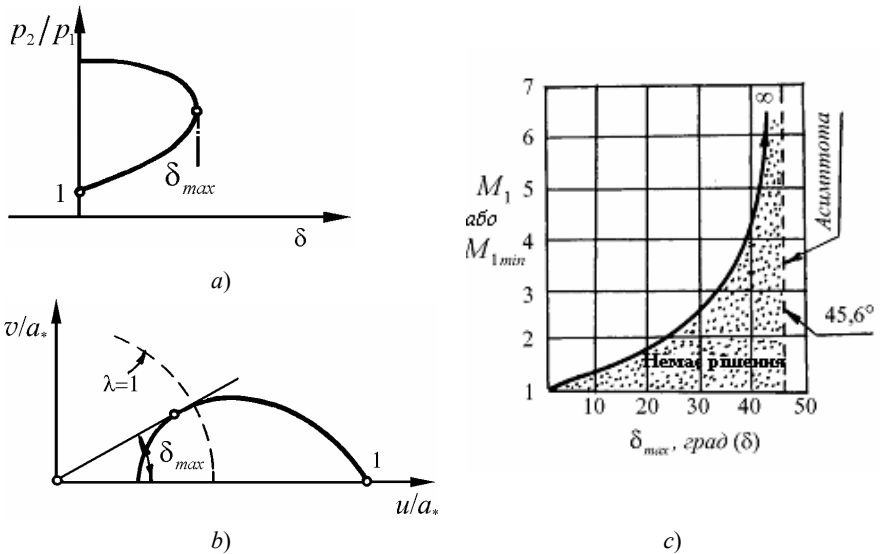


Рис. 8.13. Максимальний поворотний кут для даного початкового числа Маха: а) – тиск – поворотний кут –ударна поляря; б) – годограф ударної поляря; в) – графік для $k = 1,4$.

Розглянемо випадок однорідного паралельного потоку з числом Маха M_1 , що набігає на клин з половинним кутом δ (рис. 8.14). Якщо δ менше ніж δ_{max} , стрибок буде приєднаним до клина. Однак, якщо δ більше, ніж δ_{max} , стрибок не може бути приєднаним до кли-

на, тому що для цього було б потрібно, щоб лінія струму, наближаючись до вершини клина, повернулася на кут більший ніж δ_{max} . Під впливом цих обставин спостерігаємо на практиці, що стрибок від'єднується від клина (рис. 8.14,*a* і рис. 8.14,*b*). Саме тому від'єднаний стрибок завжди встановлюється перед тупим тілом (рис. 8.14,*c*).

Від'єднані стрибки є змінної кривизни. Якщо тіло (рис. 8.14,*c*) являє собою вхідну кромку крила надзвукового літака, бачимо, що кривий стрибок, який починається в точці *A* як прямий, повинен поступово слабшати до точки *B*, що перебуває на досить великій від-

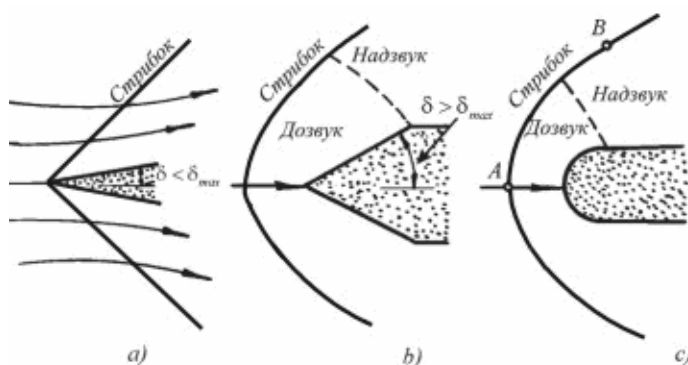


Рис. 8.14. Приєднаний і від'єднаний стрибки:

- a*) – приєднаний стрибок на клині з малим кутом розкриття; *b*) – від'єднаний стрибок у випадку клина з більшим кутом розкриття; *c*) – від'єднаний стрибок перед тупим тілом.

стані від тіла, перетворюючись у хвилю зі зникаючою інтенсивністю, тобто хвилю Маха. Якщо це не так, повітря, минаючи крило, повинно було б піддатися нескінченній зміні ентропії, а це викликало б у результаті нескінченно великий опір. Зі скривленим від'єднаним стрибком (рис. 8.14,*b*) маємо сегмент стрибка, що відповідає всім точкам на кривій ударної поляри з даними M_1 .

За від'єднаним стрибком потік частково надзвуковий і частково дозвуковий, що призводить до великих труднощів при аналізі, тому що маємо різні властивості диференціальних рівнянь дозвукового і надзвукового потоків.

Аналогічні міркування застосовні до течії, що обтікає ввігнутий кут у трубі (рис. 8.15).

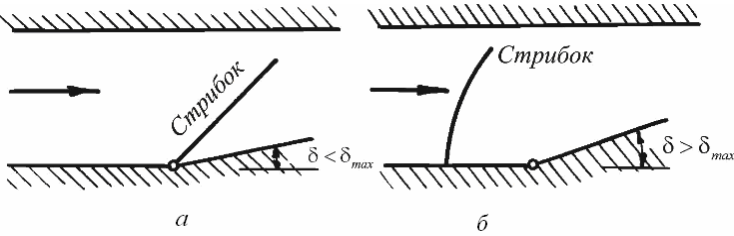


Рис. 8.15. Приднаний і від'єднаний стрибки на поверхні зі зломом у трубі

Звуковий потік після стрибка. Як видно з рис. 8.16, для кожного значення M_1 є певний поворотний кут δ_* , для якого потік за стрибком точно звуковий. Співвідношення між δ_* і δ_{max} ілюструються на рис. 8.16, тобто δ_* завжди менше δ_{max} .

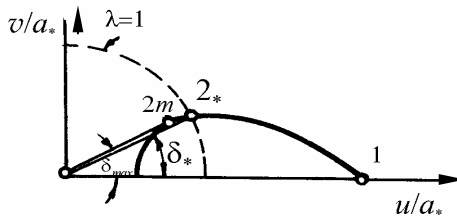


Рис. 8.16. Взаємозв'язок між δ_{max} і δ_*

Однак для $k=1,4$ δ_* не відрізняється від δ_{max} більше, ніж на $0,5^\circ$ в усьому діапазоні чисел Маха – від 1 до нескінченності. Це означає, що за винятком дуже вузької області, потік за слабким стрибком – надзвуковий і потік за інтенсивним стрибком – дозвуковий.

Зміну ентропії в стрибку можна визначити, користуючись формулами (2.24) або (2.25)

$$s_2 - s_1 = \frac{R}{k-1} \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k.$$

Розглянемо, як змінюється ентропія при переході через стрибок ущільнення. Використовуючи результати підстановки в рівняння Ренкіна–Гюгоніо (8.6), легко переконатися, що для стрибка ущільнення, для якого $\rho_2/\rho_1 > 1$, завжди

$$\frac{p_2}{p_1} > \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k$$

і, отже, згідно з формулою для зміни ентропії (2.25) *при переході через стрибок ентропія газу зростає*.

Дуже слабкий стрибок. Користуючись рівнянням Ренкіна–Гюгоніо (8.6), можна розглянути зміну стану газу при переході через слабкий стрибок.

Покладаючи $p_1 = p$, $\rho_1 = \rho$, $p_2 = p + dp$, $\rho_2 = \rho + d\rho$ з рівняння (8.6), маємо

$$\frac{p + dp}{p} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho + d\rho}{\rho} - 1}{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho + d\rho}{\rho}},$$

$$\frac{dp}{p} = -1 + \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho + d\rho}{\rho} - 1}{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho + d\rho}{\rho} - 1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho + d\rho}{\rho} - 1}{\frac{2}{k-1} \frac{d\rho}{\rho}} - 1;$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho+d\rho}{\rho} - 1 - \left(\frac{k+1}{k-1} - \frac{\rho+d\rho}{\rho} \right)}{\frac{2}{k-1} - \frac{d\rho}{\rho}};$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{\frac{2k}{k-1} \frac{\rho+d\rho}{\rho} - \frac{2k}{k-1}}{\frac{2}{k-1} - \frac{d\rho}{\rho}}, \quad \frac{dp}{p} = \frac{\frac{2k}{k-1} \left(1 + \frac{d\rho}{\rho} - 1 \right)}{\frac{2}{k-1} - \frac{d\rho}{\rho}};$$

$$\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho} \frac{\frac{2}{k-1}}{\frac{2}{k-1} - \frac{d\rho}{\rho}}.$$

При $dp \rightarrow 0$ і $d\rho \rightarrow 0$. Границя відношення $dp/d\rho$, дорівнює

$$\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho} = a^2, \text{ оскільки } d\rho/\rho \rightarrow 0.$$

Приходимо до рівняння ізоентропічного процесу

$$\frac{dp}{p} = k \frac{d\rho}{\rho}.$$

Таким чином, зміна стану в стрибку нескінченно малої інтенсивності (слабкий стрибок) є ізоентропійною.

Комбінуючи отриманий результат з рівнянням (8.5) і відзначаючи, що для дуже слабкого стрибка рівняння (8.1) і (8.3) передбачають, що V_{n2} наближається до V_{n1} , одержуємо

$$\frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \rightarrow a^2; \quad V_{n2} V_{n1} \rightarrow V_n^2; \quad \therefore V_n \rightarrow a.$$

Інакше кажучи, складова швидкості, перпендикулярна до хвилі, стає рівною швидкості звуку. Отже,

$$\operatorname{tg} \sigma \rightarrow \frac{a}{V_t} = \operatorname{tg} \alpha,$$

так що в границі кут стрибка σ стає рівним куту Маха α . Тут показали, що хвиля нахилого стрибка нескінченно малої інтенсивності ідентична хвилі Маха. Для заданого початкового значення числа Маха M_1 інтенсивність стрибка наближається до нуля при наближенні поворотного кута δ до нуля. Якщо точка 2 на рис. 8.7,*b* буде наближатися до точки 1, одержимо в границі конструкцію (рис. 8.17), де напрямок хвилі Маха визначається перпендикуляром до дотичної до ударної поляри в точці 1. Пам'ятаючи, що нормаль до характеристики в площині годографа дає напрямок лінії Маха, очевидно з рис. 8.17, що для даного початкового стану ударна поляра і характеристичні криві в площині годографа дотичні одна до одної. Більш того, можна показати, що ударна поляра і характеристичні криві мають однаковий радіус кривизни в точці 1. Тобто, як показано на рис. 8.18, ударна поляра і характеристичні криві є досить близько співпадаючими для малих кутів повороту.

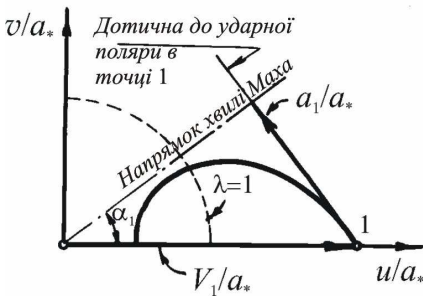


Рис. 8.17. Перпендикуляр до годографа ударної поляри в точці 1 є лінією Маха

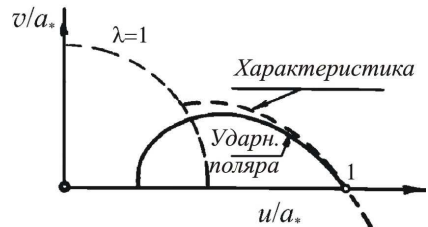


Рис. 8.18. Ударна поляра і характеристика в площині годографа, що проходять через точку 1 мають рівні кути нахилу і радіус кривизни

На заключення цікаво відзначити, що метод характеристик, аналіз косих стрибків і лінеаризована надзвукова теорія – всі дають однакові результати в граничному випадку, коли надзвуковий потік повертається на втрачаюче малий кут.

8.5. Втрати в стрибках ущільнення

Як раніше відзначали, припускаючи енергетично ізольовану течію в стрибках, повна енергія потоку при переході через стрибок не змінюється. Тобто

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2},$$

або

$$\frac{V_1^2}{2} + i_1 = \frac{V_2^2}{2} + i_2 = i_0.$$

Користуючись параметрами повного гальмування, з першого запису рівняння енергії, маємо

$$\frac{p_{01}}{\rho_{01}} = \frac{p_{02}}{\rho_{02}}.$$

Знаючи тиск гальмування до стрибка p_{01} і ентальпію гальмування i_0 , знаходимо в діаграмі i - s точку O_1 , що характеризує стан ізоентропічно загальмованого до стрибка газу.

За відомими V_1 і p_1 знаходимо точку 1, що визначає стан газу, який рухається, перед стрибком. У стрибку статичний тиск потоку збільшується до p_2 . Якщо відомий кут відхилення потоку δ , то стан газу 2 за стрибком визначено, тому що за формулою (2.24) або (2.25) можна знайти збільшення ентропії $\Delta s = s_2 - s_1$. Прийmemo до уваги, що лінія, яка з'єднує точки 1 і 2 на рис. 8.19, не характеризує зміну

стану газу в стрибку, оскільки в діаграмі i - s неквазистатичні процеси можуть бути подані тільки початковою і кінцевою точками процесу.

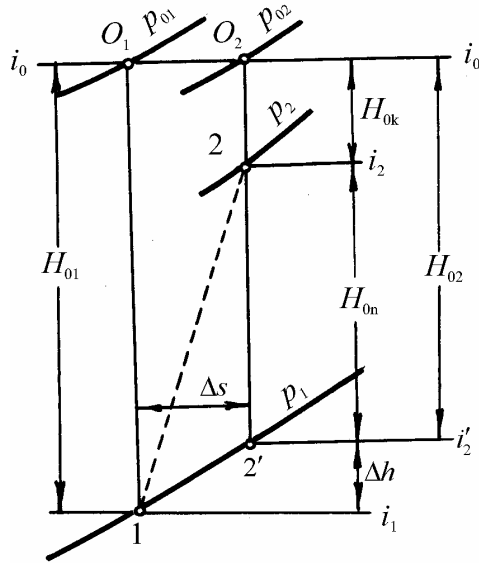


Рис. 8.19. Стрибок ущільнення в i - s діаграмі

Якщо потік за стрибком ізоентропічно загальмувати, то стан повного гальмування характеризується точкою O_2 , в якій легко знаходиться значення p_{02} . Якщо надати тепер потоку можливість ізоентропічно розширитися до тиску перед стрибком, то його стан буде визначено крапкою $2'$.

H_{02} – ізоентропійний перепад ентальпій за стрибком;

H_{0k} – кінетична енергія потоку за стрибком;

H_{0n} – зміна потенційної енергії потоку в стрибку

$$H_{02} = H_{0k} + H_{0n},$$

H_{01} – ізоентропійний перепад ентальпій до стрибка.

Втрати кінетичної енергії в стрибку

$$\Delta h = H_{01} - H_{02} = \frac{V_1^2 - V_2'^2}{2},$$

де V_2' – швидкість газу, якщо надати потоку за стрибком розширитися до тиску перед стрибком.

Коефіцієнт втрат енергії в стрибку

$$\zeta_c = \frac{\Delta h}{H_{01}} = 1 - \frac{H_{02}}{H_{01}}.$$

З рівняння енергії $V_1^2/2 + i_1 = i_0$ виходить, що $H_{01} = i_0 - i_1 = V_1^2/2$.

Скориставшись іншою формою запису цього ж рівняння, маємо

$$\frac{V_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} - \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = H_{01}, \quad H_{01} = \frac{k}{k-1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left[1 - \frac{p_1}{p_{01}} \frac{\rho_{01}}{\rho_1} \right].$$

Скориставшись рівнянням ізоентропи $\rho_{01}/\rho_1 = (p_{01}/p_1)^{1/k} = (p_1/p_{01})^{-1/k}$, остаточно одержуємо

$$H_{01} = \frac{k}{k-1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

Аналогічно маємо

$$H_{02} = \frac{k}{k-1} \frac{p_{02}}{\rho_{02}} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_{02}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

Підставляючи, одержуємо (пам'ятаючи, що $p_{01}/\rho_{01} = p_{02}/\rho_{02}$)

$$\zeta_c = 1 - \frac{1 - (p_1/p_{02})^{\frac{k-1}{k}}}{1 - (p_1/p_{01})^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{(p_1/p_{02})^{\frac{k-1}{k}} - (p_1/p_{01})^{\frac{k-1}{k}}}{1 - (p_1/p_{01})^{\frac{k-1}{k}}} =$$

$$= \frac{(p_{01}/p_{02})^{\frac{k-1}{k}} - 1}{(p_{01}/p_1)^{\frac{k-1}{k}} - 1}.$$

Згадаємо, що відповідно до рівняння (3.21)

$$\frac{p_{01}}{p_1} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

остаточно одержуємо

$$\zeta_c = \frac{2}{k-1} \frac{1}{M_1^2} \left[\left(\frac{p_{01}}{p_{02}} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]. \quad (8.17)$$

Відношення тисків гальмування до і після стрибка можна визначити таким чином:

$$\frac{p_{01}}{p_{02}} = \frac{p_{01}}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_{02}}.$$

На рис. 8.20 поданий графік ζ_c у косому стрибку залежно від кута σ і безрозмірної швидкості збуреного потоку для $k=1,4$ (розрахунки проведені студентом О.С. Руденко). Із графіка видно, що коефіцієнт втрат інтенсивно зростає зі збільшенням кута косоного стрибка і зростанням швидкості λ_1 , досягаючи максимальних значень при $\sigma = \pi/2$ (прямий стрибок).

Таким чином, у надзвуковому потоці ідеальної рідини з'являється особливий вид опору – *хвильовий опір*, що залежить від втрат у стрибках, а отже, від форми й інтенсивності стрибків. Як бачимо, форма стрибка і його інтенсивність залежать від форми тіла і

швидкості обтікання. З огляду на те, що при меншому куті відхилення δ (а отже, і σ) втрати в стрибку зменшуються, можна зробити такий висновок: гострі тіла в надзвуковому потоці повинні мати менший опір, ніж тіла, які мають округлену форму.

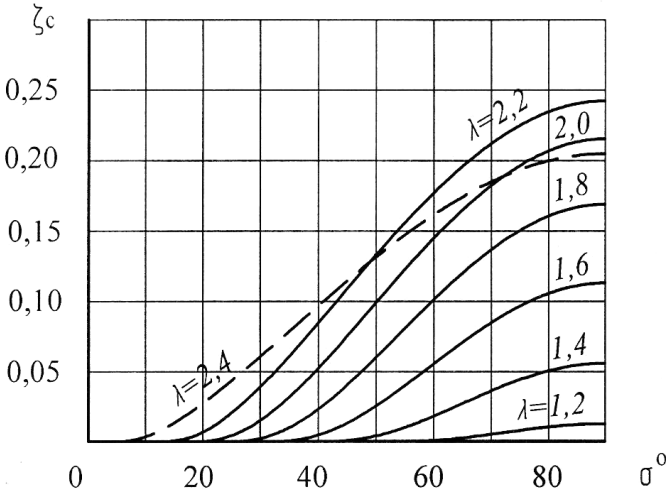


Рис. 8.20. Коефіцієнти втрат у стрибку залежно від кута σ і швидкості незбуреного потоку ($k=1,4$)

Цікаво відзначити, що при $\lambda > 2,2$ (тобто $M > 5$) крива зміни коефіцієнта втрат енергії в стрибку ущільнення залежно від кута нахилу стрибка σ стає більш пологою (див. рис. 8.20, крива при $\lambda=2,4$).

Цей начебто парадоксальний результат пояснюється очевидним фактом: формули для розрахунку стрибків ущільнення ґрунтуються на гіпотезі суцільності середовища. Остання незастосовна при течії в сильно розрідженому просторі. Для отримання дійсної картини течії в цьому випадку необхідно застосовувати молекулярно-кінетичну теорію газів.

Ступеневе гальмування потоку. Якщо при заданих границях зміни статичного тиску збільшувати число косих стрибків шляхом збільшення послідовних поворотів стінки, то гальмування потоку буде більш плавним, а сумарні відносні втрати будуть зменшуватися. Звичайно за останнім косим стрибком розташовують прямий стрибок, на якому відбувається перехід до дозвукової швидкості.

Розрахунки показують, що при гальмуванні потоку до дозвукової швидкості перехід від прямого стрибка ущільнення до системи навіть двох стрибків (косий + прямий) дозволяє зменшити коефіцієнт втрат більш ніж удвічі [3]. Багатоступінчаті гальмування є ще більш ефективнішим. Для кожної швидкості потоку λ_1 при заданому числі косих стрибків існує оптимальна схема розташування косих стрибків, яку можна знайти послідовним розрахунком.

Побудова ударної поляри в тепловій діаграмі. Ударна поляра в тепловій діаграмі дає наочне уявлення про величину і характер зміни втрат в стрибках ущільнення в залежності від їх інтенсивності. Побудову ударної поляри в тепловій діаграмі можливо виконати таким чином. За параметрами до стрибка p_1 і T_1 знаходимо точку 1 (рис. 8.21) і при відомій швидкості V_1 точку O_1 . Задаємося рядом значень σ у межах від $\sigma = \alpha_1 = \arcsin \frac{1}{M_1}$ до $\sigma = 90^\circ$. Для кожного значення σ визначаємо p_2/p_1 і T_2/T_1 , наносимо в i - s діаграмі точки 2_w , 2_s і т.д. до точки A , що відповідає прямому стрибку. Геометричне місце точок 2 дає стан газу в координатах i - s , що відповідає ударній полярі. Відзначимо, що отримана крива повинна бути дотичною до лінії ізоентропійної зміни стану O_11 , тому що при нескін-

годографа. У площині годографа ударна поляра дає кінематичну картину течії (поле швидкостей); у тепловій діаграмі одержуємо характеристики енергетичних перетворень на стрибку і зміни параметрів потоку. На лінії $1A$ легко знайти також точку r , що відповідає $M_2 = \lambda_2 = 1$. З цією метою відраховуємо критичний перепад ентальпій

$$H_* = i_0 - i_2 = \frac{a_*^2}{2} = \frac{k-1}{k+1} i_0$$

і відкладаємо його від лінії $i_0 = const$.

Характер отриманої кривої, зверненої опуклістю до осі i , чітко показує, наскільки інтенсивно збільшуються втрати з ростом σ і наближенням до прямого стрибка.

8.6. Відбиття й взаємодія стрибків

У практичних задачах косі стрибки часто падають на тверді границі або на вільну границю струменів; іноді хвилі протилежного сімейства перетинаються й, як показано на рис. 8.6,с, два косих стрибки одного й того ж сімейства завжди прагнуть перетнутися. Розглянемо такі випадки.

Відбиття стрибка від вільної границі струменя. Стрибок A (рис. 8.22) падає на границю постійного тиску двомірного потоку. Оскільки тиск в області (2) за стрибком більший, ніж на вільній границі, очевидно, що розширюючи хвилі B повинні відбитися в тому місці, де стрибок A впаде на вільну границю. Більше того, відбиті хвилі B повинні бути центрованими Прандтль–Майєровськими хвилями, так що на вільній границі раптовий підйом тиску від p_1 до p_2 може миттєво бути погашений раптовим падінням тиску від p_2 до p_3 .

Інтенсивність хвиль розрідження B залежить від інтенсивності стрибка A в разі вимоги $p_2 - p_1 = p_2 - p_3$.

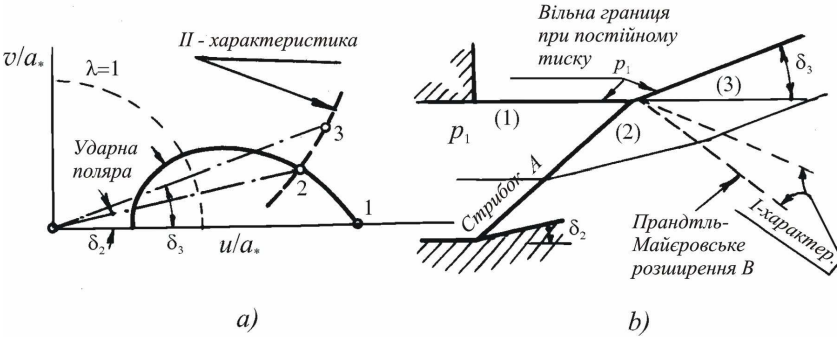


Рис. 8.22. Відбиття стрибка від границі постійного тиску:

a) – картина течії в площині годографа;

b) – картина течії у фізичній площині

Відбиття стрибка призводить до деформації границі струменя, яка у точці дотику зі стрибком A відхиляється на кут $\delta_3 > \delta_2$.

Відбиття від твердої границі. На рис. 8.23,*b* стрибок A падає на пряму стінку. Оскільки потік газу має напрямок твердої границі, необхідно, щоб стрибок B відбився так, щоб течія в області (3) мала той же напрямок, що і в області (1). Інтенсивність стрибка B стосовно A визначається вимогою, щоб обидва мали рівні поворотні кути. Рис. 8.23,*a* показує, як проблема може бути вирішена графічно за допомогою ударних поляр у площині годографа. Рис. 8.23,*c* показує рішення за допомогою $\delta - \bar{p}$ – ударних поляр. В обох цих графічних побудовах ударна поляра, що відповідає M_2 , зміщена на кут δ , щоб відповідати дійсному напрямку потоку в області (2). Очевидно з прикладу, що косий стрибок A відбивається від твердої границі хви-

лею B , однаковою за природою зі стрибком A , тобто відбивається так само косим стрибком ущільнення.

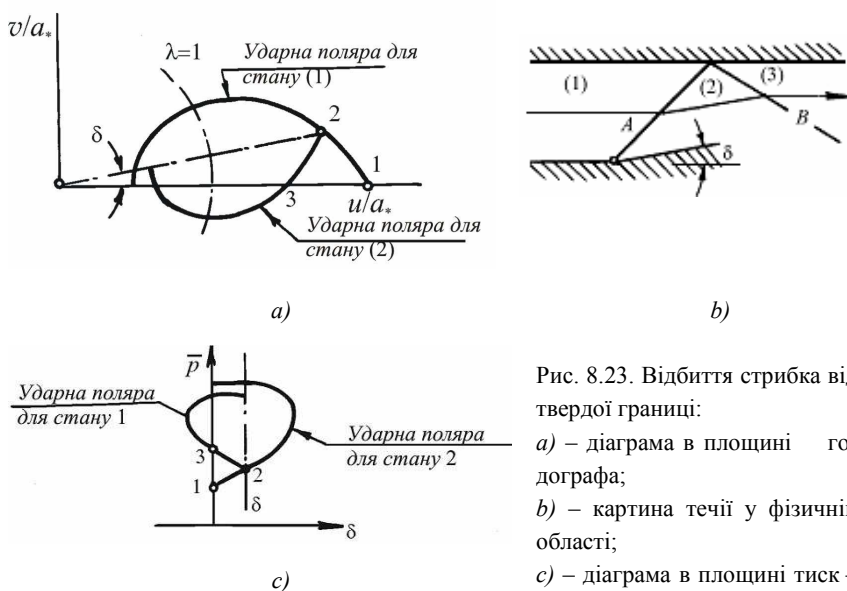


Рис. 8.23. Відбиття стрибка від твердої границі:
 а) – діаграма в площині u/a_* – v/a_* годографа;
 б) – картина течії у фізичній області;
 в) – діаграма в площині тиск – поворотний кут

На практиці присутність приграничного шару біля верхньої стінки робить процес відбиття набагато більш складнішим, ніж просте рішення, дане тут.

Вивчення рис. 8.23,а і 8.23,с показує, що для даного M_1 є максимальна величина поворотного кута δ , для якого тип відбиття на рис. 8.23,б, відомий як *правильне відбиття*, можливий. Можна також відзначити, що для даного δ є мінімальна величина M_1 , нижче якої правильне відбиття неможливе.

Коли правильне відбиття неможливе, має місце *відбиття Маха* або λ -подібний стрибок. Біля верхньої стінки стрибок повинен бути прямий, тому що це єдина можливість наявності стрибка без зміни напрямку течії.

Якщо δ більше ніж величина δ_{max} , що відповідає M_2 (рис. 8.13), має місце відбиття Маха у вигляді λ -подібного стрибка, показаного на рис. 8.24.

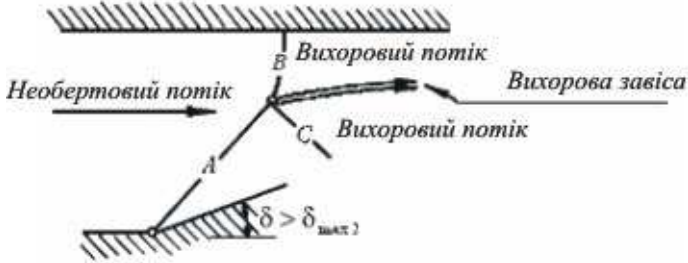


Рис. 8.24. Відбиття Маха

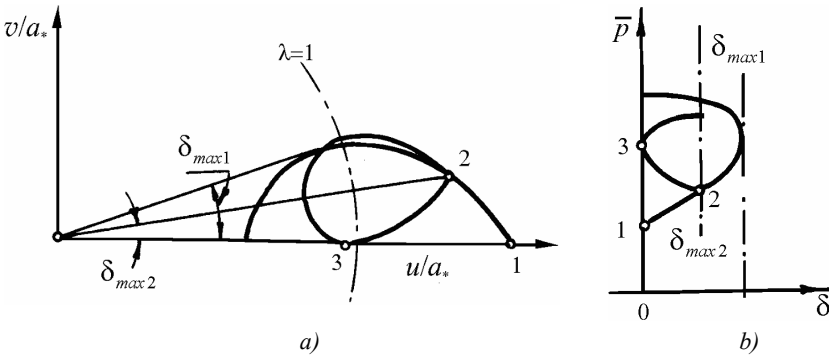


Рис. 8.25. Діаграми в площині годографа (а) і в площині тиск – поворотний кут (b) у випадку відбиття стрибка від твердої границі при куті повороту потоку

$$\delta = \delta_{max2}$$

Стрибок С, протилежний сімейству стрибка А, виходить із з'єднання падаючого стрибка А і прямого стрибка В. Однак стрибки А, В і С не можуть бути прямими в точці взаємного перетинання, за тим же міркуванням, чому правильне відбиття хвилі А неможливе. На практиці спостерігаємо, що А, В і С скривлені біля з'єднуючої точки. Вихорова завіса виходить із точки перетинання і потік за всі-

ма стрибками є обертовим внаслідок кривизни стрибків. Ця течія досить складна і теперішніх наших знань недостатньо, щоб всебічно розглянути всі аспекти відбиття Маха.

При $\delta = \delta_{max2}$ картина течії залишається така, як на рис. 8.23,*b*; при цьому діаграма годографа і діаграма “тиск–кут відхилення потоку” показані на рис. 8.25,*a* і 8.25,*b* відповідно.

Перетинання стрибків протилежного сімейства. Припустимо, що стрибки *A* і *B* відомої інтенсивності лежать в області (1) і надалі зустрічаються (рис. 8.26,*a*).

Припустимо, що *C* буде продовженням *B* і *D* – продовження *A*. Розглянемо дві суміжні лінії струму, які переходять на іншу сторону з’єднуючої точки; одна лінія проходить стрибки *A* і *C*, а інша – *B* і *D*. Після проходження системи стрибків лінії струму повинні мати *однаковий тиск і напрямок*. Але оскільки вони проходять через стрибки різної інтенсивності, ентропія збільшується неоднаково й, отже, вони мають різні швидкості. Поверхня розриву (*вихорова завіса*), що також є лінією струму, виходить із загальної точки. Области 4' і 4'' мають однаковий напрямок потоку й однаковий тиск, але різні швидкості. Вихорова завіса – дуже тонка область сконцентрованих вихорів, іноді називається *лінією ковзання*.

Графічне рішення цієї задачі за допомогою діаграм ударних полів показано на рис. 8.26,*b* і 8.26,*c*. Остання діаграма особливо зручна для такого роду задач. На рис. 8.27 показаний процес перетинання двох косих стрибків у тепловій діаграмі *i-s*.

Оскільки поля 4' і 4'' мають однаковий тиск і однакову загальмовану температуру, адіабатні й ізотропні співвідношення вимагають, щоб поле з більш низьким тиском гальмування (більша ентропія) мало більш низьку швидкість.

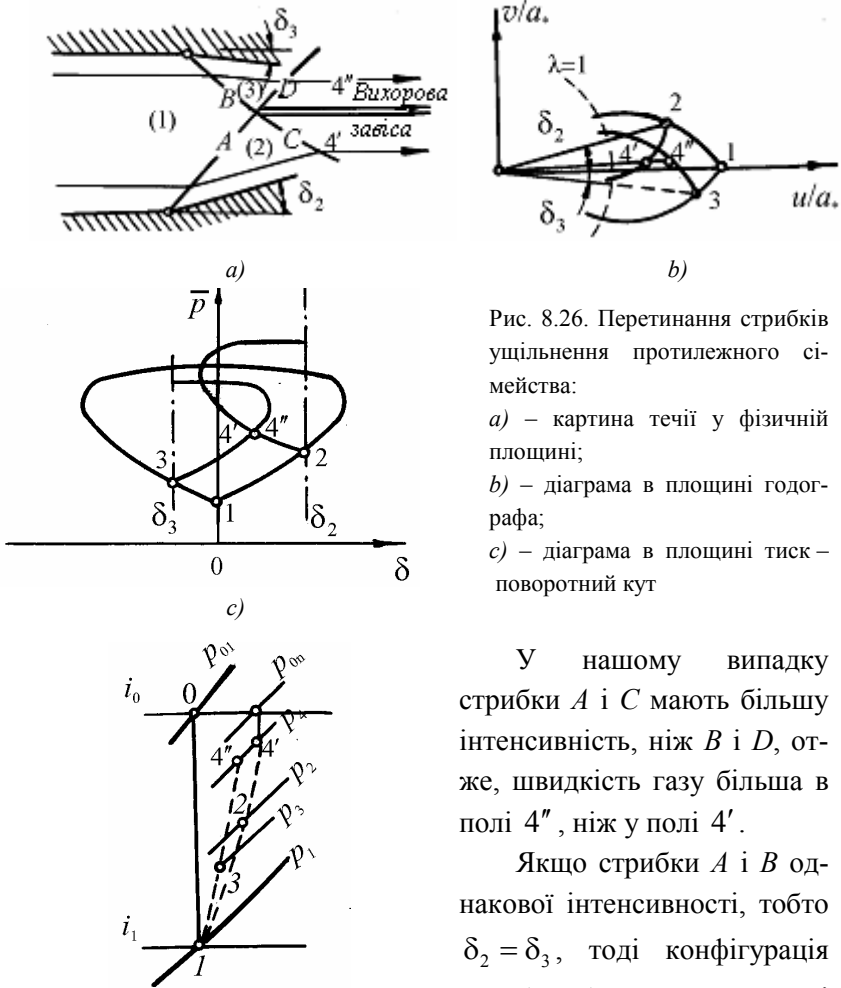


Рис. 8.26. Перетинання стрибків ущільнення протилежного сімейства:
 а) – картина течії у фізичній площині;
 б) – діаграма в площині годографа;
 в) – діаграма в площині тиск – поворотний кут

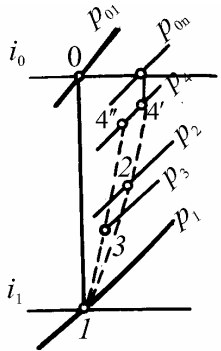


Рис. 8.27. Перетинання стрибків у тепловій діаграмі

У нашому випадку стрибки A і C мають більшу інтенсивність, ніж B і D , отже, швидкість газу більша в полі $4''$, ніж у полі $4'$.

Якщо стрибки A і B однакової інтенсивності, тобто $\delta_2 = \delta_3$, тоді конфігурація стрибка буде симетрична і ніякої лінії ковзання не буде. Лінія струму, що проходить через точку перетинання, в цьому випадку не буде змі-

новати напрямок і картина під цією лінією струму буде аналогічна рис. 8.23, тобто відбиття стрибка від плоскої стінки.

Тип правильного відбиття, показаний на рис. 8.26, може бути неможливий, якщо M_1 дуже мале або, якщо δ_2 і δ_3 дуже великі. Відбиття Маха тоді має місце; одержуємо так званий мостоподібний стрибок (рис. 8.28).

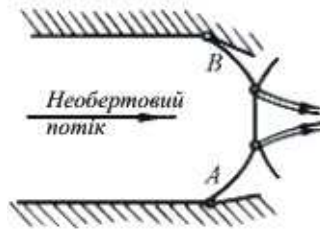


Рис. 8.28. Відбиття Маха у випадку двох перетинаючих стрибків при великих кутах повороту потоку δ_2 і δ_3

Перетинання стрибків одного сімейства. Посилаючись на рис. 8.29,а, припустимо, що M_1 , δ_2 і δ_3 задані, що визначає кути й інтенсивність стрибків А і В.

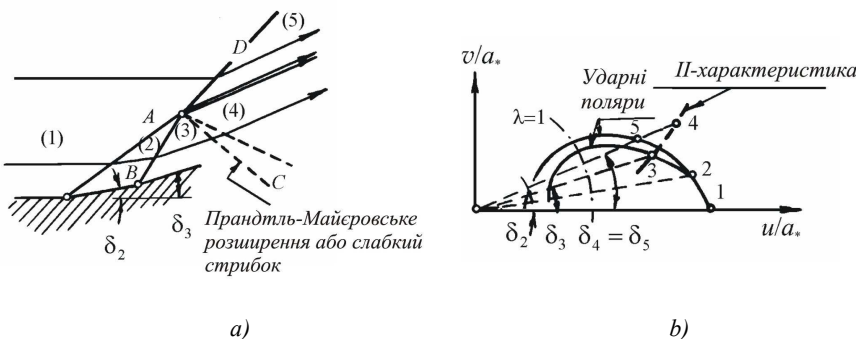


Рис. 8.29. Перетинання стрибків одного сімейства:
а) – картина у фізичній області; б) – діаграма в площині годографа

За міркуваннями, висловленими раніше, стрибок A завжди перетинається зі стрибком B .

Спочатку припустимо, що стрибки A і B можуть бути продовжені тільки у формі стрибка D . У цьому випадку області (3) і (5) повинні мати однакові тиск і напрямок, але різні швидкості. Однак тиск і напрямок в області (3) визначені початковими даними. Це означає, що стрибок D повинен бути такої інтенсивності, щоб одночасно задовольняти вимогам щодо тиску і напрямку, рівним області (3).

Однак, якщо поворотний кут D вибрати так, щоб $\delta_5 = \delta_3$, всі інші властивості D негайно визначаються і тиск в області (5) не буде дорівнювати тиску в області (3) (при проходженні лінії струму через два стрибки втрати будуть менше, ніж при проходженні лінії струму через один стрибок).

Ці міркування необхідні, щоб переконатися, що потрібно щось більше, ніж стрибок D .

Одним з можливих шляхів, щоб обійти ці труднощі, є припущення, що хвиля C , яка може бути або розширенням Прандтля–Майєра, або косим стрибком, повинна виходити з точки перетинання.

Потім відповідним підбором інтенсивності хвиль C і D можна одержати рішення, для якого $p_5 = p_4$ і $\delta_4 = \delta_5$. Звичайно вихорова завіса розділяє області (4) і (5). Рішення в площині годографа із хвилею C , показаної як хвиля розрідження, наведено на рис. 8.29, b .

Зміна стану газу уздовж лінії струму при переході через розглянуту систему стрибків може бути подана в тепловій діаграмі (рис. 8.30). У точці 2 визначається стан газу після першого стрибка A , а в точці 3 – після другого стрибка B .

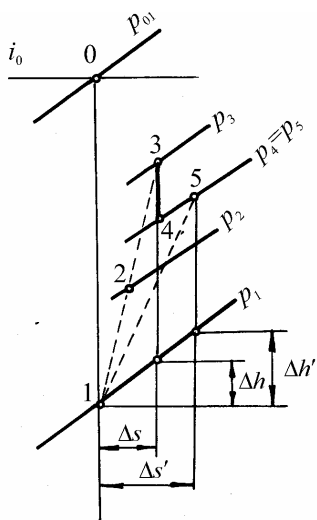


Рис. 8.30. Перетинання стрибків ущільнення одного сімейства в тепловій діаграмі

Точка 5 дає стан газу за стрибком D , а точка 4 – за хвилею ізоентропного розширення C . Втрати енергії в стрибку D вищі, ніж сумарні втрати в стрибках A і B , тобто $\Delta s' > \Delta s$. Таким чином, як уже вказувалося вище, при заданих границях змін тисків гальмування потоку одним стрибком спричиняє більшу втрату енергії, ніж у випадку послідовного гальмування двома стрибками.

Криволінійні стрибки. Придатність рівнянь стрибка. У більшості практичних випадків з'являються криволінійні стрибки або внаслідок того, що стрибок від'єднаний (як на рис. 8.14, c і рис. 8.15, b), або внаслідок того, що первісний прямий стрибок взаємодіє з хвилями нерозривності. Чи можуть рівняння косоного стрибка бути застосовні для криволінійних стрибків? Так, співвідношення стрибка застосовні до кожної індивідуальної лінії струму в припущенні, що кут стрибка σ вимірюється між лінією струму, що входить на поверхню стрибка, і дотичній у точці входу в площину, яка містить лінію струму, який наближається, і нормаль до дотичної площини.

Взаємодія стрибків і хвиль нерозривності. Є чотири можливих типи таких взаємодій, що залежать від того, чи є хвилі нерозри-

вності хвилями стиску або розрідження й чи є хвилі нерозривності однакового або протилежного сімейства із хвилюю стрибка.

Для ілюстрації обговоримо течію, що обтікає крило трикутного профілю (рис. 8.31,а), у якому косий стрибок, що виходить із точки А, взаємодіє з хвилями нерозривності – хвилями розрідження Прандтля–Майєра однакового сімейства, що виходять із точки С.

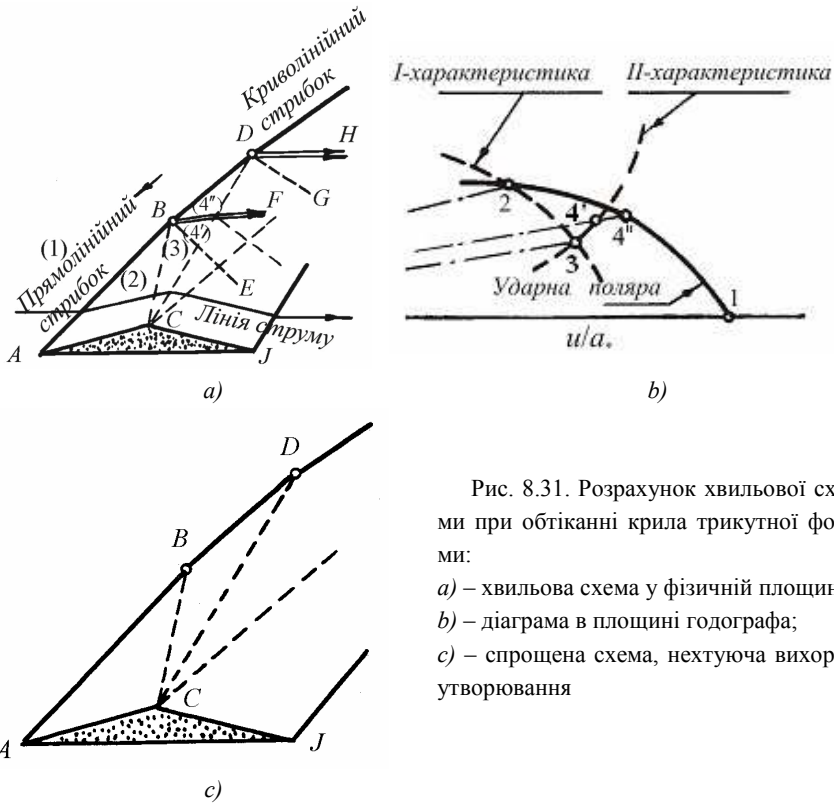


Рис. 8.31. Розрахунок хвильової схеми при обтіканні крила трикутної форми:
 а) – хвильова схема у фізичній площині;
 б) – діаграма в площині годографа;
 в) – спрощена схема, нехтуюча вихорутворювання

Знаючи геометрію профілю і початкове число Маха, за допомогою співвідношень стрибка можемо визначити параметри в зонах (1) і (2). Потім, використовуючи метод розрахунку по полях, можемо розбити центровану хвилю розрідження на кілька зон, першою з

яких є зона (3). Застосовуючи теорію характеристик для розширення між зонами (2) і (3), можна визначити властивості потоку в зоні (3) і напрямок першої хвилі розрідження CB .

Таким чином, точка B , що являє початок процесу взаємодії, може бути розміщена. Тепер обговоримо дві лінії струму безпосередньо вище й нижче B . Внаслідок падіння тиску при переході з (2) в (3) стрибок вище B не буде такої ж інтенсивності як стрибок нижче B ; дві лінії струму будуть зазнавати різних змін ентропії. Для того щоб мати рівні тиски і напрямки потоку в полях $4'$ і $4''$ невелика хвиля розрідження BE повинна бути відбита в точці B . Оскільки швидкості різні в полях $4'$ і $4''$, вихорова лінія BF виходить із точки B . Інтенсивність стрибка між B і D і інтенсивність відбитої хвилі BE визначаються двома одночасними умовами: тиск і напрямки потоку повинні бути однаковими в зонах $4'$ і $4''$, як показано на рис. 8.31,*b*. Процедура розрахунку триває аналогічно. У тому місці, де друга хвиля розрідження CD ударяється об стрибок BD , стрибок знову змінює інтенсивність і напрямок і вихорова завіса DH , і відбита хвиля DG з'являються. Відбита хвиля типу BE взаємодіє із хвилями BC і CD , і ця взаємодія може бути підрахована методом характеристик.

Варто відзначити також, що коли хвиля типу CD перетинає вихорову лінію BF , вона частково проникає крізь неї, змінивши інтенсивність, і відбивається. Це впливає з вимоги, що тиск і напрямок потоку повинні бути однаковими для сусідніх ліній струму, що формують вихорову завісу (або лінію ковзання).

В границі з малим кроком розрахунку стрибок буде прямолінійним від A до B і безупинно криволінійним вище B . Більше того, в границі безперервного рішення немає індивідуальних вихорових ліній типу BF , а ціла область, обмежена лінією струму BF і криволінійним стрибком за B , є вихоровою. Вихорові лінії просто є дуже зручним прийомом крокового рішення, що дозволяє нам безупинно

розподілені вихори перетворити в дискретні розривності для зручності розрахунку.

Метод характеристик ізоеентропної течії не може бути застосований до області, де є вихори, тому що ця область не ізоеентропійна. Однак як наближене рішення, як показує досвід, дає припустимі результати. Власне кажучи, наближений метод нехтує змінами ентропії при переході через різні частини косоного стрибка, і тому вихорові лінії і відбиті хвилі від стрибка не з'являються. Рисунок 8.31,*c* показує спрощену картину такого наближеного рішення. У вихоровій області, де є хвилі нерозривності, ентропію подають як додаткову змінну. У цьому випадку формально може бути застосований метод характеристик.

Стрибки, що перетинають вихорову лінію. Коли стрибок входить в область паралельного потоку зі змінною швидкістю, він переломлюється і піддається частковому відбиттю.

8.7 Приклади двовірних течій, що містять стрибки

Більшість надзвукових течій включають одночасно і стрибки і області хвиль нерозривності. Кілька прикладів будуть нами нижче розглянуті у світлі теорії характеристик і теорії косих стрибків.

Утворення стрибка з хвиль нерозривності. Коли тіло із профілем як *A-B-C-D-E-F* на рис. 8.32,*a*, розміщено в надзвуковому потоці, хвилі стиску генеруються в кожній точці на ввігнутий поверхні.

Ці промені сходяться й остаточно формують початок конверта в точці *G*, у якій косий стрибок стиску починається. Додаткові хвилі стиску, що починаються в *C*, *D* і т.д. досягають первісну хвилю в *H*, *J* і т.д., поглинаються стрибком стиску, підсилюючи останній. Остаточно всі хвилі стиску зливаються в один косий стрибок, що починається в точці *L*.

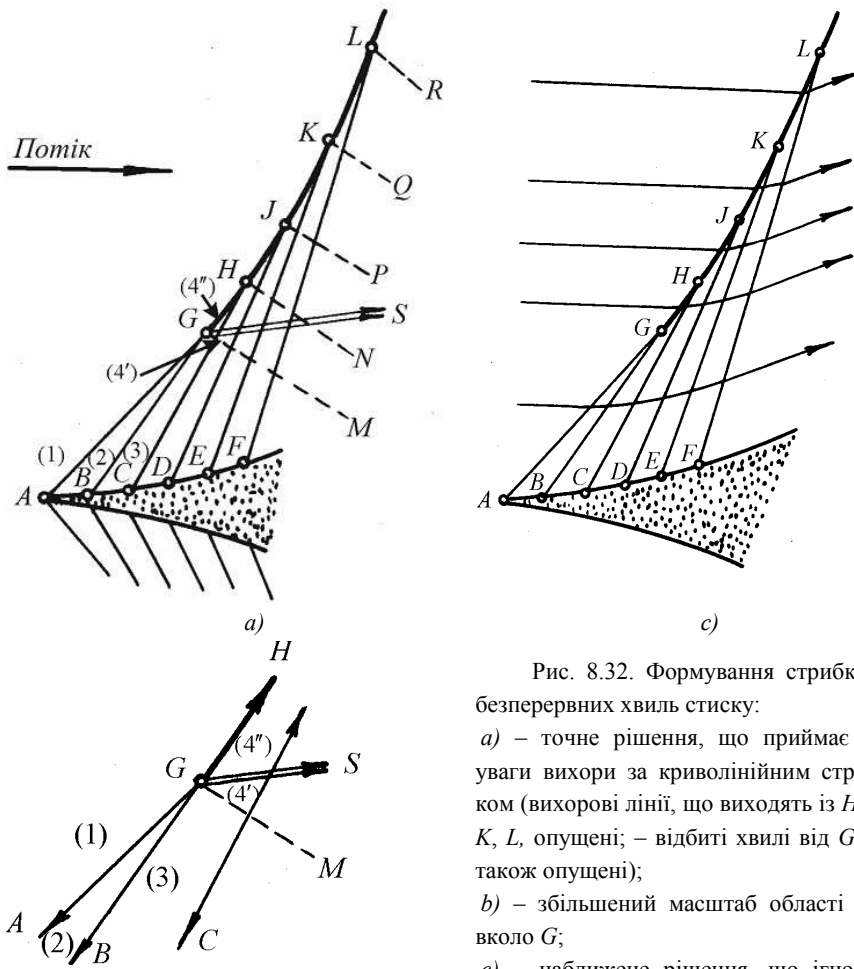


Рис. 8.32. Формування стрибка з безперервних хвиль стиску:
 а) – точне рішення, що приймає до уваги вихори за криволінійним стрибком (вихорові лінії, що виходять із H, J, K, L , опущені; – відбиті хвилі від GS – також опущені);
 б) – збільшений масштаб області навколо G ;
 в) – наближене рішення, що ігнорує вихороутворення

Обговоримо поглинання перших двох хвиль у точці G . Тиск, швидкість і напрямок потоку в полях (2) і (3) визначають за методом характеристик до хвиль AG і BG . Наступна хвиля біля G визначається вимогами, що лінія струму, яка проходить через стрибок безпосередньо вище G , закінчується з таким же тиском і напрямком потоку

(у полі $4''$), як і лінія струму, що проходить через дві хвилі стиску негайно нижче G (поле $4'$). У загальному випадку ці умови можуть бути поєднані, якщо виникає слабка відбита хвиля GM . Більш того, тому що поле $4'$ має більш високий загальмований тиск, ніж поле $4''$, але однаковий статичний тиск, швидкість газу в полі $4'$ буде більше, ніж в $4''$ і вихорова лінія буде розділяти поля $4'$ й $4''$.

Якщо процедуру розрахунку з п.8.6 продовжити, знаходимо: стрибок $GHIJKL$ скривлений; є система слабких відбитих хвиль GM , HN і т.д. і вихорові лінії GS і т.д. покривають область униз за течією GL , роблячи цю область суцільно вихоровою. Далі, кожна хвиля, що перетинає вихорову лінію, зазнає часткового відбиття. Щоб уникнути захаращення рисунка, ці дуже слабкі відбиті хвилі не показані.

Доти, доки стрибок не стає досить інтенсивним, відбиті хвилі GM , HN і т.д. є вкрай слабкими і різниця у швидкості при переході через лінію ковзання є досить малою, що наштовхує на спрощене рішення (рис. 8.32,*c*), в якому змінами ентропії при переході через стрибок нехтуємо. У багатьох практичних випадках спрощене рішення (рис. 8.32,*c*) цілком відповідає вимогам (адекватно). Іноді бажано використати спрощену схему (рис. 8.32,*c*) для більш слабких відрізків стрибка і більш суворе рішення (рис. 8.32,*a*) для більш інтенсивних відрізків стрибка.

Перерозширений струм із сопла. Розглянемо однорідний, паралельний, надзвуковий, двомірний струм, що залишає сопло в перетині 1 при тиску нижче, ніж область вихлопу, у яку сопло розряджається (рис. 8.33,*a*).

Тиск на границях струму повинен дорівнювати тиску області вихлопу. Відповідно виникають хвилі косих стрибків AE й CE і границі струму повертаються на кут δ так, щоб p_2 і p_3 дорівнювали тиску в області вихлопу.

Внаслідок умов симетрії взаємодія хвиль косих стрибків AE і CE еквівалентна відбиттю стрибків від плоскої стінки. Інтенсивність хвиль ED і EB визначаються умовою, що потік має однаковий напрямок у полях (1) і (4).

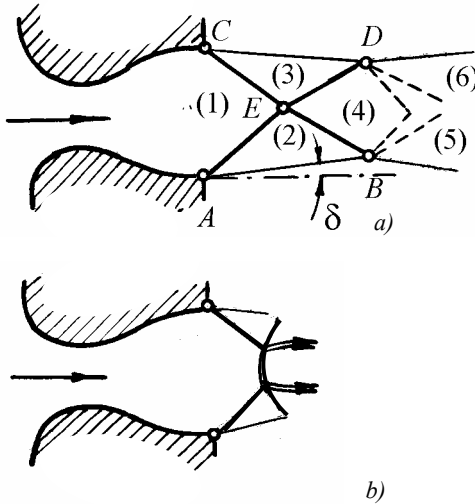


Рис. 8.33. Струм, що залишає сопло перерозширення:
a) – правильне відбиття стрибків;
b) – відбиття Маха стрибків.

Тиск у полі (4) більший, ніж в області вихлопу. Для того щоб границя струму залишалася при постійному тиску, хвилі стрибків ED і EB повинні відбитися як центральні хвилі розрідження Прандтля–Майєра, що беруть свій початок у точках D і B . Інтенсивність хвиль розрідження визначається умовою $p_5 = p_6 = p_2 = p_3$. Поворот границі струму в точках B і D дорівнює приблизно 2δ , як визначає лінеаризована теорія.

У перетині BD маємо однорідний паралельний потік при тиску, більшому, ніж тиск вихлопної області. Починаючи з цього перетину ситуація є аналогічною недорозширеному струму, що залишає сопло. Всі наступні відбиття на границі є або центральними хвилями розрідження, або центральними хвилями стиску, і струмине йде через ряд повторюваних циклічних змін (рис. 7.11, *a*).

Хоча як перерозширений, так і недорозширений струм складаються з повторюваних циклічних змін, перші півциклу перерозширеного струму (область між перетинами AC і BD) ніколи не повторюються.

Якщо тиск вихлопу набагато більший, ніж тиск у площині виходу, правильне відбиття неможливе і спостерігається відбиття типу Маха (рис. 8.33,*b*). Наступна схема течії досить важка для аналізу, тому що складається зі змішаної дозвукової і надзвукової течій і містить вихорові області.

Струм, що залишає турбінне сопло. Вихідна площина турбінного сопла звичайно розміщена під кутом до напрямку течії. Рис. 8.34 показує природу картини течії для такого струму, як сопло звужуючого типу, і недорозширений потік. Тиск входу припустимо дорівнює 10 бар і тиск в області вихлопу $2,7 \text{ бар}$. Отже, звуковий потік існує в горлі при тиску $5,3 \text{ бари}$. Хвильова картина побудована для поворотного кута 2° при проходженні через кожен хвилю, крім стрибка. Збільшення ентропії при проходженні стрибка нехтуємо. Хвилі розширення показані пунктирними лініями, а хвилі стиску - суцільними лініями.

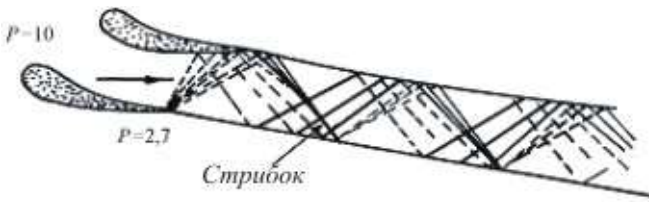


Рис. 8.34 . Струм, що залишає соплові звужуючі решітки турбіни

Важливим результатом, продемонстрованим на рис. 8.34, є те, що усереднений напрямок струму істотно відрізняється від напрямку сопла внаслідок відхилення струму в косому зрізі. Це відхилення зменшує роботу, отриману з робочого колеса.

Питання для самоперевірки

1. Покажіть, що нормальна до фронту косоного стрибка складова швидкості за стрибком – дозвукова.
2. Як обчислити відношення тисків і густин до і після косоного стрибка?
3. Знайдіть відношення тисків, густин, температур і чисел Маха після і до прямого стрибка ущільнення.
4. Сформулюйте правила взаємодії стрибків.
5. Опишіть схему побудови годографа ударної поляри.
6. Визначте зміну ентропії в стрибку.
7. Визначте втрати в стрибках ущільнення.
8. Опишіть побудову «ударної поляри» у тепловій діаграмі.
9. Опишіть і поясніть відбиття й взаємодію стрибків.
10. Дайте фізичний опис криволінійних стрибків.

Задачі

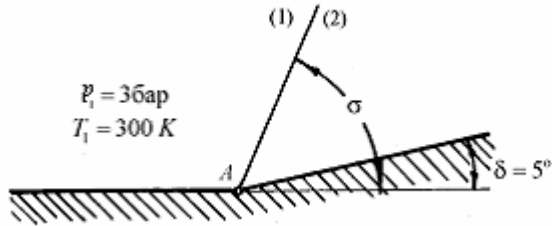
8.1. У трубі при тиску 1 бар і температурі $40\text{ }^\circ\text{C}$ тече однорідний повітряний потік зі швидкістю 120 м/с . Кінець труби раптово закрили клапаном і хвиля стрибка поширюється в протилежному напрямку. Визначити швидкість поширення хвилі, а також тиск і температуру повітря, раптово зупиненого.

8.2. Припустимо, що ударна хвиля, викликана вибухом атомної бомби, поширюється у повітрі за стандартних атмосферних умов зі швидкістю 60000 м/с .

Визначити зміни в тиску ($M\text{Па}$), температурі ($^\circ\text{C}$), загальмованому тиску ($M\text{Па}$), загальмованій температурі ($^\circ\text{C}$) і швидкості (м/с), викликані хвилею стосовно спостерігача, нерухомого щодо незбуреного повітря.

8.3. Отримати формулу для визначення відношення тисків p_{0y}/p_{0x} ізоентропійного гальмування за прямим стрибком ущільнення і перед ним у функції безрозмірної швидкості перед стрибком λ_x .

8.4. Потік повітря обтікає ввігнутий тупий кут зі швидкістю $\lambda_1 = 1,3$. Поворот потоку в точці A здійснюється на кут $\delta = 5^\circ$.



Задача 8.4

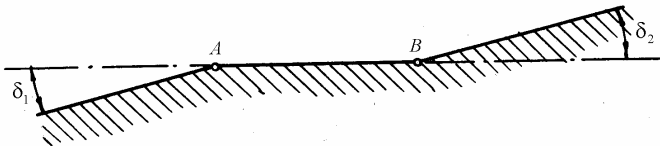
Визначити тиск, густину, температуру й кут нахилу стрибка σ (параметри визначати за стрибком), якщо в незбуреній області $p_1 = 3 \text{ бар}$ й $T_1 = 300 \text{ К}$.

8.5. Потік повітря, рухаючись уздовж пластини зі швидкістю $\lambda_1 = 1,45$, зазнає раптового стиску за точкою A . При цьому тиск підвищується від 2 бар до $p_2 = 4 \text{ бар}$.

Визначити безрозмірну швидкість λ_2 , густину ρ_2 , температуру T_2 й кут δ потоку за точкою A , якщо в незбуреній області $t_1 = 30^\circ\text{C}$.

8.6. Потік повітря рухається уздовж стінки, що має два послідовних повороти в точках A і B , причому $\delta_1 = 10^\circ$, а $\delta_2 = 5^\circ$.

Побудувати хвильову схему, картину течії в площині годографа і визначити параметри потоку (тиск, густину і температуру) у зоні 3, якщо $p_{01} = 5 \text{ бар}$, $t_0 = 50^\circ\text{C}$, $\lambda_1 = 1$.

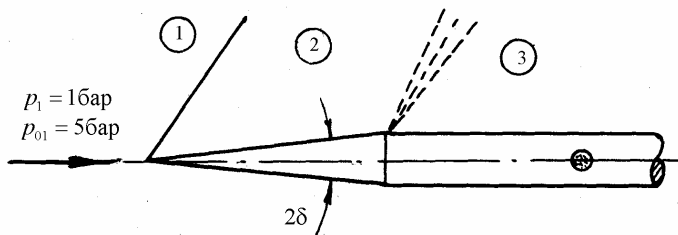


Задача 8.6

8.7. Знайти величину статичного тиску, показувану трубкою Прандтля, якщо дійсний статичний тиск потоку $p_1 = 1 \text{ бар}$, а тиск повного гальмування $p_{01} = 5 \text{ бар}$.

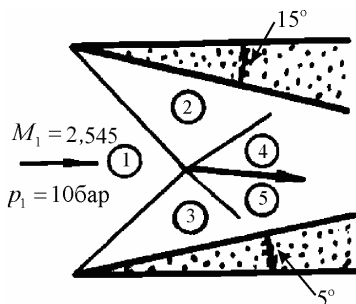
Кут конуса трубки $2\delta = 10^\circ$.

Побудувати картину течії в площині годографа.



Задача 8.7

8.8. Рисунок показує вхід у несиметричний з косими стрибками дифузор. Визначити тиск і напрямок потоку в полях 4 і 5, якщо на вході $M_1 = 2,545$, $p_1 = 10 \text{ бар}$.



Задача 8.8

Побудувати картину течії в площині годографа, у площині “тиск - поворотний кут” і в $i-s$ діаграмі.

8.9. Швидкість потоку повітря перед прямим стрибком ущільнення в два рази більша ніж за ним.

Знайти відношення температур T_2/T_1 за стрибком і перед ним.

8.10. Відомі швидкість $V_1=500 \text{ м/с}$ і температура $T_1=300 \text{ К}$ потоку повітря перед прямим стрибком ущільнення.

Визначити швидкість V_2 і температуру T_2 в потоці за стрибком ущільнення.

8.11. Швидкість потоку газу з показником ізоентропи $k=1,3$ до прямого скачка V_1 в два рази більша, ніж за ним: $V_1=2V_2$. Знайти числа Маха M_1 і M_2 після прямого скачка ущільнення.

8.12. Відомі швидкість $V_1=800$ м/с, тиск $p_1=1 \cdot 10^5$ Па і температура повітря $T_1=300$ К перед прямим стрибком ущільнення.

Знайти швидкість V_2 , тиск p_2 і температуру T_2 за стрибком ущільнення. Знайти параметри гальмування до стрибка (тиск p_{01} , температуру T_{01}) і після нього (тиск p_{02} , температуру T_{02}).

8.13. Ступінь підвищення статичного тиску в прямому стрибку ущільнення $p_2/p_1=2,5$.

Визначити числа Маха M_1 до стрибка і M_2 після стрибка, якщо показник ізоентропи $k=1,4$.

8.14. Виміряні статичний тиск перед прямим стрибком $p_1=0,5 \cdot 10^5$ Па і за ним $p_2=1,2 \cdot 10^5$ Па.

Знайти тиск ізоентропійного гальмування перед прямим стрибком p_{01} і за ним p_{02} . Показник ізоентропи $k=1,4$.

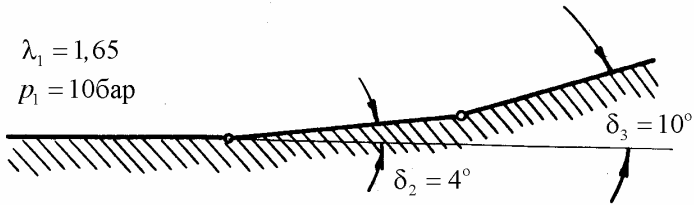
8.15. Ступінь підвищення тиску повітря в стрибку ущільнення $p_2/p_1=5$. У скільки разів при цьому збільшиться густина газу ρ_2/ρ_1 і температура T_2/T_1 ?

Підрахувати відношення $(\rho_2/\rho_1)_{із}$ і $(T_2/T_1)_{із}$ при ізоентропійному стисненні газу при тій же величині p_2/p_1 .

8.16. В надзвуковому повітряному потоці, для якого $\lambda_1=1,5$, статичний тиск $p_1=1 \cdot 10^5$ Па, повний тиск вимірюють за допомогою зонда.

Обчислити тиск p_{02} , який покаже манометр, приєднаний до зонда повного тиску. Знайти також дійсний тиск p_{01} ізоентропійного гальмування в потоці.

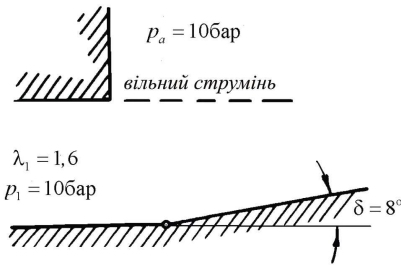
8.17. Побудувати хвильову схему, картину течії в площині годографа і в i -s діаграмі й визначити параметри потоку в областях 4 і 5.



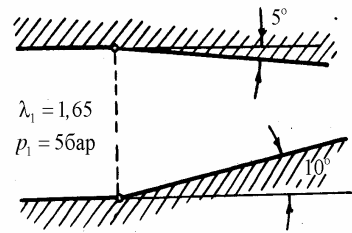
Задача 8.17

8.18. Побудувати хвильову схему, картину течії в площині годографа, i - s діаграмі й визначити параметри потоку в областях 2 і 3.

8.19. Побудувати хвильову схему, картину течії в площині годографа, i - s діаграмі й визначити параметри потоку в областях 4 і 5 униз по потоку.



Задача 8.18

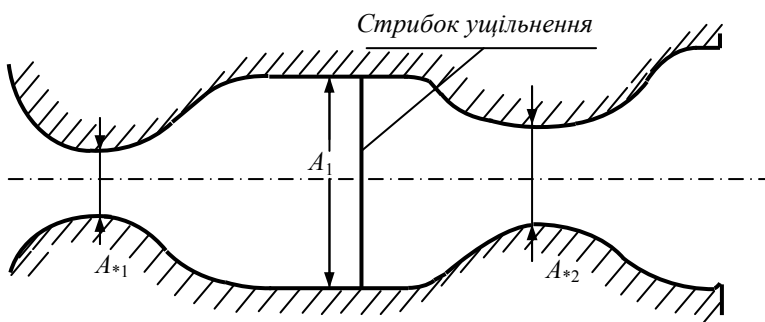


Задача 8.19

8.20. Отримати формулу Релея для виміру статичного тиску в надзвуковому

поточі за допомогою трубки Піто.
$$\frac{P_{0y}}{P_x} = f(M_x).$$

8.21. Повітря тече послідовно через два сопла Лаваля, що розташовані одне за одним. Для першого сопла відомо відношення площі виходу до мінімальної площі $A_1 / A_* = 2,5$. В деякому режимі роботи в мінімальних перетинах як першого, так і другого сопла спостерігається критична швидкість, причому між першим та другим соплами знаходиться прямий стрибок ущільнення. Знайти відношення площин A_{*2} / A_{*1} мінімальних перетинів другого і першого сопел.



Зад. 8.21

РОЗДІЛ 9. ПРИГРАНИЧНИЙ ШАР

Всі аналітичні викладки, наведені раніше, були засновані у гіпотезах ідеальної течії без в'язкості й теплопередачі. Життєвість цих гіпотез впливає з передумови існування приграничного шару, заснованої на тому, що доданки, обумовлені в'язкістю, у рівняннях кількості руху і енергії й доданки, обумовлені теплообміном, у рівнянні енергії, є нехтуюче малими в порівнянні з іншими доданками в цих рівняннях за винятком вузьких областей біля твердих границь, де швидкісний і температурний градієнти настільки великі, що ними не можна нехтувати.

Або, допускаючи, що число Рейнольдса набагато більше одиниці, ефектами в'язкості й теплообміну можна обмежитися в тонких приграничних шарах біля твердих поверхонь (або на внутрішніх поверхнях між потоками, які рухаються з різними швидкостями) і можна ними нехтувати в інших областях. Звернемося до розгляду фізичної картини обтікання. Припустимо, що нерухоме тіло, наприклад профіль крила, обтікається потоком повітря (рис. 9.1).

Безпосередні спостереження показують, що в тонкому шарі поблизу поверхні тіла відбувається різке наростання швидкості від

значення $V = 0$ на поверхні тіла до величини близько швидкості потоку, що набігає. Такий шар повітря, що прилягає до поверхні обтічного тіла і являючий собою область великих значень градієнтів швидкості по нормалі до тіла, зветься *приграничним шаром*. Частки приграничного шару, пройшовши уздовж поверхні обтічного тіла, несуться потоком в область, що перебуває за тілом, зберігаючи на собі сліди перебування в приграничному шарі. Це виражається, зокрема, у тому, що швидкості цих часток, як правило, менше швидкості в навколишній середовищі. Загальмовані частки утворюють за тілом область, називану *аеродинамічним слідом*.

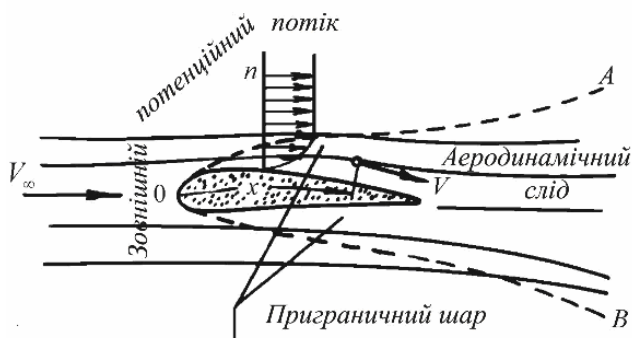


Рис. 9.1. Схема приграничного шару

Як показують експериментальні й теоретичні дослідження, ця область може бути заповнена окремими вихорами, що утворюються при обтіканні тіла. У цьому випадку область за тілом являє собою так званий *вихоровий слід*.

Формула Ньютона для сили внутрішнього тертя

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n} = \rho \nu \frac{\partial V}{\partial n}$$

показує, що усередині приграничного шару і сліду, де градієнти швидкості значні, величиною τ – силою внутрішнього тертя – зневажати не можна, і рідину, що рухається усередині приграничного

шару, варто вважати в'язкою навіть при малому значенні кінематичного коефіцієнта в'язкості ν .

Поза приграничним шаром і слідом за тілом, де градієнти швидкості малі, силою внутрішнього тертя можна знехтувати, тобто вважати рідину ідеальною, а потік рідини безвихоровим (потенціальним).

Таким чином, рідину поза приграничним шаром і слідом можна розглядати як ідеальну і її рух вивчати за допомогою рівнянь Ейлера. Усередині ж приграничного шару рідину варто розглядати як в'язку й вивчати її рух за допомогою диференціальних рівнянь руху в'язкої рідини – рівнянь Нав'є–Стокса. Нижче покажемо, що завдяки малій товщині приграничного шару диференціальні рівняння руху в'язкої рідини значно спрощуються.

9.1. Диференціальні рівняння приграничного шару

Припустимо, що плоский потік рідини рухається уздовж твердої границі (контур поверхні тіла), яку для простоти будемо вважати прямолінійною й спрямованою уздовж осі x (рис. 9.2).

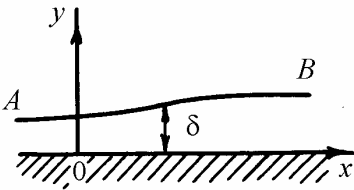


Рис. 9.2. До виводу диференціальних рівнянь приграничного шару

Уздовж цієї границі утвориться приграничний шар AB , товщину якого позначимо через δ . Звично під товщиною приграничного шару δ мають на увазі таку відстань від контура тіла, на якій швидкість буде відрізнятися від швидкості потенціального потоку на 1%.

Оскільки рідина усередині приграничного шару є в'язкою, то для вивчення її руху використаємо диференціальні рівняння руху

в'язкої рідини (рівняння Нав'є–Стокса), які для плоского потоку нестисливої рідини мають вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right);$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right).$$

Нехтуючи масовими силами X і Y і приєднуючи до рівнянь руху рівняння нерозривності, одержимо наступну систему диференціальних рівнянь для в'язкої нестисливої рідини:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

Величина вхідної в ці рівняння координати y обмежена в приграничному шарі нерівністю $0 \leq y \leq \delta$.

Це означає, що величину y можна вважати малою величиною порядку δ ($y \sim \delta$).

Відзначимо, що малість δ варто розуміти у сенсі малого відношення δ/l , де l – характерний розмір обтічного тіла (наприклад, його довжина).

Приймаючи це до уваги, оцінимо порядок членів, що входять у рівняння (9.1).

Оскільки на стінці обтічного тіла $u=0$, а на зовнішній границі шару u має порядок V_∞ , де V_∞ – характерна швидкість розглядаючої течії (наприклад, швидкість на нескінченності перед тілом), то звідси виходить, що при зміні y від 0 до δ збільшення ∂u має порядок V_∞ , тобто $\partial u \sim V_\infty$, збільшення ∂y має порядок δ , тобто $\partial y \sim \delta$, а тому

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{V_\infty}{\delta}.$$

Аналогічно можна показати, що усередині приграничного шару

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{V_\infty}{\delta^2}.$$

Щоб оцінити порядок $\partial u / \partial x$, відзначимо, що при переміщенні уздовж обтічного контура на відрізок порядку характерної довжини l швидкість u може змінюватися на величину порядку V_∞ (наприклад, від 0 до V_∞), тобто й у цьому випадку $\partial u \sim V_\infty$. Оскільки при цьому $\partial x \sim l$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{V_\infty}{l}.$$

Неважко переконатися, що

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{V_\infty}{l^2}.$$

Використовуючи рівняння нерозривності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y},$$

приходимо до висновку, що $\partial v / \partial y$ має той же порядок, що і $\partial u / \partial x$, тобто

$$\frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{V_\infty}{l}.$$

Оскільки $v = \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y} dy$, то звідси виходить, що $v \sim \int_0^y \frac{V_\infty}{l} dy \sim \frac{V_\infty \delta}{l}$.

Маючи на увазі, що на поверхні обтічного тіла $v=0$ і знаючи порядок v у точках усередині шару, легко визначити порядок похідних

$$\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Очевидно, що

$$\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{V_\infty \delta}{l^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \frac{V_\infty \delta}{l^3}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{V_\infty}{l \delta}.$$

Визначивши порядок швидкостей і їх похідних, що входять у рівняння (9.1), перепишемо перше з рівнянь (9.1), підписавши під кожним членом його порядок:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right);$$

$$\frac{V_\infty^2}{l} \quad \frac{V_\infty^2}{l} \quad \frac{V_\infty}{l^2} \quad \frac{V_\infty}{\delta^2}.$$

Ясно, що в цьому рівнянні можна відкинути член $\partial^2 u / \partial x^2$, як малий у порівнянні зі членом $\partial^2 u / \partial y^2$, тому що відношення $V_\infty / l^2 : V_\infty / \delta^2$ дорівнює $(\delta / l)^2$, тобто квадрату малої величини.

Тоді перше рівняння системи (9.1) прийме вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$\frac{V_{\infty}^2}{l} \quad \frac{V_{\infty}^2}{l} \quad \frac{\nu V_{\infty}}{\delta^2}.$$

Припустимо, що усередині приграничного шару сили в'язкості й сили інерції мають однаковий порядок. Тоді відношення

$$\frac{V_{\infty}^2}{l} \cdot \frac{\nu V_{\infty}}{\delta^2} = \frac{V_{\infty} \delta^2}{\nu l} = \frac{V_{\infty} l}{\nu} \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 = \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 Re,$$

де $Re = \frac{V_{\infty} l}{\nu}$ (число Рейнольдса), повинне мати порядок рівний одиниці

$$\left(\frac{\delta}{l} \right)^2 \cdot Re \sim 1.$$

Звідси виходить відношення

$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}},$$

тобто *порядок товщини приграничного шару, що утворюється при течії з великими числами Re , дорівнює l/\sqrt{Re} , або $\sqrt{l\nu/V_{\infty}}$.*

У перше рівняння (9.1) входять ще величини $\frac{\partial u}{\partial t}$ і $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$.

Будемо припускати, що зміна течії з часом відбувається настільки плавно, що порядок $\frac{\partial u}{\partial t}$ не перевершує порядку $\frac{V_{\infty}^2}{l}$, тобто не перевершує порядку основних інерційних членів. Тоді й член $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$

повинен мати той же порядок $\frac{V_{\infty}^2}{l}$.

Перейдемо тепер до другого рівняння (9.1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right);$$

$$\frac{V_\infty^2 \delta}{l^2} \quad \frac{V_\infty^2 \delta}{l^2} \quad \frac{V_\infty \delta}{l^3} \quad \frac{V_\infty}{l \delta}.$$

Нехтуючи членом $\partial^2 v / \partial x^2$, оскільки він малий у порівнянні з $\partial^2 v / \partial y^2$, перепишемо це рівняння у вигляді

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2};$$

$$\frac{V_\infty^2 \delta}{l^2} \quad \frac{V_\infty^2 \delta}{l^2} \quad \frac{\nu V_\infty}{l \delta}.$$

Оскільки за зробленим вище припущенням сили в'язкості мають той же порядок, що і сили інерції, й вважаючи аналогічно попередньому, що $\frac{\partial v}{\partial t}$ має порядок основних інерційних членів, тобто

$$\frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{V_\infty^2 \delta}{l^2}, \text{ приходимо до висновку, що } \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \text{ також повинно мати}$$

порядок $\frac{V_\infty^2 \delta}{l^2}$. Вище було встановлено, що $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ має порядок $\frac{V_\infty}{l}$.

Звідси виходить, що відношення цих градієнтів має порядок $\frac{\delta}{l}$, тоб-

то градієнт тиску $\frac{\partial p}{\partial y}$ малий у порівнянні з градієнтом $\frac{\partial p}{\partial x}$. Тому з

достатнім ступенем точності можна замінити друге рівняння системи (9.1) рівнянням

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (9.2)$$

Таким чином, тиск усередині приграничного шару не змінюється уздовж нормалі до контура тіла і дорівнює тиску на зовнішній границі шару в місці, що розглядається.

Цей результат має велике практичне значення і підтверджується хорошим збігом величини тиску, підрахованої за теорією потенціального потоку, з величиною тиску, визначеною з експерименту. Підраховуючи розподіл тиску теоретично на основі потенціальної течії, одержуємо його значення лише на верхній границі приграничного шару, оскільки усередині шару течія не потенціальна. Визначаючи тиск експериментальним шляхом (шляхом дренажування), знаходимо розподіл тиску на самій поверхні тіла. Збіг закону розподілу тиску, визначеного цими двома способами, і підтверджує, що тиск у приграничному шарі по нормалі до тіла не змінюється.

Це полегшує визначення розподілу тиску усередині приграничного шару. Дійсно, з рівняння (9.2) виходить, що розподіл тиску уздовж шару збігається з розподілом тиску на його границі. Останнє ж можна знайти, розв'язуючи задачу про потенціальне обтікання даного тіла. Можна також визначити розподіл тиску уздовж приграничного шару експериментально (за допомогою дренажу).

Таким чином, із трьох рівнянь системи (9.1) залишаються два рівняння з двома невідомими u і v , тому що тиск $p(x, t)$ може бути заздалегідь визначений. Ця система диференціальних рівнянь приграничного шару для плоского несталого руху має такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (9.3)$$

Для плоского сталого руху, відкидаючи в першому рівнянні член

$\frac{\partial u}{\partial t}$ і заміняючи часткову похідну $\frac{\partial p}{\partial x}$ на повну $\frac{dp}{dx}$, оскільки в цьому випадку тиск p буде функцією тільки координати x , одержимо наступну систему диференціальних рівнянь приграничного шару:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (9.4)$$

Система рівнянь (9.4) інтегрується при наступних граничних умовах:

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0 \quad u = v = 0; \\ \text{при } y = \delta \quad u = V(x), \end{aligned}$$

де $V(x)$ – розподіл швидкості на верхній межі приграничного шару.

Крім того у випадку несталого руху потрібно враховувати початкові умови: при $t = 0$ u і v повинні обертатися в задані функції від x і y .

Диференціальні рівняння (9.3) і (9.4) приграничного шару отримані в припущенні, що границя твердого тіла плоска. Виявляється, що ці рівняння з достатньою точністю справедливі й для криволінійної границі. У цьому випадку треба вважати вісь абсцис скривленою за контуром тіла і відраховувати абсцису x по дузі контура тіла від якої-небудь точки, прийнятої за початок координат, а ординату y – по нормалі до поверхні тіла.

Слід зазначити, що диференціальні рівняння приграничного шару у формі (9.3) і (9.4) придатні лише для вивчення ламінарного руху в приграничному шарі. Для вивчення турбулентного руху в приграничному шарі вони незастосовні, тому що при турбулентній

течії суворо задати початкові й граничні умови неможливо. До цього варто додати, що найменші відхилення від поставлених початкових граничних умов можуть привести до значних змін у розв'язанні рівнянь.

Диференціальні рівняння для осередненого турбулентного руху можуть бути отримані, наприклад, з рівнянь (9.3) шляхом їх осереднення.

Рішення диференціальних рівнянь руху ламінарного приграничного шару (9.3) і (9.4), незважаючи на те, що вони простіші загальних рівнянь руху в'язкої рідини, все-таки досить складне навіть для найпростіших контурів.

У зв'язку з цим має велике значення наближений метод рішення задач приграничного шару, заснований на розгляді так званого інтегрального співвідношення приграничного шару, що є математичним вираженням теореми про кількість руху.

9.2. Інтегральне співвідношення приграничного шару

Виділимо в приграничному шарі нескінченно малу площадку $ABCD$ (рис. 9.3), обмежену елементом BD твердої границі, що приймемо за вісь x , елементом AC верхньої межі приграничного шару й прямими AB і CD , що відстоять одна від одної на відстані dx .

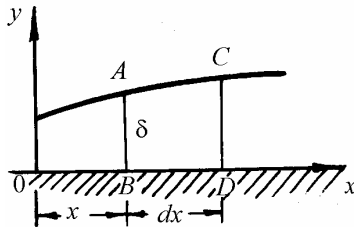


Рис. 9.3. Приграничний шар

На рис. 9.3 δ являє товщину приграничного шару при місцевому

значенні x .

Визначимо контрольний об'єм, як показано на рис. 9.4,*a* пунктиром, де верхня його межа паралельна обтічній твердій границі й перебуває поза границею приграничного шару.

Через ділянку AB (рис. 9.3) за одиницю часу буде втікати кількість рідини, що дорівнює $\int_0^{\delta} \rho u dy$ (рис. 9.4,*b*). На відстані dx через ділянку DC , що дорівнює $\delta + d\delta$, буде втікати кількість рідини рівна втікаючій через ділянку AB ($\int_0^{\delta} \rho u dy$) плюс зміна кількості рідини уздовж осі x , що дорівнює

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx, \text{ тобто } \int_0^{\delta} \rho u dy + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx.$$

Через умови нерозривності для нестисливої рідини через ділянку $d\delta$ повинна втікати кількість рідини, що дорівнює $\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx$ (рис. 9.4,*b*).

Зміна кількості руху рідини, що проходить через контрольний об'єм за одиницю часу, дорівнює (рис. 9.4,*d*)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u^2 dy \right] dx - V \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx. \quad (9.5)$$

Застосовуючи до виділеного пунктиром на рис. 9.4 контрольного об'єму теорему про кількість руху, одержуємо, що діючі на контрольну поверхню сили (рис. 9.4,*c*) дорівнюють зміні кількості руху рідини, що проходить через контрольний об'єм

$$\sum F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx(\delta + d\delta) - \tau_0 dx = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u^2 dy \right] dx - V \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx$$

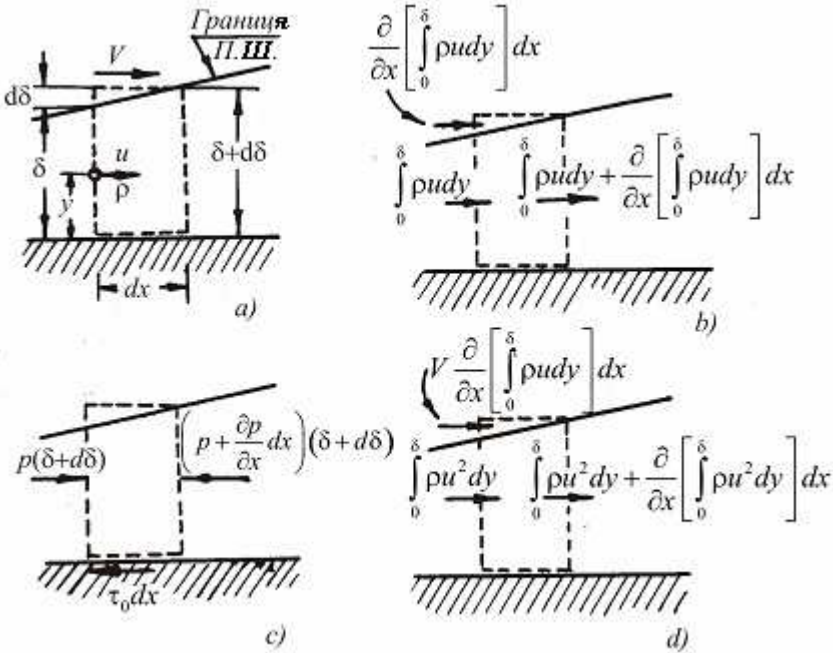


Рис. 9.4. До виведення інтегрального співвідношення приграничного шару:
 а) – визначення контрольного об'єму; б) – течія масової кількості рідини;
 с) – сили, що діють на контрольну поверхню; д) – кількість руху

В разі несталого руху згідно з рівнянням зміни кількості руху (2.10) в правій частині виразу діючих на контрольну поверхню сил в проекції на вісь x з'являється додаткова складова

$$\int_{\text{к.об.}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dV = \int_{\text{к.об.}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dx dy.$$

Нехтуючи величиною другого порядку малості $\frac{\partial p}{\partial x} dx d\delta$ і ско-

рочуючи на dx , одержуємо шукане інтегральне співвідношення граничного шару для випадку плоского сталого руху.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - V \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u dy = -\delta \frac{\partial p}{\partial x} - \tau_0. \quad (9.6)$$

Заміняючи часткові похідні повними, одержимо

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - V \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u dy = -\delta \frac{dp}{dx} - \tau_0. \quad (9.7)$$

Слід зазначити, що співвідношення (9.6) і (9.7) є більш загальними, ніж системи (9.3) і (9.4) диференціальних рівнянь, і придатні для вивчення не тільки ламінарного, але й турбулентного (осередненого) руху рідини усередині приграничного шару, тому що при їх доведенні не робилося ніяких припущень щодо природи дотичного напруження τ_0 .

Вхідні в інтегральне співвідношення приграничного шару величини V , $\partial p / \partial x$ і густину ρ можна розглядати як відомі величини, і тоді невідомими будуть тільки u , δ і τ_0 .

Дійсно, швидкість V потенціального потоку поза приграничним шаром можна знайти шляхом розв'язання задачі про потенціальне обтікання, або за допомогою експерименту, а за відомим V легко визначити й значення $\partial p / \partial x$. Покажемо це на прикладі сталого руху.

Оскільки рух поза приграничним шаром потенціальний, то для верхньої межі приграничного шару можна написати рівняння Бернуллі

$$p + \rho \frac{V^2}{2} = const.$$

Диференціюючи за x , знаходимо

$$\frac{dp}{dx} + \rho V \frac{dV}{dx} = 0, \quad \text{звідки} \quad \frac{dp}{dx} = -\rho V \frac{dV}{dx},$$

тобто одержуємо вираз dp/dx через відому функцію $V(x)$.

Таким чином, величини V , dp/dx і густину ρ дійсно можна вважати відомими. Оскільки рівняння (9.7) входять три невідомі величини – u , δ і τ_0 , то для їх визначення необхідно мати ще два додаткових співвідношення, що зв'язують ці невідомі величини. Як такі співвідношення звичайно приймають закон розподілу швидкостей по висоті приграничного шару й залежність дотичного напруження від товщини шару.

Часто замість того, щоб шукати функцію розподілу швидкості $u = f(y)$, задають вид цієї функції. Якщо характер розподілу швидкості $u = f(y)$ усередині приграничного шару обумовлений видом функції $u = f(y)$, заданий правильно, то вийде гарне наближення як для залежності $\delta = \delta(x)$, так і для коефіцієнта опору тертя.

9.3. Розрахунок ламінарного, турбулентного і змішаного приграничного шару для плоскої пластинки

Розрахунок ламінарного приграничного шару для плоскої пластинки. Як приклад застосування інтегрального співвідношення приграничного шару до рішення практичних задач розглянемо задачу про обтікання пластинки плоским сталим потоком нестисливої рідини.

Рішення задачі про обтікання плоскої пластинки відіграє в теорії опору тертя велику роль. Пластинка, поставлена уздовж потоку, є

найпростішим зручнообтічним тілом, опір якого залежить винятково від дотичних напружень.

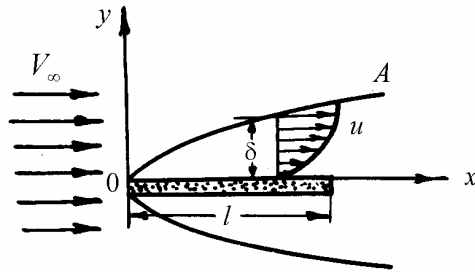


Рис. 9.5. Ламінарний приграничний шар на плоскій пластині

Знайдені для пластинки залежність $\delta = \delta(x)$ і величина коефіцієнта опору тертя можуть бути використані при наближених розрахунках обтікання інших зручнообтічних тіл, наприклад тонких профілів.

Припустимо, що плоский потік, який тече зі швидкістю $V_\infty = const$ обтікає пластинку довжиною l (рис. 9.5). Зверху і знизу пластинки буде утворюватися приграничний шар, товщина якого δ буде функцією координати x , відлічуваної від передньої кромки 0 пластинки.

Завдання зводиться до наступного. Знаючи *кінематичний* коефіцієнт в'язкості ν рідини, швидкість набігаючого потоку V_∞ і довжину l пластинки, визначити:

1) закон зміни товщини приграничного шару, тобто функцію

$$\delta = \delta(x);$$

2) силу опору тертя F_{mp} .

Для розв'язання задачі звернемося до інтегрального співвідношення приграничного шару (9.7) для сталої течії

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - V \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u dy = -\delta \frac{dp}{dx} - \tau_0.$$

Покажемо, що в нашому випадку усередині приграничного шару $dp/dx = 0$. Вище було встановлено, що на верхній границі приграничного шару

$$\frac{dp}{dx} = -\rho V \frac{dV}{dx}.$$

Оскільки в нашому випадку $V = V_{\infty} = const$, то $dV/dx = 0$ й $dp/dx = 0$ отже $p = const$ на верхній межі шару. Але тиск p усередині приграничного шару по нормалі до поверхні тіла не змінюється. Отже, $p = const$ і $dp/dx = 0$ й усередині приграничного шару. Таким чином, інтегральне співвідношення (9.7) приймає вигляд

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - V_{\infty} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u dy = -\tau_0. \quad (9.8)$$

Для того щоб обчислити товщину приграничного шару і силу опору, прикладеної до пластинки, потрібно ще два додаткових співвідношення, у якості яких можна взяти:

- 1) закон розподілу швидкості u по товщині шару;
- 2) рівняння, що зв'язує дотичне напруження на поверхні тіла τ_0 з товщиною шару δ .

Приступаючи до складання першого додаткового рівняння – закону зміни швидкості u по висоті шару y , зробимо так. Замість того щоб шукати дійсний закон розподілу швидкості $u = u(y)$, задамо вид функції $u = u(y)$. Покладемо, що u виражається через y наступним багаточленом третього ступеня:

$$u = a + by + cy^2 + dy^3, \quad (9.9)$$

де a , b , c і d – невідомі поки коефіцієнти.

Для їх визначення звернемося до граничних умов. Граничні умови будуть двох типів: кінематичні, що накладають на швидкості на межах приграничного шару, і динамічні, які накладають на сили внутрішнього тертя. Складемо ці граничні умови.

1. Оскільки на нижній границі приграничного шару швидкість дорівнює нулю, то

$$(u)_{y=0} = 0.$$

2. На верхній межі шару швидкість u стає рівною швидкості V_∞ потенціального потоку. Отже,

$$(u)_{y=\delta} = V_\infty.$$

3. На верхній межі приграничного шару сила внутрішнього тертя $\tau = \mu \partial u / \partial y$ звертається в нуль. Тому

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} = 0.$$

4. Для визначення четвертої граничної умови звернемося до диференціальних рівнянь приграничного шару.

З першого рівняння системи (9.4) виходить, що на нижній границі приграничного шару

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

(тому що при $y = 0$ швидкості $u = v = 0$). Але оскільки у нашому випадку $dp/dx = 0$, то, отже,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0.$$

Зазначені чотири граничних умови дозволяють визначити величини чотирьох коефіцієнтів a , b , c і d

$$a = 0, \quad b = \frac{3 V_\infty}{2 \delta}, \quad c = 0, \quad d = -\frac{V_\infty}{2 \delta^3}.$$

З першої граничної умови при $y = 0$, $u = 0$ одержуємо $a = 0$.

Із другої граничної умови

$$V_\infty = b\delta + c\delta^2 + d\delta^3. \quad (9.10)$$

Із третьої граничної умови, оскільки $\frac{\partial u}{\partial y} = b + 2cy + 3dy^2$, то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} = 0 = b + 2c\delta + 3d\delta^2. \quad (9.11)$$

Із четвертої граничної умови, оскільки $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2c + 6dy$, то

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0 = 2c, \quad c = 0.$$

З (9.11) маємо $b = -3d\delta^2$, підставляючи в (9.10), одержуємо

$$V_\infty = -3d\delta^3 + d\delta^3 = -2d\delta^3.$$

Звідси

$$d = -\frac{V_\infty}{2\delta^3}, \quad b = \frac{3 V_\infty}{2 \delta}.$$

Отже, закон розподілу швидкості $u = u(y)$ приймає наступний

вигляд

$$u = \frac{V_\infty}{2\delta} \left(3y - \frac{y^3}{\delta^2} \right). \quad (9.12)$$

Таким чином, перше необхідне співвідношення знайдено. Друге додаткове співвідношення знайдемо, використовуючи закон Ньютона для внутрішнього тертя (при ламінарній течії)

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Оскільки в цьому випадку за формулою (9.12)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{V_\infty}{2\delta} \left(3 - \frac{3y^2}{\delta^2} \right),$$

то

$$\tau_0 = \frac{3}{2} \mu \frac{V_\infty}{\delta}. \quad (9.13)$$

Після підстановки в інтегральне співвідношення (9.8) знайдених виразів для швидкості u й дотичного напруження τ_0 одержимо диференціальне рівняння, що містить одну невідому величину δ , розв'язуючи яке знайдемо $\delta = \delta(x)$.

Дійсно, за допомогою виразу (9.12) для швидкості u легко обчислити інтеграли, що входять в інтегральне співвідношення (9.8):

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \rho u dy &= \int_0^\delta \rho \frac{V_\infty}{2\delta} \left(3y - \frac{y^3}{\delta^2} \right) dy = \frac{3}{2} \rho \frac{V_\infty}{\delta} \int_0^\delta y dy - \\ &- \rho \frac{V_\infty}{2\delta^3} \int_0^\delta y^3 dy = \frac{3}{2} \rho \frac{V_\infty}{\delta} \frac{\delta^2}{2} - \rho \frac{V_\infty}{2\delta^3} \frac{\delta^4}{4} = \frac{5}{8} \rho V_\infty \delta; \end{aligned}$$

$$\int_0^{\delta} \rho u^2 dy = \rho \frac{V_{\infty}^2}{4\delta^2} \int_0^{\delta} \left(9y^2 - 6\frac{y^4}{\delta^2} + \frac{y^6}{\delta^4} \right) dy =$$

$$= \rho \frac{V_{\infty}^2}{4\delta^2} \left(3\delta^3 - \frac{6}{5}\delta^3 + \frac{1}{7}\delta^3 \right) = \frac{17}{35} \rho V_{\infty}^2 \delta.$$

Підставляючи ці значення інтегралів у співвідношення (9.8), одержимо диференціальне рівняння

$$\frac{17}{35} \rho V_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx} - \frac{5}{8} \rho V_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx} = -\frac{3}{2} \mu \frac{V_{\infty}}{\delta},$$

яке після спрощень прийме наступний вигляд:

$$\frac{13}{140} \rho V_{\infty} \delta d\delta = \mu dx.$$

Інтегруючи, знаходимо

$$\frac{13}{280} \rho V_{\infty} \delta^2 = \mu x + C.$$

Оскільки при $x = 0$ товщина $\delta = 0$, то, очевидно, $C = 0$. Отже,

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13} \frac{\mu x}{\rho V_{\infty}}},$$

або

$$\delta = 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{V_{\infty}}}. \quad (9.14)$$

З формули (9.14) виходить, що зовнішня межа приграничного шару являє собою параболу другого ступеня; товщина δ приграничного шару росте зі збільшенням x і убуває з ростом швидкості набігаючого потоку V_{∞} .

Більш точні методи дають наступну залежність для закону зміни δ

$$\delta = 5,8 \sqrt{\frac{\nu x}{V_\infty}}.$$

Як бачимо, задавання закону зміни швидкості у вигляді параболи третього ступеня призводить до порівняно невеликої помилки.

Визначимо силу опору тертя F_{mp} , що діє на одну сторону пластинки шириною b .

На одиницю поверхні пластинки діє сила

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \mu \frac{V_\infty}{\delta}.$$

Отже, при ламінарній течії в приграничному шарі дотичні напруження пропорційні $V_\infty^{1,5}$, у чому легко переконатися, підставивши у формулу для τ_0 значення δ за формулою (9.14).

На елементарну площадку $dS = bdx$ буде діяти сила

$$\tau_0 dS = \tau_0 bdx,$$

звідки повна сила тертя, що діє на одну сторону пластинки,

$$F_{mp} = \int_0^l \tau_0 bdx,$$

або

$$F_{mp} = \int_0^l \mu \frac{3}{2} \frac{V_\infty}{\delta} bdx.$$

Підставляючи значення δ за формулою (9.14), знаходимо,

$$F_{mp} = \frac{3b}{4,64 \cdot 2} \sqrt{\mu \rho} V_\infty^3 \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

або

$$F_{mp} = \frac{1,3b}{2} \sqrt{\mu \rho V_{\infty}^3 l}. \quad (9.15)$$

Помножуючи чисельник і знаменник на ρV_{∞}^2 , будемо мати

$$F_{mp} = 1,3 \sqrt{\frac{\nu}{V_{\infty} l}} \frac{\rho V_{\infty}^2 b l}{2},$$

або

$$F_{mp} = \frac{1,3}{\sqrt{Re}} \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} S,$$

де $Re = \frac{V_{\infty} l}{\nu}$; площа $S = b \cdot l$.

Коефіцієнт опору плоскої пластини

$$C_{x\ mp} = \frac{F_{mp}}{\frac{\rho V_{\infty}^2}{2} S}$$

і, отже, для випадку ламінарного приграничного шару

$$C_{x\ mp} = \frac{1,3}{\sqrt{Re}}. \quad (9.16)$$

Таким чином, коефіцієнт опору пластинки залежить від числа Re і змінюється обернено пропорційно кореню квадратному з цього числа.

Вище розглянуто практичне використання інтегрального співвідношення (9.7) для випадку ламінарного приграничного шару.

Перейдемо до розгляду турбулентного приграничного шару.

Розрахунок турбулентного приграничного шару для плоскої пластинки. У випадку турбулентної течії в приграничному шарі викладений у п.9.2 спосіб знаходження двох додаткових рівнянь до основного інтегрального співвідношення непридатний, тому що він

заснований на використанні рівнянь (9.4), які, як вже відзначали, незастосовні до турбулентного приграничного шару. Тому у випадку турбулентної течії в приграничному шарі два додаткових рівняння необхідно знаходити іншим способом.

Оскільки закони турбулентного руху найбільш повно досліджені для руху рідини по трубах, то як необхідні два додаткових рівняння до інтегрального співвідношення можна використати результати теорії течії рідини по трубах.

Зводячи гіпотезу про тотожність законів розподілу швидкості по товщині приграничного шару плоскої пластинки і по радіусу круглої циліндричної труби, можна прийняти, що зміна швидкості усередині приграничного шару пластинки визначається залежністю

$$u = V_{\infty} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}}, \quad (9.17)$$

іменованою законом однієї сьомої.

Це буде першим додатковим рівнянням до інтегрального співвідношення.

Другим додатковим рівнянням буде залежність між величиною дотичного напруження τ_0 , товщиною приграничного шару δ і швидкістю V_{∞} набігаючого потоку.

Цю залежність, продовжуючи аналогію між турбулентною течією рідини по трубі й уздовж плоскої пластинки, можна прийняти у вигляді

$$\tau_0 = 0,0225\rho V_{\infty}^2 \left(\frac{v}{V_{\infty}\delta} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (9.18)$$

Установивши два додаткових необхідних рівняння, звернемося до інтегрального співвідношення (9.8)

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - V_{\infty} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u dy = -\tau_0 .$$

Обчислимо вхідні в це співвідношення інтеграли

$$\int_0^{\delta} \rho u dy = \int_0^{\delta} \rho V_{\infty} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} dy = \rho \frac{V_{\infty}}{\delta^{\frac{1}{7}}} \int_0^{\delta} y^{\frac{1}{7}} dy = \frac{7}{8} \rho V_{\infty} \delta ;$$

$$\int_0^{\delta} \rho u^2 dy = \int_0^{\delta} \rho V_{\infty}^2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{2}{7}} dy = \rho \frac{V_{\infty}^2}{\delta^{\frac{2}{7}}} \int_0^{\delta} y^{\frac{2}{7}} dy = \frac{7}{9} \rho V_{\infty}^2 \delta .$$

Підставляючи знайдені значення інтегралів у співвідношення (9.8), будемо мати

$$\frac{7}{72} \rho V_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx} = \tau_0 . \quad (9.19)$$

Підставляючи значення τ_0 за (9.18), одержимо

$$\frac{7}{72} \rho V_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx} = 0,0225 \rho V_{\infty}^2 \left(\frac{v}{V_{\infty} \delta} \right)^{\frac{1}{4}} ,$$

або

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0,0225 \left(\frac{v}{V_{\infty} \delta} \right)^{\frac{1}{4}} .$$

Розділяючи змінні, приведемо рівняння до вигляду

$$\delta^{\frac{1}{4}} d\delta = 0,0225 \frac{72}{7} \left(\frac{v}{V_{\infty}} \right)^{\frac{1}{4}} dx .$$

Інтегруючи і визначаючи довільну постійну $C = 0$ з умови при $x = 0$ товщина $\delta = 0$, після простих перетворень одержимо

$$\delta = 0,37 \left(\frac{\nu}{V_\infty x} \right)^{\frac{1}{5}} x. \quad (9.20)$$

З отриманого виразу виходить, що товщина турбулентного приграничного шару наростає більш інтенсивно, ніж ламінарного, тому що в цьому випадку величина δ пропорційна $x^{4/5}$ (у ламінарному шарі δ була пропорційна $x^{1/2}$).

Цей вивід фізично легко пояснюється, тому що перемішування часток, що має місце в турбулентному шарі, сприяє більш інтенсивному його росту.

Визначимо силу опору тертя F_{mp} . Використовуючи вираз (9.19), будемо мати

$$F_{mp} = \int_0^l \tau_0 b dx = \int_0^l b \frac{7}{72} \rho V_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} dx = \frac{7}{72} \rho V_\infty^2 b \int_0^{\delta(l)} d\delta = \frac{7}{72} \rho V_\infty^2 b \delta(l).$$

Оскільки з виразу (9.20) виходить, що

$$\delta(l) = 0,37 \left(\frac{\nu}{V_\infty l} \right)^{1/5} \cdot l,$$

то для коефіцієнта $C_{x mp}$, рівного

$$C_{x mp} = \frac{F_{mp}}{\frac{\rho V_\infty^2 S}{2}},$$

де $S = bl$, будемо мати

$$C_{x mp} = 0,072 \left(\frac{\nu}{V_\infty l} \right)^{1/5},$$

або

$$C_{x\text{ mp}} = \frac{0,072}{Re^{0,2}}. \quad (9.21)$$

Залежність коефіцієнтів опору від числа Re зручно зображувати в логарифмічних координатах, за які приймають $lg Re$ і $lg C_{x\text{ mp}}$ (рис. 9.6). При цьому залежність $C_{x\text{ mp}}$ для ламінарного приграничного шару зображується прямою 1

$$lg C_{x\text{ mp}} = lg 1,3 - \frac{1}{2} lg Re$$

з кутовим коефіцієнтом $-1/2$, а залежність $C_{x\text{ mp}}$ для турбулентного приграничного шару – прямою 2

$$lg C_{x\text{ mp}} = lg 0,072 - \frac{1}{5} lg Re$$

з кутовим коефіцієнтом $-1/5$.

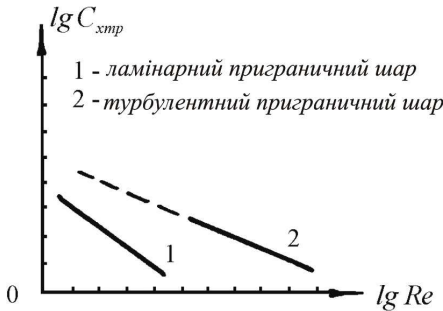


Рис. 9.6. Залежність коефіцієнтів опору плоскої пластини від числа Re

Як бачимо, в обох випадках зі збільшенням числа Re коефіцієнт опору убуває, але при турбулентному шарі значно повільніше, ніж при ламінарному.

Як показують досліди, більш точно коефіцієнт опору пластинки у випадку турбулентного приграничного шару виражається форму-

лою

$$C_{x\text{ мр}} = \frac{0,074}{Re^{0,2}}.$$

У межах $10^6 \leq Re \leq 10^9$ часто користуються наступною формулою

$$C_{x\text{ мр}} = \frac{0,455}{(\lg Re)^{2,58}}.$$

Як бачимо теорія добре підтверджується експериментом.

У більшості випадків для розрахунку приграничного шару використовують інтегральне співвідношення (9.7), а не рівняння (9.4), тому що останні, будучи диференціальними рівняннями в часткових похідних, більш складні, ніж інтегральне співвідношення, що, як було показано, легко приводиться до звичайного диференціального рівняння. Однак слід зазначити, що при використанні інтегрального співвідношення завжди доводиться задаватися законом розподілу швидкостей у приграничному шарі в тому або іншому вигляді.

Розрахунок змішаного приграничного шару для плоскої пластинки. Характер приграничного шару, що утворюється при обтіканні потоком рідини плоскої пластинки, істотно залежить від режиму обтікання, обумовленого числом Re . При порівняно невеликих числах Re уздовж всієї пластинки утвориться ламінарний приграничний шар, розрахунок якого нами розглянутий вище.

При дуже великих значеннях числа Re практично уздовж всієї пластинки утвориться турбулентний приграничний шар. Цей випадок також нами розглянутий вище.

У діапазоні значень чисел Re від $Re = 10^5$ до $Re = 5 \cdot 10^6$ на початку пластинки утвориться ламінарний приграничний шар, що,

починаючи з деякого місця, руйнується і переходить потім у суто турбулентний шар (рис. 9.7).

Зробимо два спрощуючих припущення:

а) перехід від ламінарного приграничного шару до турбулентного відбувається миттєво в точці A ;

б) зміна товщини турбулентного шару, розподіл швидкостей і дотичних напружень у ньому аналогічно тому, що було б ніби турбулентний шар починався не від точки A , а від передньої кромки O .

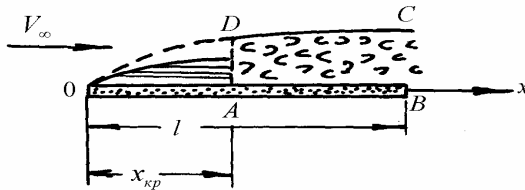


Рис. 9.7. Розрахункова схема змішаного приграничного шару на плоскій пластині

Позначимо через F_{mp}'' силу тертя всієї пластини довжиною l у припущенні, що приграничний шар на всьому його протязі турбулентний. Тоді, щоб одержати силу тертя F_{mp} для змішаного шару, потрібно з F_{mp}'' відняти силу тертя передньої ділянки шару OA , вважаючи його турбулентним, і додати до отриманої різниці силу тертя цієї ж ділянки OA , вважаючи його ламінарним, тобто

$$F_{mp} = F_{mp}'' - F_{mp\ OA}'' + F_{mp\ OA}'$$

де $F_{mp\ OA}'$ – сила тертя ламінарної ділянки OA .

Силу тертя передньої ділянки пластини шириною b при ламінарному приграничному шарі можна написати у вигляді

$$C_{x\ mp}' \rho \frac{V_{\infty}^2}{2} x_{кр} b,$$

а при турбулентному шарі – у вигляді

$$C''_{x_{mp}} \rho \frac{V_\infty^2}{2} x_{kp} b.$$

Різниця

$$\begin{aligned} \Delta F_{mp} &= -F''_{mp \text{ OA}} + F'_{mp \text{ OA}} = -C''_{x_{mp}} \rho \frac{V_\infty^2}{2} x_{kp} b + C'_{x_{mp}} \rho \frac{V_\infty^2}{2} x_{kp} b = \\ &= -\rho \frac{V_\infty^2}{2} (C''_{x_{mp}} - C'_{x_{mp}}) x_{kp} b. \end{aligned}$$

Розділимо обидві частини цієї рівності на $\rho \frac{V_\infty^2}{2} l b$. Тоді для зміни $C_{x_{mp}}$ пластинки від наявності ламінарної ділянки будемо мати

$$\Delta C_{x_{mp}} = -\frac{(C''_{x_{mp}} - C'_{x_{mp}})}{l} x_{kp} = -\frac{(C''_{x_{mp}} - C'_{x_{mp}}) x_{kp} V_\infty}{\frac{V_\infty l}{v}} = -\frac{A}{Re},$$

де через A позначена наступна величина

$$A = (C''_{x_{mp}} - C'_{x_{mp}}) \frac{x_{kp} V_\infty}{v} = (C''_{x_{mp}} - C'_{x_{mp}}) Re_{kp}$$

і число $Re_{kp} = x_{kp} V_\infty / v$ прийнято називати *критичним*.

Експериментальним шляхом встановлено, що для гладких пластин величина $A = 1700$. При збільшенні шорсткості пластинки або ступеня турбулентності набігаючого потоку критичне число Re число і величина A зменшуються. Для шорсткуватих пластин $A = 300$. Отже,

$$300 \leq A \leq 1700.$$

Таким чином, для величини коефіцієнта тертя плоскої пластинки у випадку змішаного приграничного шару одержуємо наступний вираз:

$$C_{x\text{ mp}} = \frac{0,074}{Re^{0,2}} - \frac{A}{Re}, \quad (9.22)$$

або

$$C_{x\text{ mp}} = \frac{0,455}{(\lg Re)^{2,58}} - \frac{A}{Re}.$$

З викладеного випливає, що опір тертя пластинки буде тим менше, чим більше довжина ламінарної ділянки приграничного шару, тобто чим далі точка A переходу ламінарного шару в турбулентний відстоїть від передньої кромки пластинки. Приходимо до висновку, що з метою зменшення опору профілю вигідно мати на ньому можливо більшу ділянку ламінарного приграничного шару.

За цим принципом сконструйовані спеціальні крилові профілі (так звані ламінаризовані профілі).

9.4. Приграничний шар на криволінійній поверхні

Вище розглядався приграничний шар біля прямолінійної поверхні. У цьому випадку швидкість потоку поза приграничним шаром уздовж всієї осі x була постійною.

При обтіканні криволінійної поверхні швидкість V на зовнішній межі приграничного шару буде величиною змінною, залежною від координати x . Тиск у приграничному шарі криволінійної поверхні також буде функцією x , що виходить з рівняння Бернуллі, застосованого до зовнішньої межі шару.

Розглянемо потік, що обтікає криволінійну поверхню, наприклад профіль крила (рис. 9.8).

Оскільки на верхній поверхні профілю швидкість спочатку зростає (до деякої точки M), а потім убуває, то тиск на підставі рівняння Бернуллі спочатку зменшується, а потім зростає. У точці M швид-

кість буде максимальна, а тиск мінімальний. Отже, частинки рідини в приграничному шарі біля розглянутої криволінійної поверхні будуть рухатися при наявності градієнта тиску $\partial p / \partial x$ як негативного, так і позитивного за знаком.

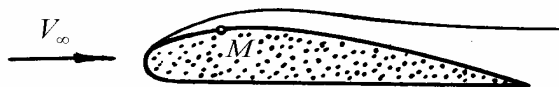


Рис. 9.8. Приграничний шар на профілі крила

Цей факт істотно відрізняє приграничний шар біля криволінійної поверхні від приграничного шару уздовж плоскої пластинки, де $\partial p / \partial x = 0$.

З огляду на цю особливість приграничного шару біля криволінійної поверхні можна з'ясувати причини відриву потоку від обтічного тіла й утворення вихорів, що зриваються з обтічної поверхні.

При течії в'язкої рідини дотична і нормальна складові швидкості повинні в точках поверхні звертатися в нуль. Крім того, на деякому невеликому віддаленні від поверхні обтічного тіла течія рідини мало відрізняється від течії ідеальної рідини, при якій нормальна складова швидкості на поверхні тіла звертається в нуль, а дотична відмінна від нуля. Приймаючи це до уваги, приходимо до висновку, що зміна дотичної складової уздовж нормалі до поверхні тіла повинна мати вигляд, зазначений на рис. 9.9 кривою, що відноситься до точки A . Ця крива показує, що дотична швидкість, рівна нулю в точці A , для точок, розташованих на нормалі до криволінійної поверхні, поступово збільшується й на деякій відстані від поверхні мало відрізняється від значення, що відповідає потенційній течії ідеальної рідини.

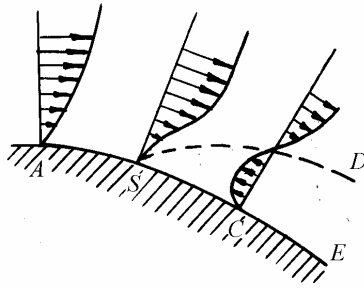


Рис. 9.9. Епюри розподілу дотичних швидкостей біля криволінійної поверхні

Далі відомо, що при обтіканні в'язкою рідиною якої-небудь поверхні частинки рідини загальмовуються в приграничному шарі силами в'язкості, причому тим більше, чим ближче траєкторія частинки підходить до поверхні тіла. Крім того, як це було встановлено вище, градієнт тиску $\partial p / \partial x$ для випадку криволінійної поверхні відмінний від нуля і, що важливо, у кормовій частині тіла перепад тиску спрямований у бік, протилежний основному руху рідини ($\partial p / \partial x > 0$), тому що в цій частині тиск зростає по потоку. Тому, потрапляючи в область задньої частини тіла, де тиск зростає, частинки починають одержувати прискорення в напрямку, протилежному основному їх руху.

В результаті в області DSE дотична швидкість змінить знак, тобто виникне зворотний рух рідини у приграничному шарі. Це приведе до відриву частинок рідини від поверхні тіла і до утворення вихорів.

Точка S поверхні тіла, починаючи від якої потік зривається з обтічного ним тіла, називається точкою *відриву приграничного шару*. Ця точка S характеризується рівністю нулю похідної $(\partial u / \partial y)_{y=0} = 0$.

Звідси, між іншим, виходить, що і напруга тертя

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

дорівнює нулю в точці відриву.

Зведемо інтегральне співвідношення (9.7) до форми, більш зручної для практичного застосування при розв'язанні задач, пов'язаних з розрахунком приграничного шару біля криволінійної поверхні.

Інтегральне співвідношення (9.7) має вигляд

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy - \rho V \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u dy = -\delta \frac{dp}{dx} - \tau_0.$$

Оскільки

$$\rho V \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u dy = \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} V u dy - \rho \int_0^{\delta} u \frac{dV}{dx} dy,$$

а з рівняння Бернуллі виходить, що

$$\frac{dp}{dx} = -\rho V \frac{dV}{dx} = -\rho V \cdot V',$$

то інтегральне співвідношення можна подати в наступному вигляді:

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy - \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} V u dy + \rho V' \int_0^{\delta} u dy - \rho V V' \delta = -\tau_0$$

або

$$\rho V' \int_0^{\delta} (V - u) dy + \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u (V - u) dy = \tau_0. \quad (9.23)$$

Звернемо увагу на фізичний зміст інтегралів у цьому рівнянні.

Перший інтеграл виражає зменшення секундної витрати через перетин у приграничному шарі висотою δ , обумовлене впливом в'язкості. Справді, цей інтеграл виражає різницю між секундною витратою через перетин висотою δ для потоку, що рухається зі шви-

дкістю V (тобто для потоку ідеальної рідини), і секундною витратою для потоку, який рухається з дійсною швидкістю u , тобто при наявності в'язкості.

З огляду на те, що в інтегралах, що входять у рівняння (9.23), верхня межа δ – величина умовна, і маючи на увазі, що значення цих інтегралів мало міняється при необмеженому збільшенні верхньої межі, можна інтеграл у рівнянні (9.23) брати від 0 до ∞ .

При цьому розглянутий інтеграл зображується у вигляді деякої площі (рис. 9.10), затемненої крапками.

Цій площі можна поставити у відповідність площу рівновеликого прямокутника δ^*V (рис. 9.10).

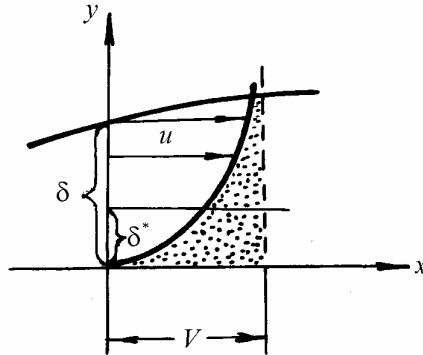


Рис. 9.10. Товщина витиснення

Тоді

$$\delta^* = \frac{1}{V} \int_0^{\infty} (V - u) dy = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{V}\right) dy. \quad (9.24)$$

Величина δ^* представляє, очевидно, умовну товщину деякого шару, крізь перетин якого в одиницю часу при постійній u в усіх точках перетину швидкості V протікає кількість рідини, рівна зазначеному вище зменшенню витрати.

Величина δ^* одержала назву *товщини витиснення*.

Розглянемо другий інтеграл, що входить у рівняння (9.23).

Цей інтеграл визначає, очевидно, зменшення *кількості руху рідини*, що має місце під впливом в'язкості. Якби в'язкість була відсутня, то кількість руху рідини, що протікає через деякий перетин шару висотою δ^{**} , можна було б записати у вигляді

$$\rho \delta^{**} V^2.$$

Виберемо товщину δ^{**} такою, щоб виконувалася рівність

$$\rho \delta^{**} V^2 = \int_0^{\infty} \rho u (V - u) dy.$$

Тоді

$$\delta^{**} = \frac{1}{\rho V^2} \int_0^{\infty} \rho u (V - u) dy = \int_0^{\infty} \frac{u}{V} \left(1 - \frac{u}{V} \right) dy. \quad (9.25)$$

Величина δ^{**} зветься *товщиною втрати імпульсу* і являє собою умовну товщину деякого шару, крізь перетин якого в одиницю часу і з постійною швидкістю V переноситься кількість руху, рівна зазначеному вище зменшенню кількості руху.

Підставляючи величини δ^* і δ^{**} у рівняння (9.23) зведемо його до наступного вигляду

$$\rho \frac{d}{dx} (\delta^{**} V^2) + \rho V' \delta^* V = \tau_0.$$

Проводячи диференціювання знаходимо

$$\rho V^2 \frac{d\delta^{**}}{dx} + \rho \delta^{**} 2VV' + \rho VV' \delta^* = \tau_0.$$

З метою зведення рівняння до безрозмірної форми розділимо

його почленно на ρV^2 . Тоді одержимо

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{V'}{V}(2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_0}{\rho V^2}, \quad (9.26)$$

або

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{V'\delta^{**}}{V}(2 + H) = \frac{\tau_0}{\rho V^2}, \quad (9.27)$$

де $H = \delta^*/\delta^{**}$.

Ця форма інтегрального співвідношення більш зручна для розрахунку приграничного шару біля криволінійних контурів.

9.5. Приграничний шар при великих швидкостях. Взаємодія стрибків із приграничним шаром

Коли стрибки з'являються біля твердих тіл, взаємодія між стрибками і приграничним шаром звичайно впливає на обидві течії. Градієнт тиску в безпосередній близькості стрибка порушує течію приграничного шару. Ці порушення, які поширюються як вгору, так і вниз по потоку в дозвуковій частині приграничного шару, в свою чергу впливають на умови поза приграничного шару під впливом хвиль розширення і стиску, що генеруються збуреним приграничним шаром. Так, маємо взаємний вплив стрибка і приграничного шару, що може привести до картини течії, яка по суті відрізняється від тієї, котра могла б бути, якби не було приграничного шару.

Розглянемо в цьому підрозділі три приклади такого впливу: (i) відбиття косого стрибка від приграничного шару на плоскій пластині, (ii) виникнення стрибків у ввігнутому куті й (iii) виникнення стрибків на вхідній кромці крила.

Відбиття косого стрибка від плоскої пластини. На рис. 9.11 косий стрибок AB падає на плоску пластину, на якій є приграничний

шар. Якби не було приграничного шару, падаючий стрибок повинен був би відбитися у вигляді косого стрибка, рівного поворотному куту, як показано на рис. 8.23, *b*.

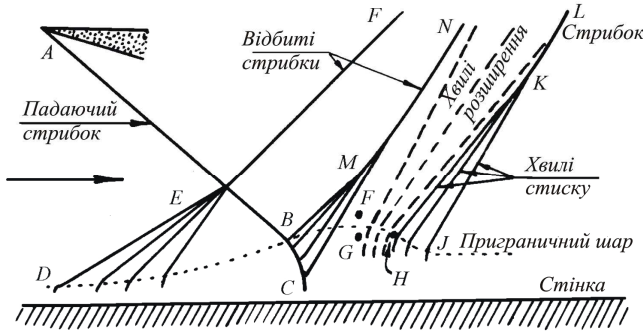


Рис. 9.11. Відбиття косого стрибка від приграничного шару на плоскій поверхні

Коли присутній приграничний шар, цей простий тип відбиття не може мати місця, тому що: (i) стрибок вигинається, входячи в область змінної швидкості в приграничному шарі й повинен закінчуватися на звуковій лінії в приграничному шарі, (ii) вплив стрибка може бути поширений уверх за течією в дозвуковому приграничному шарі.

Як результат останнього впливу тиск у приграничному шарі починає збільшуватися перед точкою падіння стрибка AB . Із цим збільшенням тиску йде зменшення швидкості й, отже, потовщення приграничного шару уздовж DB . Похилі хвилі стиску виникають уздовж DB як результат повороту ліній струму. Ці хвилі стиску зливаються в стрибок EF , який можна трактувати як частину системи відбитого стрибка.

Як тільки первісний стрибок AB входить у приграничний шар, він переломлюється уздовж BC внаслідок змін чисел Маха в цій області. Як результат цього переломлення виникають хвилі уздовж BC ;

деякі з яких є хвилями розрідження, але найчастіше вони є хвилями стиску, що зливаються в стрибок MN .

Тиск у точці F часто більший, ніж у точці G внаслідок проходження потоком у точці F стрибка порівняно більшої інтенсивності. Така наявність градієнта тиску викликає поворот ліній струму назад у напрямку до стінки. Це скривлення ліній струму викликає хвилі розширення в надзвуковому потоці.

Якщо різниця в тиску між F і G досить велика, потік може повернутися до стінки. Пізніше, однак, перебудування потоку таким чином викликає хвилі стиску уздовж увігнутої частини приграничного шару HJ . Ці хвилі зливаються в стрибок KL .

Експериментальні спостереження добре згоджуються із зображеною хвильовою картиною. Природа взаємодії залежить від числа Маха, інтенсивності стрибка, швидкісного профілю в приграничному шарі й особливо від того, чи є приграничний шар ламінарним чи турбулентним. У всіх спостережуваних випадках, однак, картина течії містить у більшому або меншому степені всі або частину елементів, показаних на рис. 9.11.

Ламінарний приграничний шар. Кілька типових рис, спостережуваних в експериментах, де косий стрибок падає на ламінарний приграничний шар, показані схематично на рис. 9.12. Правильне відбиття нав'язує в приграничному шарі позитивний градієнт тиску. Тиск починає зростати значно вище точки падіння стрибка. Це збільшення тиску приводить до збільшення товщини приграничного шару й у результаті скривлена лінія струму генерує хвилі стиску, які зливаються в “відбитий стрибок”, що виходить вище точки падіння падаючого стрибка. Якщо протилежний градієнт тиску (вище точки падіння стрибка) істотно великий, приграничний шар може навіть відірватися, збільшуючи таким чином інтенсивність першого відбитого стрибка. Останній має додатковий змінюючий вплив на падаю-

чий стрибок у точці перетинання падаючих і відбитого стрибків.

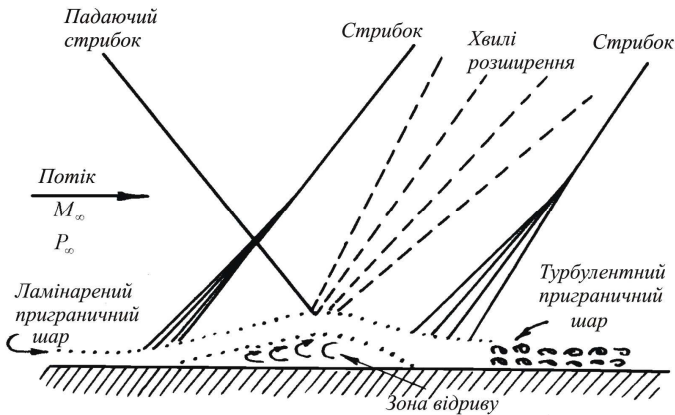


Рис. 9.12. Відбиття косої стрибка від ламінарного приграничного шару на плоскій поверхні

Оскільки рух у зоні відриву відносно невеликий, то його можна розглядати в першому наближенні як область постійного тиску. Отже, падаючий стрибок (рис. 8.21,с) відбивається від цієї зони у вигляді розширення Прандтля–Майєра. Наступний поворот потоку в напрямку до пластини приєднує приграничний шар знову. Найчастіше поворотний кут потоку при проходженні хвиль розширення настільки великий, що потік прямує в пластину, і наступне скривлення напрямку течії в напрямку пластини генерує другу ударну хвилю – другий «відбитий стрибок», початок якого лежить за точкою падіння падаючого стрибка. Приграничний шар часто стає турбулентним відразу ж за другим відбитим стрибком.

Турбулентний приграничний шар. Для наших дійсних цілей найбільш істотною різницею між ламінарним і турбулентним приграничним шаром є те, що в результаті кількості руху, внесеного в шар турбулентним перемішуванням, турбулентний шар набагато краще здатний протистояти градієнтам тиску. Взаємодія між стриб-

ком і приграничним шаром (рис. 9.13,*a*) є, отже, набагато слабкіша, ніж у випадку ламінарного приграничного шару.

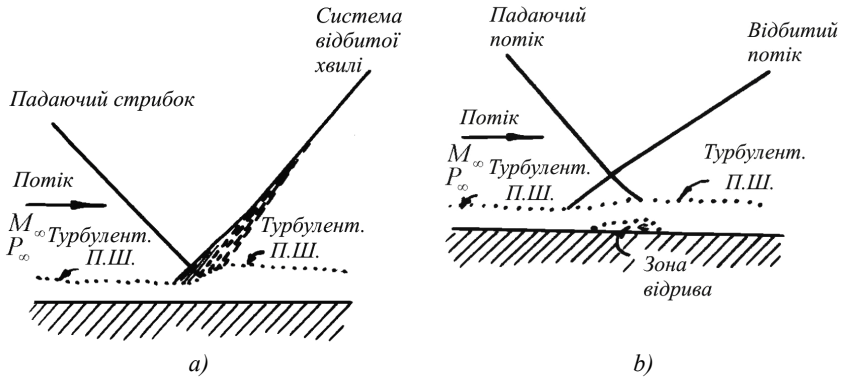


Рис. 9.13. Відбиття косого стрибка від турбулентного приграничного шару на плоскій поверхні:

a) – правильне відбиття; *b*) – відбиття з відривом приграничного шару.

Тут є помірне стовщення приграничного шару із хвилями, що генеруються як вище, так і нижче точки падіння падаючого стрибка.

Однак довжина впливу як вище так і нижче по потоку порівняно невелика, тому відбиття стрибка від турбулентного шару можна розглядати як близьке відповідному правильному відбиттю (рис. 8.23,*b*).

Рис. 9.13,*b* показує іншу форму відбиття, що іноді спостерігається в турбулентному приграничному шарі, особливо при наявності невеликого відриву течії приграничного шару. Відрив дає підйом “відбитому” стрибку, що починається вище точки падіння.

Генерація стрибка при обтіканні ввігнутого кута. Оскільки потік у безпосередній близькості ввігнутого кута складається з надзвукової і дозвукової частин приграничного шару, буде краще обговорити окремо особливості цих двох типів течії. При чистій

(нев'язкій) надзвуковій течії всі лінії струму повертаються на рівні кути повороту при проходженні через косий стрибок, що бере свій свій початок у кутівій точці (рис. 9.14,*a*).

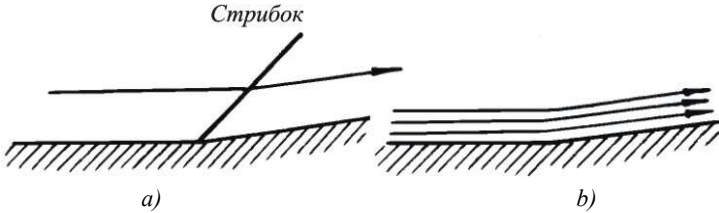


Рис. 9.14. Обтікання вигнутого кута нев'язким потоком:
a) – надзвукова течія; *b*) – дозвукова течія.

При чистій дозвуковій течії нев'язкої рідини лінії струму є приблизно гіперболами асимптотично наближаючимися до напрямків стінок кута (рис. 9.14,*b*).

Дійсне виникнення стрибка в куті повинно мати деякі аспекти обох картин течії, обговорених вище, разом з додатковими ефектами, властивими в'язкості в приграничному шарі.

Типові хвильові картини для ламінарного і турбулентного шарів показані на рис. 9.15.

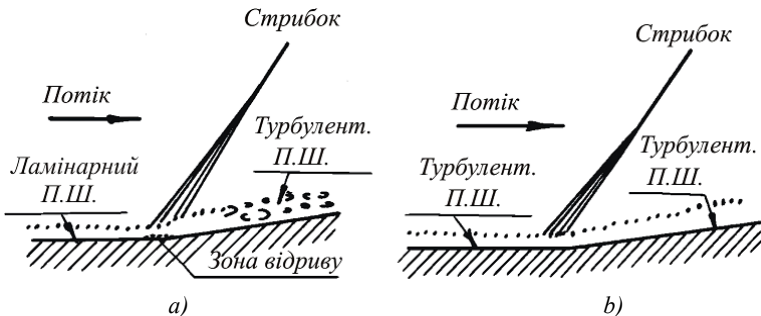


Рис. 9.15. Типово спостережувані картини течій при виникненні стрибка в увігнутому куті:
a) – ламінарний приграничний шар; *b*) – турбулентний приграничний шар.

Для обох типів приграничного шару стрибок формується в результаті злиття хвиль стиску, що виникають в області підйому тиску і стовщення приграничного шару.

Виникнення стрибків при обтіканні клина. Клин звичайно представляють як тіло, що дає "чисту" картину течії з одиничним стрибком (рис. 9.16).

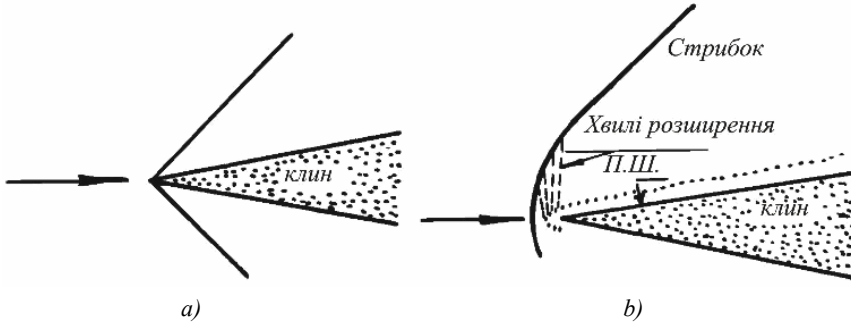


Рис. 9.16. Вплив приграничного шару біля вхідної кромки обтічного клина:
а) – нев'язка течія; б) – в'язка течія.

Поверхневий тиск на клині часто використовується для виміру напрямку потоку і числа Маха.

Однак є приграничний шар на клині, що також злегка виходить за вершину клина й цей приграничний шар дуже викривляє лінію струму біля вершини. Картина течії і розподіл тиску в безпосередній близькості клина досить прості. Рис. 9.16,*b* показує риси, що іноді спостерігаються в таких потоках. Стрибок сильно скривлений біля вершини й асимптотично слабшає до інтенсивності теоретичного стрибка, що відповідає рис. 9.16,*a*, за допомогою хвиль розрідження, які виникають на кривизні лінії струму, пов'язаної з формуванням в'язкого шару. Тому при використанні клина при вимірах дуже важливо не розміщати прийомні отвори для виміру тиску біля вершини.

“Прямий стрибок” у трубі. При розрахунках одномірного надзвукового потоку в трубах часто користуються формулами прямого

стрибка і говорять про прямий стрибок, присутній у трубі (рис. 8.4), коли протитиск досить великий. У дійсності спостереження показують, що підйом тиску при проходженні через стрибок спостерігається на деякій відстані, рівній декільком діаметрам труби, і фотографії-шлір показують картину, подібно тій, котра зображена на рис. 9.17. Відзначимо, що прямий стрибок поширюється до стінки, де є присутнім приграничний шар, і що раптове стовщення приграничного шару вище стрибка викликає появу косого стрибка. Відбитий стрибок у точці з'єднання прямого і косого стрибків визначається вимогами нерозривності.

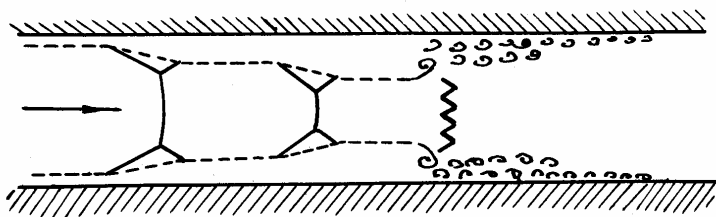


Рис. 9.17. Типова взаємодія стрибка з приграничним шаром при досить високому протитиску

Серія розгалужених прямих стрибків має місце. Довжина прямого стрибка стає менша зі збільшенням товщини приграничного шару. Остаточно досягається звукова швидкість, і потік потім сповільнюється як дозвуковий, розширюючи прохід. На місці прямого стрибка, однак, потік стискується за допомогою комбінацій прямих і косих стрибків до числа Маха одиниці й потім рухається з дозвуковою швидкістю.

Питання для самоперевірки.

1. Покажіть, що тиск усередині приграничного шару не міняється уздовж нормалі до контура тіла й рівняється тиску на зовнішній межі шару в розглянутому місці.

2. Одержіть систему диференціальних рівнянь приграничного шару.
3. Виведіть інтегральне співвідношення приграничного шару для випадка плоского сталого руху.
4. Визначте товщину приграничного шару й силу тертя для плоскої пластини з ламінарним приграничним шаром.
5. Як визначити товщину приграничного шару й силу тертя у випадку турбулентного приграничного шару уздовж плоскої пластини.
6. Змішаний приграничний шар. Як можна впливати на опір тертя, варіюючи довжиною ламінарної і турбулентної ділянок приграничного шару?
7. Як визначається точка відриву приграничного шару?
8. Що таке “товщина витиснення” і “товщина втрати імпульсу”?
9. Опишіть взаємодію стрибків із приграничним шаром.

Задачі

9.1. Плоска пластина довжиною $\ell = 0,6 \text{ м}$ і шириною $b=0,5 \text{ м}$ обтікається потоком повітря зі швидкістю $V_\infty = 10 \text{ м/с}$. Тиск повітря $p = 1 \cdot 10^5 \text{ Па}$, температура $T = 293 \text{ К}$. Знайти силу тертя F_{mp} , що діє на обидві сторони пластини. Кінематичний коефіцієнт в'язкості $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

9.2. Розв'язати задачу 9.1 за умови, що пластина обтікається потоком повітря зі швидкістю 100 м/с .

9.3. Плоска пластина довжиною $\ell = 2 \text{ м}$ і шириною $b=0,8 \text{ м}$ обтікається потоком води зі швидкістю $V=3 \text{ м/с}$. Температура води $T=303 \text{ К}$.

Визначити силу тертя F_{mp} , що діє на одну сторону пластини ($\nu = 8,7 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $\rho=995 \text{ кг/м}^3$).

9.4. Плоска гладка пластина довжиною $\ell = 40 \text{ м}$ і шириною $b=5 \text{ м}$ обтікається потоком води зі швидкістю $V_\infty = 10 \text{ м/с}$. Температура води $T=303 \text{ К}$. Визначити силу тертя F_{mp} , що діє на одну сторону пластини.

9.5. Розрахувати ламінарний приграничний шар на плоскій пластині довжиною $\ell = 0,5 \text{ м}$, яка обтікається при куті атаки рівним нулю потоком повітря зі швидкістю $V_\infty = 10 \text{ м/с}$. Тиск повітря $p = 1 \cdot 10^5 \text{ Па}$, температура $T=303 \text{ К}$.

Визначити товщину приграничного шару δ і розподіл швидкості u поперек шару на вихідній кромці пластини. Побудувати графік залежності $u/V_\infty = f(y/\delta)$.

9.6. Розрахувати турбулентний приграничний шар на плоскій пластині довжиною $\ell = 1$ м, яка обтікається при куті атаки рівним нулю потоком води з швидкістю $V_\infty = 8$ м/с. Температура води $T=303$ К

Визначити товщину приграничного шару δ на вихідній кромці пластини. Побудувати графік розподілу швидкості в приграничному шарі ($\nu = 0,87 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\rho=995$ кг/м³).

9.7. Плоска пластинка з двох сторін обтікається потоком нестисливої рідини зі швидкістю $V_\infty = 10$ м/с. Густина рідини $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м³. На вихідній кромці пластини відомі товщина приграничного шару $\delta = 2,8$ мм і закономірність розподілу швидкості поперек сліду $u / V_\infty = (y / \delta)^{1/7}$. Знайти силу тертя $F_{тр}$, що діє на одиницю ширини пластини та кінетичну енергію $E^{кин}$, яка перейшла в теплоту внаслідок роботи сил тертя.

РОЗДІЛ 10. ВИТІКАННЯ ГАЗА ЗІ ЗВУЖУЮЧИХ СОПЕЛ І ОТВОРІВ. СОПЛА ЛАВАЛЯ

10.1. Звужуючі сопла

Широко застосовуються для створення потоків дозвукових і білязвукових швидкостей. Гідравлічний розрахунок таких сопел досить простий і зводиться до визначення розмірів вихідного перетину по заданій витраті газу заданій швидкості витікання. При розрахунку вважають, що течія газу в соплі адіабатична, тому що за короткий час протікання газових часток через сопло теплообмін з навколишнім середовищем практично не встановлюється. Отже, для розрахунку сопла можуть бути використані рівняння адіабатичної течії. Якщо знехтувати впливом тертя, то течію у соплі можна вважати ізотропною. Розрахунок таких сопел розглядається в р. 3.

Отримані при цьому формули добре підтверджуються експериментом тільки в тому випадку, якщо профіль сопла виконаний плавним. Плавно звужуюча форма сопла наближає розподіл швидкостей

у вихідному перетині до рівномірного. Із цією метою стінки сопла повинні бути особливим чином розраховані.

Профіль звужуючого сопла може бути розрахований за формулою Вітошинського:

$$r = \frac{r^*}{\sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{r^*}{r_0} \right)^2 \right] \frac{\left(1 - \frac{3x^2}{l'^2} \right)}{\left(1 + \frac{x^2}{l'^2} \right)}}}. \quad (10.1)$$

Величини, що входять у формулу (10.1), пояснені на рис. 10.1. $l' = \sqrt{3}l$.

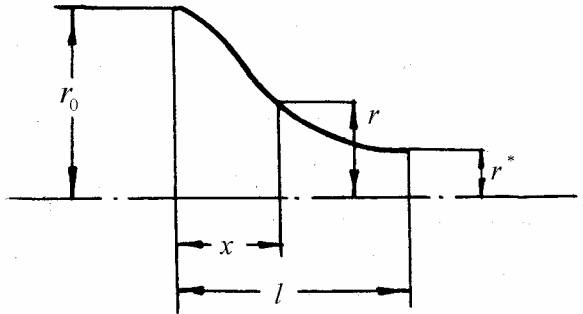


Рис. 10.1. Профіль звужуючого сопла, розрахований за формулою Вітошинського

Такий профіль придатний для сопел, що з'єднують дві труби різних діаметрів, коли потік при переході в трубу меншого діаметра повинен бути прискорений, а швидкості в кожній точці вихідного перетину сопла повинні бути однаковими. Сопла такого профілю застосовуються для аеродинамічних труб дозвукових швидкостей.

Дослід показує, що в широкому діапазоні швидкостей до $\lambda = 0,9 \div 0,95$ поле швидкостей за соплом досить рівномірне.

Спектр струменя за звужуючим соплом при нерозрахованому

режимі нами докладно розглянутий на рис. 7.11. Тиск у струмені міняється за деяким періодичним законом, близьким до синусоїдального. Відповідним буде й характер зміни швидкостей уздовж осі струменя.

10.2. Витікання газу з отвору з гострою кромкою. Друге критичне відношення тиску

Теоретичні дослідження й експеримент виявляють деякі нові властивості потоку газу, що витікає з отвору з гострою кромкою.

При витіканні зі звужуючого сопла плавний профіль стінок забезпечує поступове розширення потоку і визначає форму ліній струму. Виникаючі на вході радіальні складові швидкостей зменшуються при течії по соплу і до вихідного перетину спрямовуються до нуля. Потік у вихідному перетині має рівномірне поле швидкостей. При надкритичних перепадах тисків вихідний перетин сопла збігається із критичним. Витікання з отвору з гострою кромкою відбувається інакше (рис. 10.2).

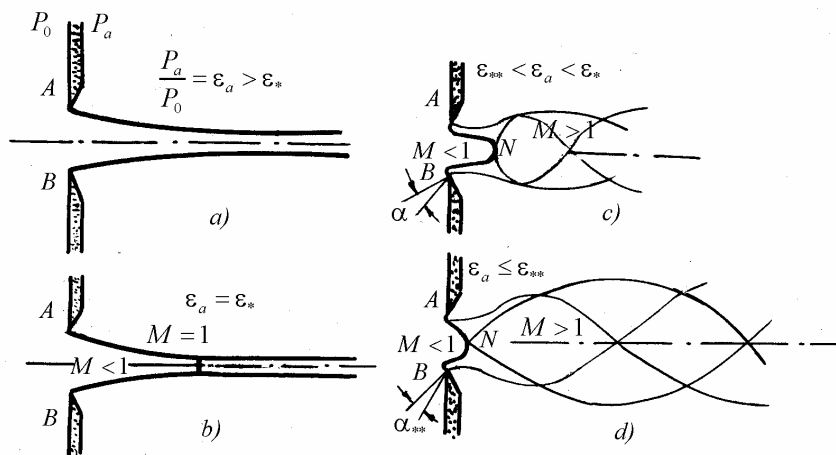


Рис. 10.2. Схеми витікання струменя з отвору з гострою кромкою при різних режимах

У посудині на досить великому видаленні від отвору швидкість газу дорівнює нулю, а тиск – p_0 . За отвором підтримується тиск p_a .

Поблизу отвору ліворуч швидкості газу інтенсивно наростають, струмки газу звужуються і скривлюються. Потік газу зривається з гострих кромок отвору і далі рухається як вільний струмінь.

Спектр струменя в отворі показує, що кривизна різних ліній струму виявляється різною. Найбільш скривленими виявляються лінії струму на границі струменя, а найменш скривленими – лінії струму поблизу осі. Тому швидкості на зовнішніх лініях струменя будуть більші, ніж швидкості в ядрі струменя. На виході з отвору встановлюється нерівномірний розподіл швидкостей і тисків.

Нерівномірність потоку збільшується під впливом в'язкості. Струмінь буде захоплювати за собою газ навколишнього середовища і гальмуватися. Середня швидкість струменя буде зменшуватися, а поперечний переріз її – збільшуватися. Розмивання струменя починається безпосередньо від кромок отвору. Однак відбувається воно достатньо повільно. На цій підставі можна скористатися наступною ідеалізованою схемою витікання через отвір. Припускаємо газ ідеальним, а рух – безвихоривим.

На гострих кромках A і B буде відбуватися відрив. Оскільки ми припускаємо, що тертя відсутнє, то підмішування навколишнього газу до струменя не буде. Отже, праворуч від отвору утворюються дві області: вільний струмінь і нерухомий газ із тиском p_a . Оскільки тиск на границі струменя є постійним, то очевидно, що швидкість на границі також постійна.

Якщо відношення тисків $p_a/p_0 = \varepsilon_a$ буде більше критичного або близьке до нього, то в цьому випадку струмінь має форму, зображену на рис. 10.2,а. Струмінь безперервно звужується, причому

максимальне звуження має місце на нескінченному віддаленні від отвору.

Якщо $\varepsilon_a = \varepsilon_*$ (критичному відношенню тиску), то на границі струменя швидкість течії дорівнює критичній. Усередині струменя швидкість менше критичної. З віддаленням від отвору епюри швидкостей вирівнюються і на деякій кінцевій відстані від отвору швидкості в струмені стають рівними швидкості на границі, причому вирівнювання поля швидкостей відбувається внаслідок стиснення струменя і прискорення ядра. Лінія критичних швидкостей для такого режиму показана на рис. 10.2,*b*.

При подальшому зниженні протитиску ($\varepsilon_a < \varepsilon_*$) струмінь стає надзвуковим.

Перехід через швидкість звуку відбувається на лінії звукових швидкостей *ANB*, що йде від кромки отвору і вклинається в струм у вигляді “язичка” (рис. 10.2,*c*).

Отже, при $\varepsilon_a < \varepsilon_*$ спектр струменя перебудовується. Лінія звукових швидкостей, що збігається при $\varepsilon_a = \varepsilon_*$ із границею струменя і мінімальним перетином, у міру зменшення ε_a деформується і наближається до вихідного перетину отвору. Праворуч від перехідної лінії течія – надзвукова. Деформація лінії переходу пояснюється перебудовою поля швидкостей у вихідному перетині *AB* і в наступних перетинах, пов’язаних зі зміною кривизни граничних ліній струму. Усередині “язичка” швидкості дозвукові. Кути характеристик α зі зменшенням ε_a зменшуються (рис. 10.2,*c*).

Існує таке значення зовнішнього тиску p_{**} , при якому лінія переходу займає стабільне положення; подальше зниження тиску зовнішнього середовища вже не призводить до її деформації. Тиск p_{**}

був названий Ф.И.Франклем “другим критичним тиском”. Відповідно відношення

$$\epsilon_{**} = \frac{P_{**}}{P_0} \quad (10.2)$$

будемо називати *другим критичним відношенням тисків*.

Вище вказувалося, що максимальна витрата для сопла має місце при критичному протитиску і подальше зниження протитиску не впливає на витрату. При витіканні з отвору завдяки зміні форми лінії переходу при $\epsilon_a < \epsilon_*$ витрата газу буде збільшуватися доти, доки протитиск не стане рівним p_{**} ($\epsilon_a = \epsilon_{**}$).

На рис. 10.3 подані криві відносної витрати через звужуюче сопло і через отвір з гострою кромкою при однаковій площі поперечного перерізу залежно від ϵ_a для повітря. В обох випадках витрата віднесена до критичної витрати через сопло.

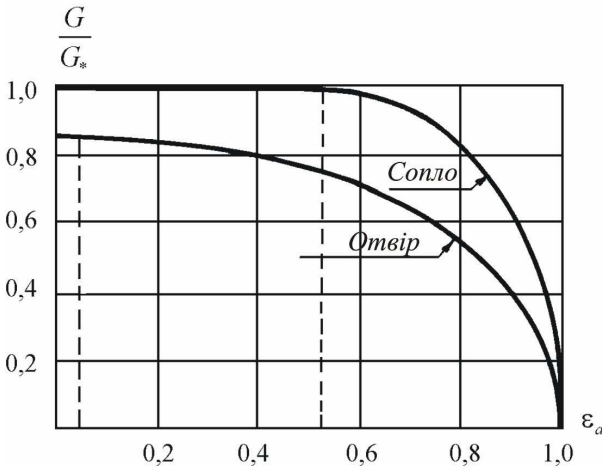


Рис. 10.3. Зміна витрати газу через сопло й отвір з гострою крайкою при однаковій площі перетину ($k=1,4$)

Для повітря ($k=1,4$) і форми отвору, зазначеної на рис. 10.2, $\varepsilon_{**} = 0,037$.

10.3. Сопла Лаваля

Розрахунок надзвукового сопла методом характеристик нами докладно викладений раніше (рис. 7.13). У цьому підрозділі більш докладно розглянемо поведінку сопел Лаваля при нерозрахованих режимах.

Припустимо, що при постійному значенні p_0 тиск зовнішнього середовища p_a міняється. Простежимо зміну структури потоку як усередині сопла, так і за ним. При цьому можна виділити чотири характерні групи режимів; у межах кожної групи режимів картина течії якісно зберігається незмінною.

Позначимо протитиск, що відповідає розрахунковому режиму течії в соплі через p_1 , тобто при розрахунковому режимі $\varepsilon_a = \varepsilon_1 = p_1/p_0$.

Перша група режимів характеризується зниженими тисками середовища $p_a/p_0 < p_1/p_0$. На рис. 10.4,*a* представлена схема спектрів струму на виході із плоского сопла в цьому випадку. При розрахунковому режимі $p_a = p_1$ струмінь здобуває форму, подану на рис. 10.4,*b*.

Друга група режимів характеризує витікання із сопла Лаваля при підвищеному протитиску середовища. Знаючи розрахункову швидкість у вихідному перетині сопла M_1 , легко визначити те значення тиску середовища, при якому у вихідному перетині утвориться прямий стрибок ущільнення (рис. 10.4 і формула (8.13)).

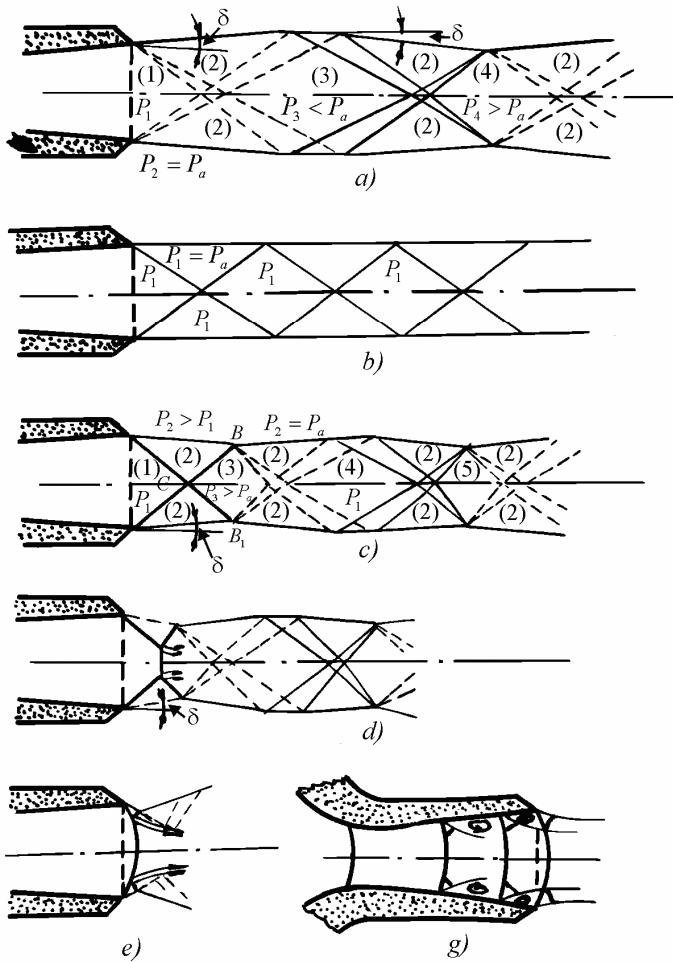


Рис. 10.4. Схеми спектрів струму за плоским соплом при різних режимах:
 а) – знижений протитиск, $\epsilon_a < \epsilon_1$; б) – розрахунковий режим, $\epsilon_a = \epsilon_1$;
 в), д) і е) – підвищений протитиск, $\epsilon_1 \leq \epsilon_a \leq \epsilon_{1k}$; в) $\epsilon_1 \leq \epsilon_a \leq \epsilon'_{1k}$;
 д) $\epsilon'_{1k} < \epsilon_a \leq \epsilon''_{1k}$; е) $\epsilon''_{1k} < \epsilon_a \leq \epsilon_{1k}$; г) – підвищений протитиск, $\epsilon_a > \epsilon_{1k}$

$$p_{1k} = p_1 \left(\frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \right).$$

Розглянута друга група режимів характеризується наступним співвідношенням тиску середовища:

$$p_1 \leq p_a \leq p_{1k}.$$

Схема спектрів струму на виході з плоского сопла у випадку невеликого перевищення тиску p_a над p_1 , коли кут δ невеликий, подана на рис. 10.4,с. При деякій значенні протитиску $p_a = p'_{1k}$ буде граничний випадок збереження картини течії (рис. 10.4,с).

Кут відхилення лінії струму δ_{max2} в цьому випадку легко визначається за допомогою діаграми ударних поляр (рис. 10.5).

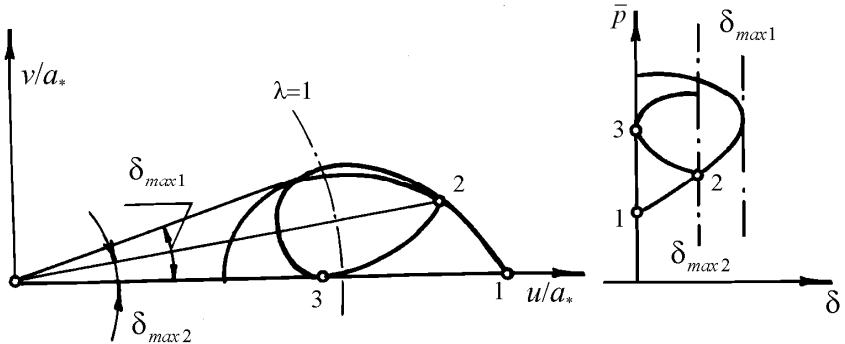


Рис. 10.5. До визначення кута відхилення лінії струму δ_{max2} на виході з сопла при підвищенні протитиску

Величина тиску p'_{1k} може бути визначена за допомогою формул косої стрибка (8.10).

При тиску зовнішнього середовища $p_a > p'_{1k}$ система перетинних косої стрибків руйнується і переходить у мостоподібний стрибок. Це явище аналогічно розглянутим на с.264-267 випадкам непра-

вільного відбиття косого стрибка від твердої стінки і перетинання стрибків (рис. 10.4,*d*).

При подальшому підвищенні тиску середовища внутрішня дозвукова область течії розширюється, а зовнішня надзвукова – звужується. Існує такий тиск середовища p''_{1k} , при якому криволінійний стрибок поширюється майже на весь перетин; у цьому випадку за стрибком швидкості стають дозвуковими (рис. 10.4,*e*), за винятком вузької периферійної області.

Тиск p''_{1k} буде відповідати такому режиму, при якому кут повороту δ (рис. 10.4,*d*) стає рівним максимальному куту δ_{max1} , який можна визначити за допомогою діаграми ударних поляр (рис.10.5). Знаючи цей кут, величина тиску p''_{1k} визначається за допомогою формул косого стрибка (8.10).

При тисках середовища $p_a > p''_{1k}$ стрибок випрямляється і при $p_a = p_{1k}$ (8.13) стрибок повинен стати прямим, розташовуючись у вихідному перетині сопла. Фактично внаслідок нерівномірного розподілу швидкостей у конічних соплах і впливу приграничного шару (в'язкості) стрибок входить усередину сопла трохи скривленим (рис. 10.4,*g*). Подальше підвищення тиску середовища ($p_a > p_{1k}$) викликає переміщення системи стрибків усередину сопла, як показано на рис. 10.4,*g*.

Варто мати на увазі, що переміщення стрибка усередину сопла супроводжується новими якісними змінами потоку (**третя група режимів**). Тиск за стрибком у цьому випадку вже не дорівнює тиску середовища: він виявляється меншим p_a . Тому за стрибком тиск продовжує зростати.

При деякому тиску середовища p_{1m} стрибок входить у мініма-

льний перетин сопла і тут зникає. У мінімальному перетині сопла параметри потоку при цьому критичні, але переходу в надзвукову область не відбувається.

При $p_a > p_{1m}$ швидкості у всіх точках сопла дозвукові й одержуємо **четверту групу** режимів сопла. Для цієї групи характерні послідовне розширення потоку в частині сопла, що звужується, і стиск у частині сопла, що розширюється. Мінімум тиску досягається у вузькому перетині. Такий характер розподілу тисків у трубах Вентурі, що застосовуються для виміру витрати газу.

Картина розподілів тисків у соплі Лаваля при різних режимах показана на рис. 10.6.

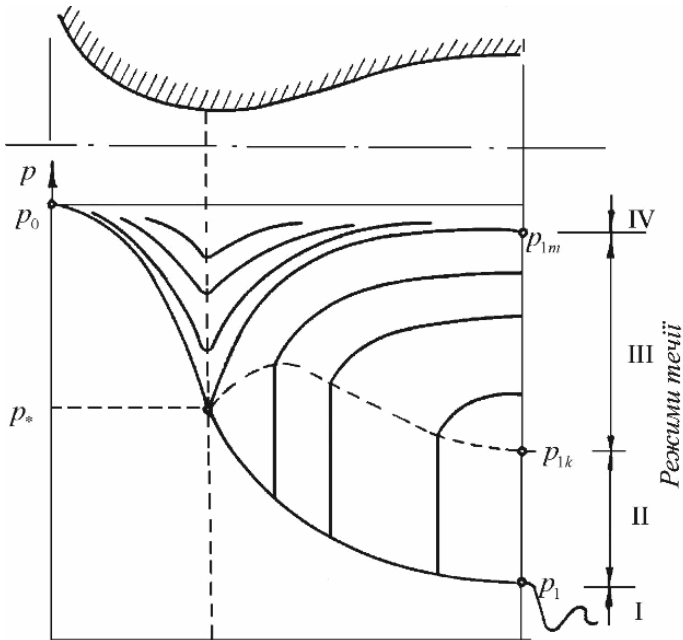


Рис. 10.6. Діаграма розподілів тисків у соплі Лаваля при різних режимах (при

$$\varepsilon_a = \frac{p_a}{p_0} > \varepsilon_{1m} = \frac{p_{1m}}{p_0} \text{ швидкості в соплі дозвукові (труби Вентурі))}$$

10.4. Надзвукове сопло з косим зрізом

При розрахунковому режимі витікання з надзвукового сопла з косим зрізом відбувається з невеликими змінами спектра потоку. Ці зміни обумовлені впливом приграничного шару на стінки косою зрізу KA (рис. 10.7).

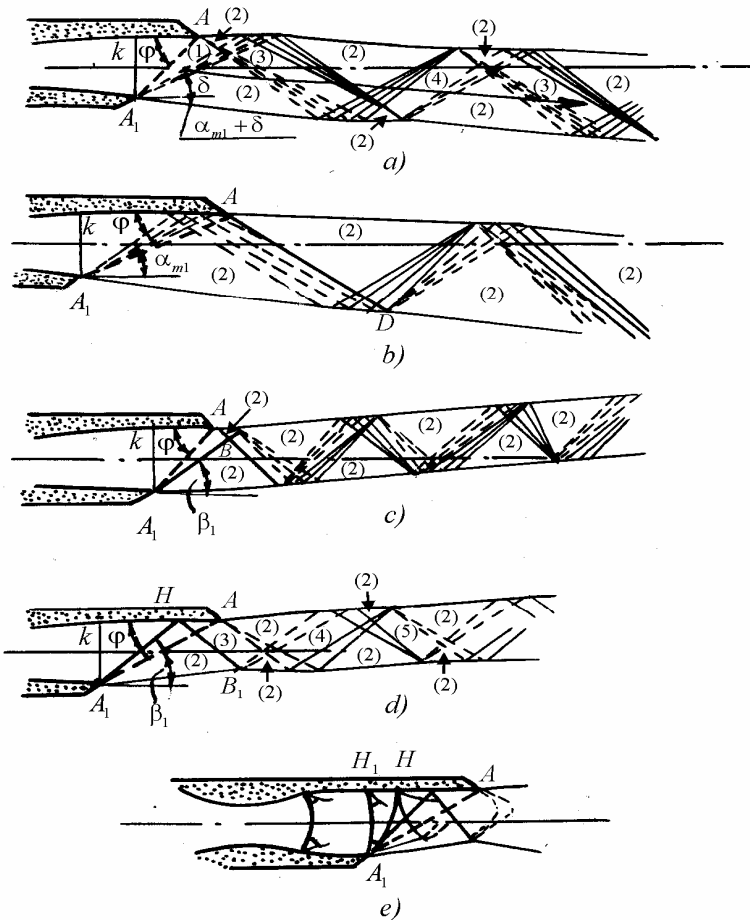


Рис. 10.7. Спектри струменя за соплом з косим зрізом

При нерозрахованому режимі, коли тиск середовища p_a менше розрахункового (*режим I*), додаткове розширення струменя відбувається в косому зрізі або за його межами. Якщо кут першої характеристики α_{m1} менше кута косого зрізу φ , то розширення потоку відбувається за межами косого зрізу (рис. 10.7,*a*). У цьому випадку кромки сопла A і A_1 створюють стаціонарні хвилі розрідження, що перетинаються не на осі струменя, а в області, що лежить ближче до кромки A . З цієї причини порушується симетричність спектра витікання, і струмінь відхиляється від осі сопла. Хвилі розрідження відбиваються від границі струменя як хвилі стиску, що перетинаються поблизу протилежної границі. В зонах (2), що примикають до границі, тиск дорівнює зовнішньому тиску p_a , у зоні (3) (за перетинанням хвиль розрідження) тиск знижений, а в зоні (4) – підвищений, рівний тиску в косому зрізі сопла p_1 .

Якщо перша хвиля розрідження з точки A_1 частково або повністю лежить у межах косого зрізу, то характер течії міняється (рис. 10.7,*b*). Відбита від стінки косого зрізу (частково або повністю) хвиля розрідження приводить до зниження тиску й у кромки A тиск виявляється менше, ніж p_a . У результаті в точці A утвориться косий стрибок ущільнення. В косому стрибку AD лінія струменя відхиляється за годинниковою стрілкою, тому середній кут відхилення струменя трохи збільшується в порівнянні з першим випадком. Такий характер витікання буде мати місце в тому випадку, якщо кут косого зрізу

$$\varphi < \arcsin \frac{1}{M_1}.$$

Для другої групи режимів (тиск середовища p_a вище розрахункового) на кромках A і A_1 виникають косі стрибки ущільнення (рис. 10.7,с), що перетинаються за косим зрізом, якщо кут β_1 стрибка з точки A_1 менше кута косого зрізу φ .

Точка перетинання стрибків B лежить у верхньої границі струменя. Потік відхиляється від осі струменя, причому поворот потоку відбувається в протилежному першому випадку напрямку.

Якщо $\varphi < \beta_1$ (рис.10.7,д), то перший косий стрибок лежить у межах косого зрізу.

У відбитому стрибку HB_1 тиск збільшується до значення, більшого ніж p_a . У результаті в області (3) тиск підвищений. Із точок A і B_1 поширюються хвилі розрідження. У зонах (2) установлюється тиск p_a . У зоні (4) тиск дорівнює p_1 , а в зоні (5) тиск знову підвищується. Далі процес повторюється.

При подальшому підвищенні протитиску стрибок A_1H буде повертатися до перетину A_1k . При деякому значенні $p_a = p'_{1k}$ відбиття стрибка A_1H стає неможливим, тому що швидкість за первинним стрибком близька до швидкості звуку. Стрибок стає λ -подібним, і в косому зрізі біля стінки HA утвориться відрив струменя (рис.10.7,е).

Якщо $p_a \approx p'_{1k}$, то мостоподібний стрибок розташовується в перетині сопла A_1H_1 , і спектр струменя майже не відрізняється від розглянутого вище для сопла з прямим зрізом.

Розрахунок спектра і визначення середнього кута відхилення на виході з сопла з косим зрізом може бути зроблений методом характеристик (режим I) у комбінації з методом ударних поляр, якщо $p_a > p_1$ (режим II).

Питання для самоперевірки

1. Які вимоги пред'являються до звукуючого сопла?
2. Що таке “друге критичне відношення тиску”?
3. Опишіть режими роботи сопла Лавалю.
4. Опишіть особливості роботи надзвукового сопла з косим зрізом.

РОЗДІЛ 11. ТЕЧІЯ ГАЗА ЧЕРЕЗ РЕШІТКИ ТУРБОМАШИН

11.1. Класифікація решіток турбомашин

Класифікація решіток турбомашин може бути зроблена за різними параметрами.

Залежно від розрахункових умов обтікання і відповідних їм геометричних параметрів профілю й каналу розрізняють три основних типи решіток:

- (i) *конфузорні* – використовуються в турбінах як соплові або напрямні (нерухомі), так і реактивні робочі (обертові);
- (ii) *активні* – використовуються в турбінах як робочі (обертові);
- (iii) *дифузорні* – використовуються в компресорах як напрямні (нерухомі), так і робочі (обертові); останнім часом – у турбінах як робочі (обертові) у зонах негативних ступенів реактивності.

Залежно від загального напрямку руху газу щодо осі обертання решітки підрозділяються на *осьові* й *радіальні*. У деяких конструкціях машин потік газу рухається під кутом осі обертання (*діагональні решітки*).

Залежно від швидкості (числа M) всі решітки варто розділити на три групи: *дозвукові*, *білзвукові* й *надзвукові*. У межах кожної цієї групи решітки розрізняються кутом повороту потоку ($\theta = 180^\circ - (\beta_1 + \beta_2)$).

Крім того, застосовувані решітки розрізняють за відносною висотою, що характеризується відношенням $\bar{l} = l/b$ на решітки малої висоти ($\bar{l} \leq 1,0 \div 1,5$) і решітки великої висоти ($\bar{l} > 1,5 \div 2,0$).

Разом з тим різні решітки розрізняються *вєєрністю* $\Theta = D_{cp}/l$; при малих D_{cp}/l ($D_{cp}/l \leq 10$) лопатки виконуються зі змінним за висотою профілем (закручені лопатки).

Геометричні параметри решіток докладно розглянуті в курсі «Парові й газові турбіни» і тут не розглядаються.

11.2. Сили, що діють на профіль у решітці.

Теорема М.Є. Жуковського для решітки

Для визначення сил, що діють на профіль, виділимо частину потоку, як це показано на рис. 11.1.

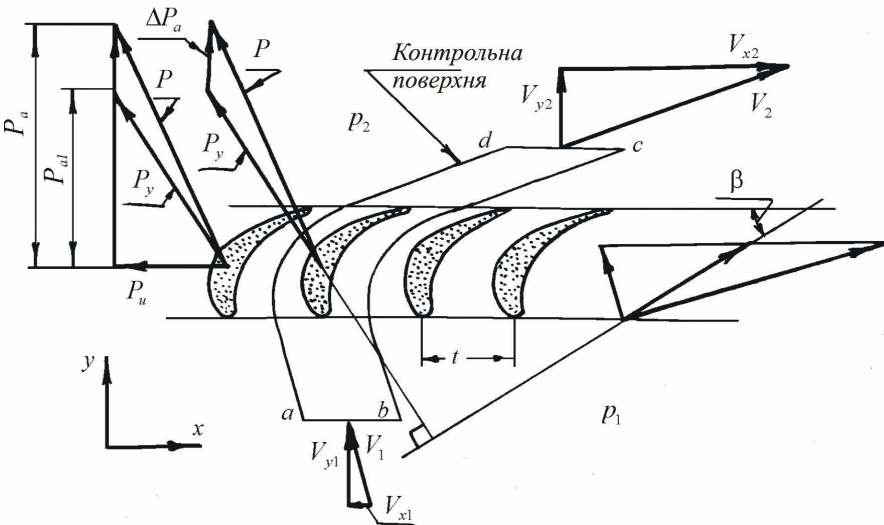


Рис. 11.1. До визначення сил, що діють на профіль у турбінних решітках

Зовнішніми границями виділеного контрольного об'єму служать відрізки ab і dc , паралельні осі решіток і рівні кроку t , і лінії струму ad і bc . Лінії ab і dc , строго кажучи, повинні перебувати на нескінченності від решіток, тому що параметри потоку вздовж цих ліній передбачаються постійними.

Зверху і знизу контрольний об'єм обмежений двома площинами, які відстоять одна від одної на одиницю довжини і паралельні площині креслення.

Для обраного контрольного об'єму частина лопатки, що перебуває в контрольному об'ємі, є частиною системи (рис. 11.2).

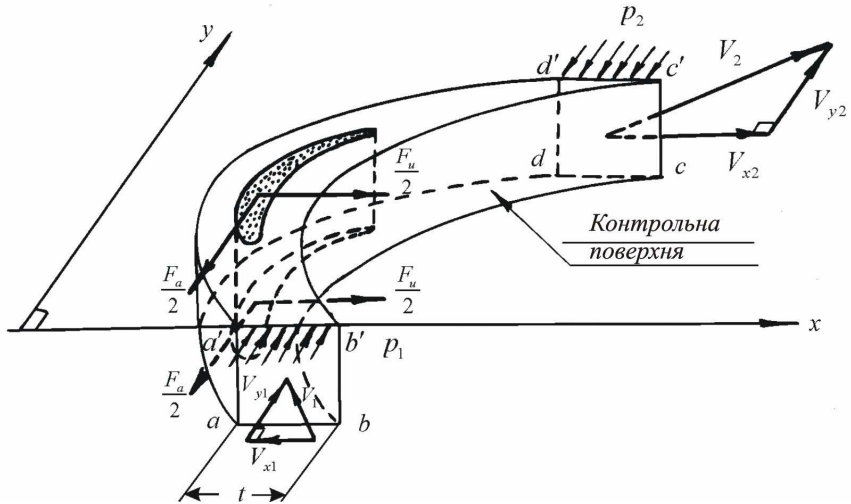


Рис. 11.2. Сили, що діють на поверхню контрольного об'єму, виділеного в турбінній решітці

Для сталої течії рівняння кількості руху для контрольного об'єму має вигляд (2.11)

$$\sum \vec{F} = \oint_{\text{к.пов.}} \rho(\vec{V} \cdot d\vec{A})\vec{V},$$

або в проекціях на вісь x і y одержуємо:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= \int \rho V_n V_x dA_{\text{ввлх}} - \int \rho V_n V_x dA_{\text{ввх}}, \\ \sum F_y &= \int \rho V_n V_y dA_{\text{ввлх}} - \int \rho V_n V_y dA_{\text{ввх}}. \end{aligned}$$

Нагадаємо, що у виразі $\sum \vec{F}$ або $\sum F_x$ і $\sum F_y$ для x і y напрямків входить *алгебраїчна сума* всіх сил, які діють із боку навколишнього середовища на речовину, що заповнює контрольний об'єм у цей момент часу. Сюди повинні бути включені сили, що діють на поверхнях, отриманих від перетинання контрольної поверхні з лопа-ткою.

Оскільки бічні поверхні струму $aa'd'd$ і $bb'c'c$ еквідистантні, то результуючі сили, що діють на них з боку навколишнього потоку, рівні за величиною і протилежні за знаком.

На торцеві поверхні $aa'b'b$ і $dd'c'c$ діють сили тиску p_1 й p_2 відповідно.

У проекції на напрямок y (нормальний до осі решітки) рівняння кількості руху записується у вигляді (прийнемо до уваги, що $V_n = V_y$)

$$\sum F_y = (p_1 - p_2)t - F_a = (\rho_2 V_{y2}^2 - \rho_1 V_{y1}^2)t.$$

$$\text{Звідси } F_a = t \left[(p_1 - p_2) + (\rho_1 V_{y1}^2 - \rho_2 V_{y2}^2) \right].$$

У проекції на напрямок x маємо

$$\sum F_x = t \rho_2 V_{y2} V_{x2} + t \rho_1 V_{y1} V_{x1} = F_u,$$

звідки $F_u = t\rho_1 V_{y1} (V_{x2} + V_{x1})$, тому що відповідно до рівняння безперервності $t\rho_1 V_{y1} = t\rho_2 V_{y2}$.

Згідно з третім законом Ньютона проекції сили, з якою потік, що перебуває в контрольному об'єму, діє на профіль одиничної довжини, будуть рівні за величиною, але протилежно спрямовані проєкціям сили F_a й F_u . Тобто $P_a = -F_a$, $P_u = -F_u$ (рис. 11.1).

Або, остаточно

$$P_a = t \left[(p_2 - p_1) + (\rho_2 V_{y2}^2 - \rho_1 V_{y1}^2) \right], \quad (11.1)$$

$$P_u = -t\rho_1 V_{y1} (V_{x1} + V_{x2}). \quad (11.2)$$

Рівняння (11.1) і (11.2) можна подати в іншій формі, виразивши сили P_u і P_a через циркуляцію швидкості Γ і параметри потоку на вході й виході з решіток.

Відповідно до рівняння нерозривності

$$\rho_1 V_{y1} = \rho_2 V_{y2} = \rho V_y,$$

де ρ – середня густина газу.

Швидкість V_y , що входить у цей вираз, визначимо як середню арифметичну швидкостей на вході й виході

$$V_y = \frac{V_{y1} + V_{y2}}{2}.$$

Легко показати, що при цьому

$$\rho = \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (11.3)$$

Останній вираз отримуємо з визначення середнього питомого об'єму газу

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right).$$

Циркуляція швидкості навколо профілю дорівнює

$$\Gamma = -t(V_{x1} + V_{x2}),$$

тому що циркуляції по еквідістантних лініях ad і bc однакові за величиною і протилежні за знаком. При цьому за позитивний прийнятий такий обхід, щоб область при обході залишалася завжди ліворуч.

Після простих перетворень із (11.2) і (11.1) одержуємо

$$P_u = \rho \cdot \Gamma \cdot V_y, \quad (11.4)$$

$$P_a = t \left[(p_2 - p_1) + \rho V_y (V_{y2} - V_{y1}) \right].$$

Скористаємося рівнянням енергії (3.12)

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2},$$

або

$$\frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \frac{V_{x2}^2 - V_{x1}^2}{2} + \frac{V_{y2}^2 - V_{y1}^2}{2}.$$

Звідси

$$\frac{V_{y2} + V_{y1}}{2} (V_{y2} - V_{y1}) = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) - \frac{V_{x2} - V_{x1}}{2} (V_{x1} + V_{x2}).$$

Прийmemo до уваги, що

$$\frac{V_{x2} - V_{x1}}{2} = V_x, \quad \frac{V_{y2} + V_{y1}}{2} = V_y.$$

Тоді

$$V_y (V_{y2} - V_{y1}) = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) - V_x (V_{x1} + V_{x2}).$$

Підставивши цей вираз у формулу для P_a , одержимо

$$P_a = t \left[(p_2 - p_1) + \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) \rho \right] + \rho \cdot \Gamma \cdot V_x. \quad (11.5)$$

Силу P_a зручно подати у вигляді суми двох сил

$$P_a = P_{a1} + \Delta P_a,$$

де

$$P_{a1} = \rho \cdot \Gamma \cdot V_x, \quad (11.6)$$

$$\Delta P_a = t \left[(p_2 - p_1) + \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) \rho \right]. \quad (11.7)$$

Результуючу сил P_{a1} і P_u позначимо через P_y , а загальну результуючу силу – через P (рис. 11.1).

Силу P_y визначимо за формулою

$$P_y = \sqrt{P_u^2 + P_{a1}^2}.$$

Підставивши сюди значення P_u і P_{a1} за рівняннями (11.4) і (11.6) одержимо

$$P_y = \rho \Gamma \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

Але

$$V_x^2 + V_y^2 = V^2,$$

де V – середня векторна швидкість.

Отже, вираз для P_y при обтіканні решітки має такий же вигляд, як і у випадку одиночного профілю

$$P_y = \rho \cdot \Gamma \cdot V. \quad (11.8)$$

Напрямок сили P_y перпендикулярний напрямку середньої векторної швидкості V . Це виходить з очевидної рівності

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{P_u}{P_{a1}}.$$

Отже, “сила Жуковського”, що діє на профіль решітки, дорівнює добутку середньої густини газу на циркуляцію швидкості навколо профілю і на середню векторну швидкість.

Напрямок сили P_y визначається поворотом вектора швидкості V на 90° у бік напрямку циркуляції.

Таким чином, встановили, що на відміну від одиночного профілю результуюча сила, що діє на профіль у решітках, дорівнює сумі сили Жуковського P_y й додаткової сили ΔP_a , перпендикулярної осі решітки

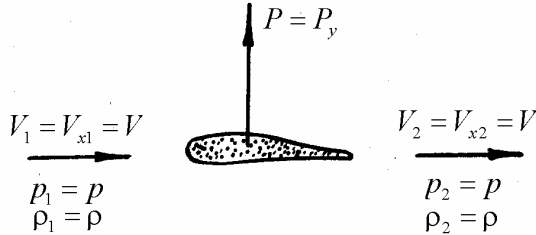
$$\vec{P} = \vec{P}_y + \Delta \vec{P}_a.$$

Важливо відзначити, що природа сил P_y і ΔP_a різна. У той час як сила P_y залежить від циркуляції потоку й обертається в нуль при $\Gamma = 0$, сила ΔP_a від циркуляції безпосередньо не залежить.

Сила, що діє на профіль, визначена для загального випадку руху газу. За допомогою отриманих загальних співвідношень неважко одержати величину аеродинамічної сили, яка діє на профіль, для деяких окремих випадків. Так, переходячи від решіток до одиночного профіля, збільшуючи крок решітки нескінченно, одержимо $p_2 = p_1$ і $\rho_2 = \rho_1$; тоді $\Delta P_a = P_u = 0$ і, отже, у випадку ізентропійного обтікання ізольованого профілю результуюча сила, що діє на профіль, дорівнює силі Жуковського

$$P = P_y = \rho \cdot \Gamma \cdot V$$

де ρ і V – густина і швидкість набігаючого потоку. Напрямок сили перпендикулярний напрямку швидкості набігаючого потоку.



Рівність $P_u = 0$ для поставленої задачі було отримано вперше Л. Ейлером в 1745 р. і незалежно від нього – в більш загальному вигляді – Д’Аламбером. Воно може здатися парадоксальним, тому що суперечить досліді. Однак варто мати на увазі, що цей результат отриманий у припущенні відсутності в’язкості й відриву потоку від поверхні обтічного контура. В дійсності завжди в якійсь мірі обидва ці фактори мають місце.

У практичному відношенні можна зробити висновок, що слід прагнути домагатися таких форм контуру, при яких забезпечувалися б безвідривне обтікання і найменші впливи сил в’язкості; у цьому випадку, очевидно, сила опору буде найменшою.

11.3. Обтікання решіток з довільних профілів

Розглянемо деякі особливості плоскої потенціальної течії ідеальної нестисливої рідини на прикладі обтікання реактивних решіток (рис. 11.3). Внаслідок періодичності потоку досить вивчити течію в одному міжлопатному каналі або обтікання одного профілю.

Найпростіший спосіб побудови плоскої потенціальної течії нестисливої рідини полягає в чисельному розв’язанні крайових задач

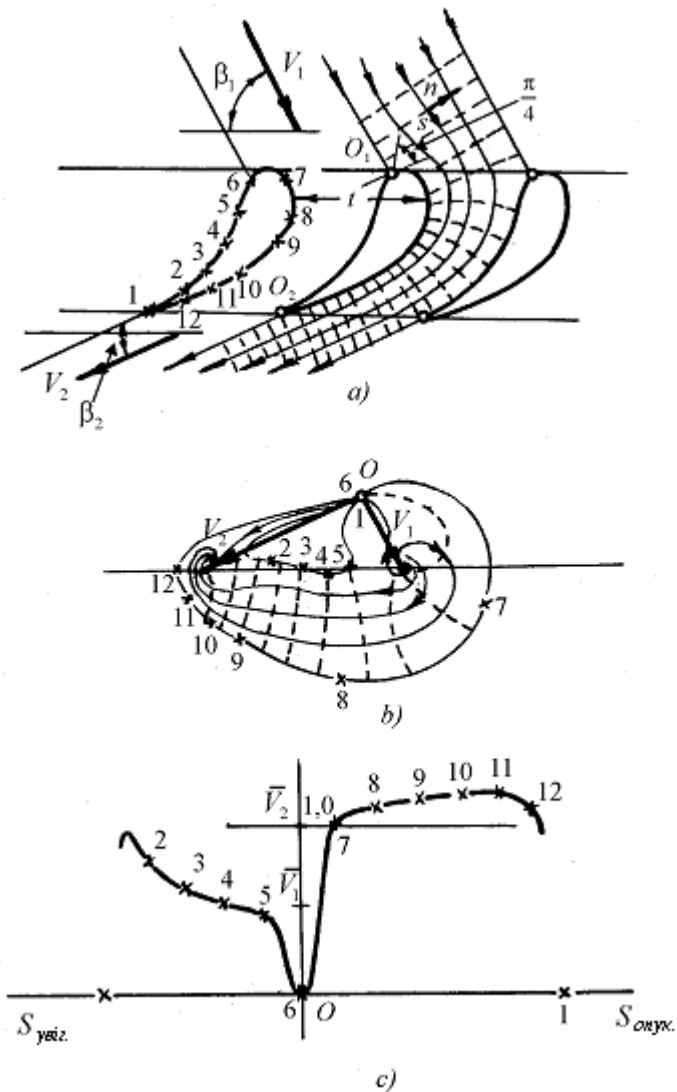


Рис. 11.3. Течія ідеальної нестисливої рідини через напрямні решітки:

- a) – лінії рівного потенціалу і лінії струму в решітках;
- b) – годограф швидкості;
- c) – розподіл відносних швидкостей по обводу профіля

для рівняння Лапласа щодо різних гармонійних функцій, пов'язаних з течією.

Рішення знаходять у всій області течії (для решіток - у смузі одного періоду) шляхом послідовних наближень із застосуванням різних варіантів відомого методу сіток.

На рис. 11.3 суцільними кривими зображені лінії струму $\psi = const$; пунктирними кривими показані ізопотенціальні лінії $\phi = const$, нормальні до ліній струму.

Досить густа мережа цих ліній добре характеризує течію.

Поєднані гармонійні функції $\phi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ задовольняють в області течії рівнянням Лапласа:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0, \quad (11.9)$$

еквівалентним рівнянням нерозривності й відсутності вихорів.

Для рівняння Лапласа найбільш часто зустрічаються наступні *крайові задачі*.

Перша крайова задача (задача Діріхле). На контурі Γ , що обмежує область G (рис. 11.4) задана безперервна функція $u(P) = u(x, y)$.

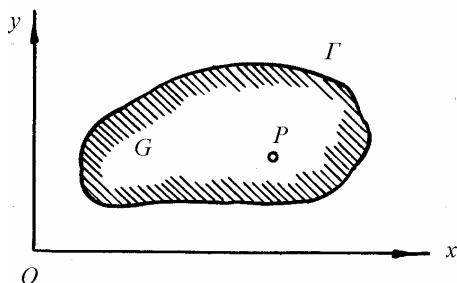


Рис. 11.4. До визначення крайових задач

Потрібно знайти функцію $\psi(P) = \psi(x, y)$, що задовольняє усередині G рівнянню (11.9) і приймає на границі задані значення $u(P)$, тобто повинні бути виконані умови

$$\begin{aligned}\Delta\psi(P) &= 0 \quad \text{при } P \in G, \\ \psi(P) &= u(P) \quad \text{при } P \in \Gamma.\end{aligned}$$

Друга крайова задача (задача Неймана). На контурі Γ , що обмежує область G , задана безперервна функція $u_1(P)$. Потрібно знайти функцію $\varphi(P) = \varphi(x, y)$, що задовольняє усередині G рівнянню (11.9), нормальна похідна якої на Γ приймає задані значення $u_1(P)$, тобто потрібно, щоб

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(P) &= 0 \quad \text{при } P \in G, \\ \frac{\partial\varphi(P)}{\partial n} &= u_1(P) \quad \text{при } P \in \Gamma.\end{aligned}$$

Третя крайова задача – змішана. За методом сіток рівняння (11.9) записуються у формі кінцевих різностей. Для одержання кінцево-різницевого рівняння, що відповідає рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0,$$

досить, вибравши крок $h > 0$, замінити похідні $\partial^2\varphi/\partial x^2$ і $\partial^2\varphi/\partial y^2$ відношення кінцевих різностей за формулами

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} &\approx \frac{\varphi(x+h, y) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x-h, y)}{h^2}, \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} &\approx \frac{\varphi(x, y+h) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x, y-h)}{h^2}.\end{aligned}$$

Тоді будемо мати

$$\frac{\varphi(x+h, y) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x-h, y)}{h^2} + \frac{\varphi(x, y+h) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x, y-h)}{h^2} = 0.$$

Отже, одержимо

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} [\varphi(x+h, y) + \varphi(x-h, y) + \varphi(x, y+h) + \varphi(x, y-h)] \quad (11.10)$$

і аналогічно

$$\psi(x, y) = \frac{1}{4} [\psi(x+h, y) + \psi(x-h, y) + \psi(x, y+h) + \psi(x, y-h)], \quad (11.11)$$

де h – обраний розмір сторони клітки.

Розрахунок за методом сіток починається з вибору функцій $\varphi_0(x, y)$ або $\psi_0(x, y)$ вихідного (нульового) наближення. Для цього в області течії (у смугі одного періоду решітки) наноситься мережа ліній струму $\psi = const$ й еквіпотенціальних ліній $\varphi = const$ (рис. 11.3а). Дотичні до ліній струму збігаються з напрямками векторів швидкості; еквіпотенціальні лінії перетинають лінії струму під прямим кутом. Виключення являють критичні точки O_1 , в яких лінія струму, що розгалужується на гладкому контурі, підходить до нього під прямим кутом, а еквіпотенціальна лінія – під кутом $\pi/4$ (рис. 11.3,а). Якщо, як це звичайно роблять, лінії струму й еквіпотенціальні лінії наносять через рівні постійні значення $\Delta\varphi = \Delta\psi = const$, то мережа течії, що утвориться, повинна бути квадратною.

Нарешті, відповідно до визначення потенціалу швидкості й функції струму, проекції швидкості на осі координат

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

а величина швидкості

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\psi}{dn},$$

де похідні $\frac{d}{ds}$ і $\frac{d}{dn}$ беруться відповідно по дотичній до лінії струму (s) або по нормалі до неї (n).

Задача визначення $\varphi(x, y)$ зводиться в кожному наближенні до задачі Неймана, а задача визначення $\psi(x, y)$ – до задачі Діріхле.

Метод сіток допускає зручну реалізацію на електронних рахункових машинах, тому що застосування його звичайно зводиться до масової повторюваності однорідних циклів.

Велике значення має можливо більш точне прийняття першого наближення, пов'язаного з побудовою квадратної мережі ліній $\psi_0 = const$ і $\varphi_0 = const$. Відомі різні способи графічного уточнення цієї мережі, які доцільно застосувати для прискорення наступних розрахунків. Нехай приблизно побудована якась (обов'язково ортогональна) мережа (рис. 11.5), що повинна бути квадратною. Для її уточнення можна скористатися тим, що мережа, складена діагоналями квадратної мережі, теж повинна бути квадратною. Проведемо діагоналі всіх осередків мережі (ці діагоналі, загалом кажучи, повинні бути криволінійними й плавно переходити з осередку в осередок). Розглядаючи точки перетинання діагоналей (відзначені кружками на рис. 11.5) як точки нової мережі, побудуємо на них ще одну діагональну мережу, вузли якої й дадуть шукане уточнення лінії

струму початкової мережі (штрих - пунктир на рис. 11.5). Повторення цього процесу, яке варто робити на новому кресленні, звичайно дає цілком задовільну мережу течії для початкового наближення розрахунків за методом сіток.

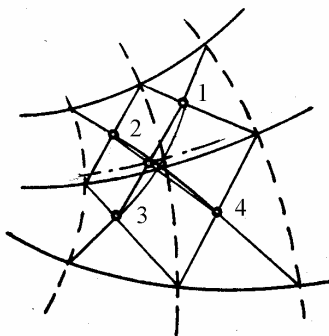


Рис. 11.5. До побудови ортогональних мереж

Іншою важливою характеристикою течії є план швидкостей, або годограф швидкості (рис. 11.3, *b*).

Кожній лінії струму й ізопотенціальній лінії відповідає в площині годографа геометричне місце кінців векторів швидкості на цій лінії. Відповідні геометричні місця в площині годографа також утворюють ортогональну мережу, яку можна вважати мережею деякої течії в площині годографа, обмеженої геометричним місцем кінців векторів швидкості на поверхні профілю і викликаної так званим вихороджерелом наприкінці вектора швидкості V_1 на нескінченності до решітки і вихоростоком наприкінці вектора швидкості V_2 за решіткою. Точки O_1 , V_1 і V_2 утворюють трикутник швидкості решітки. На підставі рівності витрат рідини до й за решіткою

$$\rho \cdot V_1 t \cdot \sin \beta_1 = V_2 t \cdot \sin \beta_2 \cdot \rho$$

виходить, що проєкції швидкостей V_1 і V_2 на нормаль до фронту (осі) решітки рівні або що пряма, яка проходить через кінці векторів

V_1 і V_2 в площині годографа, паралельна фронту решітки.

Великий інтерес являє розподіл швидкості або тиску на поверхні профілю. На рис. 11.3,с показаний приблизний розподіл швидкостей $\bar{V} = V/V_2$ у функції довжини дуги профілю S . Розподіл швидкостей у точках обводу профілю істотно залежить від форми ввігнутої й опуклої поверхонь і ступеня звуження каналу, а також геометричних і режимних параметрів решітки.

Збільшення кривизни на опуклих ділянках профілю приводить до збільшення швидкості і навпаки. При стрибкоподібній зміні кривизни, наприклад у точках сполучення дуг кіл, теоретичні криві розподілу швидкостей зазнають розриву. Внаслідок цього обводи профілю сучасних решіток виконують з плавно змінюючою кривизною.

11.4. Розрахунок потенціального потоку в решітках по теорії каналу

У наш час розроблені методи розрахунку потенціального потоку в решітках, що використовують апарат функцій комплексного змінного. Методи розрахунку потенціального обтікання ідеальною нестисливою рідиною плоских решіток можуть бути розділені на методи, засновані на конформному перетворенні області течії й на методи розв'язання задач, що приводять до інтегральних рівнянь, записуваних щодо потенціалу швидкості або комплексної швидкості (М.И. Жуковский “Аэродинамический расчёт потока в осевых турбомашинах”, Машиностроение, Л., 1967; Г.С. Самойлович, В.В. Нитусов “Сборник задач по гидроаэродинамике”, Машиностроение, М., 1986). Наближена оцінка впливу стисливості робочого тіла проводиться за допомогою співвідношень, запропонованих С.А. Христиановичем. Ці методи виявилися досить громіздкими.

Розроблені також значно більш прості методи розрахунку, що дозволяють із достатньою точністю розв'язувати пряму й зворотну задачі, засновані на теорії каналу. До теперішнього часу відомо кілька методів розрахунку решіток за теорією каналу. Одним з перших був запропонований метод Г. Флюгеля, розвинутий пізніше Г.Ю.Степановим.

Розглянемо трохи видозмінений метод А.Н.Шерстюка й Г.С.Самойловича.

Дослідним шляхом вони одержали формулу

$$\frac{V}{V_{on.}} = \frac{1}{1 + \bar{z}} + \frac{\bar{z}}{\bar{h}} \frac{r}{1 + \bar{h}}, \quad (11.12)$$

$$\text{де } r = \frac{\bar{h}}{2 + \bar{h}} \left(1 - \frac{1 + \bar{h}}{\bar{R}_{y\bar{v}i\bar{z}}} \right), \quad \bar{z} = \frac{z}{R_{onuk}}, \quad \bar{R}_{y\bar{v}i\bar{z}} = \frac{R_{y\bar{v}i\bar{z}}}{R_{onuk}}, \quad \bar{h} = \frac{h}{R_{onuk}}.$$

Координата z змінюється від 0 до h (рис. 11.6).

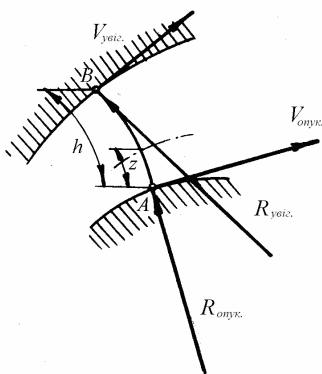


Рис. 11.6. До розрахунку потенційного потоку в решітках по теорії каналу
Об'ємна витрата

$$Q = \int_0^h V \cdot dz, \quad \frac{Q}{R_{onuk.}} = \int_0^{\bar{h}} V \cdot d\bar{z}.$$

Підставляючи сюди значення V з (11.12), маємо

$$\frac{Q}{R_{\text{вып}}} = V_{\text{вып}} \left[\int_0^{\bar{h}} \frac{d\bar{z}}{1+\bar{z}} + \int_0^{\bar{h}} \left(1 - \frac{1+\bar{h}}{\bar{R}_{\text{гог}}} \right) \frac{\bar{z}d\bar{z}}{(1+\bar{h})(2+\bar{h})} \right].$$

Звідси

$$\begin{aligned} \frac{Q}{V_{\text{вып}} R_{\text{вып}}} &= \ln(1+\bar{h}) + \left(1 - \frac{1+\bar{h}}{\bar{R}_{\text{гог}}} \right) \frac{\bar{h}^2}{2(1+\bar{h})(2+\bar{h})} = \\ &= \ln(1+\bar{h}) + \frac{\bar{h}^2}{2(1+\bar{h})(2+\bar{h})} - \frac{\bar{h}^2}{2\bar{R}_{\text{гог}}(2+\bar{h})}. \end{aligned}$$

Розрахунки показують, що

$$\ln(1+\bar{h}) + \frac{\bar{h}^2}{2(1+\bar{h})(2+\bar{h})} \approx \frac{\bar{h}}{1+0,29\bar{h}}.$$

З огляду на останнє і розділивши праву й ліву частини рівняння на $\bar{h} = h/R_{\text{вып}}$, одержуємо

$$\frac{Q}{V_{\text{вып}} R_{\text{вып}} h/R_{\text{вып}}} = \frac{1}{1+0,29\bar{h}} - \frac{\bar{h}}{2(2+\bar{h})\bar{R}_{\text{гог}}}.$$

Позначимо $\frac{Q}{h} = V_{\text{сп}}$.

Тоді одержимо

$$\frac{V_{\text{сп}}}{V_{\text{вып}}} = \frac{1}{1+0,29\bar{h}} - \frac{\bar{h}}{2(2+\bar{h})\bar{R}_{\text{гог}}}.$$

Помножуючи чисельник і знаменник на критичну швидкість звуку a_* одержуємо вираз для безрозмірної швидкості на опуклій поверхні профілю

$$\lambda_{\text{вып}} = \frac{\lambda_{cp}}{\frac{1}{1 + 0,29\bar{h}} - \frac{\bar{h}}{2(2 + \bar{h})\bar{R}_{\text{гоз}}}}. \quad (11.13)$$

Для визначення λ_{cp} , перейшовши до решітки турбомашин з параметрами на виході V_2 , λ_2 , ρ_2 , запишемо рівняння нерозривності

$$\rho_2 \cdot V_2 \cdot A_2 = V_{cp} \cdot \rho_{cp} \cdot h.$$

Розділивши обидві частини рівності на $\rho_* \cdot V_*$, одержуємо

$$\frac{\rho_2 \cdot V_2}{\rho_* \cdot a_*} \cdot A_2 = \frac{V_{cp} \cdot \rho_{cp}}{\rho_* \cdot a_*} \cdot h.$$

Або

$$q_{cp} = q_2 \frac{A_2}{h}, \quad (11.14)$$

де q_2 – приведена витрата в геометричному горлі лопатного каналу;

A_2 – величина геометричного горла каналу;

Використовуючи (3.27), маємо вираз

$$q_{cp} = q_2 \frac{A_2}{h} = \lambda_{cp} \left[\left(\frac{k+1}{2} \right) \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{cp}^2 \right) \right]^{\frac{1}{k-1}}.$$

Шукане значення λ_{cp} визначається за допомогою цієї формули або за допомогою таблиць газодинамічних функцій за обчисленим значенням q_{cp} .

Підстановкою значення $\bar{z} = \bar{h}$ у формулу (11.12), одержуємо розподіл швидкостей на ввігнутій стінці каналу

$$\begin{aligned} \frac{V_{\text{гоз}} a_*}{V_{\text{бын}} a_*} &= \frac{\lambda_{\text{гоз}}}{\lambda_{\text{бын}}} = \frac{1}{1 + \bar{h}} + \frac{\bar{h}}{(1 + \bar{h})(2 + \bar{h})} - \frac{\bar{h}}{(2 + \bar{h})\bar{R}_{\text{гоз}}} = \\ &= \frac{2\bar{R}_{\text{гоз}} + \bar{h}\bar{R}_{\text{гоз}} + \bar{h}\bar{R}_{\text{гоз}} - \bar{h} - \bar{h}^2}{(1 + \bar{h})(2 + \bar{h})\bar{R}_{\text{гоз}}} = \frac{2\bar{R}_{\text{гоз}}(1 + \bar{h}) - \bar{h}(1 + \bar{h})}{(1 + \bar{h})(2 + \bar{h})\bar{R}_{\text{гоз}}} = \\ &= \frac{2\bar{R}_{\text{гоз}} - \bar{h}}{(2 + \bar{h})\bar{R}_{\text{гоз}}} = 2\bar{R}_{\text{гоз}} \left(1 - \frac{\bar{h}}{2\bar{R}_{\text{гоз}}}\right) \bigg/ \left[2\bar{R}_{\text{гоз}} \left(1 - \frac{\bar{h}}{2}\right)\right] = \frac{1 - \frac{h}{2R_{\text{гоз}}}}{1 + \frac{h}{2R_{\text{бын}}}}, \end{aligned}$$

тому що $\bar{R}_{\text{гоз}} = \frac{R_{\text{гоз}}}{R_{\text{бын}}}$.

Або остаточно

$$\lambda_{\text{гоз}} = \lambda_{\text{бын}} \frac{1 - \frac{h}{2R_{\text{гоз}}}}{1 + \frac{h}{2R_{\text{бын}}}}. \quad (11.15)$$

Задача обтікання решітки може бути успішно зведена до розрахунку потоку в каналі тільки при помірних значеннях відносного кроку. Крім того, теорія каналу дає можливість розрахунку потоку тільки в міжлопатному каналі; в області вхідної ділянки спинки й у косому зрізі необхідно використати додаткові прийоми, і точність розрахунку на цих ділянках знижується.

При розрахунку потоку на вході й у косому зрізі решітки необхідно з відомим наближенням визначити граничні лінії струму. У найпростішому випадку граничні лінії струму перед і за решіткою можуть бути вибрані у вигляді відрізків прямих ліній (рис. 11.7) Напрямок цих ліній на вході в решітку заданий (кут β_1), а на виході він може бути визначений одним з відомих методів.

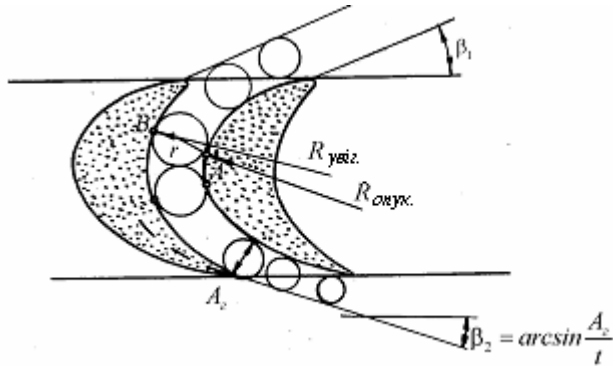


Рис. 11.7. Вибір граничних ліній струму при розрахунку потенціального потоку в решітках за теорією каналу

Методика розрахунку швидкості зводиться до наступного:

1. У канал вписуються кола (рис. 11.7). Через точки дотику цих кіл до стінок каналу A і B проводяться екіпотенціальні лінії $h = 2r$. Визначаються радіуси кривих межових ліній у точках A і B ($R_{\text{внут.}}$ і $R_{\text{вн.}}$).

2. Для кожної екіпотенціальної лінії обчислюють безрозмірні геометричні параметри

$$\bar{h} = \frac{2r}{R_{\text{вн.}}}, \quad \bar{R}_{\text{внут.}} = \frac{R_{\text{внут.}}}{R_{\text{вн.}}}.$$

3. Визначаються параметри газу на виході із решітки $\lambda_2 = V_2/a_*$; приведена витрата $q_2 = q(\lambda_2)$ знаходиться по таблицях газодинамічних функцій.

4. Визначаються середні приведені витрати q_{cp} по формулі (11.14) і $\lambda_{\text{cp}} = \lambda(q_{\text{cp}})$ по таблицях газодинамічних функцій.

5. Швидкість (безрозмірна, а по ній – розмірна) у точці A визначається за формулою (11.13).

6. Швидкість газу в точці B визначається співвідношенням (11.15).

Описаний вище метод справедливий для розрахунку стисливої і нестисливої рідини при дозвуковій течії.

11.5. Профілювання дозвукових профілів

Як правило, дозвукові профілі можуть формувати периферійну ділянку соплових лопаток і прикореневу область робочої лопатки. Один зі способів побудови дозвукових профілів, а також дозвукової частини реактивних трансзвукових і надзвукових профілів заснований на використанні наведених вище формул розрахунку потенційної течії в криволінійних каналах.

Для цього необхідно задатися найвигіднішим розподілом по обводу профілю (рис. 11.8,*a*), а також плавним законом зміни h (або, що одне й те ж, зміною діаметрів вписаних у канал кіл) (рис. 11.8,*b*).

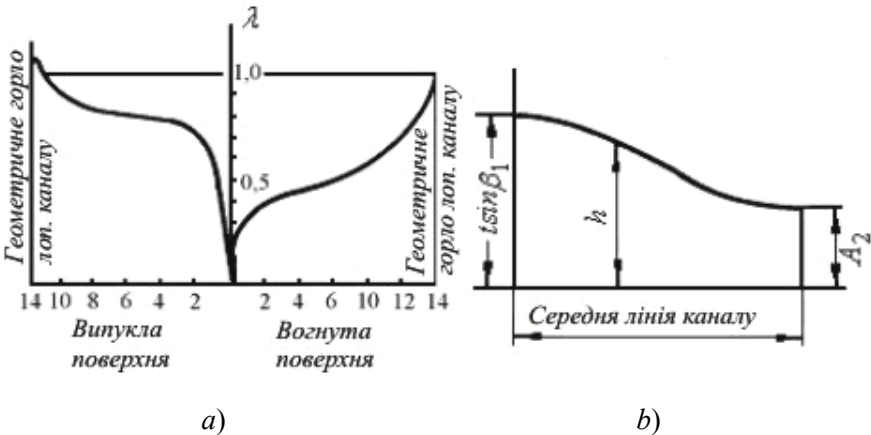


Рис. 11.8. До профілювання дозвукових профілів

Однак цей спосіб не дуже вдалий, тому що не завжди вдається замкнути профіль.

Досить широко використовується лемніскатний метод побудови дозвукових профілів (М.Е. Дейч, Г.А. Филиппов, Л.Я. Лазарев «Атлас профилей решеток новых турбин», 1965 г.).

Рівняння лемніскати Бернуллі

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

забезпечує плавну зміну обводів профілю.

Змінюючи масштаб координати

$$y' = ky,$$

можна зміщувати точку E (рис. 11.9) по прямій $x = 0,625a$ (де a – відстань від початку координат до перетину лемніскати з віссю x), забезпечуючи бажану форму профілів. На вигнутій поверхні лемніската може бути замінена дугами кіл. При побудові випуклої поверхні елемент її, що перебуває в межах косою зрізу, можна добудувати по прямій лінії. Радіуси вхідної й вихідної кромки вибираються конструктивно.

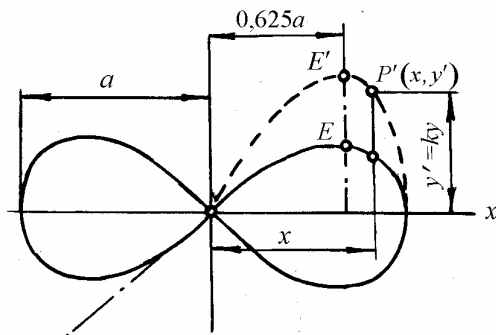


Рис. 11.9. Побудова дозвукових профілів за допомогою лемніскати Бернуллі

Цей спосіб дозволяє побудувати профіль практично для будь-якого ступеня реактивності.

Часто для розрахунків потоків стисливої рідини використовують формули й методи розрахунку нестисливої рідини. При цьому ґрунтуються на методі малих збурювань:

(i) збільшують у масштабі $1/\sqrt{1-M_\infty^2}$ кути входу й виходу

$$tg\beta_1^n = tg\beta_1 / \sqrt{1-M_\infty^2};$$

(ii) утовщують профіль $b_n = b / \sqrt{1-M_\infty^2}$;

(iii) крок і хорду профілю залишають незмінними

(M_∞ – число M потоку, що набігає).

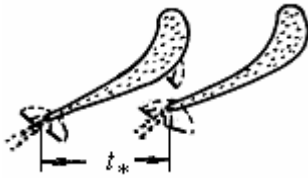
11.6. Структура потоку в реактивних решітках при

білязвукових і надзвукових швидкостях

У реактивних решітках швидкості на вході білязвукові; перехід до надзвукових швидкостей відбувається в міжлопатному каналі.

У багатьох випадках перехід у білязвукову область супроводжується значною зміною характеристик решіток. У цьому зв'язку необхідно знати критичне число $M_{кр}$, при якому в решітках з'являються місцеві області надзвукових швидкостей. Для решіток існує такий крок t_* , при якому звукові швидкості досягаються одночасно біля спинки і в області кромки. Значення $M_{кр}$ для решіток, положення і довжина надзвукової області залежать від форми профілю (кривизни вихідної ділянки спинки, товщини і форми кромки). Зі збільшенням $M_2 > M_{кр}$ надзвукова область збільшується і границя її зміщається усередину каналу.

При числі $M_2 \approx 1$ лінія переходу приблизно збігається з вузьким перетином каналу і надзвукова область на спинці профілю з'єд-



нується з областю надзвукових швидкостей за вихідною кромкою. При цьому $p_2/p_0 = \varepsilon_2 = \varepsilon_*$.

При закритичних перепадах тисків у решітках у зоні вузького перетину міжлопатного каналу встановлюється критична швидкість. У дійсності внаслідок нерівномірності потоку в каналі й впливу в'язкості поверхня переходу має деяку кривизну і зміщується проти потоку. За вихідною кромкою тиск нижче критичного $\varepsilon_2 < \varepsilon_*$, тому при обтіканні кромки в косому зрізі сопла поширюється хвиля розрідження ABC (рис. 11.10,*a*). У первинно відбитих від спинки профілю хвилях розрідження потік перерозширюється. Перерозширення потоку “виправляється” стрибком ущільнення FC і його відбиттям на спинці профілю в косому зрізі.

Граничні струмки газу, що сходять із ввігнутої і випуклої поверхонь профілю, зближаються і на деякій відстані за кромкою різко повертаються. Виникає стрибок FH (рис. 11.10,*a*).

Зі збільшенням перепаду тисків збільшується довжина й інтенсивність первинної хвилі розрідження, точка падіння косоного стрибка FC на спинку профілю (точка C) зміщується по потоку.

Розширення потоку в косому зрізі решіток закінчується при відношенні тисків $\varepsilon_2 = \varepsilon_s$; можна вважати граничним такий режим, при якому первинний стрибок потрапляє в точку D (рис. 11.10,*b*). У цьому випадку замість трьох стрибків утворюються тільки два: відбиті стрибки CP зливається із кромочним FH .

При зменшенні тиску $\varepsilon_2 < \varepsilon_s$ первинний стрибок FC потрапляє в надзвукову частину кромочного сліду (рис. 11.10,*c*). При цьому обтікання вихідної кромки профілю і кромочний тиск визначаються

тільки геометричними параметрами решіток і не залежать від протитиску.

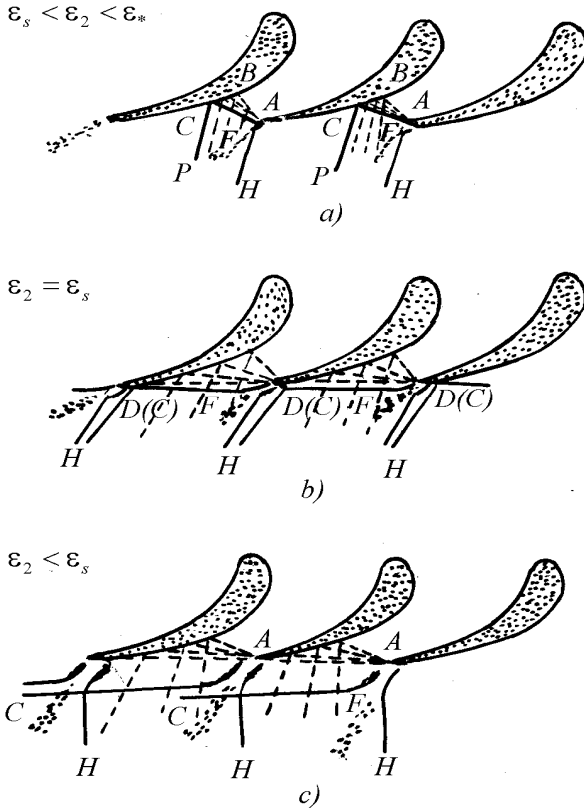


Рис. 11.10. Схеми течії газу в напрямних решітках при надзвукових швидкостях

11.7. Профілювання надзвукових профілів

Косий зріз доцільно проектувати так, щоб забезпечити збільшення прохідних перетинів надзвуковому потоку, що розширюється.

Найбільш строге рішення можна одержати, якщо, при забезпеченні течії Прандтля–Майєра в косому зрізі за граничні умови при-

$$\gamma = \beta_2 - \delta + 90^\circ,$$

де δ визначається за формулою (7.18) або (7.20)

$$\delta = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k-1}{k+1} (M_2^2 - 1)} - \operatorname{arctg} \sqrt{M_2^2 - 1},$$

$$\delta = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\lambda_2^2 - 1}{k+1} - \lambda_2^2} - \operatorname{arctg} \sqrt{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}.$$

За теоремою синусів із трикутника ABC маємо

$$\frac{r_2}{\sin \beta_2} = \frac{(t - \Delta)}{\sin(180^\circ - \alpha_2)} = \frac{(t - \Delta)}{\sin \alpha_2}.$$

Використовуючи формулу Прандтля–Майєра (7.23), маємо

$$r_2 = r_0 \sqrt{\left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right) \right]^{\frac{k+1}{k-1}}}.$$

Підставляючи останній вираз для r_2 в отримане вище за теоремою синусів, одержуємо

$$r_0 = \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_2} \frac{(t - \Delta)}{\sqrt{\left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right) \right]^{\frac{k+1}{k-1}}}}. \quad (11.16)$$

Розбиваючи v на кінцеве число кутів можна побудувати поверхню профілю в косому зрізі по лінії струму в течії Прандтля–Майєра за формулою (7.23).

Для виконання граничних умов напрямок дозвукової поверхні від вихідної кромки варто виконати під кутом

$$\beta'_2 = \beta_2 - \delta.$$

Однак при цьому виходить уступ, не бажаний з технологічних міркувань при виготовленні лопатки. Тому часто йдуть на відступ від прийнятих граничних умов з метою забезпечення клинчастої вихідної кромки. Напрямок дозвукової поверхні виконується під кутом

$$\beta'_2 = \beta_2 + (0 \div 2)^\circ. \quad (11.17)$$

При такій побудові геометричне горло лопатного каналу зміщується вверх по потоку. Найкращим його положенням є положення, найближче до вихідної кромки.

Для забезпечення заданих розмірів геометричного горла членування елемента профілю в косому зрізі, виконаного по лінії струму в течії Прандтля–Майєра, з дозвуковим елементом варто здійснити дугою кола з досить великим радіусом. Цю сполучну дугу варто проводити не із точки H , що відповідає кінцю вектора r_0 , а із точки D , що перебуває на кінці вектора r_1 , підрахованого по формулі (7.23) для значення v_1 , обчисленого для $\delta_1 = 1^\circ$. Дуга повинна проходити із точки D через кінець відрізка A_2 , що проведений через точку H перпендикулярно лінії, що виходить із точки A і формує вихідну кромку профілю. При такій побудові виходить деяка початкова розбіжна ділянка надзвукового каналу $adDA$, де відбувається часткове спрацьовування теплоперепаду, що приходить на косий зріз. Інша його частина спрацьовується в косому зрізі, обмеженому по лінії в течії Прандтля–Майєра.

Таке формування лопатного каналу поліпшує характеристики профілю в умовах змінного режиму витікання.

Дозвукова частина лопатного каналу будується за методом профілювання дозвуків профілів.

Решітки профілів з більшим кутом виносу і кроковим відношенням, близьким до одиниці, будують також по описаній тут методиці, а дозвукова частина лопатного каналу будуються шляхом сполучення відрізків дуг і прямих ліній так, щоб радіуси кіл, вписаних у лопатний канал, плавно зменшувалися в міру наближення до критичного перетину.

Підбір дуг для оформлення дозвуків елементів профілю варто здійснити так, щоб радіуси їх кривизни збільшувалися в міру наближень до геометричного горла лопатного каналу. Для профілів, у яких лінія кістяка близька до прямолінійної, найвигіднішим є нульовий кут атаки. При криволінійній лінії кістяка профілю, що має різке нарощування товщини поблизу вхідної кромки, доцільно забезпечувати деякий кут атаки близько $2 \div 3^\circ$, а іноді й до $10 \div 15^\circ$ у бік випуклості профілю.

Питання для самоперевірки

1. Наведіть класифікацію решіток турбомашин.
2. Виведіть теорему М.Є. Жуковського для решіток профілів.
3. Зробіть розрахунок потенційного потоку в решітках за теорією каналу.
4. Опишіть структуру потоку в реактивних решітках при білязвуківих і надзвуківих швидкостях.
5. Опишіть викладені в главі методи профілювання до- і надзвуківих профілів.
6. Поясніть, як і чому яхта може рухатися проти вітру.

Список літератури

1. Аржаников Н.С., Мальцев В.Н. Аэродинамика.–М: Оборонгиз, 1952.
2. Борисенко А.И. Газовая динамика двигателей.–М: Оборонгиз, 1962.
3. Дейч М.Е. Техническая газодинамика.–М: Энергия, 1974.
4. Дейч М.Е., Зарянкин А.Е. Гидрогазодинамика.–М.: Энергоатомиздат, 1984.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.–М.: Наука, 1970.
6. Прандль Л., Титъенс О. Гидро- и аэродинамика.–М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935.
7. Самойлович Г.С. Гидрогазодинамика.–М.: Машиностроение, 1990.
8. Самойлович Г.С., Нитусов В.В. Сборник задач по гидро-аэромеханике.–М.: Машиностроение, 1986.
9. Ascher H. Shapiro. “The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow”, The Ronald Press Company, New York, 1953.
10. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика.–М.: Наука, 1964.

ДОДАТОК

Деякі відомості щодо одиниць виміру

Тиск:

$$1 \text{ } \ddot{I} \text{ } \grave{a} = 1 \text{ } \acute{I} \text{ } / \grave{i}^2 = 10^{-5} \text{ } \grave{a} \grave{a} \grave{\delta}; \quad 1 \text{ } \grave{a} \grave{a} \grave{\delta} = 10^5 \text{ } \acute{I} \text{ } / \grave{i}^2 = 10^5 \text{ } \ddot{I} \text{ } \grave{a};$$

$$1 \text{ бар} = 0,986923 \text{ атм} = 750,062 \text{ мм.рт.ст.};$$

$$1 \text{ атм} = 1,01325 \text{ бар} = 0,101325 \text{ МПа} = 760 \text{ мм.рт.ст.};$$

$$1 \text{ psia} = 0,06895 \text{ бар}.$$

Температура:

$$0 \text{ K} = -273,15 \text{ } ^\circ\text{C} = -459,7 \text{ F} = 0 \text{ R};$$

$$1 \text{ } ^\circ\text{C} = 1 \text{ K} = 1,8 \text{ F} = 1,8 \text{ R};$$

$$\text{R} = \text{F} + 459,7; \quad \text{F} = 1,8 \times \text{ } ^\circ\text{C} + 32; \quad \text{ } ^\circ\text{C} = (\text{F} - 32) / 1,8;$$

Довжина:

$$1 \text{ foot} = 0,3048 \text{ м}; \quad 1 \text{ inch} = 25,4 \text{ мм}.$$

Маса:

$$1 \text{ lbt} = 0,45359 \text{ } \acute{e} \grave{a}.$$

Для повітря:

$$R = 287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{K}} = 287 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{K}}; \quad 1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$$c_p = 1004,5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{K}}; \quad c_v = 717,5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{K}}.$$

Стандартні умови для сухого повітря:

$$T = 288,15 \text{ K}; \quad t = 15 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad \text{або } 59 \text{ F}, \quad \text{або } 518,7 \text{ R};$$

$$p = 1,01325 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1 \text{ атм} = 0,101325 \text{ МПа}; \quad \rho = 1,23 \text{ кг/м}^3.$$

Деякі відомості з векторного аналізу

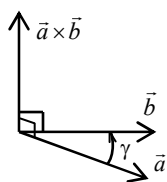
$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}.$$

Скалярний добуток двох векторів – скаляр

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

Векторний добуток двох векторів – вектор

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{j} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \\ &+ \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \vec{i} (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \vec{j} (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \\ &+ \vec{k} (a_1 b_2 - a_2 b_1); \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \gamma. \end{aligned}$$



Позначимо \vec{V} – вектор швидкості

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k};$$

ρ – скалярна функція.

Тоді

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad - \quad \text{скаляр},$$

$$\operatorname{grad} \rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \vec{k} \quad - \quad \text{вектор}.$$

Диференціальний оператор “набла”

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k};$$

$$\text{grad } \rho = \vec{\nabla} \rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \vec{k}.$$

Диференціальний оператор “дельта”

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

який називають оператором Лапласа.

$$\Delta \rho = \nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = 0 \text{ – рівняння Лапласа.}$$

Вираз зліва називають Лапласіаном ρ .

$$\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\text{div}(\text{grad } \rho) = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2};$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad } \rho, \end{aligned}$$

тобто

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad } \rho.$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Диференціальні операції другого порядку:

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} a^2 = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + \vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{a};$$

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b};$$

$$\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + \vec{a} \cdot \operatorname{div} \vec{b} - \vec{b} \cdot \operatorname{div} \vec{a};$$

$$\operatorname{grad} \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + \vec{b} \times \operatorname{rot} \vec{a} + \vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{b}.$$

Таблиця 1– Газодинамічні функції одномірного ізентропійного потоку ідеального газу ($k = 1,4$)

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
0	0	1,00000	1,00000	1,00000	∞	∞
,01	,01096	,99993	,99995	,99998	57,874	57,870
,02	,02191	,99972	,99980	,99992	28,942	28,934
,03	,03286	,99937	,99955	,99982	19,300	19,288
,04	,04381	,99888	,99920	,99968	14,482	14,465
,05	,05476	,99825	,99875	,99950	11,5915	11,5712
,06	,06570	,99748	,99820	,99928	9,6659	9,6415
,07	,07664	,99658	,99755	,99902	8,2915	8,2631
,08	,08758	,99553	,99680	,99872	7,2616	7,2291
,09	,09851	,99435	,99596	,99838	6,4613	6,4248
,10	,10943	,99303	,99502	,99800	5,8218	5,7812
,11	,12035	,99157	,99398	,99758	5,2992	5,2546
,12	,13126	,98998	,99284	,99714	4,8643	4,8157
,13	,14216	,98826	,99160	,99664	4,4968	4,4440
,14	,15306	,98640	,99027	,99610	4,1824	4,1255
,15	,16395	,98441	,98884	,99552	3,9103	3,8493
,16	,17483	,98228	,98731	,99490	3,6727	3,6076
,17	,18569	,98003	,98569	,99425	3,4635	3,3943
,18	,19654	,97765	,98398	,99356	3,2779	3,2046
,19	,20738	,97514	,98217	,99283	3,1122	3,0348
,20	,21822	,97250	,98027	,99206	2,9635	2,8820
,21	,22904	,96973	,97828	,99125	2,8293	2,7437
,22	,23984	,96685	,97621	,99041	2,7076	2,6178
,23	,25063	,96383	,97403	,98953	2,5968	2,5029
,24	,26141	,96070	,97177	,98861	2,4956	2,3975
,25	,27216	,95745	,96942	,98765	2,4027	2,3005
,26	,28291	,95408	,96699	,98666	2,3173	2,2109
,27	,29364	,95060	,96446	,98563	2,2385	2,1279
,28	,30435	,94700	,96185	,98456	2,1656	2,0508
,29	,31504	,94329	,95916	,98346	2,0979	1,9789
,30	,32572	,93947	,95638	,98232	2,0351	1,9119
,31	,33638	,93554	,95352	,98114	1,9765	1,8491
,32	,34701	,93150	,95058	,97993	1,9218	1,7902
,33	,35762	,92736	,94756	,97868	1,8707	1,7348
,34	,36821	,92312	,94446	,97740	1,8229	1,6828
,35	,37879	,91877	,94128	,97608	1,7780	1,6336
,36	,38935	,91433	,93803	,97473	1,7358	1,5871

Продовження табл. 1

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
,37	,39988	,90979	,93470	,97335	1,6961	1,5431
,38	,41039	,90516	,93129	,97193	1,6587	1,5014
,39	,42087	,90044	,92782	,97048	1,6234	1,4618
,40	,43133	,89562	,92428	,96899	1,5901	1,4241
,41	,44177	,89071	,92066	,96747	1,5587	1,3883
,42	,45218	,88572	,91697	,96592	1,5289	1,3542
,43	,46256	,88065	,91322	,96434	1,5007	1,3216
,44	,47292	,87550	,90940	,96272	1,4740	1,2905
,45	,48326	,87027	,90552	,96108	1,4487	1,2607
,46	,49357	,86496	,90157	,95940	1,4246	1,2322
,47	,50385	,85958	,89756	,95769	1,4018	1,2050
,48	,51410	,85413	,89349	,95595	1,3801	1,1788
,49	,52432	,84861	,88936	,95418	1,3594	1,1537
,50	,53452	,84302	,88517	,95238	1,3398	1,12951
,51	,54469	,83737	,88092	,95055	1,3212	1,10631
,52	,55482	,83166	,87662	,94869	1,3034	1,08397
,53	,56493	,82589	,87227	,94681	1,2864	1,06245
,54	,57501	,82005	,86788	,94489	1,2703	1,04173
,55	,58506	,81416	,86342	,94295	1,2550	1,02174
,56	,59508	,80822	,85892	,94098	1,2403	1,00244
,57	,60506	,80224	,85437	,93898	1,2263	,98381
,58	,61500	,79621	,84977	,93696	1,2130	,96581
,59	,62491	,79012	,84513	,93491	1,2003	,94839
,60	,63480	,78400	,84045	,93284	1,1882	,93155
,61	,64466	,77784	,83573	,93074	1,1766	,91525
,62	,65448	,77164	,83096	,92861	1,1656	,89946
,63	,66427	,76540	,82616	,92646	1,1551	,88416
,64	,67402	,75913	,82132	,92428	1,1451	,86932
,65	,68374	,75283	,81644	,92208	1,1356	,85493
,66	,69342	,74650	,81153	,91986	1,1265	,84096
,67	,70307	,74014	,80659	,91762	1,1178	,82740
,68	,71268	,73376	,80162	,91535	1,1096	,81421
,69	,72225	,72735	,79662	,91306	1,1018	,80141
,70	,73179	,72092	,79158	,91075	1,09437	,78896
,71	,74129	,71448	,78652	,90842	1,08729	,77685
,72	,75076	,70802	,78143	,90606	1,08057	,76507
,73	,76019	,70155	,77632	,90368	1,07419	,75360
,74	,76958	,69507	,77119	,90129	1,06814	,74243
,75	,77893	,68857	,76603	,89888	1,06242	,73155
,76	,78825	,68207	,76086	,89644	1,05700	,72095
,77	,79753	,67556	,75567	,89399	1,05188	,71062

Продовження табл. 1

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
,78	,80677	,66905	,75046	,89152	1,04705	,70054
,79	,81597	,66254	,74524	,88903	1,04250	,69070
,80	,82514	,65602	,74000	,88652	1,03823	,68110
,81	,83426	,64951	,73474	,88400	1,03422	,67173
,82	,84334	,64300	,72947	,88146	1,03046	,66259
,83	,85239	,63650	,72419	,87890	1,02696	,65366
,84	,86140	,63000	,71890	,87633	1,02370	,64493
,85	,87037	,62351	,71361	,87374	1,02067	,63640
,86	,87929	,61703	,70831	,87114	1,01787	,62806
,87	,88817	,61057	,70300	,86852	1,01530	,61991
,88	,89702	,60412	,69769	,86589	1,01294	,61193
,89	,90583	,59768	,69237	,86324	1,01080	,60413
,90	,91460	,59126	,68704	,86058	1,00886	,59650
,91	,92333	,58486	,68171	,85791	1,00713	,58903
,92	,93201	,57848	,67639	,85523	1,00560	,58171
,93	,94065	,57212	,67107	,85253	1,00426	,57455
,94	,94925	,56578	,66575	,84982	1,00311	,56754
,95	,95781	,55946	,66044	,84710	1,00214	,56066
,96	,96633	,55317	,65513	,84437	1,00136	,55392
,97	,97481	,54691	,64982	,84162	1,00076	,54732
,98	,98325	,54067	,64452	,83887	1,00033	,54085
,99	,99165	,53446	,63923	,83611	1,00008	,53450
1,00	1,00000	,52828	,63394	,83333	1,00000	,52828
1,01	1,00831	,52213	,62866	,83055	1,00008	,52218
1,02	1,01658	,51602	,62339	,82776	1,00033	,51619
1,03	1,02481	,50994	,61813	,82496	1,00074	,51031
1,04	1,03300	,50389	,61288	,82215	1,00130	,50454
1,05	1,04114	,49787	,60765	,81933	1,00202	,49888
1,06	1,04924	,49189	,60243	,81651	1,00290	,49332
1,07	1,05730	,48595	,59722	,81368	1,00394	,48787
1,08	1,06532	,48005	,59203	,81084	1,00512	,48251
1,09	1,07330	,47418	,58685	,80800	1,00645	,47724
1,10	1,08124	,46835	,58169	,80515	1,00793	,47206
1,11	1,08914	,46256	,57655	,80230	1,00955	,46698
1,12	1,09699	,45682	,57143	,79944	1,01131	,46199
1,13	1,10480	,45112	,56632	,79657	1,01322	,45708
1,14	1,11256	,44545	,56123	,79370	1,01527	,45225
1,15	1,1203	,43983	,55616	,79083	1,01746	,44751
1,16	1,1280	,43425	,55112	,78795	1,01978	,44284
1,17	1,1356	,42872	,54609	,78507	1,02224	,43825
1,18	1,1432	,42323	,54108	,78218	1,02484	,43374

Продовження табл. 1

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
1,19	1,1508	,41778	,53610	,77929	1,02757	,42930
1,20	1,1583	,41238	,53114	,77640	1,03044	,42493
1,21	1,1658	,40702	,52620	,77350	1,03344	,42063
1,22	1,1732	,40171	,52129	,77061	1,03657	,41640
1,23	1,1806	,39645	,51640	,76771	1,03983	,41224
1,24	1,1879	,39123	,51154	,76481	1,04323	,40814
1,25	1,1952	,38606	,50670	,76190	1,04676	,40411
1,26	1,2025	,38094	,50189	,75900	1,05041	,40014
1,27	1,2097	,37586	,49710	,75610	1,05419	,39622
1,28	1,2169	,37083	,49234	,75319	1,05810	,39237
1,29	1,2240	,36585	,48761	,75029	1,06214	,38858
1,30	1,2311	,36092	,48291	,74738	1,06631	,38484
1,31	1,2382	,35603	,47823	,74448	1,07060	,38116
1,32	1,2452	,35119	,47358	,74158	1,07502	,37754
1,33	1,2522	,34640	,46895	,73867	1,07957	,37397
1,34	1,2591	,34166	,46436	,73577	1,08424	,37044
1,35	1,2660	,33697	,45980	,73287	1,08904	,36697
1,36	1,2729	,33233	,45527	,72997	1,09397	,36355
1,37	1,2797	,32774	,45076	,72707	1,09902	,36018
1,38	1,2865	,32319	,44628	,72418	1,10420	,35686
1,39	1,2932	,31869	,44183	,72128	1,10950	,35359
1,40	1,2999	,31424	,43742	,71839	1,1149	,35036
1,41	1,3065	,30984	,43304	,71550	1,1205	,34717
1,42	1,3131	,30549	,42869	,71261	1,1262	,34403
1,43	1,3197	,30119	,42436	,70973	1,1320	,34093
1,44	1,3262	,29693	,42007	,70685	1,1379	,33787
1,45	1,3327	,29272	,41581	,70397	1,1440	,33486
1,46	1,3392	,28856	,41158	,70110	1,1502	,33189
1,47	1,3456	,28445	,40738	,69823	1,1565	,32896
1,48	1,3520	,28039	,40322	,69537	1,1629	,32607
1,49	1,3583	,27637	,39909	,69251	1,1695	,32321
1,50	1,3646	,27240	,39498	,68965	1,1762	,32039
1,51	1,3708	,26848	,39091	,68680	1,1830	,31761
1,52	1,3770	,26461	,38687	,68396	1,1899	,31487
1,53	1,3832	,26078	,38287	,68112	1,1970	,31216
1,54	1,3894	,25700	,37890	,67828	1,2042	,30948
1,55	1,3955	,25326	,37496	,67545	1,2115	,30685
1,56	1,4016	,24957	,37105	,67262	1,2190	,30424
1,57	1,4076	,24593	,36717	,66980	1,2266	,30167
1,58	1,4135	,24233	,36332	,66699	1,2343	,29913
1,59	1,4195	,23878	,35951	,66418	1,2422	,29662

Продовження табл. 1

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
1,60	1,4254	,23527	,35573	,66138	1,2502	,29414
1,61	1,4313	,23181	,35198	,65858	1,2583	,29169
1,62	1,4371	,22839	,34826	,65579	1,2666	,28928
1,63	1,4429	,22501	,34458	,65301	1,2750	,28690
1,64	1,4487	,22168	,34093	,65023	1,2835	,28454
1,65	1,4544	,21839	,33731	,64746	1,2922	,28221
1,66	1,4601	,21515	,33372	,64470	1,3010	,27991
1,67	1,4657	,21195	,33016	,64194	1,3099	,27764
1,68	1,4713	,20879	,32664	,63919	1,3190	,27540
1,69	1,4769	,20567	,32315	,63645	1,3282	,27318
1,70	1,4825	,20259	,31969	,63372	1,3376	,27099
1,71	1,4880	,19955	,31626	,63099	1,3471	,26882
1,72	1,4935	,19656	,31286	,62827	1,3567	,26668
1,73	1,4989	,19361	,30950	,62556	1,3665	,26457
1,74	1,5043	,19070	,30617	,62286	1,3764	,26248
1,75	1,5097	,18782	,30287	,62016	1,3865	,26042
1,76	1,5150	,18499	,29959	,61747	1,3967	,25838
1,77	1,5203	,18220	,29635	,61479	1,4071	,25636
1,78	1,5256	,17944	,29314	,61211	1,4176	,25436
1,79	1,5308	,17672	,28997	,60945	1,4282	,25239
1,80	1,5360	,17404	,28682	,60680	1,4390	,25044
1,81	1,5412	,17140	,28370	,60415	1,4499	,24851
1,82	1,5463	,16879	,28061	,60151	1,4610	,24660
1,83	1,5514	,16622	,27756	,59888	1,4723	,24472
1,84	1,5564	,16369	,27453	,59626	1,4837	,24286
1,85	1,5614	,16120	,27153	,59365	1,4952	,24102
1,86	1,5664	,15874	,26857	,59105	1,5069	,23919
1,87	1,5714	,15631	,26563	,58845	1,5188	,23739
1,88	1,5763	,15392	,26272	,58586	1,5308	,23561
1,89	1,5812	,15156	,25984	,58329	1,5429	,23385
1,90	1,5861	,14924	,25699	,58072	1,5552	,23211
1,91	1,5909	,14695	,25417	,57816	1,5677	,23039
1,92	1,5957	,14469	,25138	,57561	1,5804	,22868
1,93	1,6005	,14247	,24862	,57307	1,5932	,22699
1,94	1,6052	,14028	,24588	,57054	1,6062	,22532
1,95	1,6099	,13813	,24317	,56802	1,6193	,22367
1,96	1,6146	,13600	,24049	,56551	1,6326	,22204
1,97	1,6193	,13390	,23784	,56301	1,6461	,22042
1,98	1,6239	,13184	,23522	,56051	1,6597	,21882
1,99	1,6285	,12981	,23262	,55803	1,6735	,21724
2,00	1,6330	,12780	,23005	,55556	1,6875	,21567

Продовження табл. 1

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
2,01	1,6375	,12583	,22751	,55310	1,7017	,21412
2,02	1,6420	,12389	,22499	,55064	1,7160	,21259
2,03	1,6465	,12198	,22250	,54819	1,7305	,21107
2,04	1,6509	,12009	,22004	,54576	1,7452	,20957
2,05	1,6553	,11823	,21760	,54333	1,7600	,20808
2,06	1,6597	,11640	,21519	,54091	1,7750	,20661
2,07	1,6640	,11460	,21281	,53850	1,7902	,20515
2,08	1,6683	,11282	,21045	,53611	1,8056	,20371
2,09	1,6726	,11107	,20811	,53373	1,8212	,20228
2,10	1,6769	,10935	,20580	,53135	1,8369	,20087
2,11	1,6811	,10766	,20352	,52898	1,8529	,19947
2,12	1,6853	,10599	,20126	,52663	1,8690	,19809
2,13	1,6895	,10434	,19902	,52428	1,8853	,19672
2,14	1,6936	,10272	,19681	,52194	1,9018	,19537
2,15	1,6977	,10113	,19463	,51962	1,9185	,19403
2,16	1,7018	,09956	,19247	,51730	1,9354	,19270
2,17	1,7059	,09802	,19033	,51499	1,9525	,19138
2,18	1,7099	,09650	,18821	,51269	1,9698	,19008
2,19	1,7139	,09500	,18612	,51041	1,9873	,18879
2,20	1,7179	,09352	,18405	,50813	2,0050	,18751
2,21	1,7219	,09207	,18200	,50586	2,0229	,18624
2,22	1,7258	,09064	,17998	,50361	2,0409	,18499
2,23	1,7297	,08923	,17798	,50136	2,0592	,18375
2,24	1,7336	,08784	,17600	,49912	2,0777	,18252
2,25	1,7374	,08648	,17404	,49689	2,0964	,18130
2,26	1,7412	,08514	,17211	,49468	2,1154	,18009
2,27	1,7450	,08382	,17020	,49247	2,1345	,17890
2,28	1,7488	,08252	,16830	,49027	2,1538	,17772
2,29	1,7526	,08123	,16643	,48809	2,1734	,17655
2,30	1,7563	,07997	,16458	,48591	2,1931	,17539
2,31	1,7600	,07873	,16275	,48374	2,2131	,17424
2,32	1,7637	,07751	,16095	,48158	2,2333	,17310
2,33	1,7673	,07631	,15916	,47944	2,2537	,17197
2,34	1,7709	,07513	,15739	,47730	2,2744	,17085
2,35	1,7745	,07396	,15564	,47517	2,2953	,16975
2,36	1,7781	,07281	,15391	,47305	2,3164	,16866
2,37	1,7817	,07168	,15220	,47095	2,3377	,16757
2,38	1,7852	,07057	,15052	,46885	2,3593	,16649
2,39	1,7887	,06948	,14885	,46676	2,3811	,16543
2,40	1,7922	,06840	,14720	,46468	2,4031	,16437
2,41	1,7957	,06734	,14557	,46262	2,4254	,16332

Продовження табл. 1

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
2,42	1,7991	,06630	,14395	,46056	2,4479	,16229
2,43	1,8025	,06527	,14235	,45851	2,4706	,16126
2,44	1,8059	,06426	,14078	,45641	2,4936	,16024
2,45	1,8093	,06327	,13922	,45444	2,5168	,15923
2,46	1,8126	,06229	,13768	,45242	2,5403	,15823
2,47	1,8159	,06133	,13616	,45041	2,5640	,15724
2,48	1,8192	,06038	,13465	,44841	2,5880	,15626
2,49	1,8225	,05945	,13316	,44642	2,6122	,15528
2,50	1,8258	,05853	,13169	,44444	2,6367	,15432
2,51	1,8290	,05763	,13023	,44247	2,6615	,15337
2,52	1,8322	,05674	,12879	,44057	2,6865	,15242
2,53	1,8354	,05586	,12737	,43856	2,7117	,15148
2,54	1,8386	,05500	,12597	,43662	2,7372	,15055
2,55	1,8417	,05415	,12458	,43469	2,7630	,14963
2,56	1,8448	,05332	,12321	,43277	2,7891	,14871
2,57	1,8479	,05250	,12185	,43085	2,8154	,14780
2,58	1,8510	,05169	,12051	,42894	2,8420	,14691
2,59	1,8541	,05090	,11918	,42705	2,8689	,14601
2,60	1,8572	,05012	,11787	,42517	2,8960	,14513
2,61	1,8602	,04935	,11658	,42330	2,9234	,14426
2,62	1,8632	,04859	,11530	,42143	2,9511	,14339
2,63	1,8662	,04784	,11403	,41957	2,9791	,14253
2,64	1,8692	,04711	,11278	,41772	3,0074	,14168
2,65	1,8721	,04639	,11154	,41589	3,0359	,14083
2,66	1,8750	,04568	,11032	,41406	3,0647	,13999
2,67	1,8779	,04498	,10911	,41224	3,0938	,13916
2,68	1,8808	,04429	,10792	,41043	3,1233	,13834
2,69	1,8837	,04361	,10674	,40863	3,1530	,13752
2,70	1,8865	,04295	,10557	,40684	3,1830	,13671
2,71	1,8894	,04230	,10442	,40505	3,2133	,13591
2,72	1,8922	,04166	,10328	,40327	3,2440	,13511
2,73	1,8950	,04102	,10215	,40151	3,2749	,13432
2,74	1,8978	,04039	,10104	,39976	3,3061	,13354
2,75	1,9005	,03977	,09994	,39801	3,3376	,13276
2,76	1,9032	,03917	,09885	,39627	3,3695	,13199
2,77	1,9060	,03858	,09777	,39454	3,4017	,13123
2,78	1,9087	,03800	,09671	,39282	3,4342	,13047
2,79	1,9114	,03742	,09566	,39111	3,4670	,12972
2,80	1,9140	,03685	,09462	,38941	3,5001	,12897
2,81	1,9167	,03629	,09360	,38771	3,5336	,12823
2,82	1,9163	,03574	,09259	,38603	3,5674	,12750

Продовження табл. 1

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
2,83	1,9220	,03520	,09158	,38435	3,6015	,12678
2,84	1,9246	,03467	,09059	,38268	3,6359	,12605
2,85	1,9271	,03415	,08962	,38102	3,6707	,12534
2,86	1,9197	,03363	,08865	,37937	3,7058	,12463
2,87	1,9322	,03312	,08769	,37773	3,7413	,12393
2,88	1,9348	,03262	,08674	,37610	3,7771	,12323
2,89	1,9373	,03213	,08581	,37448	3,8133	,12254
2,90	1,9398	,03165	,08489	,37286	3,8498	,12185
2,91	1,9423	,03118	,08398	,37125	3,8866	,12117
2,92	1,9448	,03071	,08308	,36965	3,9238	,12049
2,93	1,9472	,03025	,08218	,36806	3,9614	,11982
2,94	1,9497	,02980	,08130	,36648	3,9993	,11916
2,95	1,9521	,02935	,08043	,36490	4,0376	,11850
2,96	1,9545	,02891	,07957	,36333	4,0763	,11785
2,97	1,9569	,02848	,07872	,36177	4,1153	,11720
2,98	1,9593	,02805	,07788	,36022	4,1547	,11656
2,99	1,9616	,02764	,07705	,35868	4,1944	,11591
3,00	1,9640	,02722	,07623	,35714	4,2346	,11528
3,10	1,9866	,02345	,06852	,34223	4,6573	,10921
3,20	2,0079	,02023	,06165	,32808	5,1210	,10359
3,30	2,0279	,01748	,05554	,31466	5,6287	,09837
3,40	2,0466	,01512	,05009	,30193	6,1837	,09353
3,50	2,0642	,01311	,04523	,28986	6,7896	,08902
3,60	2,0808	,01138	,04089	,27840	7,4501	,08482
3,70	2,0964	,00990	,03702	,26752	8,1691	,08090
3,80	2,1111	,00863	,03355	,25720	8,9506	,07723
3,90	2,1250	,00753	,03044	,24740	9,7990	,07380
4,00	2,1381	,00658	,02766	,23810	10,719	,07059
4,10	2,1505	,00577	,02516	,22925	11,715	,06758
4,20	2,1622	,00506	,02292	,22085	12,792	,06475
4,30	2,1732	,00445	,02090	,21286	13,955	,06209
4,40	2,1837	,00392	,01909	,20525	15,210	,05959
4,50	2,1936	,00346	,01745	,19802	16,562	,05723
4,60	2,2030	,00305	,01597	,19113	18,018	,05500
4,70	2,2119	,00270	,01463	,18457	19,583	,05289
4,80	2,2204	,00240	,01343	,17832	21,264	,05091
4,90	2,2284	,00213	,01233	,17235	23,067	,04904
5,00	2,2361	,00189	,01134	,16667	25,000	,04725
6,00	2,2953	,0,633	,00519	,12195	53,180	,03368
7,00	2,3333	,0,242	,00261	,09259	104,143	,02516
8,00	2,3591	,0,102	,00141	,07246	190,109	,01947

Продовження табл. 1

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
9,00	2,3772	,0474	,03815	,05814	327,189	,01550
10,00	2,3904	,0236	,03495	,04762	535,938	,01263
	2,4495	0	0	0		0

Примітка. Запис ,0,633 означає ,000633.

Таблиця 2—Функції характеристик годографа двовимірного ізентропійного надзвукового потоку ідеального газу ($k = 1,4$)

ω	α	$\alpha-\omega$	M	ω	α	$\alpha-\omega$	M
0,0	90,000	90,000	1,0000	45,0	21,2068	-23,7932	2,7644
1,0	67,5741	66,5741	1,0818	46,0	20,8297	-25,1703	2,8122
2,0	61,9969	59,9969	1,1326	47,0	20,4594	-26,5406	2,8609
3,0	58,1805	55,1805	1,1769	48,0	20,0956	-27,9044	2,9105
4,0	55,2048	51,2048	1,2177	49,0	19,7318	-29,2620	2,9610
5,0	52,7383	47,7383	1,2565	50,0	19,3865	-30,6135	3,0126
6,0	50,6186	44,6186	1,2938	51,0	19,0408	-31,9592	3,0652
7,0	48,7528	41,7528	1,3300	52,0	18,7005	-33,2995	3,1189
8,0	47,0818	39,0818	1,3655	53,0	18,3657	-34,6343	3,1738
9,0	45,5660	36,5660	1,4004	54,0	18,0360	-35,9640	3,2298
10,0	44,1770	34,1770	1,4349	55,0	17,7112	-37,2888	3,2871
11,0	42,8940	31,8940	1,4692	56,0	17,3911	-38,6089	3,3457
12,0	41,7007	29,7007	1,5032	57,0	17,0757	-39,9243	3,4056
13,0	40,5849	27,5849	1,5371	58,0	16,7646	-41,2354	3,4669
14,0	39,5366	25,5366	1,5709	59,0	16,4579	-42,5421	3,5297
15,0	38,5474	23,5474	1,6047	60,0	16,1552	-43,8448	3,5940
16,0	37,6108	21,6108	1,6385	61,0	15,8564	-45,1436	3,6600
17,0	36,7212	19,7212	1,6725	62,0	15,5615	-46,4385	3,7276
18,0	35,8739	17,8739	1,7065	63,0	15,2703	-47,7297	3,7969
19,0	35,0648	16,0648	1,7406	64,0	14,9826	-49,0174	3,8681
20,0	34,2904	14,2904	1,7750	65,0	14,6983	-50,3017	3,9412
21,0	33,5479	12,5479	1,8095	66,0	14,4174	-51,5826	4,0163
22,0	32,8344	10,8344	1,8443	67,0	14,1396	-52,8604	4,0936
23,0	32,1478	9,1478	1,8793	68,0	13,8650	-54,1350	4,1730
24,0	31,4859	7,4859	1,9146	69,0	13,5934	-55,4066	4,2548

Продовження табл. 2

ω	α	$\alpha-\omega$	M	ω	α	$\alpha-\omega$	M
25,0	30,8469	5,8469	1,9503	70,0	13,3247	-56,6753	4,3390
26,0	30,2293	4,2293	1,9862	71,0	13,0587	-57,9413	4,4258
27,0	29,6316	2,6316	2,0226	72,0	12,7955	-59,2045	4,5152
28,0	29,0524	1,0524	2,0593	73,0	12,5349	-60,4651	4,6076
29,0	28,4906	-,5094	2,0964	74,0	12,2768	-61,7232	4,7029
30,0	27,9451	-2,0549	2,1339	75,0	12,0212	-62,9788	4,8014
31,0	27,4149	-3,5851	2,1718	76,0	11,7680	-64,2320	4,9032
32,0	26,8991	-5,1009	2,2103	77,0	11,5170	-65,4830	5,0085
33,0	26,3970	-6,6030	2,2492	78,0	11,2683	-66,7317	5,1176
34,0	25,9076	-8,0924	2,2887	79,0	11,0217	-67,9783	5,2306
35,0	25,4304	-9,5696	2,3287	80,0	10,7772	-69,2228	5,3479
36,0	24,9648	-11,0352	2,3693	85,0	9,5837	-75,4163	6,0064
37,0	24,5101	-12,4899	2,4105	90,0	8,4328	-81,5672	6,8190
38,0	24,0657	-13,9343	2,4523	95,0	7,3178	-87,6822	7,8509
39,0	23,6313	-15,3687	2,4947	100,0	6,2330	-93,7670	9,2105
40,0	23,2061	-16,7939	2,5378	105,0	5,1730	-99,8270	11,091
41,0	22,7900	-18,2100	2,5816	110,0	4,1331	-105,8669	13,874
42,0	22,3824	-19,6176	2,6261	115,0	3,1090	-111,8910	18,438
43,0	21,9828	-21,0172	2,6714	120,0	2,0965	-117,9035	27,335
44,0	21,5911	-22,4089	2,7176	125,0	1,0916	-123,9084	52,491
				130,0	,0908	-129,9092	631,03

Таблиця 3–Співвідношення між параметрами потоку ідеального газу ($k = 1,4$) на прямому стрибку

M_x	M_y	p_y/p_x	V_x/V_y ρ_y/ρ_x	T_y/T_x	A_{*x}/A_{*y} p_{0y}/p_{0x}	p_{0y}/p_x
1,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,8929
1,01	,99013	1,02345	1,01669	1,00665	,99999	1,9152
1,02	,98052	1,04713	1,03344	1,01325	,99998	1,9379
1,03	,97115	1,07105	1,05024	1,01981	,99997	1,9610
1,04	,96202	1,09520	1,06709	1,02634	,99994	1,9845
1,05	,95312	1,1196	1,08398	1,03284	,99987	2,0083
1,06	,94444	1,1442	1,10092	1,03931	,99976	2,0325
1,07	,93598	1,1690	1,11790	1,04575	,99962	2,0570
1,08	,92772	1,1941	1,13492	1,05217	,99944	2,0819
1,09	,91965	1,2194	1,15199	1,05856	,99921	2,1072
1,10	,91177	1,2450	1,1691	1,06494	,99892	2,1328
1,11	,90408	1,2708	1,1862	1,07130	,99858	2,1588

Продовження табл. 3

M_x	M_y	p_y/p_x	V_x/V_y ρ_y/ρ_x	T_y/T_x	A_{*x}/A_{*y} p_{0y}/p_{0x}	p_{0y}/p_x
1,12	,89656	1,2968	1,2034	1,07764	,99820	2,1851
1,13	,88922	1,3230	1,2206	1,08396	,99776	2,2118
1,14	,88204	1,3495	1,2378	1,09027	,99726	2,2388
1,15	,87505	1,3762	1,2550	1,09657	,99669	2,2661
1,16	,86816	1,4032	1,2723	1,10287	,99605	2,2937
1,17	,86145	1,4304	1,2896	1,10916	,99534	2,3217
1,18	,85488	1,4578	1,3069	1,11544	,99455	2,3499
1,19	,84846	1,4854	1,3243	1,12172	,99371	2,3786
1,20	,84217	1,5133	1,3416	1,1280	,99280	2,4075
1,21	,83601	1,5414	1,3590	1,1343	,99180	2,4367
1,22	,82998	1,5698	1,3764	1,1405	,99073	2,4662
1,23	,82408	1,5984	1,3938	1,1468	,98957	2,4961
1,24	,81830	1,6272	1,4112	1,1533	,98835	2,5263
1,25	,81264	1,6562	1,4286	1,1594	,98706	2,5568
1,26	,80709	1,6855	1,4460	1,1657	,98568	2,5876
1,27	,80165	1,7150	1,4634	1,1720	,98422	2,6187
1,28	,79631	1,7448	1,4808	1,1782	,98268	2,6500
1,29	,79108	1,7748	1,4983	1,1846	,98106	2,6816
1,30	,78596	1,8050	1,5157	1,1909	,97935	2,7135
1,31	,78093	1,8354	1,5331	1,1972	,97758	2,7457
1,32	,77600	1,8661	1,5505	1,2035	,97574	2,7783
1,33	,77116	1,8970	1,5680	1,2099	,97382	2,8112
1,34	,76641	1,9282	1,5854	1,2162	,97181	2,8444
1,35	,7617,5	1,9596	1,6028	1,2226	,96972	2,8778
1,36	,75718	1,9912	1,6202	1,2290	,96756	2,9115
1,37	,75269	2,0230	1,6376	1,2354	,96534	2,9455
1,38	,74828	2,0551	1,6550	1,2418	,96304	2,9798
1,39	,74396	2,0874	1,6723	1,2482	,96065	3,0144
1,40	,73971	2,1200	1,6896	1,2547	,95819	3,0493
1,41	,73554	2,1528	1,7070	1,2612	,95566	3,0844
1,42	,73144	2,1858	1,7243	1,2676	,95306	3,1198
1,43	,72741	2,2190	1,7416	1,2742	,95039	3,1555
1,44	,72345	2,2525	1,7589	1,2807	,94765	3,1915
1,45	,71956	2,2862	1,7761	1,2872	,94483	3,2278
1,46	,71574	2,3202	1,7934	1,2938	,94196	3,2643
1,47	,71198	2,3544	1,8106	1,3004	,93901	3,3011
1,48	,70829	2,3888	1,8278	1,3070	,93600	3,3382
1,49	,70466	2,4234	1,8449	1,3136	,93292	3,3756
1,50	,70109	2,4583	1,8621	1,3202	,92978	3,4133
1,51	,69758	2,4934	1,8792	1,3269	,92658	3,4512
1,52	,69413	2,5288	1,8962	1,3336	,92331	3,4894

Продовження табл. 3

M_x	M_y	p_y/p_x	V_x/V_y ρ_y/ρ_x	T_y/T_x	A_{*x}/A_{*y} p_{0y}/p_{0x}	p_{0y}/p_x
1,53	,69073	2,5644	1,9133	1,3403	,91999	3,5279
1,54	,68739	2,6003	1,9303	1,3470	,91662	3,5667
1,55	,68410	2,6363	1,9473	1,3538	,91319	3,6058
1,56	,68086	2,6725	1,9643	1,3606	,90970	3,6451
1,57	,67768	2,7090	1,9812	1,3674	,90615	3,6847
1,58	,67455	2,7458	1,9981	1,3742	,90255	3,7245
1,59	,67147	2,7828	2,0149	1,3811	,89889	3,7645
1,60	,66844	2,8201	2,0317	1,3880	,89520	3,8849
1,61	,66545	2,8575	2,0485	1,3949	,89144	3,8456
1,62	,66251	2,8951	2,0652	1,4018	,88764	3,8866
1,63	,65962	2,9330	2,0820	1,4088	,88380	3,9278
1,64	,65677	2,9712	2,0986	1,4158	,87992	3,9693
1,49	,70466	2,4234	1,8449	1,3136	,92392	3,3756
1,50	,70109	2,4583	1,8621	1,3202	,92978	3,4133
1,51	,69758	2,4934	1,8792	1,3269	,92658	3,4512
1,52	,69413	2,5288	1,8962	1,3336	,92331	3,4894
1,53	,69073	2,5644	1,9133	1,3403	,91999	3,5279
1,54	,68739	2,6003	1,9303	1,3470	,91662	3,5667
1,55	,68410	2,6363	1,9473	1,3538	,91319	3,6058
1,56	,68086	2,6725	1,9643	1,3606	,90970	3,6451
1,57	,67768	2,7090	1,9812	1,3674	,90615	3,6847
1,58	,67455	2,7458	1,9981	1,3742	,90255	3,7245
1,59	,67147	2,7828	2,0149	1,3811	,89889	3,7645
1,60	,66844	2,8201	2,0317	1,3880	,89520	3,8849
1,61	,66545	2,8575	2,0485	1,3949	,89144	3,8456
1,62	,66251	2,8951	2,0652	1,4018	,88764	3,8866
1,63	,65962	2,9330	2,0820	1,4088	,88380	3,9278
1,64	,65677	2,9712	2,0986	1,4158	,87992	3,9693
1,65	,65396	3,0096	2,1152	1,4228	,87598	4,0111
1,66	,65119	3,0482	2,1318	1,4298	,87201	4,0533
1,67	,64847	3,0870	2,1484	1,4369	,86800	4,0954
1,68	,64579	3,1261	2,1649	1,4440	,86396	4,1379
1,69	,64315	3,1654	2,1813	1,4512	,85987	4,1807
1,70	,64055	3,2050	2,1977	1,4583	,85573	4,2238
1,71	,63798	3,2448	2,2141	1,4655	,85155	4,2672
1,72	,63545	3,2848	2,2304	1,4727	,84735	4,3108
1,73	,63296	3,3250	2,2467	1,4800	,84312	4,3547
1,74	,63051	3,3655	2,2629	1,4873	,83886	4,3989
1,75	,62809	3,4062	2,2791	1,4916	,83456	4,4433
1,76	,62570	3,4472	2,2952	1,5019	,83024	4,4880

Продовження табл. 3

M_x	M_y	p_y/p_x	V_x/V_y ρ_y/ρ_x	T_y/T_x	A_x/A_y p_{0y}/p_{0x}	p_{0y}/p_x
1,77	,62335	3,4884	2,3113	1,5093	,82589	4,5330
1,78	,62104	3,5298	2,3271	1,5167	,82152	4,5783
1,79	,61875	3,5714	2,3433	1,5241	,81711	4,6238
1,80	,61650	3,6133	2,3592	1,5316	,81268	4,6695
1,81	,61428	3,6554	2,3751	1,5391	,80823	4,7155
1,82	,61209	3,6978	2,3909	1,5466	,80376	4,7618
1,83	,60993	3,7404	2,4067	1,5542	,79926	4,8083
1,84	,60708	3,7832	2,4224	1,5617	,79474	4,8551
1,85	,60570	3,8262	2,4381	1,5694	,79021	4,9022
1,86	,60363	3,8695	2,4537	1,5770	,78567	4,9498
1,87	,60159	3,9130	2,4693	1,5847	,78112	4,9974
1,88	,59957	3,9568	2,4848	1,5924	,77656	5,0453
1,89	,59758	4,0008	2,5003	1,6001	,77197	5,0934
1,90	,59562	4,0450	2,5157	1,6079	,76735	5,1417
1,91	,59368	4,0894	2,5310	1,6157	,76273	5,1904
1,92	,59177	4,1341	2,5463	1,6236	,75812	5,2394
1,93	,58988	4,1790	2,5615	1,6314	,75347	5,2886
1,94	,58802	4,2242	2,5767	1,6394	,74883	5,3381
1,95	,58618	4,2696	2,5919	1,6473	,74418	5,3878
1,96	,58437	4,3152	2,6070	1,6553	,73954	5,4378
1,97	,58258	4,3610	2,6220	1,6633	,73487	5,4880
1,98	,58081	4,4071	2,6369	1,6713	,73021	5,5385
1,99	,57907	4,4534	2,6518	1,6794	,72554	5,5894
2,00	,57735	4,5000	2,6666	1,6875	,72088	5,6405
2,01	,57565	4,5468	2,6814	1,6956	,71619	5,6918
2,02	,57397	4,5938	2,6962	1,7038	,71152	5,7434
2,03	,57231	4,6411	2,7109	1,7120	,70686	5,7952
2,04	,57068	4,6886	2,7255	1,7203	,70218	5,8473
2,05	,56907	4,7363	2,7400	1,7286	,69752	5,8997
2,06	,56747	4,7842	2,7545	1,7369	,69284	5,9523
2,07	,56589	4,8324	2,7690	1,7452	,68817	6,0052
2,08	,56433	4,8808	2,7834	1,7536	,68351	6,0584
2,09	,56280	4,9295	2,7977	1,7620	,67886	6,1118
2,10	,56128	4,9784	2,8119	1,7704	,67422	6,1655
2,11	,55978	5,0275	2,8261	1,7789	,66957	6,2194
2,12	,55830	5,0768	2,8402	1,7874	,66492	6,2736
2,13	,55683	5,1264	2,8543	1,7960	,66029	6,3280
2,14	,55538	5,1762	2,8683	1,8046	,65567	6,3827
2,15	,55395	5,2262	2,8823	1,8132	,65105	6,4377
2,16	,55254	5,2765	2,8962	1,8219	,64644	6,4929
2,17	,55114	5,3270	2,9100	1,8306	,64185	6,5484

Продовження табл. 3

M_x	M_y	P_y/P_x	V_x/V_y ρ_y/ρ_x	T_y/T_x	A_{*x}/A_{*y} P_{0y}/P_{0x}	P_{0y}/P_x
2,18	,54976	5,3778	2,9238	1,8393	,63728	6,6042
2,19	,54841	5,4288	2,9376	1,8481	,63270	6,6602
2,20	,54706	5,4800	2,9512	1,8569	,62812	6,7163
2,21	,54572	5,5314	2,9648	1,8657	,62358	6,7730
2,22	,54440	5,5831	2,9783	1,8746	,61905	6,8299
2,23	,54310	5,6350	2,9918	1,8835	,61453	6,8869
2,24	,54182	5,6872	3,0052	1,8924	,61002	6,9442
2,25	,54055	5,7396	3,0186	1,9014	,60554	7,0018
2,26	,53929	5,7922	3,0319	1,9104	,60106	7,0597
2,27	,53805	5,8451	3,0452	1,9194	,59659	7,1178
2,28	,53683	5,8982	3,0584	1,9285	,59214	7,1762
2,29	,53561	5,9515	3,0715	1,9376	,58772	7,2348
2,30	,53441	6,0050	3,0846	1,9468	,58331	7,2937
2,31	,53322	6,0588	3,0976	1,9560	,57891	7,3529
2,32	,53205	6,1128	3,1105	1,9652	,57452	7,4123
2,33	,53089	6,1670	3,1234	1,9745	,57015	7,4720
2,34	,52974	6,2215	3,1362	1,9838	,56580	7,5319
2,35	,52861	6,2762	3,1490	1,9931	,56148	7,5920
2,36	,52749	6,3312	3,1617	2,0025	,55717	7,6524
2,37	,52638	6,3864	3,1743	2,0119	,55288	7,7131
2,38	,52528	6,4418	3,1869	2,0213	,54862	7,7741
2,39	,52419	6,4974	3,1994	2,0308	,54438	7,8354
2,40	,52312	6,5533	3,2119	2,0403	,54015	7,8969
2,41	,52206	6,6094	3,2243	2,0499	,53594	7,9587
2,42	,52100	6,6658	3,2366	2,0595	,53175	8,0207
2,43	,51996	6,7224	3,2489	2,0691	,52758	8,0830
2,44	,51894	6,7792	3,2611	2,0788	,52344	8,1455
2,45	,51792	6,8362	3,2733	2,0885	,51932	8,2083
2,46	,51691	6,8935	3,2854	2,0982	,51521	8,2714
2,47	,51592	6,9510	3,2975	2,1080	,51112	8,3347
2,48	,51493	7,0088	3,3095	2,1178	,50704	8,3983
2,49	,51395	7,0668	3,3214	2,1276	,50303	8,4622
2,50	,51299	7,1250	3,3333	2,1375	,49902	8,5262
2,51	,51204	7,1834	3,3451	2,1474	,49502	8,5904
2,52	,51109	7,2421	3,3569	2,1574	,49104	8,6549
2,53	,51015	7,3010	3,3686	2,1674	,48709	8,7198
2,54	,50923	7,3602	3,3802	2,1774	,48317	8,7850
2,55	,50831	7,4196	3,3918	2,1875	,47927	8,8505
2,56	,50740	7,4792	3,4034	2,1976	,47540	8,9162
2,57	,50651	7,5391	3,4149	2,2077	,47155	8,9821
2,58	,50562	7,5992	3,4263	2,2179	,46772	9,0482

Продовження табл. 3

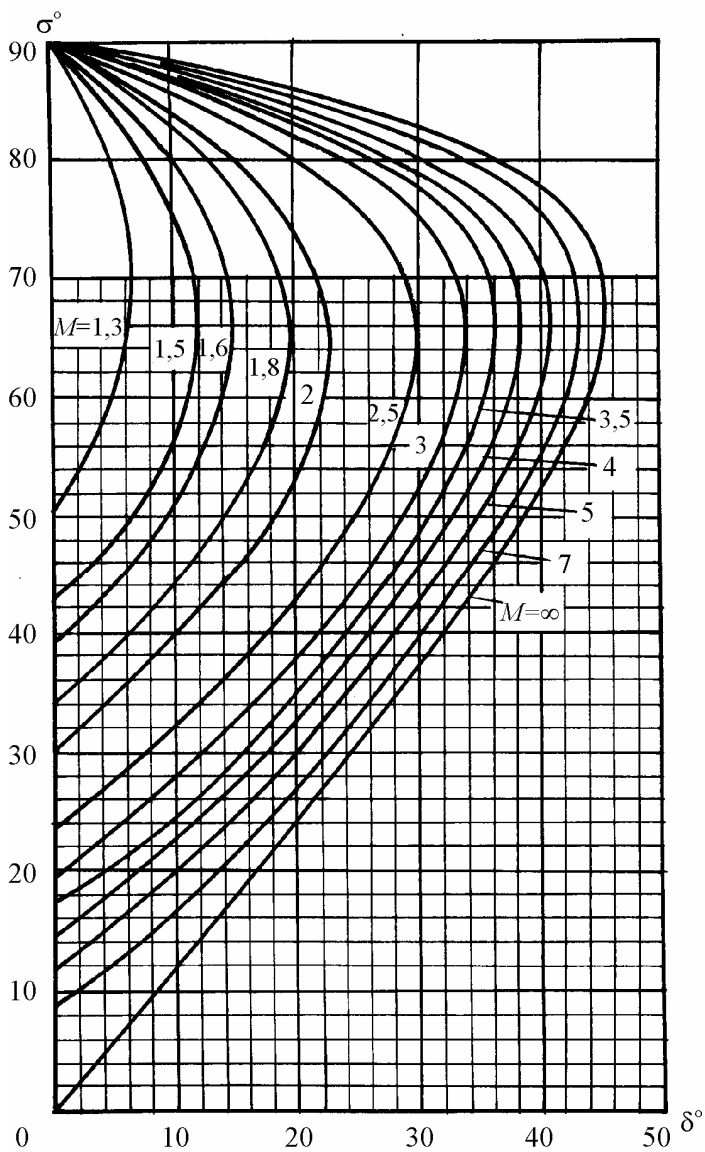
M_x	M_y	P_y/P_x	V_x/V_y ρ_y/ρ_x	T_y/T_x	A_{*x}/A_{*y} p_{0y}/p_{0x}	p_{0y}/P_x
2,59	,50474	7,6595	3,4376	2,2281	,46391	9,1146
2,60	,50387	7,7200	3,4489	2,2383	,46012	9,1813
2,61	,50301	7,7808	3,4602	2,2486	,45636	9,2481
2,62	,50216	7,8418	3,4714	2,2589	,45262	9,3154
2,63	,50132	7,9030	3,4825	2,2693	,44891	9,3829
2,64	,50048	7,9645	3,4936	2,2797	,44522	9,4507
2,65	,49965	8,0262	3,5047	2,2901	,44155	9,5187
2,66	,49883	8,0882	3,5157	2,3006	,43791	9,5869
2,67	,49802	8,1504	3,5266	2,3111	,43429	9,6553
2,68	,49722	8,2128	3,5374	2,3217	,43070	9,7241
2,69	,49642	8,2754	3,5482	2,3323	,42713	9,7932
2,70	,49563	8,3383	3,5590	2,3429	,42359	9,8625
2,71	,49485	8,4014	3,5697	2,3536	,42007	9,9320
2,72	,49408	8,4648	3,5803	2,3643	,41657	10,0017
2,73	,49332	8,5284	3,5909	2,3750	,41310	10,0718
2,74	,49256	8,5922	3,6014	2,3858	,40965	10,1421
2,75	,49181	8,6562	3,6119	2,3966	,40622	10,212
2,76	,49107	8,7205	3,6224	2,4074	,40282	10,283
2,77	,49033	8,7850	3,6328	2,4183	,39945	10,354
2,78	,48960	8,8497	3,6431	2,4292	,39610	10,426
2,79	,48888	8,9147	3,6533	2,4402	,39276	10,498
2,80	,48817	8,9800	3,6635	2,4512	,38946	10,569
2,81	,48746	9,0454	3,6737	2,4622	,38618	10,641
2,82	,48676	9,1111	3,6837	2,4733	,38293	10,714
2,83	,48607	9,1770	3,6939	2,4844	,37970	10,787
2,84	,48538	9,2432	3,7039	2,4955	,37649	10,860
2,85	,48470	9,3096	3,7139	2,5067	,37330	10,933
2,86	,48402	9,3762	3,7238	2,5179	,37013	11,006
2,87	,48334	9,4431	3,7336	2,5292	,36700	11,080
2,88	,48268	9,5102	3,7434	2,5405	,36389	11,154
2,89	,48203	9,5775	3,7532	2,5518	,36080	11,228
2,90	,48138	9,6450	3,7629	2,5632	,35773	11,302
2,91	,48074	9,7127	3,7725	2,5746	,35469	11,377
2,92	,48010	9,7808	3,7821	2,5860	,35167	11,452
2,93	,47946	9,8491	3,7919	2,5975	,34867	11,527
2,94	,47883	9,9176	3,8012	2,6090	,34570	11,603
2,95	,47821	9,9863	3,8106	2,6206	,34275	11,679
2,96	,47760	10,055	3,8200	2,6322	,33982	11,755
2,97	,47699	10,124	3,8294	2,6438	,33692	11,831
2,98	,47638	10,194	3,8387	2,6555	,33404	11,907
2,99	,47578	10,263	3,8479	2,6672	,33118	11,984

Продовження табл. 3

M_x	M_y	p_y/p_x	V_x/V_y ρ_y/ρ_x	T_y/T_x	A_{*x}/A_{*y} p_{0y}/p_{0x}	p_{0y}/p_x
3,00	,47519	10,333	3,8571	2,6790	,32834	12,061
3,50	,45115	14,125	4,2608	3,3150	,21295	16,242
4,00	,43496	18,500	4,5714	4,0469	,13276	21,068
4,50	,42355	23,458	4,8119	4,8751	,09170	26,539
5,00	,41523	29,000	5,0000	5,8000	,06172	32,654
6,00	,40416	41,833	5,2683	7,9406	,02965	46,815
7,00	,39736	57,000	5,4444	10,469	,01535	63,552
8,00	,39289	74,500	5,5652	13,387	,00849	82,865
9,00	,38980	94,333	5,6512	16,693	,00496	104,753
10,00	,38757	116,500	5,7143	20,388	,00304	129,217
∞	,37796	∞	6,0000	∞	0	∞

Діаграма 1

Залежність σ від δ і M для $k=1,40$



Відповіді та розв'язання задач

2.1. а) Для стаціонарної течії в трубі струму рівняння нерозривності має вигляд (2.8), тобто

$$\rho VA = (\rho + d\rho)(V + dV)(A + dA) = \text{Const}.$$

Перемножуючи, нехтуючи величинами другого і третього порядку малості та ділячи ліву і праву частини рівняння на ρVA , маємо

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0. \quad (2.1.1)$$

Для стаціонарної течії при нескінченно малій відстані між перетинами трубки рівняння кількості руху (2.10) в проекції на вісь 0-0 має вигляд (рис. 2.1.1)

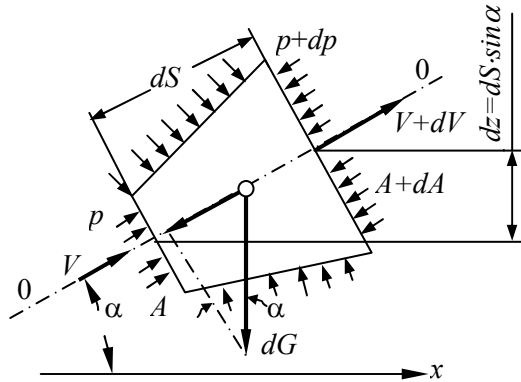


Рис. 2.1.1

$$\begin{aligned} \sum F_{0-0} &= (\rho + d\rho)(V + dV)^2(A + dA) - \rho V^2 A = \\ &= p(A + dA) - (p + dp)(A + dA) - dG \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Сила ваги
$$dG = \frac{1}{2} \rho g (2A + dA) ds.$$

Нехтуючи величинами другого порядку малості та пам'ятаючи, що $\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0$, знаходимо

$$\frac{dp}{\rho} + VdV + g dz = 0 \quad (2.1.2)$$

б) Для нестисливої рідини $d\rho = 0$, отже (2.1.1) має вигляд $\frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0$. Інтегральна форма цього рівняння нерозривності $\ln A + \ln V = \text{Const}$, або $A \cdot V = \text{Const}$. В інтегральній формі рівняння (2.1.2.) в цьому випадку має вигляд

$$\int \frac{dp}{\rho} + \int VdV + \int g dz = \text{Const}, \text{ або } \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g \cdot z = \text{Const}$$

– рівняння Бернуллі для стаціонарної течії нестисливої рідини.

2.2. а) З рівняння нерозривності маємо

$$\pi R^2 \rho V_1 = \int_0^R \rho V 2\pi r dr = 2\pi \rho V_{\max} \cdot \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr.$$

Звідки після інтегрування маємо $V_1/V_{\max} = 1/2$.

б) Записуючи рівняння кількості руху (2.10) в проекції на вісь x для нашого випадку маємо:

$$\pi R^2 (p_1 - p_2) - 2\pi R L \bar{\tau}_w = \int_0^R \rho V^2 2\pi r dr - \rho V_1^2 \pi R^2,$$

звідки

$$p_1 - p_2 = 2 \frac{L}{R} \bar{\tau}_w + 2 \frac{\rho V_{\max}^2}{R^2} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr - \rho V_1^2.$$

Інтегруючи це рівняння, і пам'ятаючи, що $V_1 = V_{\max}/2$, маємо

$$p_1 - p_2 = 2 \frac{L}{R} \bar{\tau}_w + \frac{1}{12} \rho V_{\max}^2;$$

2.3. а) Згідно з рівнянням нерозривності

$$\rho V_1 A_1 + \rho V_2 (A_3 - A_1) = \rho V_3 A_3, \text{ звідки } V_3 = 5,7 \text{ м/с.}$$

б) Згідно з рівнянням кількості руху

$$p_1 A_3 - p_3 A_3 = \rho V_3^2 A_3 - \rho V_1^2 A_1 - \rho V_2^2 (A_3 - A_1),$$

звідки

$$p_1 - p_3 = \rho V_3^2 - \rho V_1^2 \frac{A_1}{A_3} - \rho V_2^2 (1 - A_1 / A_3) = 0,656 \text{ бар.}$$

2.4 а) Виділений над крилом контрольний об'єм рухається разом з ним. В струмені $A_{вх}=A_{вих}=1$. На вході і виході з контрольного об'єму трикутники швидкості показані на рис. 2.4.1 (V – абсолютна, u – переносна, W – відносна швидкості).

$$W=V-u;$$

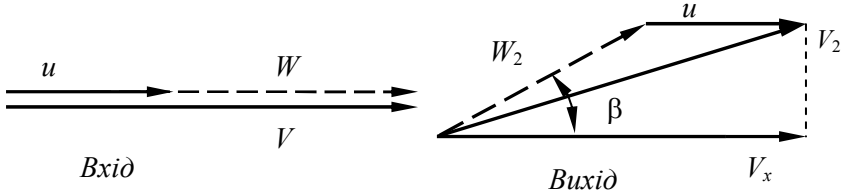


Рис. 2.4.1

Для нестисливої рідини відносна швидкість $W=W_2$, що виходить з рівняння нерозривності. Тоді згідно з рівнянням кількості руху сили опору, що діють на контрольний об'єм в напрямку u (тобто осі x), дорівнюють

$$\sum F_x = \rho W \cdot W \cos \beta - \rho W^2 = \rho W^2 (\cos \beta - 1) = \rho V^2 \left(1 - \frac{u}{V}\right)^2 (\cos \beta - 1),$$

а секундна робота проти сил опору L_u дорівнює

$$L_u = u \cdot \sum F_x = \rho V^3 \frac{u}{V} \left(1 - \frac{u}{V}\right)^2 (\cos \beta - 1).$$

Для визначення максимуму роботи прирівняємо до нуля першу похідну за u/V цього виразу

$$\frac{dL_u}{d \frac{u}{V}} = \left[\left(1 - \frac{u}{V}\right)^2 - 2 \frac{u}{V} \left(1 - \frac{u}{V}\right) \right] \rho V^3 (\cos \beta - 1) = 0;$$

$$\left(1 - \frac{u}{V}\right) \left[1 - \frac{u}{V} - 2 \frac{u}{V}\right] = 0; \quad \text{звідки} \quad \frac{u}{V} = \frac{1}{3}.$$

б) У випадку нескінченно великої кількості таких крил контрольний об'єм не рухається, а немов би залишається нерухомим. У цьому випадку потік натікає та залишає контрольний об'єм з абсолютною швидкістю V . Тоді згідно з теоремою імпульсів сили

$$\sum F_x = \rho V_n V_x \cdot A_{вих} - \rho V^2 A_{вх}.$$

Згідно з рівнянням нерозривності $\rho V_n A_{\text{вix}} = \rho V A_{\text{ex}}$, $W = V - u$ і $V_x = W \cos \beta + u$ (рис. 2.4.1). Тоді, беручи $A_{\text{ex}} = A_{\text{вix}} = 1$, маємо

$$\sum F_x = \rho V V_x - \rho V^2 = \rho V^2 \left[\left(1 - \frac{u}{V}\right) \cos \beta + \frac{u}{V} - 1 \right] = \rho V^2 \left(1 - \frac{u}{V}\right) (\cos \beta - 1).$$

$$Lu = u \cdot \sum F_x = \rho V^3 \frac{u}{V} \left(1 - \frac{u}{V}\right) (\cos \beta - 1);$$

$$\frac{dLu}{d \frac{u}{V}} = \rho V^3 (\cos \beta - 1) \left[\left(1 - \frac{u}{V}\right) - \frac{u}{V} \right] = 0. \quad \text{Звідки} \quad \frac{u}{V} = \frac{1}{2}.$$

Ми отримали оптимальне значення відношення швидкостей для активної турбіни при вуглі натікання потоку $\alpha=0$.

2.5. Згідно з рівнянням кількості руху (2.10) сили, що діють на контрольну поверхню в місцях перетину циліндра в проекції на вісь x ,

$$\sum F_x = \int \rho V_n V_x dA_{\text{вix}} - \int \rho V_n V_x dA_{\text{ex}}.$$

В нашому випадку

$$\sum F_x = 2 \int_0^{2d} \rho V^2 dy - 2 \int_0^{2d} \rho V_0^2 \cdot dy.$$

Згідно з рис. задачі 2.5, ми маємо $V = V_0 \frac{y}{2d}$. Тоді

$$\sum F_x = 2gV_0^2 \left(\int_0^{2d} \frac{y^2}{4d^2} dy - \int_0^{2d} dy \right) = 2\rho V_0^2 \left(\frac{8d^3}{4d^2} \cdot \frac{1}{3} - 2d \right) = -\frac{8}{3} \rho V_0^2 d.$$

Знак “мінус” означає, що сили направлені в протилежний бік напрямку потоку. А коефіцієнт опору циліндра

$$C_D = \frac{\frac{8}{3} \rho V_0^2 d}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 d} = \frac{16}{3}.$$

3.1. а) Згідно рівнянню енергії

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT = \frac{k+1}{k-1} \frac{a_*^2}{2}, \quad \text{звідки} \quad a_* = \sqrt{\frac{k-1}{k+1} V^2 + \frac{2k}{k+1} RT}.$$

Для повітря ($k=1.4$) $a_* = 272$ м/с.

б) Згідно (3.17) $\frac{V_{max}}{a_*} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$. Звідки $V_{max} = a_* \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = 667$ м/с.

3.2. $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$. Тоді $\beta = \rho a^2$, звідки $a = \sqrt{\beta/\rho}$;

3.3. Для нестисливої рідини рівняння Бернуллі (3.9) записується у вигляді $\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho}$. Для нашого випадку $V = a = \sqrt{\beta/\rho}$ (див. попередню задачу). Тоді

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\rho} = \frac{p_0}{\rho}; \quad \text{Звідки } p_0 = p + \frac{1}{2} \beta = 10351,01325 \text{ бар.}$$

3.4. Скористуємося картиною при русі спостерігача разом із фронтом хвилі (рис.3.1,б). Рівняння кількості руху і витрати газу записуються в цьому випадку у вигляді

$$A[p-(p+dp)] = G[(a-dV)-a]; \quad G = \rho A \cdot a.$$

Звідси

$$-AdpT = -\rho A a dV; \quad dp = \rho a^2 \frac{dV}{a}. \quad \text{Оскільки } a^2 = k \frac{p}{\rho}, \text{ то маємо } \frac{dp}{p} = k \frac{dV}{a}.$$

Для відповіді на друге питання скористаємося рівнянням стану ідеального газу $p/\rho = RT$ та рівнянням адіабатичного процесу $p/\rho^k = const$. Логарифмуючи ці рівняння та беручи похідну, маємо

$$\frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T}; \quad \frac{dp}{p} - k \frac{d\rho}{\rho} = 0.$$

Звідси одержуємо

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} - \frac{1}{k} \frac{dp}{p} = \frac{k-1}{k} \frac{dp}{p}.$$

Замінімо $\frac{dp}{p}$ раніше отриманим виразом. Тоді

$$\frac{dT}{T} = \frac{k-1}{k} k \frac{dV}{a} = (k-1) \frac{dV}{a}.$$

3.5. а) Використовуючи викладки задачі 3.4, маємо $dp = \rho a dV$; $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $a = \sqrt{\beta/\rho}$, $\beta = 20700$ бар. Тоді для води $dp = 42$ бар.

б) Для повітря використаємо з задачі 3.4 формулу $dp / p = kdV / a$. Для ідеального газу $a^2 = \sqrt{kRT}$. Тоді $dp = pkdV / \sqrt{kRT} = 0,0124 \text{ бар}$.

3.6. Для нашої задачі відомими величинами є G – витрата повітря, A – площа перетину труби, p – статичний тиск в цьому перетині, T_0 – температура гальмування. Для знаходження шести невідомих величин M , V , a , T , ρ і p_0 потрібні шість рівнянь.

Цими рівняннями є рівняння енергії, витрати, стану, швидкості звуку, числа M та формула розрахунку відношення тисків:

$$1. \frac{V_2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} RT_0; \quad 2. G = \rho AV; \quad 3. p = \rho RT;$$

$$4. a^2 = kRT; \quad 5. M = V / a; \quad 6. \frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Підставляючи значення $\rho = \frac{G}{AV}$ у рівняння енергії, отримуємо квадратне рівняння відносно V :

$$V^2 + \frac{2k}{k-1} p \frac{A}{G} V - \frac{2k}{k-1} RT_0 = 0. \quad A = \frac{\pi D^2}{4}.$$

$$V^2 + \frac{2 \cdot 1,4}{0,4} 0,4 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,01}{1,4} 3,14V - \frac{2 \cdot 1,4}{0,4} 287,1 \cdot 308,15 = 0.$$

$V^2 + 2,2 \cdot 10^3 V - 6,19 \cdot 10^5 = 0$. Розв'язання цього квадратичного рівняння дає значення $V=250 \text{ м/с}$. (нехтуємо негативною швидкістю).

З третього рівняння маємо $T = \frac{p}{\rho R} = p \frac{AV}{RG} = 273,15\text{К}$. $M = V / a = 0,75$.

$$p_0 = p \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = 0,582 \text{ бар}.$$

3.7. а) Відношення атмосферного тиску до загальмованого

$$p_{\text{атм}}/p_0 = 1,01325/7 = 0,145 < \varepsilon_{\text{кр}} = 0,5283.$$

Значить у вихідному перетині звужуючого сопла встановляється критичний тиск і критична швидкість.

$$p^* = \varepsilon_{\text{кр}} p_0 = 3,7 \text{ бар}.$$

$$б) V = a_* = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT_0} = 430 \text{ м/с.}$$

в) Площу поперечного перетину вихідної площини сопла розраховуємо за формулою

$$A = \frac{G}{\rho V} = \frac{G}{V} \frac{RT}{p} = \frac{G}{a_*} R \frac{T_*}{p_*}.$$

При $M=1$ $T^*/T_0=0,833$. Тоді $A = \frac{G}{a_*} \frac{R}{p_*} T_0 \cdot 0,833 = 4,16 \text{ см}^2$.

3.8. Співвідношення отримуємо за допомогою формул (3.20), (3.21) і (3.24):

$$\frac{p}{p_*} = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{p_0}{p_*} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{-\frac{k}{k-1}} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{p}{p_*} = \left[\frac{k+1}{2\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} \right]^{\frac{k}{k-1}}.$$

Аналогічно отримуємо вирази для $\frac{T}{T_*}$ і $\frac{\rho}{\rho_*}$.

3.9. $p_{\text{дин}}=493 \text{ мм.рт.ст.}=1,01325 \cdot 493/760=0,657 \text{ бар}$

$p_{\text{атм}}=755 \text{ мм.рт.ст.}=1,01325 \cdot 755/760=1,00658 \text{ бар.}$

Статичний тиск $p=1,00658+0,364=1,371 \text{ бар}$. Загальмований тиск $p_0=p+p_{\text{дин}}=1,371+0,657=2,028 \text{ бар}$. $T_0=26,6+273,15=299,75 \text{ К}$.

а) Вважаючи повітря нестисливим, приймемо для стандартних умов $\rho=1,23 \text{ кг/м}^3$.

Рівняння енергії для нестислової рідини (газу)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho}, \text{ звідки } V = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p)} = \sqrt{\frac{2}{\rho} p_{\text{дин}}} = 327 \text{ м/с.}$$

б) Для стисливого повітря $\pi = p/p_0 = 0,676$. Для цього значення π за допомогою табл. 1 додатка маємо $\tau = T/T_0 = 0,8908$, $\varepsilon = \rho/\rho_0 = 0,7486$, $M=0,7835$. Тоді

$$T=267 \text{ К}; \quad a = \sqrt{kRT} = 328,5 \text{ м/с}; \quad V=Ma=257 \text{ м/с.}$$

Ми бачимо, що неврахування стисливості повітря призводить до значної помилки в підрахунку його швидкості.

3.10. Згідно з табл. 1 додатка для $M=0,6$ $p/p_0=0,784$; $T/T_0=0,9328$; $A/A_*=1,1882$.

а) Для масової витрати G маємо

$$G = \rho A \cdot V = \frac{p}{RT} \cdot A \cdot M \cdot a = \frac{p}{RT} A \cdot M \cdot 20,1\sqrt{T};$$

$$G = 20,1 \frac{p \cdot A \cdot M}{R\sqrt{T}}; \text{Звідки } T = 20,1^2 \frac{p^2 \cdot A^2}{G^2 R^2} M^2 = 228 \text{ К. } T_0 = 228/0,9328 = 244 \text{ К.}$$

$$t_0 = -29,15^\circ \text{C.}$$

б) Оскільки $A/A_* = 1,1882$, то площу перетину можна зменшити, не зменшуючи масову витрату на 18,82 %.

в) У разі максимально зменшеної площі перетину

$$V = a_* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_0} = 286 \text{ м/с, } p_0 = p/0,784 = 1,785 \text{ бар.}$$

Для перетину з мінімальною площею без зменшення масової витрати $p^*/p_0 = 0,5283$; $p^* = 0,945 \text{ бар}$;

3.11. а) Для заданої точки потоку

$$a = 20,1\sqrt{T} = 335 \text{ м/с. } M = V/a = 0,448.$$

Для цього значення числа M по табл. 1 додатка знаходимо $p/p_0 = 0,8719$; $T/T_0 = 0,9616$; $A^*/A = 0,6865$.

Тоді $p_0 = p/0,8719 = 0,7926 \text{ бар}$; $T_0 = T/0,9616 = 290 \text{ К}$.

Площа зменшена на 15% $A' = 0,85 A$. Для цього перетину $A^*/A' = A^*/(0,85A) = 0,808$. Для вибраного значення A^*/A' по табл. 1 додатка маємо $p'/p_0 = 0,8082$; $T'/T_0 = 0,941$; $M' = 0,56$; $\lambda' = 0,5951$. Звідки $p' = 0,646 \text{ бар}$; $T' = 0,941 \cdot T_0 = 290 \text{ К}$.

$$V' = M' \cdot a' = M' \cdot 20,1 \sqrt{T'} = 186 \text{ м/с.}$$

б) Мінімальна площа перетину $A_{\min} = A^*$, $A^*/A_{\min} = 1$. Для заданого перетину $A^*/A = 0,6865$; $A_* = 0,6865A$.

Тобто максимально зменшити площу перетину без зменшення масової витрати можна на 31,35 %.

$$3.12. \text{ а) } c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{\frac{p}{p_\infty} - 1}{\frac{1}{2} \frac{k}{k-1} \frac{p_\infty}{p_\infty} V_\infty^2} = \frac{\frac{p}{p_\infty} - 1}{\frac{k}{2} \frac{M_\infty^2}{M_\infty^2}};$$

При появі критичної швидкості

$$c_p = c_p^*; \quad p/p_0 = p^*/p_0 = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Згідно з (3.21) $p_0 / p_\infty = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$. Підставляючи в раніше отриманий

вираз для c_p , маємо

$$c_p^* = \frac{\left[\frac{2 + (k-1) \cdot M_\infty^2}{k+1} \right]^{\frac{k}{k-1}} - 1}{\frac{k}{2} M_\infty^2}.$$

в) Для стандартної атмосфери $T_\infty=288K$; $M_\infty = \frac{V_\infty}{20,1\sqrt{T_\infty}} = 0,65$.

Підставляючи це значення M_∞ в раніше отриманий вираз для c_p^* , можна одержати максимальний коефіцієнт тиску без появи де-небудь на крилах надзвукової швидкості, рівний $c_p^* = -1,006$

3.13. З формули (3.28) маємо

$$q = \frac{A_*}{A} = M \left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}.$$

Підставляючи сюди значення $k=1,33$ і $M=1,8$ (або по таблицям газодинамічних функцій для $k=1,33$) знаходимо $q=0,6789$.

3.14. Використовуючи табл. 1 додатка для $\lambda=1,7$, знаходимо $M=2,15$; $\tau=T/T_0=0,52$. $V=M \cdot a = M \cdot 20,1 \sqrt{T} = 641$ м/с.

3.15. На виході з решітки

$$T=288 \text{ К}; p=1,01325 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2; \rho=1,23 \text{ кг/м}^3.$$

По табл. 1 додатка для $\lambda=1,6$; $\tau=0,5733$; $\pi=0,1427$; $\varepsilon=0,2489$. Тоді $T_0=T/\tau=503 \text{ К}$;

$$p_0=p/\pi=7,1 \text{ бар}. \rho_0=\rho/\varepsilon=4,94 \text{ кг/м}^3.$$

Для $k=1,4$ при $\lambda=1$ маємо

$$T^*/T_0=0,8333; p^*/p_0=0,5283; \rho^*/\rho_0=0,634.$$

Тоді в горлі решітки $T^*=T_0 \cdot 0,8333=419 \text{ К}$; $p^*=p_0 \cdot 0,5283=3,75 \text{ бар}$;

$$\rho_* = \rho_0 \cdot 0,634 = 3,13 \text{ кг/м}^3$$

Величина витрати повітря $G = \rho_* \cdot a_* \cdot A_* = 1,45 \text{ кг/с}$.

3.16. На цій висоті $T=280,75 \text{ K}$

$$M=V/a = \frac{V}{20,1\sqrt{T}} = \frac{300}{20,1\sqrt{280,75}} = 0,89.$$

Швидкість літака дозвукова.

3.17. $T_0=323,15 \text{ K}$; $p_0 = \frac{1100}{760} \cdot 1,01325 = 1,465 \text{ бар}$ $\pi = 1,01325/1,465 = 0,69164$.

По табл. 1 додатка для цього значення π $\tau=0,9677$; $M=0,4083$; $\lambda=0,44$.

$T=T_0\tau=323,15 \cdot 0,9677=311,1 \text{ K}$. $V=M \cdot a=0,4083 \cdot 20,1 \sqrt{311,1} = 156 \text{ м/с}$.

3.18. $T_0=323,15 \text{ K}$.

Рівняння енергії записуємо у вигляді

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1},$$

звідки

$$a^2 = a_0^2 - \frac{k-1}{2} V^2;$$

$$a^2 = kRT_0 - \frac{k-1}{2} V^2 = 116366,91; \quad a=341,1 \text{ м/с}.$$

3.19. Згідно з формулою (3.17)

$$V_{max} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k-1}} = \sqrt{kRT_0} \cdot \sqrt{\frac{2}{k-1}} = 1743 \text{ м/с};$$

$$V_{max}/a_* = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}},$$

звідки

$$a_* = V_{max} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} = 672 \text{ м/с}.$$

3.20. $\eta = \frac{V^2/2}{V_s^2/2}; \quad \frac{V_s^2}{2} c_p (T_0 - T_s);$

$$\eta = \frac{\frac{V^2}{2} \frac{kRT}{kRT}}{c_p T_0 (1 - T_s/T_0)} = \frac{\frac{M^2}{2} k \frac{c_p - c_v}{c_p} \frac{T}{T_0}}{1 - T_s/T_0} = \frac{M^2 \frac{k-1}{2} \frac{T}{T_0}}{1 - T_s/T_0},$$

звідки $\frac{T_s}{T_0} = 1 - \frac{1}{\eta} \frac{k-1}{2} M^2 \frac{T}{T_0}.$

Для ізоентропійного процесу ідеального газу

$$\frac{T_s}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}},$$

а згідно з (3.20)

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)}.$$

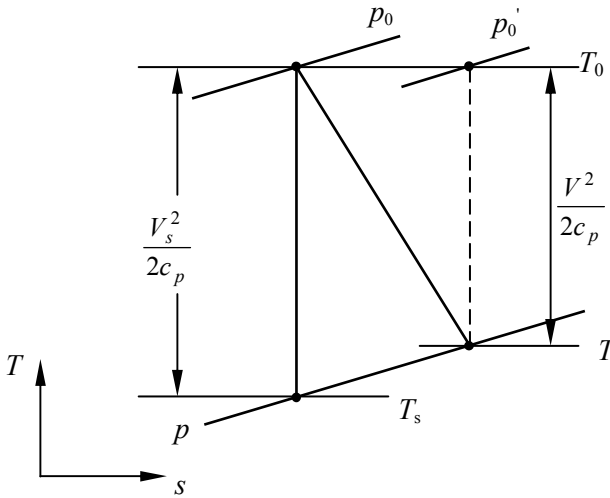


Рис. 3.20.1

Підставляючи ці вирази в отримане вище рівняння, маємо

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 - \frac{1}{\eta} \frac{\frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k-1}{2} M^2} \right]^{\frac{k}{k-1}}.$$

$$\text{б) } G = \rho VA. \quad \frac{G}{A} = \rho V = \frac{p}{RT} V = \frac{V}{\sqrt{kRT}} \sqrt{\frac{k}{R}} \sqrt{\frac{T_0}{T}} \frac{p}{\sqrt{T_0}} \frac{p_0}{p_0};$$

Звідси

$$\frac{G}{A} \frac{\sqrt{T_0}}{p_0} = \sqrt{\frac{k}{R}} M \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{p}{p_0}.$$

Підставляючи значення T/T_0 згідно (3.20), а також отриманий вираз для p/p_0 , приходимо до формули

$$\frac{G}{A} \frac{\sqrt{T_0}}{p_0} = \sqrt{\frac{k}{R}} M \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{1}{\eta} \frac{\frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right]^{\frac{k}{k-1}}.$$

в) У мінімальному перетині G/A_* максимальне. Для знаходження M у мінімальному перетині потрібно взяти похідну $d(G/A_*)/dM$ і покласти її рівною нулю. З цієї умови знаходимо M в горлі сопла.

3.21. Для ізоентропійної течії (рис. 3.21.1) для $1/q = A/A_* = 2$ по таб. 1 додатка знаходимо: $M_s=2,2$; $\pi=p/p_0=0,09352$; $\tau=T/T_0=0,5081$.

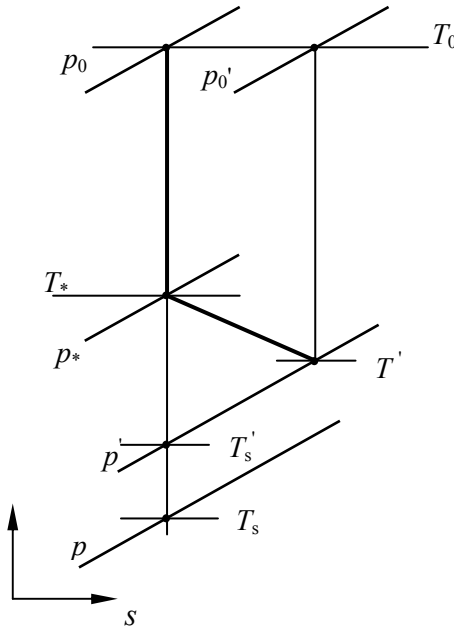


Рис. 3.21.1

Тоді маємо $p=0,9352$ бар; $V_s=608$ м/с. Згідно з рівнянням нерозривності $\rho' V' = \rho_* a_* A_* / A = 1047$ кг/м²с.

$$\text{З другого боку, } \rho' V' = V' \frac{p'}{RT'} = M' \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p'}{\sqrt{T_0}} \left(\frac{T_0}{T'} \right)^{\frac{1}{2}}$$

або

$$\sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p'}{\sqrt{T_0}} M' \left(1 + \frac{k-1}{2} M'^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1047. \quad (\text{A})$$

З попередньої задачі для течії з втратами отримали вираз

$$\frac{p'}{p_0} = \left[1 - \frac{1}{\eta} \frac{\frac{k-1}{2} M'^2}{1 + \frac{k-1}{2} M'^2} \right]^{\frac{k}{k-1}}. \quad (\text{B})$$

Розв'язання цих двох рівнянь відносно p' і M' , пам'ятаючи, що $\eta=0,9$, дає значення $p'=1,08$ бар, $M'=1,99$.

Для цього значення M по табл. 1 додатка маємо $\tau = T' / T_0 = 0,558$; $T'=208$ К. $V'=M' \cdot a'=576$ м/с.

3.22. Протягом першої секунди з початку витікання вважаємо $p_0=10$ бар, $T_0=373$ К, $p_2=1,01325$ бар, $T_*/T_0=0,833$, $p_2/p_0 < p_*/p_0 = 0,528$. У вихідному перетині сопла $V=a_*=18,3\sqrt{T_0}$. За першу секунду з бака витече $W_1 = \rho_* a_* A$. В баці до початку витікання знаходилась маса повітря, рівна $W_\delta = 30 \text{ м}^3 \frac{p_0}{RT_0}$. В кінці

першої секунди в баці залишилось $W'_\delta = W_\delta - W_1$. Тоді масова густина в баці $\rho'_0 = W'_\delta / 30$. Нові значення тиску p'_0 і температури T'_0 в баці знаходимо, вико-

ристовуючи рівняння стану та адіабатного розширення $T'_0 = \frac{p'_0}{R\rho'_0}$, $\frac{p_0}{\rho_0^k} = \frac{p'_0}{\rho_0'^k}$.

Знайдені значення p'_0 і T'_0 приймаємо постійними протягом другої секунди, а потім знову знаходимо кількість повітря в баці $W''_\delta = W'_\delta - W_2$, нові значення

ρ_0'' , p_0'' , T_0'' і т.д. За підрахованими величинами будуюмо графік зміни тиску в баці від часу витікання.

3.23. Згідно з формулою (3.42)

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{kM^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)}{(1-M^2)} 4f \frac{dx}{D}$$

Звідси знаходимо

$$\frac{dx}{D} = \frac{(1-M^2)}{kM^3 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} \frac{dM}{2f}$$

Беремо інтеграл $\int_0^{l^*} \frac{dx}{D} = \frac{l^*}{D} = \frac{1}{2kf} \int_0^1 \frac{(1-M^2)}{0,5M^3 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} dM$.

Інтеграл можемо взяти чисельно. Беручи $\Delta M=0,1$ і підставляючи в знайдену формулу, маємо

M	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Delta x/D$	13,6	6,581	3,224	1,484	0,534	0
l/D	0	13,6	20,181	23,405	24,889	25,423

На рис. 3.23.1 показано графік зміни числа M по довжині труби внаслідок наявності тертя.

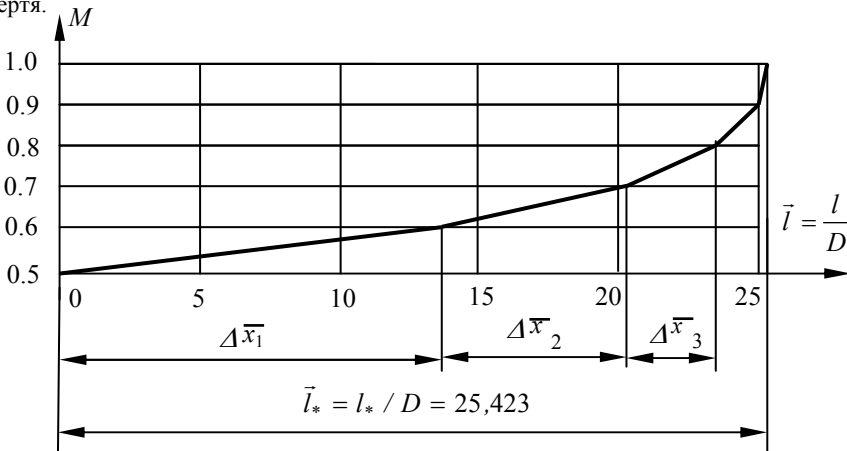


Рис. 3.23.1

3.24. Розподіл безрозмірної швидкості λ уздовж труби знаходиться за знайденим розподілом числа M за формулою (3.18). Уздовж труби тепло не підводиться, тобто $T_0 = \text{const}$. Тоді розподіл безрозмірної температури $\tau = T/T_0$ знаходиться по таб. 1 додатка за відомими значеннями λ або M .

3.25. Згадаємо формули (3.38) і (3.39):

$$\frac{dp}{p} = -\frac{kM^2 \left[1 + (k-1)M^2 \right]}{2(1-M^2)} 4f \frac{dx}{D}; \quad \frac{dV}{V} = \frac{kM^2}{2(1-M^2)} 4f \frac{dx}{D}.$$

Об'єднавши ці рівняння, маємо

$$\frac{dp}{p} = -\left[1 + (k-1)M^2 \right] \frac{dV}{V} = -\left[1 + (k-1)M^2 \right] \frac{d\lambda}{\lambda},$$

оскільки $dV/V = d\lambda/\lambda$ (критична швидкість однакова).

Підставляючи значення M^2 через λ^2 (3.19), маємо

$$\frac{dp}{p} = -\left[1 + \frac{2 \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2} \right] \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\lambda^2}{\lambda^2 - \frac{k+1}{k-1}}.$$

На вході в трубу $\lambda = \lambda_1$ і $p = p_1$. Тоді

$$\int_{p_1}^p \frac{dp}{p} = -\int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda} + \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda^2}{\lambda^2 - \frac{k+1}{k-1}}.$$

Це табличні інтеграли, рішення яких має вигляд

$$\ln \frac{p}{p_1} = \ln \frac{\lambda_1}{\lambda} + \ln \frac{\lambda^2 - \frac{k+1}{k-1}}{\lambda_1^2 - \frac{k+1}{k-1}}, \text{ або } \frac{p}{p_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^2 - \frac{k+1}{k-1}}{\lambda_1^2 - \frac{k+1}{k-1}},$$

звідки

$$\frac{p\lambda}{\lambda^2 - \frac{k+1}{k-1}} = \frac{p_1\lambda_1}{\lambda_1^2 - \frac{k+1}{k-1}} = \text{const} = c.$$

Знаючи параметри на вході в трубу, знаходимо постійну $c=0,789$.

На виході з труби $\lambda=1$, тоді $\frac{p^*}{1 - \frac{k+1}{k-1}} = 0,789$. Звідси $p^*=3,945$ бар.

3.26. Із розв'язання отриманої в задачі **3.25** формули маємо

$$\frac{p}{p_0} = \frac{c}{p_0} \frac{\lambda^2 - \frac{k+1}{k-1}}{\lambda}.$$

Знаючи λ уздовж труби (задача **3.24**) по наведеній вище формулі отримуємо розподіл p/p_0 уздовж труби.

3.27. Згадаємо формули (3.43) і (3.39), згідно з якими

$$\frac{dp_0}{p_0} = -\frac{kM^2}{2} 4f \frac{dx}{D}; \quad \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{kM^2}{2(1-M^2)} 4f \frac{dx}{D}.$$

Звідси $\frac{dp_0}{p_0} = -(1-M^2) \frac{d\lambda^2}{2\lambda^2}$, або, підставляючи значення M^2 через λ^2 (3.19),

маємо

$$\frac{dp_0}{p_0} = -\frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{d\lambda^2}{(k-1)\lambda^2 - (k+1)}.$$

Інтегруючи одержуємо

$$\ln p_0 = -\left\{ \ln \lambda + \frac{1}{k-1} \ln[(k-1)\lambda^2 - (k+1)] \right\} + const.$$

$$p_0 = \frac{1}{\lambda[(k-1)\lambda^2 - (k+1)]^{\frac{1}{k-1}}} \times const;$$

$$p_0 \lambda [(k-1)\lambda^2 - (k+1)]^{\frac{1}{k-1}} = const = p_{01} \lambda_1 [(k-1)\lambda_1^2 - (k+1)]^{\frac{1}{k-1}}.$$

Звідси

$$\frac{p_0}{p_{01}} = \frac{\lambda_1 [(k-1)\lambda_1^2 - (k+1)]^{\frac{1}{k-1}}}{\lambda [(k-1)\lambda^2 - (k+1)]^{\frac{1}{k-1}}}.$$

За заданими значеннями $p_{01}=10$ бар, $\lambda_1=0,535$ та розрахованими значеннями λ уздовж труби знаходимо розподіл відносного тиску ізоентропійного гальмування уздовж труби.

3.28. Для розв'язання задачі запишемо шість рівнянь, з яких знаходимо шість невідомих.

1. $p_1(1 + kM_1^2) = p_*(1 + k)$, в точці a $M_* = 1$; 2. $\rho_1 V_1 = \rho_* a_*$;
3. $p_* = \rho_* RT_*$;
4. $Q + i_1 + \frac{V_1^2}{2} = i_* + \frac{a_*^2}{2}$; 5. $V_*^2 = a_*^2 = kRT_*$; 6. $i = c_p T$.

З рівняння 4. маємо

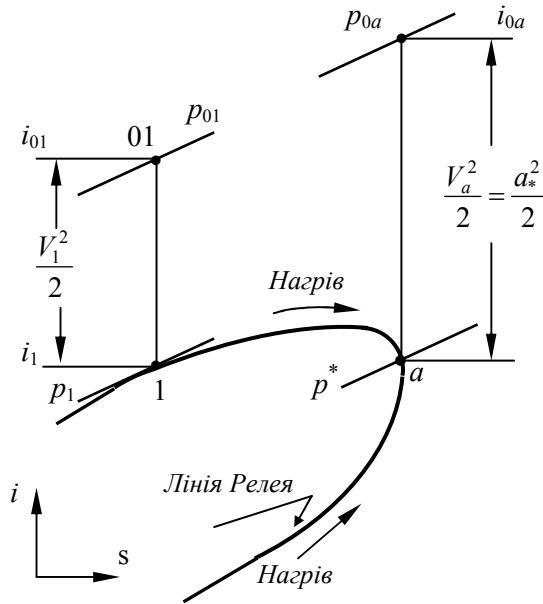


Рис. 3.28.1

$$Q = T_* \left(c_p + \frac{kR}{2} \right) - c_p T_1 - \frac{V_1^2}{2}.$$

Для знаходження T_* використовуємо рівняння 2.

$$\rho_1^2 V_1^2 = \rho_*^2 V_*^2; \quad \left(\frac{p_1}{RT_1} \right)^2 V_1^2 = \frac{p_*^2}{(RT_*)^2} kRT_*.$$

З першого рівняння $p_* = p_1 \frac{(1 + kM_1^2)}{(1 + k)}$.

Підставляючи це значення p_* , після скорочень маємо

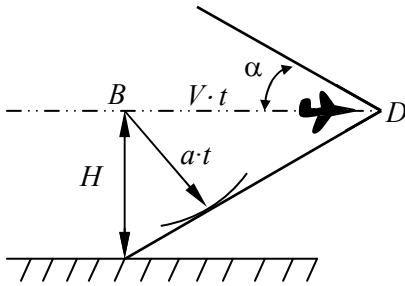
$$T_* = \frac{kRT_1}{V_1^2} \frac{\left(1 + \frac{V_1^2}{RT_1}\right)}{(1 + k)^2}.$$

Тоді підстановка заданих величин дає можливість розрахувати $Q=558,6 \cdot 10^3$ Дж/кг.

5.1. Кут Маха $\alpha=25,15^\circ$. $M=1/\sin\alpha=2,35$.

Швидкість кулі $V=M \cdot a=M\sqrt{kRT}=835$ м/с.

5.2. Згідно з рис. 5.2.1 маємо



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{V \cdot t}; \quad t = \frac{H}{\operatorname{tg}\alpha \cdot V}.$$

$$\alpha = \arcsin(1/M) = \arcsin \frac{a}{V}.$$

$$a = \sqrt{kRT} = 309 \text{ м/с.}$$

$$\alpha = 43,23^\circ; \quad t = 18,9 \text{ с.}$$

Рис. 5.21.

5.3. $V=250+150=400$ м/с. $a=20,1\sqrt{T}=344$ м/с.

$M=V/a=1,17$; $\alpha=\arcsin(1/M)=58,73^\circ$. $\alpha>\gamma$.

Крило знаходиться в збудженій області. Нормальна відносно крила швидкість $V_n=V \cdot \sin\gamma=257$ м/с $< a$. Нормальний перетин крила обтікається з дозвучовою швидкістю, незважаючи на те, що політ здійснюється з надзвучовою швидкістю.

5.4. $\sin \alpha=(1/M)$; $M=V/a$. Звідси $a=V \cdot \sin\alpha=400 \cdot 0,5=200$ м/с.

5.5. Кут нахилу крил γ вибираємо з умови $V_n < a$, $\sin \gamma=V_n/V=a/V$;

$\gamma=\arcsin(a/V)=\arcsin(20,1\sqrt{T}/V)=24^\circ 20'$.

5.6. $\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{V_{\max}^2}{2}$. У нашому випадку

$$V = V_{\max} / 2.$$

Тоді
$$a = \frac{V_{\max}}{2} \sqrt{\frac{3}{2}(k-1)}.$$

$$M = V/a = (V_{\max}/2) / \left(\frac{V_{\max}}{2} \sqrt{\frac{3}{2}(k-1)} \right) = \sqrt{\frac{2}{3(k-1)}} = 1,29.$$

Згідно з (3.17)
$$\frac{V_{\max}}{a_*} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}.$$

Тоді

$$\lambda = \frac{V}{a_*} = \frac{V_{\max}/2}{V_{\max}/\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = 1,23.$$

Згідно з (3.17) також

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{2k}{k-1}} RT_0 = 898 \text{ м/с.}$$

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2k}{k-1}} RT_0 \sqrt{\frac{3}{2}(k-1)} = \frac{1}{2} \sqrt{3RT_0} = 348 \text{ м/с.}$$

5.7. На зрізі сопла $a = 20,1\sqrt{T} = 286 \text{ м/с.}$

$$M = V/a = 2,8. \quad p_0 = p_{амм} \cdot \pi(M) = 1,01325/0,03685 = 27,5 \text{ бар.}$$

$$T_0 = T/\tau(M) = 203,1/0,3894 = 522 \text{ К. } t_0 = 248 \text{ }^\circ\text{C.}$$

Використовуючи рівняння стану, маємо $\rho_c/\rho_{амм} = T_{амм}/T_c = 1,43.$

5.8.
$$\frac{V_{\max}^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT = \frac{k}{k-1} RT_0.$$

Звідки

$$V_{\max} = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R(T_0 - T)} = 650 \text{ м/с.}$$

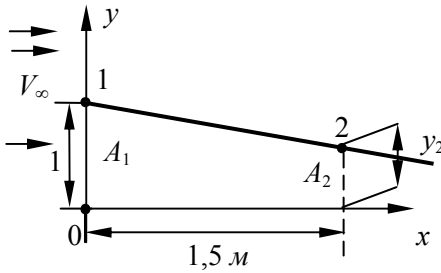
5.9. По табл. 1 додатка для другого перетину $\lambda_2 = 1,63. \quad V_2/V_1 = \lambda_2/\lambda_1 = 1,63;$
 $V_2 = 1,63 V_1.$

$$5.10. \frac{\rho_1 V_1^2 / 2}{\rho_2 V_2^2 / 2} = \frac{\frac{p_1}{RT_1} \frac{V_1^2}{a_1^2} kRT_1}{\frac{p_2}{RT_2} \frac{V_2^2}{a_2^2} kRT_2} = \frac{M_1^2 \frac{p_1}{p_0} \frac{p_0}{p_2}}{M_2^2} = \frac{M_1^2}{M_2^2} = \frac{\pi(M_1)}{\pi(M_2)}.$$

Використовуючи табл. 1 додатка, знаходимо $\frac{\rho_1 V_1^2 / 2}{\rho_2 V_2^2 / 2} = 1,03$, тобто кінетична енергія

одиночій об'єму зі збільшенням числа M від 1 до 2 навіть зменшилась, що пояснюється фактом скорішого падіння густини повітря над збільшенням швидкості.

$$6.1. \Phi = 250x + \varphi = 250x + 6x^2 - 3y^2;$$



а) Згідно з рівняннями (6.3)

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

$$\varphi = 6x^2 - 3y^2; u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 12x;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 12.$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -6y, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -6.$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \text{ Тобто на всьому протязі } x \text{ потенціал швидкості } \Phi$$

задовольняє рівняння (6.3).

б) Підставляючи значення інших похідних в (6.3), знаходимо $M_\infty = 0.707$.

$$M_\infty = V_\infty / a_\infty = V_\infty / \sqrt{kRT_\infty}.$$

Звідки

$$T_\infty = \frac{V_\infty^2}{kRM_\infty^2} = \frac{250^2}{1,4 \cdot 287,1 \cdot 0,707^2} = 309 \text{ К.}$$

В точці 1: $u_1=0$; $v_1=-6$; $V_1^2=V_\infty^2+v_1^2$; $V_1=250,07$ м/с. V_1 дуже мало відрізняється від $V_\infty=250$ м/с і ми можемо стверджувати, що $T_1=T_\infty=309$ К.

В точці 2: $u_2=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=12x=18$ м/с. $v_2=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-6y=-6$ м/с. Тут приймаємо в першому на-

ближенні, що $y\approx 1$. Тоді $V_2^2=(V_\infty+u_2)^2+v_2^2=72036$ м²/с²; $V_2=268,4$ м/с. З рів-

няння енергії $c_p T_1 + \frac{V_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{V_2^2}{2}$ знаходимо $T_2 = T_1 - \frac{V_2^2 - V_1^2}{2 \cdot c_p} = 304,76$ К.

З рівнянь стану та ізоентропійного процесу маємо $\rho_1/\rho_2 = (T_1/T_2)^{\frac{1}{k-1}} = 1,035$.

в) Виходячи з рівняння нерозривності, маємо $A_1 \rho_1 V_\infty = A_2 \rho_2 (V_\infty + u_2)$.

Звідси $A_2/A_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{V_\infty}{V_\infty + u_2} = 0,964$, $y_2=0,964$. Уточнюємо значення

$v_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -6y = -5,78$ м/с.

Нахил лінії струму дорівнює $\frac{v_2}{V_\infty + u_2} = -0,0216$ рад.

6.2. $\Phi = V_\infty + \varphi$. В точці 1 $\Phi_1 = V_\infty x_1 + \varphi_1$. Звідси $V_\infty=250$ м/с.

$\varphi = x^2 - 0,5y^2$. З цього рівняння за відомих величин φ_1, x_1 знаходимо для точки 1 $y_1=4$ м. У точці 1 знаходимо компоненти швидкості

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = V_\infty + u = V_\infty + 2x = 258 \text{ м/с}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = v = -y = -4 \text{ м/с}.$$

$$V_1 = \sqrt{(V_\infty + u)^2 + v^2} = 258,225 \text{ м/с}.$$

З лінеаризованого рівняння для потенціалу швидкостей (6.3)

$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$ можемо розрахувати значення M_∞ , підставивши в рів-

няння значення $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ та $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$. Тоді $M_\infty^2=0,5$, $M_\infty=0,707$.

Пам'ятаючи, що $M_\infty^2 = \frac{V_\infty^2}{kRT_\infty}$, знаходимо $T_\infty = \frac{V_\infty^2}{kRM_\infty^2} = 309 \text{ K}$.

6.3. $\Phi = V_\infty x + \varphi$.

Для точки 1 з цього рівняння маємо $\varphi_1 = 10 \text{ м/с}$.

В точці 1: $v_1 = V_1 \cdot \sin 1,5^\circ = 5,5 \text{ м/с}$; $u_1 = V_1 \cdot \cos 1,5^\circ - V_\infty = 9,9 \text{ м/с}$.

В точці 2: $v_2 = V_2 \cdot \sin 1,25^\circ = 4,7 \text{ м/с}$; $u_2 = V_2 \cdot \cos 1,25^\circ - V_\infty = 14,85 \text{ м/с}$.

Згадаємо, що $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy$. В кінцевих різницях

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \Delta y = \frac{u_1 + u_2}{2} (x_2 - x_1) + \frac{v_1 + v_2}{2} (y_2 - y_1) = 0,4475.$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi = 10,4475 \text{ м}^2/\text{с}. \quad \Phi_2 = V_\infty x_2 + \varphi_2 = 76,4475 \text{ м}^2/\text{с}.$$

6.4. Користуємося формулами (6.7)

$$\Delta p_{1,II} = \mp \frac{k p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \Delta\theta, \quad p_3 = p_1 = p_\infty.$$

Позначимо $\frac{k p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = A$, тоді $p_2 - p_1 = +A/(\theta_2 - \theta_1)$; $p_3 - p_2 = -A/(\theta_3 - \theta_2)$.

Пам'ятаючи, що $p_3 = p_1$, $\theta_1 = 0$, з цих двох рівнянь маємо $\theta_3 = 2\theta_2$, тобто $\theta_3 = -2^\circ$, (число “мінус” вказує, що підрахунок кута йде за часовою стрілкою),

$$p_2 = p_1 + \frac{k p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \theta_2. \text{ В цій формулі } \theta_2 \text{ треба брати в радіанах і зі знаком “мінус”}.$$

Підставляючи, маємо $p_2 = 0,10135 - 0,005 = 0,09637 \text{ МПа}$.

6.5. Скористуємося формулою коефіцієнта тиску $P = \frac{180}{\pi} \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{k p_\infty M_\infty^2} p + const$

і його змінами при перетині хвиль першого та другого сімейств $\Delta P_{I,II} = \mp \Delta\theta$, де відхилення лінії струму в градусах. Тоді, рухаючись з області 1 в область 4 через область 3, маємо

$$P_4 - P_1 = (P_4 - P_3) + (P_3 - P_1) = (\theta_4 - \theta_3) - (\theta_3 - \theta_1) = \theta_4 - 2\theta_3 + \theta_1.$$

Рухаючись з області 1 в область 4 через область 2, маємо

$$P_4 - P_1 = (P_4 - P_2) + (P_2 - P_1) = -(\theta_4 - \theta_2) + (\theta_2 - \theta_1) = -\theta_4 + 2\theta_2 + \theta_1.$$

Складаючи та віднімаючи ці два рівняння, отримуємо

$$P_4 - P_1 = \Theta_2 - \Theta_3 = \delta_a - \delta_b; \quad \Theta_4 + \Theta_1 = \Theta_2 + \Theta_3 = \delta_a + \delta_b.$$

Звідси $P_4 = P_1 + \delta_a - \delta_b = 98$; $\Theta_4 = 6^\circ$.

$$P_1 = \frac{180}{\pi} \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{k p_\infty M_\infty^2} p_1 + const = 17,8 + C = 100; \text{ Приймаємо } C = 82,2.$$

Тоді

$$P_4 = \frac{180}{\pi} \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{k p_\infty M_\infty^2} p_4 + 82,2 = 98; \quad p_4 = \frac{k p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\pi}{180} (98 - 82,2) = 4,4382 \text{ бар.}$$

6.6. Тиск під крилом визначаємо за формулою (лінія струму пересікає хвилю Маха першого сімейства)

$$p_2 - p_\infty = - \frac{k p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \Delta\theta; \quad \Delta\theta = -0,03 \text{ рад. Звідси } p_2 = p_\infty + 0,1 k p_\infty;$$

Аналогічно обчислюємо тиск над крилом (хвиля другого сімейства)

$$p_1 - p_\infty = + \frac{k p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \Delta\theta; \quad \Delta\theta = -0,06 \text{ рад.}$$

Звідси $p_1 = p_\infty - 0,2 k p_\infty$;

Під'ємна сила на одиницю довжини крила

$$L = (p_2 - p_\infty)l/2 + (p_2 - p_1)l/2 = l/2(2p_2 - p_\infty - p_1) = 0,2 k p_\infty l.$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S}; \quad \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{k p_\infty}{k p_\infty} \rho_\infty V_\infty^2 = \frac{1}{2} k p_\infty M_\infty^2;$$

$$C_L = \frac{0,2 k p_\infty l}{\frac{1}{2} k p_\infty M_\infty^2 l} = \frac{0,4}{M_\infty^2} = 0,04.$$

Сила опору крила на одиницю довжини $D = (p_2 - p_1)l \cdot 0,03 = 0,009 k p_\infty l$.

$$C_D = \frac{D}{\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S} = \frac{0,009 k p_\infty l}{\frac{1}{2} k p_\infty M_\infty^2 l} = 0,0018.$$

$$\theta_5 \left(\frac{kp_1 M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} + \frac{kp_2 M_2^2}{\sqrt{M_2^2 - 1}} \right) =$$

$$= 2 \frac{kp_1 M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \delta = 0,111 \text{ рад}$$

$p_3=6,5 \text{ бар}, p_5=6,89 \text{ бар}$

Хвиля c являється хвилею стиску.

6.14. Треба знайти $p_5=p_4, p_3$ і θ_5 .

Для знаходження трьох невідомих використовуємо наступні три рівняння:

$$1. p_3 = p_1 - \frac{kp_1 M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \delta; \quad 2. p_5 = p_2 - \frac{kp_2 M_2^2}{\sqrt{M_2^2 - 1}} \theta_5;$$

$$3. p_4 = p_3 + \frac{kp_1 M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} (\theta_5 - \delta).$$

Прирівнюючи p_4 і p_5 , та підставляючи p_3 за допомогою рівняння (1), маємо

$$p_2 - \frac{kp_2 M_2^2}{\sqrt{M_2^2 - 1}} \theta_5 = p_1 - \frac{kp_1 M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \delta + \frac{kp_1 M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} (\theta_5 - \delta).$$

Пам'ятаючи, що $p_2=p_1$, з цього рівняння отримуємо

$$2 \frac{k \cdot M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \delta = \theta_5 \left(\frac{k \cdot M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} + \frac{k \cdot M_2^2}{\sqrt{M_2^2 - 1}} \right).$$

Звідси
$$\frac{\theta_5}{\delta} = \frac{2}{1 + \frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{\sqrt{M_1^2 - 1}}{\sqrt{M_2^2 - 1}}};$$

$$\frac{p_4 - p_1}{p_3 - p_1} = \frac{\left[p_3 + \frac{kp_1 M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} (\theta_5 - \delta) \right] - \left[p_3 + \frac{kp_1 M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \delta \right]}{- \frac{kp_1 M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \delta} = 2 - \frac{\theta_5}{\delta};$$

Підставляючи сюди отримане вище рівняння для θ_5/δ , маємо

$$\frac{p_4 - p_1}{p_3 - p_1} = \frac{2}{1 + \frac{M_1^2}{M_2^2} \sqrt{\frac{M_2^2 - 1}{M_1^2 - 1}}}.$$

6.16. Позначивши тиск на верхній частині профілю через p_6 , а на нижній – через p_n , запишемо величину підйомної сили на одиницю довжини крила

$$L = (p_n - p_6) \cdot l.$$

Використовуючи лінеаризоване рівняння Бернуллі (6.4), $p - p_\infty = -\rho_\infty V_\infty u$, запишемо для верхньої і нижньої частини крила:

$$p_6 = p_\infty - \rho_\infty V_\infty u; \quad p_n = p_a + \rho_\infty V_\infty u.$$

Тоді $L = 2\rho_\infty V_\infty u \cdot l$.

Циркуляція навкруги крила, рухаючись проти годинникової стрілки (область обходу зліва), дорівнює

$$\Gamma = \oint V dl = [-(V_\infty + u)/\cos \alpha + (V_\infty - u)/\cos \alpha] \cdot l.$$

При малому куті нагікання α $\cos \alpha \approx 1$, тоді $\Gamma = -2ul$. Використовуючи цей вираз, знаходимо $L = -\rho_\infty V_\infty \Gamma$.

6.17. Використовуючи теорію малих збуджень для верхньої та нижньої частин профілю в довільній точці з кутом відхилення потоку θ , маємо

$$p_6 - p_\infty = \frac{kp_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \theta, \quad p_n - p_\infty = -\frac{kp_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \theta.$$

Звідси в довільній точці різниця тисків дорівнює $p_i - p_a = -2 \frac{kp_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \theta$.

Пам'ятаючи, що θ в нашому випадку має знак “мінус”, отримуємо

$$p_i - p_a = 2 \frac{kp_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \theta.$$

$$L = \int_0^{x_2} (p_n - p_6) dx = \int_0^{\theta_2} (p_n - p_6) R d\theta = 2 \frac{kp_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} R \int_0^{\theta_2} \theta d\theta.$$

$$L = \frac{kp_{\infty}M_{\infty}^2}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} R\theta_2^2.$$

Сила опору

$$D = \int_0^{y/2} (p_H - p_{\epsilon}) dy = \int_0^{y/2} (p_H - p_{\epsilon}) \theta dx = \int_0^{\theta_2} (p_H - p_{\epsilon}) \theta R d\theta =$$

$$= 2 \frac{kp_{\infty}M_{\infty}^2}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} R \int_0^{\theta_2} \theta^2 d\theta. \quad D = 2 \frac{kp_{\infty}M_{\infty}^2}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} R \frac{\theta_2^3}{3}$$

В точці 2 кут обтікання профіля дорівнює 10° , тобто

$$\theta_2 = \frac{\pi}{180} \cdot 10 = 0,1745 \text{ рад.}$$

Підставляючи це і інші задані значення в раніше виведені формули, маємо $L=8526 \text{ Н}$, $D=992 \text{ Н}$.

8.1. Швидкість поширення хвилі позначимо через V_y (рис. 8.1.1,а). Рухаючись разом з хвилею, отримуємо картину течії, що відображена на рис. 8.1.1,б.

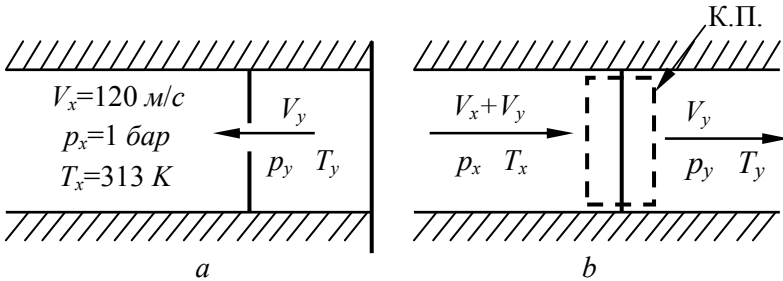


Рис. 8.1.1

Задачу розв'язуємо методом послідовних наближень. Нехай $V_y = 300 \text{ м/с}$. Тоді

$$M_x = \frac{V_x + V_y}{20,1\sqrt{T_x}} = 1,18. \text{ По таблиці } \lambda_x = 1,1485. \text{ Для прямого стрибка ущільнення}$$

$$\lambda_x \cdot \lambda_y = 1, \text{ звідки } \lambda_y = 0,875, M_y = 0,8552. \text{ Згідно з (8.13) } \frac{p_y}{p_x} = \frac{2k}{k+1} M_x^2 - \frac{k-1}{k+1} = 1,454.$$

З рівняння нерозривності $\rho_y / \rho_x = V_x / V_y = 1,4$.

Згідно з рівнянням стану $T_y = T_x \frac{p_y}{p_x} \frac{\rho_x}{\rho_y} = 325,1 \text{ K}$.

Тоді $V_y' = M_y \cdot 20,1\sqrt{T_y} = 310 \text{ м/с}$.

Беремо значення $V_y = 310 \text{ м/с}$ і повторюємо розв'язання задачі спочатку. Третє наближення дає кінцевий результат

$V_y = 315 \text{ м/с}$, $p_y = 1,57 \text{ бар}$, $T_y = 357 \text{ K}$.

8.2. Відносно спостерігача, що рухається разом з ударною хвилею, матимемо $V_x = 60000 \text{ м/с}$, $p_x = 0,101325 \text{ МПа}$, $T_x = 288,15 \text{ K}$.

Тоді $M_x = \frac{V_x}{20,1\sqrt{T_x}} = 176$. За формулами прямого стрибка (8.12), (8.13), (8.14)

знаходимо

$$M_y^2 = \frac{M_x^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1}M_x^2 - 1} \approx \frac{k-1}{2k} = 0,1429; \quad M_y = 0,37796;$$

$$p_y = p_x \left(\frac{2k}{k+1}M_x^2 - \frac{k-1}{k+1} \right) = 3597 \text{ МПа}.$$

$$T_y = T_x \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2}M_x^2 \right) \left(\frac{2k}{k-1}M_x^2 - 1 \right)}{\frac{(k+1)^2}{2(k+1)}M_x^2} = 1,74 \cdot 10^6 \text{ K}.$$

З рівнянь нерозривності та стану маємо

$$V_y = V_x \rho_x / \rho_y = V_x \frac{p_x}{p_y} \frac{T_y}{T_x} = 10400 \text{ м/с}.$$

По відношенню до спостерігача, що знаходиться нерухомим відносно незбуреного повітря, швидкість за ударною хвилею дорівнює $V = V_x - V_y = 49600 \text{ м/с}$.

$M = \frac{V}{20,1\sqrt{T_y}} = 1,87$. Для цього значення M по табл. 1 додатка знаходимо

$\pi = p_y / p_0 = 0,1563$, $\tau = T_y / T_0 = 0,58845$. Звідси $p_0 = 23013,4 \text{ МПа}$, $T_0 = 2,96 \cdot 10^6 \text{ K}$.

8.3. Згадаємо, що (3.27)

$$q = \frac{\rho V}{\rho_* V_*} = \lambda \left[\left(\frac{k+1}{2} \right) \left(1 + \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right) \right]^{\frac{1}{k-1}}.$$

Розділивши цей вираз, записаний для перетину *перед* стрибком, на другий, записаний для перетину *за* стрибком, з урахуванням того, що згідно з рівнянням нерозривності $\rho_* V_* = \rho_y V_y$, і $a_{*x} = a_{*y} = a_*$,

маємо

$$\frac{\rho_{*y}}{\rho_{*x}} = \frac{\lambda_x \left[1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_x^2 \right]^{\frac{1}{k-1}}}{\lambda_y \left[1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_y^2 \right]^{\frac{1}{k-1}}}.$$

З урахуванням рівняння стану

$$\frac{\rho_{*y}}{\rho_{*x}} = \frac{p_{*y}}{p_{*x}} \frac{T_{*x}}{T_{*y}}, \quad \frac{p_{0x}}{p_{0y}} \frac{p_{0y}}{p_{0x}} = \frac{p_{0y}}{p_{0x}},$$

оскільки критичне відношення тисків p^*/p_0 однакове до і після стрибка.

Пам'ятаючи, що для прямого стрибка $\lambda_x \lambda_y = 1$, можна записати, замінивши λ_y через λ_x

$$\frac{p_{0y}}{p_{0x}} = \lambda_x^2 \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_x^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_x^2}} \right]^{\frac{1}{k-1}}.$$

8.4. Згідно з табл. 1 додатка $\lambda_1 = 1,3$ відповідає значенню $M_1 = 1,4$. Використовуючи діаграму 1 додатка, знаходимо для цього значення M_1 і $\delta = 5^\circ$ $\sigma = 52,8^\circ$.

Обчислимо $M_x = M_1 \sin \sigma = 1,115$. По цьому значенню M_x знаходимо з табл. 3 додатка $M_y = 0,9$, та $p_2/p_1 = 1,284$, $T_2/T_1 = 1,076$, $\rho_2/\rho_1 = 1,2$.

Звідси

$$p_2 = 3,85 \text{ бар}, \quad \rho_2 = 1,2 \frac{p_1}{RT_1} = 4,18 \text{ кг/м}^3; \quad T_2 = 322,8 \text{ К.} \quad M_2 = M_y / \sin(\sigma - \delta) = 0,9 / \sin$$

$47,8^\circ = 1,215$. Значення ρ_2/ρ_1 можна також визначити за формулою Ренкіна–Гюгоніо (8.6)

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{p_2}{p_1} + 1}{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_2}{p_1}}$$

8.5. $T_1=303,15 \text{ K}$, $M_1=1,64$. По табл. 3 додатка для $p_2/p_1=2$ знаходимо $M_x = M_1 \sin \sigma = 1,36$, $M_y = M_2 \sin(\sigma - \delta) = 0,757$, $\rho_2/\rho_1 = 1,62$, $T_2/T_1 = 1,229$.

Звідси знаходимо

$$\rho_2 = 1,62 \frac{p_1}{RT_1} = 3,72 \text{ кг/м}^3, T_2 = 372,6 \text{ K}.$$

$\sigma = \arcsin(1,36 / M_1) = 56^\circ$. По діаграмі 1 додатка для $M_1=1,64$ і $\sigma=56^\circ$ знаходимо $\delta=13,5^\circ$.

$$M_2 = M_y / \sin(\sigma - \delta) = 1,12. \text{ Тоді } \lambda_2 = 1,097.$$

8.6.

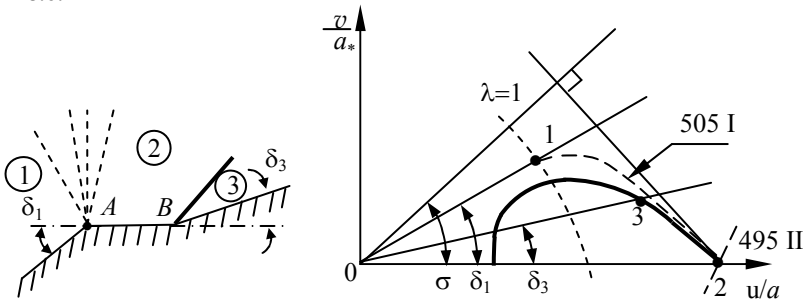


Рис. 8.6.1.

Користуючись рівняннями (7.24) і (7.25) і знаючи, що $\theta_1 = \delta_1 = 10^\circ$, $\omega_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, знаходимо $I_1 = 505$, $P_2 = 495$, $\omega_2 = 10^\circ$. По табл. 2 додатка для цього значення ω_2 знаходимо $M_2 = 1,4349$, а по табл. 1 додатка для цього значення M_2 маємо $\lambda_2 = 1,323$, $p_2/p_{01} = 0,299$, $T_2/T_0 = 0,708$. Тоді $p_2 = 1,495$ бар, $T_2 = 229 \text{ K}$.

Згідно з діаграмою 1 додатка для значення $M_2 = 1,4349$ і $\delta_2 = 5^\circ$ знаходимо $\sigma = 51^\circ$.

Згідно з рівнянням (8.9) $\frac{p_3}{p_2} = \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg}(\sigma - \delta)} = 1,1925$, а рівнянням (8.10)

$$p_3/p_2 = 1 + kM_2^2 \sin^2 \sigma (1 - \rho_2/\rho_3) = 1,28. p_3 = 1,915 \text{ бар};$$

$$\rho_3 = 1,1925 \cdot \frac{p_2}{RT_2} = 2,75 \text{ кг/м}^3 \quad T_3 = T_2 \frac{p_3}{p_2} \frac{\rho_2}{\rho_3} = 246 \text{ К.}$$

8.7.

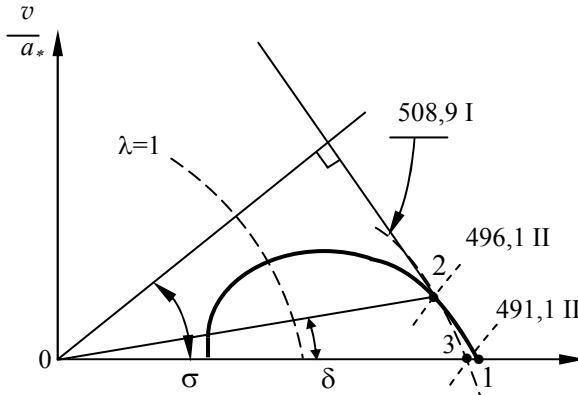


Рис. 8.7.1

Для заданого значення $p_1/p_0=0,2$ $\lambda_1=1,487$, $M_1=1,708$. Для цього значення M_1 і $\delta=5^\circ$ по діаграмі 1 додатка знаходимо $\sigma=41^\circ$. Користуючись формулами (8.9) і (8.10) (див. задачу 8.6.1), знаходимо $\rho_2/\rho_1=1,1965$, $p_2/p_1=1,289$, $p_2=1,289$ бар.

Для цього значення p_2/p_1 по табл.3 додатка $M_y=0,9$, а $M_2=M_y/\sin(\sigma-\delta)=1,53$. Користуючись табл. 1 додатка, знаходимо $p_2/p_{02}=0,261$; $p_{02}=4,94$ бар, $\lambda_2=1,383$. По табл. 2 додатка для значення $M_2=1,53$ маємо $\omega_2=12,8^\circ$.

За допомогою формул (7.24) з умови, що $\omega_2=12,8^\circ$, $\theta_2=5^\circ$, маємо $I_2=508,9$, $\Pi_2=496,1$. З області 2 переходимо в область 3, перетинаючи хвилі Маха другого сімейства, тобто рухаємося уздовж першої характеристики. Тоді для області 3 маємо $I_3=508,9$, $\theta=0^\circ$.

З формул (7.25) маємо, $\Pi_3=491,1$, $\omega_3=I_3-\Pi_3=17,8^\circ$. Використовуючи табл. 2 і 1 додатка, знаходимо $M_3=1,7$, $\lambda_3=1,425$, $p_3/p_{03}=0,20259$. Оскільки $p_{03}=p_{02}$, то $p_3=1,0005$ бар.

8.8.

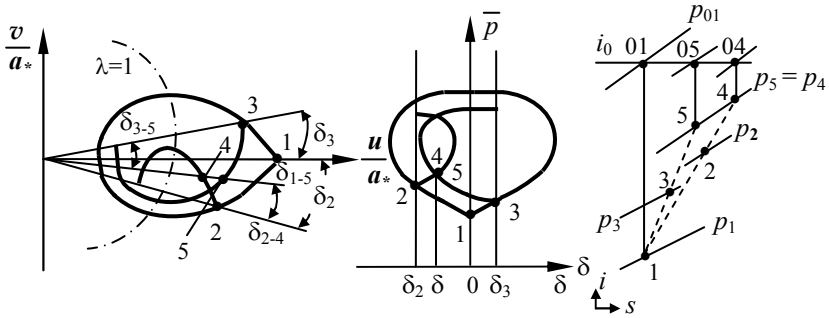


Рис. 8.8.1

Згідно з діаграмою 1 додатка при $M_1=2,545$ для $\delta_2=15^\circ$ $\sigma_2=36,3^\circ$, а для $\delta_3=5^\circ$ $\sigma_3=27^\circ$.

За допомогою формул (8.9) і (8.10) маємо $\rho_2/\rho_1=1,884$; $\rho_3/\rho_1=1,26$; $p_2/p_1=2,49$; $p_3/p_1=1,386$; $p_2=24,9$ бар; $p_3=13,8$ бар. По табл. 3 для цих значень p_2/p_1 і p_3/p_1 знаходимо $M_{y,2}=0,7$; $M_{y,3}=0,871$. Тоді за формулою $M=M_y/\sin(\sigma-\delta)$ знаходимо $M_2=1,93$; $M_3=2,32$.

Позначимо $p_4/p_2=K_4$; $p_5/p_3=K_5$. Пам'ятаючи, що $p_4=p_5$, знаходимо $K_4/K_5=p_3/p_2=0,557$.

Далі задачу можна розв'язати послідовними наближеннями. Задаємося $\delta=-5^\circ$. Тоді $\delta_{3-5}=10^\circ$; $\delta_{2-4}=10^\circ$. Аналогічно попередньому знаходимо $\sigma_5=35^\circ$; $\sigma_4=42^\circ$; $\rho_4/\rho_2=1,44$; $\rho_5/\rho_3=1,5$; $K_4=p_4/p_2=1,71$; $K_5=p_5/p_3=1,826$; $K_4/K_5=0,936 \neq 0,557$. Задаємося новим значенням $\delta=-10^\circ$. Тоді $\delta_{3-5}=15^\circ$; $\delta_{2-4}=5^\circ$; $\sigma_3=40^\circ$; $\sigma_4=37^\circ$; $\rho_4/\rho_2=1,2$; $\rho_5/\rho_3=1,8$; $K_4=p_4/p_2=1,315$; $K_5=p_5/p_3=2,38$; $K_4/K_5=0,552 \approx 0,557$.

Це дає нам можливість дати відповідь на поставлені питання в задачі $p_4=p_5=33$ бар, $\delta=\delta_4=\delta_5=-10^\circ$.

$$8.9. \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{a_*} \frac{a_*}{V_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2.$$

Для прямого стрибка маємо два рівняння $\lambda_1/\lambda_2 = 2$ і $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$. Звідси $\lambda_1^2 = 2$; $\lambda_2^2 = 1/2$.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1 a_2 a_1}{a_1 V_2 a_2} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = 2. \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{4} \frac{M_1^2}{M_2^2}$$

Тоді, користуючись формулою (3.19), маємо

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{4} \frac{\frac{2}{k+1} \lambda_1^2 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2\right)}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2\right) \frac{2}{k+1} \lambda_2^2} = \frac{1}{4} \frac{\lambda_1^2 - \frac{k-1}{k+1}}{\lambda_2^2 - \frac{k-1}{k+1}} = 1,385.$$

8.10. $M_1 = V_1 / \sqrt{kRT_1} = 1,44$. По табл. 1 додатка $\tau_1 = T_1/T_0 = 0,707$,

$T_0 = 424,3$ К. Згідно з формулою (3.17) $a_*^2 = \frac{2k}{k+1} RT_0$; $a_* = 377$ м/с.

$$\lambda_2 = 1/\lambda_1, V_2 = a_*^2/V_1 = 284,3 \text{ м/с.}$$

$\lambda_2 = V_2/a_* = 0,754$. $\tau_2 = T_2/T_0 = 0,905$ – по табл. 1 додатка. Тоді $T_2 = 384$ К.

8.11. Згідно з задачею 8.9 $\lambda_1^2 = 2$; $\lambda_2^2 = 1/2$. Згадаємо, що за формулою

$$(3.19) \text{ знаходимо } M^2 = \frac{\frac{2}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}. \text{ Тоді, підставляючи значення } \lambda, \text{ маємо}$$

$M_1 = 1,53$; $M_2 = 0,682$.

8.12. $M_1 = V_1 / \sqrt{kRT_1} = 2,3$. По табл. 1 додатка $\lambda_1 = 1,758$;

$$\tau_1 = T_1/T_0 = 0,485; \pi_1 = p_1/p_{01} = 0,079. a_{*1} = a_{*2} = a_* = V_1/\lambda_1 = 455,1 \text{ м/с.}$$

$T_{01} = T_{02} = T_0 = T_1/\tau_1 = 618,6$ К.

$\lambda_1 \lambda_2 = 1$; $\lambda_2 = 0,569$. Для цього значення λ_2 $\tau_2 = T_2/T_0 = 0,946$; $\pi_2 = p_2/p_{02} = 0,824$.

$V_2 = a_* \lambda_2 = 259$ м/с; $T_2 = T_0 \cdot \tau_2 = 585,2$ К

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} = 6,02; \quad p_2 = 6,02 \cdot 10^5 \text{ Па}; \quad p_{02} = p_2/\pi_2 = 7,31 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$p_{01}=p_1/\pi_1=12,66 \cdot 10^5 \text{ Па}$. $p_{02} < p_{01}$ – оскільки процес не ізоентропійний, перехід через стрибок ущільнення відбувається з втратами.

8.13. З формули (8.13) маємо $M_1^2 = \frac{k+1}{2k} \left(\frac{p_2}{p_1} + \frac{k-1}{k+1} \right) = 2,31$; $M_1=1,52$;

$\lambda_1=1,377$; $\lambda_2=1/\lambda_1=0,726$; $M_2=0,694$.

8.14. $p_{01} = 1,79 \cdot 10^5 \text{ Па}$; $p_{02} = 1,68 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

За значенням $p_2/p_1 = 2,4$ знаходимо M_1 , λ_1 , $\pi_1 = p_1/p_{01}$, p_{01} , $\lambda_2 = 1/\lambda_1$, M_2 , $\pi_2 = p_2/p_{02}$.

8.15. З рівняння Ренкіна–Гюгоніо (8.6) маємо $\rho_2/\rho_1 = 2,818$. Користуючись рівнянням стану $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1,774$.

З рівняння ізоентропійного процесу

$(p_2/p_1)_{is} = (p_2/p_1)^{1/k} = 3,157$, $(T_2/T_1)_{is} = (p_2/p_1)_{is} / (\rho_2/\rho_1)_{is} = 1,584$.

8.16. Для $\lambda_1=1,5$ $M_1=1,7321$, $\pi_1 = p_1/p_{01}=0,193$, $p_{01}=5,8 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Перед зондом –прямий стрибок ущільнення. Тоді $\lambda_2 = 1/\lambda_1=0,667$. Для цього значення λ_2 $\pi_2 = p_2/p_{02}=0,764$. З іншого боку, користуючись (8.13), $p_2/p_1 = 3,33$. $p_2=3,33 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $p_{02}=p_2/\pi_2=4,36 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

8.17. Дивись рис. 8.29 і 8.30.

8.18. Дивись рис. 8.22.

8.19. Дивись рис. 8.26 і 8.27.

8.20. $\frac{p_{0y}}{p_x} = \frac{p_{0y}}{p_y} \cdot \frac{p_y}{p_x}$. Для визначення p_{0y}/p_y користуємося формулою

(3.21) $\frac{p_{0y}}{p_y} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_y^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$ та формулою (8.12) $M_y^2 = \frac{(k-1)M_x^2 + 2}{2kM_x^2 - (k-1)}$.

Для визначення p_y/p_x – формулою (8.13) $\frac{p_y}{p_x} = \frac{2k}{k+1} M_x^2 - \frac{k-1}{k+1}$. Після під-

становки та деяких перетворень маємо

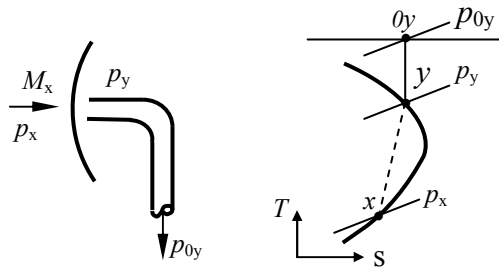


Рис. 8.20.1.

$$\frac{p_{0y}}{p_x} = \left(\frac{k+1}{2} M_x^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} / \left[\frac{2k}{k+1} M_x^2 - \frac{k-1}{k+1} \right]^{\frac{1}{k-1}}.$$

8.21. З рівняння нерозривності для мінімальних перетинів двох сопел маємо $\rho_{*1} \cdot A_{*1} = \rho_{*2} \cdot A_{*2}$, звідки $A_{*2}/A_{*1} = \rho_{*1}/\rho_{*2}$. За допомогою рівняння стану отримуємо

$$\frac{A_{*2}}{A_{*1}} = \frac{p_{*1}}{RT_{*1}} \frac{RT_{*2}}{p_{*2}} = \frac{p_{*1}}{p_{*2}} = \frac{p_{*1}}{p_{01}} \frac{p_{02}}{p_{*2}} \frac{p_{01}}{p_{02}} = \frac{p_{01}}{p_{02}},$$

оскільки для стрибка $a_{*1} = a_{*2} = a_*$, $T_{*1} = T_{*2} = T_*$,

$$p_{*1}/p_{01} = p_{*2}/p_{02} = \pi_*. \text{ З іншого боку, } \frac{p_{01}}{p_{02}} = \frac{p_1}{\pi_1} \cdot \frac{\pi_2}{p_2} = \frac{p_1}{p_2} \frac{\pi_2}{\pi_1}.$$

Використовуючи табл. 1 додатка для значення $q = A_1/A_* = 2,5$, знаходимо $\lambda_1 = 1,807$, $M_1 = 2,443$.

Далі скористаємося формулою (8.13) $\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 + \frac{k-1}{k+1}$ та формулою

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, що дає можливість знайти $p_2/p_1 = 6,796$; $\lambda_2 = 0,5535$. Знаючи λ_1 і λ_2 , по табл. 1 додатка знаходимо $\pi_1 = 0,064$, $\pi_2 = 0,8324$. Підставляючи, маємо $A_{*2}/A_{*1} = p_{01}/p_{02} = 1,914$.

9.1. Для визначення характеру приграничного шару знаходимо значення числа $Re = \frac{V_\infty l}{\nu} = 4 \cdot 10^5$. $Re = 4 \cdot 10^5 < 5 \cdot 10^5 \approx 10^6$, тобто на пластині ламінарний приграничний шар (ПШ). В цьому випадку за формулою (9.16) коефіцієнт опору

$$C'_{x mp} = \frac{F_{mp}}{\frac{\rho V_\infty^2}{2} S} = \frac{1,3}{\sqrt{Re}}.$$

Тоді сила тертя, що діє на дві сторони пластини,

$$F_{mp} = 2C'_{x mp} \cdot \frac{\rho V_\infty^2}{2} S = \frac{1,3}{\sqrt{Re}} \rho V_\infty^2 \cdot S = 7,33 \cdot 10^{-2} \text{ Н}.$$

9.2. В цьому випадку $Re = 4 \cdot 10^8 > 10^7$, тобто на пластині турбулентний приграничний шар. Тоді $C''_{x mp} = \frac{0,074}{Re^{0,2}}$ (див. формулу на стор. 295). Сила, що діє на дві

сторони пластини, $F_{mp} = 2C''_{x mp} \frac{\rho V_\infty^2}{2} l \cdot b = 5,02 \text{ Н}.$

9.3. $Re = 6,9 \cdot 10^6$, тобто $5 \cdot 10^5 < Re < 10^7$. Це дозволяє зробити висновок, що на поверхні утворюється турбулентний ПШ.

$$F_{mp} = \frac{0,074}{Re^{0,2}} \frac{\rho V_\infty^2}{2} l \cdot b = 22,7 \text{ Н}.$$

9.4. $Re = 4,6 \cdot 10^8 > 10^7$, тобто маємо справу з турбулентним приграничним шаром. Для турбулентного ПШ в межах $10^6 \leq Re \leq 10^9$

$$C''_{x mp} = \frac{0,455}{(\lg Re)^{2,58}} = 1,74 \cdot 10^{-3}. \quad (\text{стор. 295}).$$

Тоді сила тертя $F_{mp} = C''_{x mp} \frac{\rho V_\infty^2}{2} l \cdot b = 17,31 \text{ кН}.$

9.5. $Re = 3,3 \cdot 10^5 < 5 \cdot 10^5$, ПШ ламінарний. Для цього випадку $\delta = 5,8 \sqrt{\frac{\nu x}{V_\infty}}$, де x відстань від вхідної кромки пластини. Тоді на вихідній кромці при $x=l$ маємо $\delta = 5,8 \sqrt{\frac{\nu l}{V_\infty}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 5 \text{ мм}.$

Розподіл швидкості в ПШ визначається виразом (9.12)

$$u = \frac{V_\infty}{2\delta} \left(3y - \frac{y^3}{\delta^2} \right), \text{ або } \frac{u}{V_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3.$$

По цій формулі будуємо шуканий графік.

9.6. $Re=9,2 \cdot 10^6$, тобто маємо справу з турбулентним ПШ. В цьому випадку згідно з (9.20) $\delta = 0,37 \left(\frac{\nu}{V_\infty x} \right)^{1/5} x$. Тоді на вихідній кромці пластини $x=l$ і

$$\delta = 0,37 \left(\frac{\nu}{V_\infty l} \right)^{1/5} \quad l=15 \text{ мм.}$$

При розрахунку турбулентного ПШ зміна швидкості всередині ПШ пластини була прийнята за законом однієї сьомої, тобто (9.17)

$$u = V_\infty \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}, \text{ або } \frac{u}{V_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}.$$

За цією формулою будуємо графік розподілу швидкості в ПШ.

9.7. Товщина втрати імпульсу (9.25) $\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{u}{V_\infty} \left(1 - \frac{u}{V_\infty} \right) dy = \frac{7}{72} \delta = 0,272$

мм, що виходить після підстановки у вираз значення u/V_∞ . Згадаємо, що згідно з (9.27)

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{V' \delta^{**}}{V} \left(2 + \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \right) = \frac{\tau_0}{\rho V^2}.$$

В нашому випадку уздовж пластини $V=V_\infty=\text{const}$. Тоді отримуємо $\rho V_\infty^2 d\delta^{**} = \tau_0 dx$. Інтегруючи, отримуємо силу тертя на одній стороні пластини при її ширині $b=1\text{м}$: $\rho V_\infty^2 d\delta^{**}(l) = \tau_0 l = F'_{mp}$.

Сила тертя, що діє на одиницю ширини пластини з двох боків,

$$F_{mp} = 2\rho V_\infty^2 d\delta^{**}(l) = 54,4 \text{ Н/м.}$$

Кінетична енергія, що перейшла в теплоту, дорівнює її зменшенню в ПШ за одиницю часу для пластини одиничної ширини $b=1 \text{ м}$.

$\rho \delta^* V_\infty$ – зменшення витрати в ПШ, де згідно (9.24) $\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{V_\infty}\right) dy$ – товщини

витіснення. $\rho \delta^* V_\infty \cdot \frac{V_\infty^2}{2} = \rho \delta^* \frac{V_\infty^3}{2}$ – зменшення кінетичної енергії.

Тоді кінетична енергія, що перейшла в теплоту з двох сторін пластини, дорівнює

$$E = 2\rho \frac{V_\infty^3}{2} \delta^* = \rho V_\infty^3 \int_0^\delta \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right] dy = \frac{1}{8} \rho V_\infty^3 \delta = 350 \text{ Дж/(м}\cdot\text{с)}.$$

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аерогідромеханіка.....	6	Диполь.....	107
Аеродинаміка.....	6	Друге критичне відношення	
Використання характеристик		Тисків.....	337
годографа		Ейлер	
- правила.....	216	- Рівняння.40, 159	
Вихор.....	110	Закон	
- розгінний.....	154	- однієї сьомої.....	310
Вихорова		- збереження маси.....	28
- лінія.....	148	- основні закони руху.....	27
- трубка.....	149	- інтегральна поверхня.....	200
Вихоровий слід.....	288	Класифікація диференціальних	
Відбиття стрибків		рівнянь.....	203
- від вільної границі		- гіперболічний тип.....	203
струменя.....	266	- еліптичний тип.....	203
- від твердої границі.....	267	- параболічний тип.....	203
- Маха.....	268	Коефіцієнт	
- правильне.....	268	- в'язкості.....	15
Відбиття хвилі		Комплексна швидкість.....	122
- від вільної границі.....	222	- комплексний потенціал.....	121
- від плоскої границі.....	222	- контрольний об'єм.....	19
Від'єднанні стрибки.....	252	Конус збурення.....	164
Втрати		Конформне відображення.....	129
- в стрибках ущільнення.....	259	Криволінійні стрибки.....	274
Газова динаміка.....	6	Критична	
Генерація хвилі.....	221	- точка.....	104
Гідродинаміка.....	6	- швидкість.....	62
- магнітна.....	6	Критерії подібності.....	70
Гипотиза		- число Маха.....	71
Жуковського-Чаплигіна.....	145	- число Прандтля.....	71
Годограф фізичних кривих.....	202	- число Рейнольда.....	71
Границя системи.....	19	- число Струхаля.....	71
Громеко, рівняння руху.....	41	- число Ейлера.....	71
Густина		- число Фруда.....	71
- в точці.....	11	Лінеарізоване рівняння	
- рідини середня масова.....	10	Бернуллі.....	180
Двомірний надзвуковий потік		Лінія	
- з малими збуреннями.....	185	- ковзання.....	270
Дивергенція вектора швидкості... 31		- Релея.....	82

- Фанно.....	80	- дозвуковий.....	255
Лінія струму.....	12	- надзвуковий.....	255
- миттева.....	12	Приграничний шар.....	17, 287
- потоку.....	12	- інтегральне	
М.Є. Жуковський.....	8	співвідношення.....	297
Метод		- на криволінійній	
- Ейлера.....	18	поверхні.....	317
- Лагранжа.....	17	- тиск у середині.....	295
- лінеаризації.....	173	- товщина.....	293
- характеристик.....	199	Приклади застосування методу	
Навоколишнє середовище.....	19	характеристик.....	223
Надзвукове сопло		Профілі М.Є. Жуковського-	
- конструювання.....	225	С.А. Чаплигіна.....	136
Напруги		Рівняння	
- дотичні.....	13	- Бернулї.....	59
- нормальні.....	13	- витрати.....	34
- складові у в'язкій рідині.....	15	- кількості руху.....	35
Об'ємна витрата рідини.....	30	- Коші-Рімана.....	121
Одиничні процеси.....	221	- Прадтля.....	236
Ортогональна сітка.....	120	- Ренкіна-Гюгоніо.....	234
Основи теорії вихорів.....	148	- Нав'є-Стокса.....	40
Парадокс Ейлера-Д'Аламбера.....	115	- нерозривності руху.....	29
Перетворення		- руху.....	39
М.Є. Жуковського.....	134	Рідина.....	9
Перетинання стрибків		- ідеальна.....	17
ущільнення		- реальна.....	15
- одного сімейства.....	272	Рідина	
- протилежного сімейства.....	270	- закон збереження маси.....	28
Поверхневі сили.....	13	- основні закони руху.....	27
Поверхні рівного потенціалу.....	94	Розгінний вихор.....	154
Погашення хвилі.....	222	Розрахунок для плоскої пластини	
Поле		- змішаного приграничного	
- векторне.....	19	шару.....	314
- скалярне.....	20	- ламінарного приграничного	
- тензорне.....	20	шару.....	301
Потенціал		- турбулентного	
- збурення.....	175	приграничного шару.....	309
- швидкостей.....	94	Рух	
Потік		- потенційний.....	94
- сталий.....	18		

Сили	силу тиску.....	140
- об'ємні.....		38
- поверхневі.....		38
Система.....		18
Сопла Лава ля.....		75
- при зниженому тиску		
середовища.....		338
- при підвищеному		
протитиску середовища.....		338
- труба Вен турі.....		342
Стрибок		
- виникнення стрибка у		
ввігнутому куті.....		328
- виникнення стрибків при		
обтіканні клина.....		329
- відбиття косоного стрибка від		
платіни.....		323
- від'єднаний.....		170
- косий.....		171
- лямбоподібний.....		171
- приєднаний.....		170
- прямий.....		171, 240
- прямий стрибок у трубі.....		330
- ущільнення.....		169
Стрибок, косий		
- робочі формули.....		238
Струм, що залишає сопло		
перерозширення		
- відбиття Маха стрибків.....		281
- правильне відбиття		
стрибків.....		280
Схеми витікання струменя		
- з отвору з гострою кромкою		
при різних режимах.....		334
Тензор.....		20
- другого рангу.....		21
- нульового рангу.....		21
- першого рангу.....		21
Теорема Жуковського-Чаплигіна		
- про результуючу		
Теорема Гельмгольца		
- Теорема 1.....		154
- Теорема 2.....		156
- Теорема 3.....		156
- про вихори.....		154
Теплові стрибки.....		85
- дозвукові.....		85
- надзвукові.....		85
Термодинаміка		
- другий закон.....		49
- перший закон.....		43
Течія		
- випадок одномірної течії.....		250
- вихорова.....		148
- від джерела.....		106
- від стоку.....		107
- гіперзвукова.....		70
- двомірна течія.....		251
- дозвукова.....		70, 75
- надзвукова.....		70, 75
- нестисливої рідини.....		70
- транзвукова.....		70
- Прандтля-Майєра.....		213
Тиск		
- в точці.....		21
- гідростатичний.....		13
- рідини.....		13
Товщина		
- витиснення.....		322
- втрати імпульсу.....		322
Трубка струму.....		12
- рівняння витрати.....		32
Ударна полярна		
- в тепловій діаграмі.....		264
- годограф.....		245

- рівняння.....	247
Утворення стрибка	
- з хвиль нерозривності.....	277
Фізичні характеристики.....	200
Фон-Карман.	
- Зона збуреного і незбуреного потоку.....	165
- правила надзвукового потоку.....	165
- правило заборонених сигналів.....	165
- правило концентрованого збурення.....	165
Формула Био-Савара	
- про вихоровий вплив.....	157
Формула Вітошинського.....	333
Формула Жуковського-Чаплігіна.....	142
Функція струму.....	98
Характеристики в площині годографа.....	211
Характеристична лінія.....	189
Характеристичні криві.....	200
Хвильовий опір.....	262
Центр маси системи.....	19
Швидкість	
- рідини в точці.....	12
Швидкість звуку	
- ідеальний газ.....	56
- реальний газ.....	57

ЗМІСТ

Передмова	3
Основні умовні позначення.....	5
Вступ.....	6
РОЗДІЛ 1. ОСНОВИ ДИНАМІКИ РІДИНИ І ГАЗУ	9
1.1. Визначення рідини. Концепція безперервності.....	9
1.2. Властивості суцільності.....	10
1.3. Системи і контрольні об'єми	18
1.4. Скалярні, векторні і тензорні поля в гідрогазо- динаміці	19
1.5. Зв'язок між елементами напруг і відповідними швидкостями деформацій.....	22
РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ ЗАКОНИ РУХУ РІДИНИ	27
2.1. Закон збереження маси. Рівняння нерозривності руху.....	28
2.2. Теорема імпульсів. Рівняння кількості руху.....	35
2.3. Рівняння руху.....	39
2.4. Перший закон термодинаміки для контрольного об'єму. Рівняння збереження енергії.....	43
2.5. Другий закон термодинаміки	49
РОЗДІЛ 3. ОДНОМІРНИЙ РУХ ГАЗА.....	54
3.1. Швидкість звуку	54
3.2. Різні форми рівняння енергії.....	59
3.3. Газодинамічні функції одномірного адіабатичного потоку	62
3.4. Класифікація течії стисливої рідини	69
3.5. Основи фізичного моделювання.....	70
3.6. Одномірні течії при різних зовнішніх діях.....	73

РОЗДІЛ 4. ДВО – І ТРИВИМІРНИЙ РУХ РІДИНИ.....	91
4.1. Безвихоровий рух рідини. Потенціал швидкостей і функція струму.....	91
4.2. Приклади найпростіших потенціальних потоків ідеальної нестисливої рідини і їх накладення. Теорема М.Є. Жуковського.....	102
4.3. Застосування теорії функцій комплексного змінного до вивчення плоскопаралельного потоку ідеальної рідини.....	119
4.4. Метод конформного перетворення.....	129
4.5. Графічний метод побудови профілів Жуковського– Чаплигіна. Теорема Жуковського– Чаплигіна про результуючу силу тиску	139
4.6. Основи теорії вихорів. Основні теореми вихорової течії ідеальної рідини	148
4.7. Загальне рівняння для потенціала швидкостей	158
РОЗДІЛ 5. ОСОБЛИВОСТІ ТЕЧІЇ СТИСЛИВОЇ РІДИНИ	162
5.1. Розповсюдження збурень у газі при русі у ньому матеріальної точки	162
5.2. Число Маха і кут Маха.....	166
5.3. Критичне значення числа Маха. Стрибки ущільнення у газовому потоці	167
5.4. Класифікація стрибків ущільнення.....	170
РОЗДІЛ 6. ПЛОСКА ДО- І НАДЗВУКОВА ТЕЧІЯ ГАЗУ З МАЛИМИ ЗБУРЕННЯМИ.....	173
6.1. Сутність методу лінеаризації	173
6.2. Лінеаризація рівняння для потенціалу швидкостей	174
6.3. Лінеаризоване рівняння Бернуллі	180

6.4. Двовірний дозвуковий потік з малими збуреннями.....	181
6.5. Двовірний надзвуковий потік з малими збуреннями.....	185
РОЗДІЛ 7. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ДВОМІРНОГО НАДЗВУКОВОГО ПОТОКУ.....	199
7.1. Опис методу характеристик.....	199
7.2. Течія Прандтля–Майєра. Використання характеристик годографа. Одиничні процеси.....	213
7.3. Приклади застосування методу характеристик.....	223
РОЗДІЛ 8. СТРИБКИ УЩІЛЬНЕННЯ В ГАЗОВОМУ ПОТОЦІ.....	230
8.1. Основні рівняння косої стрибка ущільнення.....	232
8.2. Прямий стрибок ущільнення. Правила взаємодії стрибків.....	240
8.3. Ударні поляри.....	245
8.4. Деякі специфічні аспекти косих стрибків.....	249
8.5. Втрати в стрибках ущільнення.....	259
8.6. Відбиття і взаємодія стрибків.....	266
8.7. Приклади двовірних течій, що містять стрибки.....	277
РОЗДІЛ 9. ПРИГРАНИЧНИЙ ШАР.....	287
9.1. Диференціальні рівняння приграничного шару.....	289
9.2. Інтегральне співвідношення приграничного шару.....	297
9.3. Розрахунок ламінарного, турбулентного й змішаного приграничного шару для плоскої пластинки.....	301
9.4. Приграничний шар на криволінійній поверхні.....	317
9.5. Приграничний шар при великих швидкостях. Взаємодія стрибків з приграничним шаром.....	323

РОЗДІЛ 10. ВИТІКАННЯ ГАЗА ЗІ ЗВУЖУЮЧИХ СОПЕЛ	
І ОТВОРИВ. СОПЛА ЛАВАЛЯ	332
10.1. Звужуючі сопла.....	332
10.2. Витікання газу з отвору з гострою кромкою. Друге критичне відношення тиску	334
10.3. Сопла Лаваля	338
10.4. Надзвукове сопло з косим зрізом.....	343
РОЗДІЛ 11. ТЕЧІЯ ГАЗУ ЧЕРЕЗ РЕШІТКИ	
ТУРБОМАШИН.....	346
11.1. Класифікація решіток турбомашин	346
11.2. Сили, що діють на профіль у решітці. Теорема М.Є.Жуковського для решітки	347
11.3. Обтікання решіток з довільних профілів	354
11.4. Розрахунок потенційного потоку в решітках по теорії каналу.....	361
11.5. Профілювання дозвукових профілів.....	367
11.6. Структура потоку в реактивних решітках при білязвукових і надзвукових швидкостях.....	369
11.7. Профілювання надзвукових профілів.....	371
Список літератури	376
Додаток.....	377
Відповіді та розв'язання задач	398
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК.....	436

Навчальне видання

БОЙКО Анатолій Володимирович

Гідрогазодинаміка

Підручник

Відповідальний за випуск І.Д. Усачов

Редактор В.М. Баранов

Комп'ютерний набір та верстка Л.Г. Воронович

План 2008, поз. 55 _____

Підп. до друку _____ Формат 60x84 1/16 Папір офсетн. N2

Друк – ризографія. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 15,0

Обл.-вид.арк. 18,3 . Наклад 300 прим. Зам. № ____ . Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ “ХПІ”. 61002 Харків, вул. Фрунзе, 21

Свідоцтво про реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.

Друкарня НТУ “ХПІ”, 61002 Харків, вул. Фрунзе, 21