Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Л.Р.Ладієва

АНАЛІЗ, СИНТЕЗ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Практикум

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня магістра
за освітньою програмою «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології»
спеціальності 174 (151) «Автоматизація, комп'ютерно- інтегровані технології та робототехніка»

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2024

УДК: 681.51:519.71](076.5)
Л15

Укладач: *Ладієва Леся Ростиславівна*, канд. техн. наук, доц.

Рецензент *Шилович Т.Б., , канд. техн. наук, доц , доцент кафедри ХПСМ*

Відповідальний редактор *Жученко А.І.*, д-р техн. наук, проф., *професор кафедри ТПЗА*

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 7 від 9.05 .2024 р.)
за поданням вченої ради інженерно-хімічного факультету
(протокол № 3 від 25.03.2024 р.)

Ладієва Л.Р.

Аналіз, синтез і оптимізація систем керування [Електронний ресурс]: практикум: навч. посіб. для здобувачів ступеня магістр спец. 174 (151) «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» / Л. Р. Ладієва**;** КПІ ім.. Ігоря Сікорського.- Електрон. текст. дані(1 файл).-Київ: КПІ ім.. Ігоря Сікорського. 2024, - 84 с.

У практикумі викладено методи і алгоритми для розв’язку задач динамічної оптимізації. Приділено увагу застосуванню аналітичного конструювання (синтезу) оптимального керування з наступною програмною реалізацією. Задача синтезу оптимальних систем керування формулюється як варіаційна задача, в якій шукають екстремальні значення деяких функціоналів, і полягає в тому, щоб для заданого об’єкта синтезувати регулятор, який найкраще розв’язує задачу керування. Приділено увагу методам варіаційного числення, принципу максимуму і динамічного програмування. Практикум призначений для здобувачів ступеня магістр за спеціальністю «Автоматизація, комп'ютерно- інтегровані технології та робототехніка».

Практикум буде також корисним студентам, що спеціалізуються в області автоматизації та комп'ютерно-інтегрований технологій, а також інших спеціальностей, які пов’язані з розробкою систем оптимізації.

УДК: 681.51:519.71](076.5)

Реєстр. № НП 23/24-429 Обсяг 3,5 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

Вступ

Практикум присвячений питанням використання методів сучасної теорії автоматичного керування для дослідження, аналізу та синтезу цифрових систем управління, оптимальних систем. Основна увага приділяється отриманню досвіду застосування математичного апарату для вирішення практичних задач оптимального керування.

Застосування оптимального керування особливо ефективне і виправдане для складних багатовимірних об'єктів керування , описуваних у просторі станів та що функціонують в умовах невизначеності. Знайшло застосування аналітичне конструювання (синтез) оптимального керування з наступною їхньою програмною реалізацією. Постановка проблеми та аналіз останніх досліджень. Задача синтезу оптимальних систем керування формулюється як варіаційна задача, в якій шукають екстремальні значення деяких функціоналів, і полягає в тому, щоб для заданого об'єкта синтезувати регулятор, який найкраще розв'язує задачу керування. Розглядаються варіаційне числення, принцип максимуму Понтрягіна, динамічне програмування.

Мета практикуму допомогти студентам освоїти розділи аналізу, синтезу і оптимізації систем керування і застосувати знання на прикладах, представлених у формалізованому вигляді.

1. *Варіаційне числення в оптимальному керуванні.*

1.1. Лінійноквадратична оптимізація

Відома постановка задачі оптимального керування динамічними системами, що полягае в знаходженні траекторіі **U** (t) { t_0 < t < t_f } , яка приводить стан системи **X** (t) за допомогою міімізації функціоналу вартості або якості

$$\mathbf{I} = G[\mathbf{x}(t),t]\Big|_{t=t_0}^{t=t_f} + \int_{t=t_0}^{t=t_f} F[\mathbf{x}(t),\mathbf{U}(t),t]dt$$

з заданими початковими умовами **X(**t) = $\mathbf{X_0}$ в кінцеву умову **N**[**X**(t_f),t_f] = 0 оптимальним способом. З точки зору використання є два альтернативних варіанти отримання оптимальних результатів.

У випадку оптимального керування одержуємо оптимальну траєкторію керування, як постійну функцію часу, та в часовому проміжку оптимізації для реального процесу. Очевидно, що ця оптимальна траєкторія залежить від заданого початкового стану $\mathbf{X}_0$. З-за дії можливих перешкод або неточностей моделі, на які не зважають при оптимізації, буде перебігати стан **X**(t) , що відрізняється від очікуваного, отриманого по моделі **X** (t). При цьому також можливе відхилення кінцевих умов.

В випадку оптимального регулювання з необхідних умов випливає рішення так званої синтез-проблеми оптимального закону регулювання

U (t) = **R*** [**X** (t), t]

Ця формула використовується для прямих розрахунків керуючого впливу **U**(t) по виміряним величинам станів **X**(t) . Істотна властивість оптимального регулювання випливає з того, що закон регулювання є незалежним відносно можливих початкових станів $\mathbf{X_0}$. За відсутності несподіваних перешкод або неточностей моделі оптимальне керування та оптимальне регулювання для заданих початкових станів $\mathbf{X_0}$ дає однакові результати. Установлено, що при заданій постановці проблеми використання оптимального закону регулювання з-за своєї універсальності та легкості обчислень з точки зору практичного використання є більш бажаним, ніж застосування оптимальної траєкторії керування.

Важливим спеціальним випадком оптимального керування динамічними системами є лінійно-квадратична (ЛК) оптимізація (ЛКО), яка пов'язана з лінійними рівняннями станів та квадратичними функціоналами якості.

Розглянемо задачу оптимального керування , припустимо, що потрібно мінімізувати функцію вартості / при фіксованому t_f /

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\int_{t_f}^{t_f} [\mathbf{X}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)]dt, \tag{1.1}$$

для узагальненої системи з змінними в часі параметрами і яка задається рівнянням

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) \tag{1.2}$$

при умові, що $\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X_0}$- вектор початкового стану.

Об’єднаємо функцію вартості та обмеження у формі диференційного рівняння за допомогою множника Лагранжа. Тоді

$$\mathbf{I} = \int_{t_o}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2}\mathbf{X}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{U}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t) + \lambda^{\mathrm{T}}(t)\left[\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) - \mathbf{X}'\right] \right\} dt \tag{1.3}$$

Точний характер використаної функції вартості залежить від вигляду конкретної задачі, що розв`язується. Тому вагові матриці $\mathbf{R}$(t) та $\mathbf{Q}$(t) звичайно обираються з фізичних міркувань. Крім того, без втрати спільності припускається, що $\mathbf{R}$(t) та $\mathbf{Q}$(t) - симетричні. Вектор керування $\mathbf{U}$(t) розглядаємо так само, якби це був вектор стану. Далі скористаємось рівняннями Ейлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial\ \mathbf{\Phi}}{\partial\ \mathbf{X}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial\ \Phi}{\partial\ \mathrm{X}'}\right) = 0, \quad \frac{\partial\ \mathbf{\Phi}}{\partial\ \mathbf{U}} - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\left(\frac{\partial\ \mathbf{\Phi}}{\partial\ \mathbf{U}'}\right) = 0 \tag{1.4}$$

де

$$\mathbf{\Phi} = \frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\ [\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) - \mathbf{X}'],$$

Тому що $$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}^{T}(t)\lambda(t), \qquad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{X}'} = -\lambda(t)$$
$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{B}^{T}(t)\lambda(t), \qquad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{U}'} = 0$$

то рівняння Ейлера-Лагранжа для цієї задачі мають вигляд:

$$\lambda' = -\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{(t)}\lambda(t) - \mathbf{Q(t)X}(t) \tag{1.5}$$

$$\mathbf{U}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\lambda(t) \tag{1.6}$$

Через те , що $\mathbf{X}(t_f)$ не визначений, умова трансверсальності в момент досягнення

$$\left.\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{X}}\right|_{t_f} = \mathbf{l}(t_f) = 0 \tag{1.7}$$

Відмітимо, що рівняння для оптимального керування можливе при умові, що існує матриця , обернена матриці **R**(t)

Для отримання невід′ємної другої похідної необхідно, щоб **R**(t) та **Q**(t) були невід`ємно визначені. Таким чином, зрозуміло, що **R**(t) повинна бути додатньо визначеною.

Стан системи $\mathbf{X}(t_0)$ заданий при $t=t_0$, тоді як спряжений вектор λ(t) визначений в момент досягнення $\boldsymbol{\lambda}(t_f)=0$. Таким чином , перш ніж визначати оптимальне керування, необхідно вирішити двоточкову крайову задачу (ДТКЗ).

З′ясуємо, чи можливо перетворити керування (1.6) по замкненому контуру **U**(t)=**K**(t)**X**(t), тобто знайдемо оптимальний закон регулювання. Припустимо, що рішення для спряженого випадку

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t) \tag{1.8}$$

Підставляючи (1.8) в (1.2) та(1.6), отримаємо

$$\mathbf{X}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)-\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t) \tag{1.9}$$

Крім того, з (1.7.8) та (1.7.5) випливає

$$\boldsymbol{\lambda}'=\mathbf{P}'\mathbf{X}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{X}'=\mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t)-\mathbf{A}^{T}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t) \tag{1.10}$$

Об`єднуючи /1.9/ та /1.10/ одержуємо

$$[\mathbf{P}'+\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)+\mathbf{A}^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{P}(t)P(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}(t)+\mathbf{Q}(t)]\mathbf{X}(t)=0 \tag{1.11}$$

Оскільки ця рівність повинна виконуватись для ненульових x(t), то множник [•] , що стоїть перед x(t) , повинен дорівнювати нулю. Таким чином матриця **P**, що є симетричною матрицею розмірності (nxn) і яка містить в собі n(n+1)/2 різних членів , повинна задовольняти матричному рівнянню Ріккаті:

$$\mathbf{P}' = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t) \tag{1.12}$$

при граничній умові $\mathbf{P}(t_f)=0$

Таким чином, розв`язання матричного рівняння Ріккаті можливо проводити в оберненому часі, від t_f до t_0, побудувавши матрицю

$$\mathbf{K}(t) = -\mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) \tag{1.13}$$

і потім одержавши керування по замкненому контуру

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{X}(t) \tag{1.14}$$

***Приклад1.1**.:*

Синтезувати систему оптимального керування об`єктом

$T_2X'' + T_1X' + X = kU, \quad X(t_0) = X_0$

з критерієм

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}(x^2 + rU^2)dt$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\dfrac{1}{T_2}x_1 - \dfrac{T_1}{T_2}x_2 + \dfrac{k}{T_2}U \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{T_2} & -\dfrac{T_1}{T_2} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k}{T_2} \end{bmatrix}$$

Далі використаємо рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$\Phi=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}rU^2+\lambda_1(x_2-x_1')+\lambda_2(-\frac{1}{T_2}x_1-\frac{T_1}{T_2}x_2+\frac{k}{T_2}U-x_2')$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1'}\right)=0,\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2'}\right)=0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=x_1-\frac{1}{T_2}\lambda_2,\frac{\partial\Phi}{\partial x_1'}=-\lambda_1,\lambda_1'=\frac{1}{T_2}\lambda_2-x1,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=\lambda_1-\frac{T_1}{T_2}\lambda_2,\frac{\partial\Phi}{\partial x_2'}=-\lambda_2,\lambda_2'=-\lambda_1'+\frac{T_1}{T_2}\lambda_2$$

або $\boldsymbol{\lambda}'=A^T\boldsymbol{\lambda}(t)-Q(t)\mathbf{X}(t)$

Тоді $\lambda'=\begin{bmatrix}\lambda_1'\\ \lambda_2'\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{T_2}\\ 1 & -\frac{1}{T_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda 1\\ \lambda_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}\lambda_1'=\frac{1}{T_2}\lambda_2-x_2, & \frac{\partial\Phi}{\partial U}=rU+\lambda_2\frac{k}{T_2}=0\\ \lambda_2'=-\lambda_1'+\frac{T_1}{T_2}\lambda_2, & U=-\frac{1}{r}\frac{k}{T_2}\lambda_2\end{cases}$$

Для оптимального закону регулювання

$$U=-\frac{1}{r}\frac{k}{T_2}(p_{12}x_1+p_{22}x_2)$$

Матричне рівняння Ріккаті

$$P'=-PA-A^TP+PBR^{-1}B^TP-Q$$

запишемо в вигляді

$$\begin{bmatrix} P'_{11} & P'_{12} \\ P'_{21} & P'_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{T_2} & -\dfrac{T_1}{T_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{T_2} \\ 1 & -\dfrac{T_1}{T_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k}{T_2} \end{bmatrix} r^{-1}\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{k}{T_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad r = 1$$

$$\begin{cases} P'_{11} = \dfrac{2}{T_2} P_{12} + \left(\dfrac{k}{T_2}\right)^2 P_{12}^2 - 1 & P_{11}(t_f) = 0 \\ P'_{12} = -P_{11} + \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right) P_{12} + \dfrac{1}{T_2} P_{22} + \left(\dfrac{k}{T_2}\right)^2 P_{12} P_{22} & P_{12}(t_f) = 0 \\ P'_{22} = \dfrac{2T_1}{T_2} P_{22} + \left(\dfrac{k}{T_2}\right)^2 P_{22}^2 - 2P_{12} & P_{22}(t_f) = 0 \end{cases}$$

$$U^*(t) = -\frac{1}{r}\frac{k}{T_2}(P_{12}x_1 + P_{22}x_2)$$

Приклад 1.2.

Динаміка системи описується диференціальними рівняннями

$$\begin{cases} x_1{}' = x_2 \\ x_2{}' = -2x_1 - 4x_2 + U \end{cases} \qquad \begin{matrix} X(t_0) = [1 \quad 1]^T \\ X(t_f) = [0 \quad 0]^T \end{matrix}$$

Для вибраного інтегрального квадратичного за формою критерія

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} (q_{11}x_1{}^2 + q_{22}x_2{}^2 + rU^2)dt \ \to min$$

де r – ваговій коефіцієнт використаємо варіаційне числення.

Рівняння Ейлера - Лагранжа і умови трансверсальності.

$$\frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial X'}\right) = 0, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial X}\right|_{t_f} = -\left.\frac{\partial G}{\partial X'}\right|_{t_f},$$

де L – Лагранжіан,

$$L = \frac{1}{2}q_{11}x_1{}^2 + \frac{1}{2}q_{22}x_2{}^2 + \lambda_1(x_2 - x_1') + \lambda_2(-2x_1 - 4x_2 + U - x_2')$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = q_{11}x_1 - 2\lambda_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1'} = -\lambda_1,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = q_{22}x_2 + \lambda_1 - 4\lambda_2 \quad \frac{\partial L}{\partial x_2'} = -\lambda_2,$$

$$q_{11}x_1 - 2\lambda_2 + \lambda_1' = 0 \qquad \lambda_1' = -q_{11}x_1 + 2\lambda_2,$$
$$q_{22}x_2 + \lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_2' = 0 \quad \lambda_2' = -q_{22}x_2 - \lambda_1 + 4\lambda_2,$$
$$\left.\frac{\partial G}{\partial x_1}\right|_{t_f} = 0; \qquad \left.\frac{\partial G}{\partial x_2}\right|_{t_f} = 0; \qquad \lambda_1(t_f) = 0; \lambda_2(t_f) = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial U} = rU + \lambda_2 = 0; \qquad U^*(t) = -r^{-1}\lambda_2.$$

1.2. Динамічна оптимізація з обмеженнями в формі нерівностей

У багатьох фізичних задачах, що представляють інтерес для фахівців в області управління, є різні обмеження в формі нерівностей на вектор управління

$$\Gamma_{\min} \le \Gamma(X, X', t) \le \Gamma_{\max} \qquad (1.15)$$

Для рішення задачі з обмеженнями в формі нерівностей є декілька методів, один з яких   метод заміни змінних. Виконується перетворення обмеження (1.8.1) в обмеження типу рівності шляхом введення нових змінних стану γ_i, що задовільняють рівнянням

$$\left(\Gamma_{\max_i} - \Gamma_i\right)\left(\Gamma_i - \Gamma_{\min_i}\right) = \gamma_i^2, \quad i = 1,2,..., \qquad (1.16)$$

Легко довести, що рівняння (1.16) еквівалентно (1.15) і навпаки. Тепер, щоб ввести обмеження (1.2) і (1.15) в (1.1), можна використати множники Лагранжа. Далі стає можливим використати звичайні необхідні умови екстремума.

***Приклад1.3*.:** Розглянемо динаміку системи:

$x_1' = x_2(t)$, $x_2' = u(t)$

при наявності початкових умов $x_1(t_0) = x_0$, $x_2(t_0) = v_0$ задача полягає в тому, щоб знайти таке управління, яке максимізує $x_1(t_f)$ для фіксованого t_f при граничній умові $x_2(t_f) = v_f$ і обмеженнях типу нерівність на скалярне управління $u_{\min} \le u \le u_{\max}$.

Перетворимо обмеження типу нерівність в обмеження типу рівність, ввівши нову змінну $\alpha(t)$: $(u-u_{\min})(u_{\max}-u)-\alpha^2=0$

Таким чином, задача може бути представлена як задача мінімізації $\mathrm{I}=-x_1(t_f)$ при наявності обмежень типу рівність

$x_1^{/}=x_2(t)$, $x_1(t_0)=x_0$, $x_1(t_f)$ — довільно,

$x_2^{/}=u(t)$, $x_2(t_0)=v_0$, $x_2(t_f)=v_f$, $(u-u_{\min})(u_{\max}-u)-\alpha^2=0$.

Функція вартості з множниками Лагранжа прийме вигляд

$$I_1=-x_1(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\left(-x_1^{/}+\lambda_1\left(x_2-x_1^{/}\right)+\lambda\left(u-x_2^{/}\right)+\lambda_3\left((u-u_{\min})(u_{\max}-u)-\alpha^2\right)\right)dt$$

Із рівняння Ейлера-Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial X^{/}}-\frac{\partial\Phi}{\partial X}=0$ $X^T=[x_1,x_2,u]$

при $\Phi=\lambda_1\left(x_2-x_1^{/}\right)+\lambda_2\left(u-x_2\right)+\lambda_3\left((u-u_{\min})(u_{\max}-u)-\alpha^2\right)-x_1^{/}$ знаходимо

$\lambda_2^{/}=0$, $\lambda_2^{/}=-\lambda_1$

$0=-\lambda_2+\lambda_3(2u-u_{\max}-u_{\min})$, $0=\alpha\lambda_3$.

Таким чином, ми прийшли до двоточкової крайової задачі, рішення якої визначає оптимальні змінні стану і управління:

$x_1^{/}=x_2(t)$, $x_1(t_0)=x_0$,

$x_2^{/}=x(t)$, $x_2(t_0)=v_0$,

$\lambda_1^{/}=0$, $\lambda_1(t_f)=-1$,

$\lambda_2^{/}=-\lambda_1(t)$, $x_2(t_f)=v_f$,

$\alpha(t)\lambda_3(t)=0$,

$\lambda_2(t)=\lambda_3(t)(2u(t)-u_{\max}-u_{\min})$

$\alpha^2(t)=(u(t)-u_{\min})(u_{\max}-u(t))$

Дана ДТКЗ є нелінійною через введення останніх трьох рівнянь і отримати рішення аналітично вельми важко. В звичайному варіанті $u_{\min}=-1$, $u_{\max}=1$.

В цьому випадку можна показати, що $\alpha(t)=0$,

$u(t)=-sign\lambda_2(t)$,

де $sign\lambda_2=+1, \quad \lambda_2>0$,

$sign\lambda_2=-1, \quad \lambda_2<0$.

2. Принцип максимума

2.1.Задача Больца, фіксовані моменти початку і моменти досягнення

Розглянемо тепер задачу визначення допустимої функції управління U з метою мінімізації функціонала

$$\mathbf{I}=\mathbf{G}[\mathbf{X}(\mathbf{t}),\mathbf{t}]\Big|_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t_f}}+\int_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t_f}}\mathbf{F}[\mathbf{X}(\mathbf{t}),\mathbf{U}(\mathbf{t}),\mathbf{t}]\mathbf{dt}, \tag{2.1}$$

причому G і F мають безперервні частинні похідні по X і U.

Критерій якості (2.1) має досить загальний вигляд і застосовується при рішенні різних практичних задач.

В задачах управління функція G(.) може бути квадратичною нормою відхилення фактичного кінцевого стану $X(t_f)$ від заданого.

Інтегральна (тобто що залежить від всієї траєкторії) складова критерію дозволяє оцінити, наприклад, вартість витрачених ресурсів управління. Для того щоб в функції вартості врахувати системне обмеження задане у вигляді диференціального рівняння, скористаємося методом множників Лагранжа

$$\mathrm{I}=\mathrm{G}[\mathbf{X}(\mathrm{t}),\mathrm{t}]\Big|_{\mathrm{t}0}^{\mathrm{tf}}+\int_{\mathrm{t}0}^{\mathrm{tf}}\left\{\mathrm{F}[\mathbf{X}(\mathrm{t}),\mathbf{U}(\mathrm{t}),\mathrm{t}]+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\left[\mathrm{f}(\mathbf{X},\mathbf{U},\mathrm{t})-\mathbf{X}^{/}\right]\right\}\mathrm{dt} \tag{2.2}$$

Визначимо скалярну функцію - гамільтоніан у вигляді

$$H[\mathbf{X},\mathbf{U},\boldsymbol{\lambda},t]=F[\mathbf{X},\mathbf{U},t]+\boldsymbol{\lambda}^{T}(t)\cdot f[\mathbf{X},\mathbf{U},t] \tag{2.3}$$

Таким чином функція вартості прийме вигляд

$$I=G[\mathbf{X},t]\Big|_{t0}^{tf}+\int_{t0}^{tf}\left\{H[\mathbf{X},\mathbf{U},\boldsymbol{\lambda},t]-\boldsymbol{\lambda}^{T}(t)\mathbf{X}^{/}\right\}dt \tag{2.4}$$

Проінтегрувавши останній член підінтегрального виразу (2.4), отримаємо

$$I=\left\{G[\mathbf{X},t]\Big|_{t0}^{tf}-\boldsymbol{\lambda}^{T}\mathbf{X}(t)\right\}\Big|_{t0}^{tf}+\int_{t0}^{tf}\left\{H[\mathbf{X},\mathbf{U},\boldsymbol{\lambda},t]+\boldsymbol{\lambda}^{/T}\mathbf{X}(t)\right\}dt \tag{2.5}$$

Визначимо першу варіацію I

$$\delta I=\left\{\delta\mathbf{X}^{T}\left[\frac{\partial G}{\partial X}-\boldsymbol{\lambda}\right]\right\}\Big|_{t0}^{tf}+\int_{t0}^{tf}\left\{\delta\mathbf{X}^{T}\left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}+\boldsymbol{\lambda}^{/}\right]+\delta\mathbf{U}^{T}\left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}}\right]\right\}dt \tag{2.6}$$

Необхідна умова мінімуму полягає в тому, що для довільних варіацій δX і δU перша варіація I повинна дорівнювати нулю.

Звідси отримується необхідна умова існування мінімуму

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}}=0 \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{/}=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}};\mathbf{X}^{/}=f(\mathbf{X},\mathbf{U},t)=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \tag{2.8}$$

$$\delta\mathbf{X}^{T}\left[\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}}\right]=0 \quad \text{для} \quad t=t_0,t_f \tag{2.9}$$

Розглянемо детальніше умови трансверсальності, задані виразом (2.9).

Для широкого класу задач оптимального управління початковий стан системи визначений, а стан в момент досягнення не визначений. У цьому випадку з (2.9) отримуємо наступну умову трансверсальності:

$$\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f)=\frac{\partial G[\mathbf{X}(t_f),t_f]}{\partial \mathbf{X}(t_f)} \tag{2.10}$$

оскільки $\delta\mathbf{X}(t_0)=0$,так як $\mathbf{X}(t_0)$-фіксоване,а $\delta\mathbf{X}(t_f)$- довільне.

В тому випадку, якщо $\mathbf{X}(t_0)$ і $\mathbf{X}(t_f)$ фіксовані, тоді $\delta\mathbf{X}(t_0)=0$ і $\delta X(t_f)=0$, а $\mathbf{X}(t_0)$ і $\mathbf{X}(t_f)$ є граничними умовами в двоточечній краєвій задачі. Для багатьох задач оцінки ні $\mathbf{X}(t_0)$, ні $\mathbf{X}(t_f)$ не фіксовані , а G=0.

В цьому випадку із (2.9) слідує, що $\lambda(t_0)=0; \lambda(t_f)=0$ - це і будуть граничні умови для даної задачі. В іншому випадку можемо мати $\mathbf{X}(t_0)=X_0, \quad \|\mathbf{X}(t_f)\|^2=1.$

При цьому легко показати, що остаточні умови трансверсальності виконуються, якщо розв'язати два скалярних рівняння:

$$\delta\mathbf{X}^T(t_f)\mathbf{X}(t_f)=0, \quad \delta\mathbf{X}^T(t_f)\lambda(t_f)=0 \tag{2.11}$$

Дамо більш точне і загальне формулювання умов трансверсальності. У загальному випадку, коли в початковому положенні

$$M[\mathbf{X}(t_0),t_0]=0, \tag{2.12}$$

а в кінцевому

$$N[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0 \tag{2.13}$$

введемо останні дві умови в функцію G за допомогою множників Лагранжа ξ и ν.

Тоді функція вартості має наступний вигляд:

$$\begin{gathered} I=G[\mathbf{X}(t),t]\Big|_{t_0}^{t_f}-\xi^T M[\mathbf{X}(t_0),t_0]+\nu^T N[\mathbf{X}(t_f),t_f]+ \\ +\int_{t_0}^{t_f}\left\{H[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),\lambda(t),t]-\boldsymbol{\lambda}^T(t)\mathbf{X}'\right\}dt \end{gathered} \tag{2.14}$$

Для отримання умов трансверсальності в початковий момент часу скористаємося звичайними варіаційними методами:

$$\lambda(t_0)=\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}}+\left(\frac{\partial M^T}{\partial \mathbf{X}}\right)\xi, \quad M[\mathbf{X}(t),t]=0 \qquad \text{при} \quad t=t_0 \tag{2.15}$$

Аналогічно n умов в момент досягнення отримуються з

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}}+\left(\frac{\partial N^T}{\partial \mathbf{X}}\right)\nu,\ \ N[\mathbf{X}(t),t]=0 \qquad \text{при} \quad t=t_f. \qquad (2.16)$$

при q параметрах ν так, щоб виконувалось q умов (2.13)

Умовою мінімуму I є невід*ємність другої варіації I вздовж всіх траєкторій так, щоб було справедливо (2.1) .

Приклад 2.1.

Задана система диференціальних рівнянь, що описує три послідовно з'єднаних інтегратора:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2, & x_1(0)&=0 \\ x'_2 &= x_3, & x_2(0)&=0 \\ x'_3 &= \mathbf{U}, & x_3(0)&=0 \end{aligned}$$

Потрібно знайти таке управління, яке приводить до границі

$$x_1^2(1)+x_2^2(1)=1,$$

так щоб функція вартості була мінімальна

$$I=1/2\int_0^1 U^2 dt$$

Визначимо гамільтоніан

$$H=1/2U^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 x_3+\lambda_3 U,$$

рівняння зв'язку

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}}=U+\lambda_3=0$$

і спряжені

$$\lambda_1^/=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0,\ \ \lambda_2^/=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1,\ \ \lambda_3^/=-\frac{\partial H}{\partial x_3}=-\lambda_2$$

Умова трансверсальності в момент досягнення

$$x_1^2(1)+x_2^2(1)=1$$

має вигляд $$\lambda(1)=\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}}+\left(\frac{\partial N^T}{\partial \mathbf{X}}\right)\nu, \quad t=t_f$$

де $$N[\mathbf{X}(t_f),t_f]=x_1^2(t_f)+x_2^2(t_f)-1=0, \quad t_f=1$$

Таким чином $$\boldsymbol{\lambda}(1)=\begin{bmatrix}\lambda_1(1)\\ \lambda_2(1)\\ \lambda_3(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1(1)\nu\\ 2x_2(1)\nu\\ 0\end{bmatrix}$$

У даному прикладі задача знаходження оптимального управління і відповідних траєкторій приводиться до розв’язку наступної крайової двоточечної задачі:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \quad x_1(0)=0\\ x_2' &= x_3, \quad x_2(0)=0\\ x_3' &= -\lambda_3, x_3(0)=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1'=0 && \lambda_1(1)=2x_1(1)\nu\\ &\lambda_2'=-\lambda_1, && \lambda_2(1)=2x_2(1)\nu\\ &\lambda_3'=-\lambda_2, && \lambda_3(1)=0 \end{aligned} \quad \left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\} x_1^2(1)+x_2^2(1)=1$$

Приклад 2.2.

Динаміка системи описується диференціальними рівняннями

$$\begin{cases} x_1{}' = x_2 \\ x_2{}' = -4x_1 - 6x_2 + U \end{cases} \qquad \begin{matrix} X(t_0)=[1 \quad 1]^T \\ X(t_f)=[0 \quad 0]^T \end{matrix}$$

1. Для вибраної математичної моделі технологічного процесу сформулювати задачі оптимального керування. Обґрунтувати вибір критерію оптимальності за формою інтегрального квадратичного.

2. Отримати необхідні умови оптимальності використовуючи принцип максимуму. Порівняти отриманий результат зі спряженими рівняннями і умовами трансверсальності з використанням варіаційного числення.

3. Побудувати оптимальну систему керування. Записати алгоритм розрахунку оптимального програмного керування. Пояснити вибір матриць коефіцієнтів Q, R. Представити в дискретній формі диференціальні рівняння математичної моделі і спряженої системи. Пояснити розрахунок рівнянь в прямому часі і зворотному часі.

Відповідь.

1. Диференціальні рівняння математичної моделі процесу представлені у просторі стану, канонічній формі, лінійні. Можливий канал керування $U \rightarrow x_1$, тобто U – керуючий вилив, а x_1 – регульований параметр. Для створення нелінійностей необхідно вибрати інтегральний квадратичний за формою критерій

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(q_{11}{x_1}^2 + q_{22}{x_2}^2 + rU^2)dt \ \rightarrow min,$$

де r – ваговій коефіцієнт.

Квадратичне зваження стану дозволяє досягнути бажаної якості керування. Квадратичне зваження керування у деяких випадках замінює собою явні обмеження на величину керуючих впливів. Завдання дуже великих значень вагового коефіцієнта викликає відхилення фактичного кінцевого стану від заданого, а дуже малих – призводить до неприпустимо великих значень U. Основне обмеження – умова додатної визначеності r.

2. Необхідні умови існування мінімуму для принципу максимуму:

канонічні рівняння Гамільтона

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad \lambda(t_f) = \frac{\partial G}{\partial X(t_f)}$$

$$X' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \frac{\partial H}{\partial U} = 0$$

де H – гамільтоніан,

G – термінальна складова функції вартості,

$\lambda(t)$ – вектор еквівалентний множнику Лагранжа, розглядається як функція незалежної змінної t.

Визначимо гамільтоніан у вигляді

$$H(X, U, \lambda, t) = \frac{1}{2}q_{11}{x_1}^2 + \frac{1}{2}q_{22}{x_2}^2 + \frac{1}{2}rU^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-4x_1 - 6x_2 + U)$$

Спряжені рівняння і умови трансверсальності

$$\lambda_1{}' = -q_{11}x_1 + 4\lambda_2 \qquad \lambda_1(t_f) = 0$$
$$\lambda_2{}' = -q_{22}x_2 - \lambda_1 + 6\lambda_2 \quad \lambda_2(t_f) = 0$$

Рівняння зв'язку

$$\frac{\partial H}{\partial U} = rU + \lambda_2 = 0, \quad U^*(t) = -r^{-1}\lambda_2$$

Достатньою умовою мінімуму I є невід'ємність другої варіації I вздовж всіх траєкторій $\delta^2 I \geq 0$.

Для лінійної системи необхідні умови оптимальності є і достатніми. Використаємо варіаційне числення. Рівняння Ейлера - Лагранжа і умови трансверсальності.

$$\frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial X'}\right) = 0, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial X}\right|_{t_f} = -\left.\frac{\partial G}{\partial X'}\right|_{t_f},$$

де L – Лагранжіан,

$$L = \frac{1}{2}q_{11}{x_1}^2 + \frac{1}{2}q_{22}{x_2}^2 + \lambda_1(x_2 - x_1') + \lambda_2(-4x_1 - 6x_2 + U - x_2')$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = q_{11}x_1 - 4\lambda_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1{}'} = -\lambda_1,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = q_{22}x_2 + \lambda_1 - 6\lambda_2 \quad \frac{\partial L}{\partial x_2{}'} = -\lambda_2,$$

$$q_{11}x_1 - 4\lambda_2 + \lambda_1' = 0 \qquad \lambda_1' = -q_{11}x_1 + 4\lambda_2,$$
$$q_{22}x_2 + \lambda_1 - 6\lambda_2 + \lambda_2' = 0 \quad \lambda_2' = -q_{22}x_2 - \lambda_1 + 6\lambda_2,$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x_1}\right|_{t_f} = 0; \qquad \left.\frac{\partial G}{\partial x_2}\right|_{t_f} = 0; \qquad \lambda_1(t_f) = 0; \lambda_2(t_f) = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial U} = rU + \lambda_2 = 0; \qquad U^*(t) = -r^{-1}\lambda_2.$$

Порівняння результатів за принципом максимуму і варіаційним численням показало отримання однакових спряжених рівнянь, умов трансверсальності, оптимального керування.

3. Постановка задачі оптимального керування динамічними системами має два альтернативних варіанти отримання оптимальних результатів.

У випадку оптимального програмного керування одержуємо оптимальну траєкторію керування, як постійну функцію часу. Ця оптимальна траєкторія залежить від заданого початкового стану X_0. Із-за дії можливих перешкод або неточностей моделі на які не зважають при оптимізації, буде перебігати стан *X(t)*, що відрізняється від очікуваного, отриманого за моделлю.

Для розрахунку оптимального програмного керування маємо математичну модель з початковими умовами

$$\begin{cases} x_1{}' = x_2 \\ x_2{}' = -4x_1 - 6x_2 + U \end{cases} \qquad X(t_0) = [1 \quad 1]^T \tag{2.17}$$

спряжену систему з кінцевими умовами

$$\begin{aligned} \lambda_1{}' &= -q_{11}x_1 + 4\lambda_2 & \lambda_1(t_f) &= 0 \\ \lambda_2{}' &= -q_{22}x_2 - \lambda_1 + 6\lambda_2 & \lambda_2(t_f) &= 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Оптимальне керування

$$U^*(t) = -r^{-1}\lambda_2 \tag{2.19}$$

Алгоритм розрахунку оптимального програмного керування:

1. При заданому постійному значенні керування *U* розраховуємо у прямому часі математичну модель процесу. Отримуємо траєкторії переходу.

2. У зворотному часі розраховуємо спряжену систему (2.18).

3. Отримуємо оптимальне керування *U(t)* (2.19). Підставляємо у математичну модель (2.17), яку розраховуємо у прямому часі. Отримуємо оптимальну траєкторію переходу.

Умова кінцевого стану *X* входить у інтегральну складову функції вартості. За допомогою підбору матриці вагових коефіцієнтів *Q*, вагового коефіцієнту *r* система може потрапити у заданий кінцевий стан.

Для розрахунку у прямому часі похідні у системі (2.17) представляємо як різницю вперед

$$\begin{cases} \dfrac{x_{1\,\nu+1} - x_{1\,\nu}}{\tau} = x_{2\,\nu} \\ \dfrac{x_{2\,\nu+1} - x_{2\,\nu}}{\tau} = -4x_{1\,\nu} - 6x_{2\,\nu} + U_\nu \end{cases}$$

Звідки

$$x_{1\,\nu+1} = x_{1\,\nu} + \tau x_{2\,\nu}$$
$$x_{2\,\nu+1} = x_{2\,\nu} + \tau(-4x_{1\,\nu} - 6x_{2\,\nu} + U_\nu)$$

В спряжених рівняннях похідні представляємо, як різницю назад

$$\frac{\lambda_{1\,\nu} - \lambda_{1\,\nu-1}}{\tau} = -q_{11}x_{1\,\nu} + 4\lambda_{2\,\nu}$$
$$\frac{\lambda_{2\,\nu} - \lambda_{2\,\nu-1}}{\tau} = -q_{22}x_{2\,\nu} - \lambda_{1\,\nu} + 6\lambda_{2\,\nu}$$

Тоді

$$\lambda_{1\,\nu-1} = \lambda_{1\,\nu} - \tau(-q_{11}x_{1\,\nu} + 4\lambda_{2\,\nu})$$
$$\lambda_{2\,\nu-1} = \lambda_{2\,\nu} - \tau(-q_{22}x_{2\,\nu} - \lambda_{1\,\nu} + 6\lambda_{2\,\nu}),$$
$$U_\nu{}^*(t) = -r^{-1}\lambda_{2\,\nu}$$

Такий підхід забезпечить збіжність розв’язку двоточкової крайової задачі.

3.. Дослідження оптимальної системи керування із зворотнім зв’язком з використанням принципу максимума

Почнемо дослідження окремої задачі керування, рішення якої дає закон лінійного керування з зворотнім зв`язком. Хай існує лінійна система, що характеризується диференційним рівнянням

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)*\mathbf{X} + \mathbf{B}(t)*\mathbf{U}, \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \tag{3.1}$$

і потрібно знайти керування, що мінімізує функцію вартості (при фіксованому t_f).

$$\mathbf{J}=\frac{1}{2}*\mathbf{x}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t_f})*\mathbf{S}*\mathbf{X}(t_f)+\frac{1}{2}*\int_{t_0}^{t_f}[\mathbf{x}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t})*\mathbf{Q}(t)*\mathbf{X}(t)*\mathbf{U}^{T}(t)*\mathbf{R}(t)*\mathbf{U}(t)]dt$$

(3.2)

Зрозуміло, що без втрати єдності можна припустити, що матриці **Q**, **R**, **S** - симетричні. Рішення цієї задачі можливо отримати за допомогою принципу максимума або рівняння Гамільтона-Якобі.

Використаємо перший метод. Гамільтоніан має вигляд:

$$\mathbf{H}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \boldsymbol{\lambda}(t),t]=1/2*\mathbf{X}^{T}*\mathbf{Q}*\mathbf{X}+1/2*\mathbf{U}^{T}*\mathbf{R}*\mathbf{U}+\boldsymbol{\lambda}^{T}*\mathbf{A}*\mathbf{X}+\boldsymbol{\lambda}^{T}*\mathbf{B}*\mathbf{U} \quad (3.3)$$

Для того, щоб скористатись принципом максимума, необхідно,щоб для оптимального керування

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{U}}=0=\mathbf{R}(\mathbf{t})\mathbf{U}(t)+\mathbf{B}^{\mathbf{T}}(t)\lambda(t) \quad (3.4)$$

та

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}}=-\lambda'=\mathbf{Q}(\mathbf{t})\mathbf{X}(t)+\mathbf{A}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t})\lambda(t) \quad (3.5)$$

при граничній умові

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}(\mathbf{t_f})}=\mathbf{SX}(t_f) \quad (3.6)$$

Далі вважаємо , що

$$\mathbf{U}(t)=-\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (3.7)$$

та з`ясуємо, чи можна перетворити цей вираз в керування по замкненому контуру. Припустимо , що рішення для спряженого випадку аналогічно (3.6):

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t) \quad (3.8)$$

Підставляючи (3.8) в (3.1) та (3.7) отримаємо

$$\mathbf{X}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)-\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t) \tag{3.9}$$

Крім того, з (3.8) та (3.5) випливає

$$\boldsymbol{\lambda}'=\mathbf{P}'\mathbf{X}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{X}'=-\mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t)-\mathbf{A}^{T}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t) \tag{3.10}$$

Об`єднуючи (3.9) та (3.10) одержуємо

$$[\mathbf{P}'+\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)+\mathbf{A}^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{P}(t)-\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{--\lambda}(t)\mathbf{B}^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{P}(t)+\mathbf{Q}(t)]\mathbf{X}(t)=0 \tag{3.11}$$

Поскільки це рівняння повинно виконуватись для ненульових $\mathbf{X}(t)$, множник, що стоїть перед $\mathbf{X}(t)$, повинен дорівнювати нулю.

Таким чином матриця **P** , яка є симетричною матрицею розмірності (n x n) і яка містить в собі n(n+n)/2 різних членів, повинна задовольняти матричному рівнянню Ріккаті :

$$\mathbf{P}'=-\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}^{T}(t)\mathbf{p}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-\lambda}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}t)-\mathbf{Q}(t) \tag{3.12}$$

при граничній умові, заданої (3.6) та (3.8) :

$$\mathbf{P}(t_f)=\mathbf{S} \tag{3.13}$$

Таким чином рішення матричного рівняння Ріккаті можна провести у зворотньому напрямку, від t_f до t_0 , побудувавши матрицю

$$\mathbf{K}(t)=-\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}(t) \tag{3.14}$$

і потім одержавши керування по замкненому контуру з

$$\mathbf{U}(t)=\mathbf{K}(t)\mathbf{X}(t) \tag{3.15}$$

Важливо відмітити, що всі складові вектора стану повинні бути досягаєми. На рис.3.1. показана структурна схема пристрою, що реалізує отримане рішення задачі про регулятор.

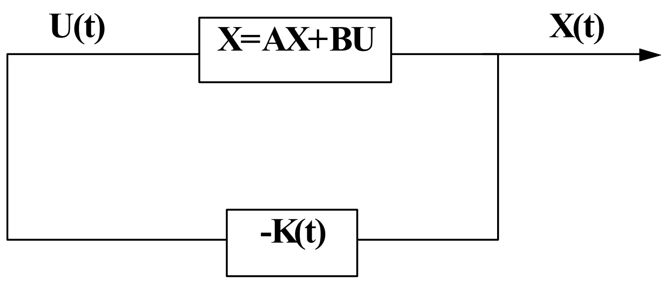

Рис.3.1. Оптимальний лінійний регулятор

Отримані залежності визначають пропорційний лінійний регулятор з залежним від часу матричним коефіцієнтом підсилення **К**(t).

Цей регулятор мінімізує функцію вартості на траєкторіях системи.

При цьому :

1. Матричний коефіцієнт підсилення може бути визначений один раз поза контуром керування, тому що він не залежить від **X**(t) та від **U**(t) ; для визначення К(t) необхідно вирішити рівняння Ріккаті в зворотньому часі.

2. При постійних матрицях **A, B, R, Q** та при $t \to \infty$ **P**(t) прагне до усталеного значення , яке можна знайти при рішенні алгебраїчного матричного рівняння:

$$\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}-\mathbf{P}\mathbf{A}-\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}-\mathbf{Q}=0 \qquad (3.16)$$

3. З`ясуємо зміст критерію якості - функції вартості. Зрозуміло, що квадратичне зваження кінцевого стану дозволяє досягнути бажаної якості керування, однак квадратичне зваження не настільки обгрунтовано, особливо якщо вартість ресурсів керування невелика. В деяких випадках квадратичне зваження замінює собою явні обмеження на величину керуючих впливів і дозволяє отримати оптимальний закон зворотнього зв`язку в аналітичному вигляді. Крім того, задання дуже великих вагових матриць **R** викликає відхилення фактичного кінцевого стану від заданого, а дуже малих - приводить до неприпустимо великих значень **U**(t).

Основними обмеженнями є умова додатньої визначеності **R** та неможливість задання явних обмежень на **X**(t) та **U**(t).

4. Якщо ввести більш загальний, ніж функція вартості, критерій якості

$$\mathbf{I}=\frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}\mathbf{X}\Big|_{t=t_f}+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{U}^{T})\begin{bmatrix}\mathbf{Q(t)} & \mathbf{N(t)}\\ \mathbf{N}^{\mathbf{T}}\mathbf{(t)} & \mathbf{R(t)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{U}\end{bmatrix}dt \qquad (3.17)$$

який враховує взаємозв`язок між керуваннями та станами, то можна показати, що оптимальний регулятор визначається, як і раніше, виразом

U(t) = -**K**(t)***X**(t) з коефіцієнтом підсилення

$$\mathbf{K}(t)=\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{N}^{\mathbf{T}}+\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}) \qquad (3.18)$$

причому P визначається рівнянням Ріккаті

$$\mathbf{P}'=-\mathbf{PA}-\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}+(\mathbf{PB}+\mathbf{N})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{N}^{\mathbf{T}}+\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P})-\mathbf{Q} \qquad (3.19)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{t_f})=\mathbf{S} \qquad (3.20)$$

це більш загальний вираз для оптимального закону регулювання може бути використаний для синтезу нелінійних регуляторів.

Можна помітити, що задачі синтезу оптимального в квадратичному значенні закону керування для лінійної системи мають рішення в вигляді пропорційних регуляторів, які. як відомо з класичної теорії керування, не забезпечують відстеження зміни установок або збурюючих впливів по навантаженню в системі.

Тому бажано переформулювати постановку задачі синтезу таким чином, щоб у керуванні з`явилась інтегральна складова, яка знижує помилки регулювання. це можна зробити декількома способами.

Один з них - введення похідної **U** безпосе- редньо в критерій оптимальності:

$$\mathbf{I}=\frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}\mathbf{X}(t_f)+\frac{1}{2}\int_{0}^{t_f}(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{X}+\mathbf{U}'^{\mathbf{T}}\mathbf{R}\mathbf{U}')dt \qquad (3.21)$$

При цьому необхідно продиференціювати рівняння динаміки процесу :

$$\mathbf{X}''=\mathbf{A}\mathbf{X}'+\mathbf{B}\mathbf{U}'$$

Після заміни змінних

$$\mathbf{V(t)} = \mathbf{U'}\ ;\quad \mathbf{W_1} = \mathbf{X_1};\quad \mathbf{W_2} = \mathbf{X'};\quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W_1} \\ \mathrm{L} \\ \mathbf{W_n} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

перейдемо до рівняння

$$\mathbf{W'} = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I \\ \hdashline 0 & A \end{array}\right]\mathbf{W} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}\mathbf{V} \tag{3.23}$$

та критерію оптимальності

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{W}^T \left[\begin{array}{c:c} S & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] \mathbf{W} \right)_{t=t_f} + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left(\mathbf{W}^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{W} + \mathbf{V^T R V} \right) dt \tag{3.24}$$

Використавши вираз оптимального закону керування (2.5.14), отримаємо

$$\mathbf{V}(t) = -k(t)\mathbf{W} = -\begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W_1} \\ \cdots \\ \mathbf{W_2} \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

або через вихідні змінні

$$\mathbf{U}(t) = -k_2\mathbf{X}(t) - \int_0^{t_f} (k_1 - k_2')\mathbf{X}(t)dt \tag{3.26}$$

що задає складний-таки пропорційно-інтегральний регулятор.

В усталеному стані при $t_f \to \infty$ к$_1$ та к$_2$ будуть постійними, і оптимальний регулятор прийме вигляд

$$\mathbf{U}(t) = -k_2\mathbf{X}(t) - k_1\int_0^{t_f} \mathbf{X}(t)dt \tag{3.27}$$

тобто буде звичайним ПІ-регулятором.

Приведений аналіз, між іншим, залишає нез`ясованим фізичне значення мінімізації похідної керування в виразу (3.21) та зв`язок її з якістю регулювання.

Інший спосіб одержання інтегральної складової - розширення стану шляхом додавання до n початкових змінних p нових змінних

$$\mathbf{Z}(\mathrm{t})\ ,\ \text{де}\ \ \mathbf{Z} = \mathbf{C}\ \mathbf{X} \tag{3.28}$$

тобто змінні стану, для яких бажано мати інтегральний керуючий вплив.

Розширений стан тепер є (n + p) -мірним вектором

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

а критерій оптимальності задається рівнянням

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{X}(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{U})dt$$

Відповідний оптимальний регулятор має вигляд

$$\mathbf{U}(t) = -k_1\mathbf{X}(t) - k_2C\int\mathbf{X}dt = k_1\mathbf{X} - k_2\mathbf{Z}$$

Необхідною умовою існування такого регулятора є виконання умови, що число змінних стану, для яких вводиться інтегральний керуючий вплив, не може бути більше числа змінних керування.

Якщо вихідною величиною системи є стан, що спостерігається, то рівняння вимірювання

$$\mathbf{Y}(\mathrm{t}) = \mathbf{C}\mathbf{X}(\mathrm{t})$$

де $\mathbf{Y}(\mathrm{t})$ - спостерігаємий вектор, $q < n$, та вектор керування:

$$\mathbf{U}(t) = -k_1\mathbf{X}(t) - k_2\int\mathbf{Y}(t)dt$$

На рис.2.3. показана структурна схема оптимального ПІ-регулятора

Приклад 3.1

Динаміка системи описується диференціальними рівняннями

$$\begin{cases} x_1{}' = x_2 \\ x_2{}' = -12x_1 - 14x_2 + U \end{cases} \qquad \begin{matrix} X(t_0) = [1 \quad 1]^T \\ X(t_f) = [0 \quad 0]^T \end{matrix}$$

1. Для вибраної математичної моделі технологічного процесу сформулювати задачі оптимального керування. Обґрунтувати вибір критерію оптимальності за формою інтегрального квадратичного.

2. Отримати необхідні умови оптимальності використовуючи принцип максимуму. Порівняти отриманий результат зі спряженими

рівняннями і умовами трансверсальності з використанням варіаційного числення.

3. Розглянути оптимальне керування у замкненій системі зі зворотнім зв'язком. Синтезувати оптимальний лінійний закон керування. Розглянути введення інтегральної складової в закон керування. Отримати нелінійні диференціальні рівняння Ріккаті і умови трансверсальності.

Відповідь.

1. Диференціальні рівняння математичної моделі процесу представлені у просторі стану, канонічній формі, лінійні. Можливий канал керування $U \rightarrow x_1$, тобто U – керуючий вилив, а x_1 – регульований параметр. Для створення нелінійностей необхідно вибрати інтегральний квадратичний за формою критерій

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(q_{11}{x_1}^2 + q_{22}{x_2}^2 + rU^2)dt \ \rightarrow min,$$

де r – ваговій коефіцієнт.

Квадратичне зваження стану дозволяє досягнути бажаної якості керування. Квадратичне зваження керування у деяких випадках замінює собою явні обмеження на величину керуючих впливів. Завдання дуже великих значень вагового коефіцієнта викликає відхилення фактичного кінцевого стану від заданого, а дуже малих – призводить до неприпустимо великих значень U. Основне обмеження – умова додатної визначеності r.

2. Необхідні умови існування мінімуму для принципу максимуму:

канонічні рівняння Гамільтона

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad \lambda(t_f) = \frac{\partial G}{\partial X(t_f)}$$

$$X' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \frac{\partial H}{\partial U} = 0$$

де H – гамільтоніан,

G – термінальна складова функції вартості,

$\lambda(t)$ – вектор еквівалентний множнику Лагранжа, розглядається як функція незалежної змінної t.

Визначимо гамільтоніан у вигляді

$H(X, U, \lambda, t) = \frac{1}{2}q_{11}{x_1}^2 + \frac{1}{2}q_{22}{x_2}^2 + \frac{1}{2}rU^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-12x_1 - 14x_2 + U)$

Спряжені рівняння і умови трансверсальності

$${\lambda_1}' = -q_{11}x_1 + 12\lambda_2 \qquad \lambda_1(t_f) = 0$$
$${\lambda_2}' = -q_{22}x_2 - \lambda_1 + 14\lambda_2 \quad \lambda_2(t_f) = 0$$

Рівняння зв'язку

$$\frac{\partial H}{\partial U} = rU + \lambda_2 = 0, \quad U^*(t) = -r^{-1}\lambda_2$$

Достатньою умовою мінімуму I є невід'ємність другої варіації I вздовж всіх траєкторій $\delta^2 I \geq 0$.

Для лінійної системи необхідні умови оптимальності є і достатніми. Використаємо варіаційне числення. Рівняння Ейлера - Лагранжа і умови трансверсальності.

$$\frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial X'}\right) = 0, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial X}\right|_{t_f} = -\left.\frac{\partial G}{\partial X'}\right|_{t_f},$$

де L – Лагранжіан,

$$L = \frac{1}{2}q_{11}{x_1}^2 + \frac{1}{2}q_{22}{x_2}^2 + \lambda_1(x_2 - x_1') + \lambda_2(-12x_1 - 14x_2 + U - x_2')$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = q_{11}x_1 - 12\lambda_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial {x_1}'} = -\lambda_1,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = q_{22}x_2 + \lambda_1 - 14\lambda_2 \quad \frac{\partial L}{\partial {x_2}'} = -\lambda_2,$$

$$q_{11}x_1 - 12\lambda_2 + \lambda_1' = 0 \qquad \lambda_1' = -q_{11}x_1 + 12\lambda_2,$$
$$q_{22}x_2 + \lambda_1 - 14\lambda_2 + \lambda_2' = 0 \quad \lambda_2' = -q_{22}x_2 - \lambda_1 + 14\lambda_2,$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x_1}\right|_{t_f} = 0; \qquad \left.\frac{\partial G}{\partial x_2}\right|_{t_f} = 0; \qquad \lambda_1(t_f) = 0; \lambda_2(t_f) = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial U} = rU + \lambda_2 = 0; \qquad U^*(t) = -r^{-1}\lambda_2.$$

Порівняння результатів за принципом максимуму і варіаційним численням показало отримання однакових спряжених рівнянь, умов трансверсальності, оптимального керування.

3. Постановка задачі оптимального керування динамічними системами має два альтернативних варіанти отримання оптимальних результатів.

У випадку оптимального керування зі зворотнім зв'язком з необхідних умов рішення так званої синтез-проблеми оптимального закону керування. Істотна властивість оптимального регулювання випливає з того, що закон керування є незалежним відносно можливих початкових станів X_0.

Оптимальний лінійний закон керування

$U(t) = -k(t)X(t)$,

де $k(t) = R^{-1}B^TP$ – матриця коефіцієнтів підсилення, P – симетрична матриця коефіцієнтів Ріккаті.

Нелінійне матричне диференціальне рівняння Ріккаті:

$$P' = -PA - A^TP + PBR^{-1}B^TP - Q, \quad P(t_f) = S,$$

де Q, R, S – матриці вагових коефіцієнтів.

Виведемо рівняння Ріккаті:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -14 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{11} & p'_{12} \\ p'_{21} & p'_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 1 & -14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}, \qquad r = 1$$

Отримали:

$$\begin{aligned} p'_{11} &= 24p_{12} + p_{12}^2 - q_{11} & p_{11}(t_f) &= 0 \\ p'_{21} &= -p_{11} + (14)p_{12} + 12p_{22} + p_{12}p_{22} & p_{12}(t_f) &= 0 \\ p'_{22} &= 24p_{22} + p_{22}^2 - 2p_{12} - q_{22} & p_{22}(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

Оптимальний закон керування

$$U^*(t) = -r^{-1}\,(p_{12}x_1 + p_{22}x_2)$$

Лінійні регулятори дозволяють звести до нуля з плином часу вплив на вихід об'єкту ненульових початкових умов чи короткострокових імпульсних виливів. У випадку постійних чи повільно змінюючих вхідних виливів такі регулятори не можуть забезпечити вимог рівності нулю відхилень регулюючих величин від заданих значень. Для того, щоб задовольнити такій вимозі, закон керування повинен мати не одну, а дві складові, одна з котрих залежить від вектора стану, а друга – від інтеграла вектора стану.

$$U^*(t) = -r^{-1}\left(p_{43}x_1 + p_{44}x_2 + p_{41}\int x_1 dt + p_{42}\int x_2 dt\right),$$

де $p_{41}, p_{42}, p_{43}, p_{44}$ – коефіцієнтиРіккаті.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}$$

4. Задача про мінімальний час

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння системи, в яке рівняння входить лінійно

$$\mathbf{X}' = f[\mathbf{X}(t), t] + D[\mathbf{X}(t), t]\mathbf{U}(t), \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \tag{4.1}$$

$$a_i \le \mathbf{U}_i \le b_i \tag{4.2}$$

і припустимо, що критерій якості також містить тільки лінійні члени змінної рівняння, так що гамільтоніан також виявиться лінійним по **U**(t). Маємо

$$I = G[\mathbf{X}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{F[\mathbf{X}(t), t] + h^T[\mathbf{X}(t), t]\mathbf{U}(t)\} dt, \tag{4.3}$$

$$H[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = F[\mathbf{X}(t), t] + h^T[\mathbf{X}(t), t]\mathbf{U}(t) + $$
$$+ \boldsymbol{\lambda}^T(t)\{f[\mathbf{X}(t), t] + D[\mathbf{X}(t), t]\mathbf{U}(t)\} \tag{4.4}$$

Внаслідок лінійної залежності гамільтоніана від вектора управління **U**(t) для його мінімізації по U(t) необхідно, щоб

$$\mathbf{U}_i = \begin{cases} a_i, npu \ \{h^T[\mathbf{X}(t),t] + \boldsymbol{\lambda}^T(t)D[\mathbf{X}(t),t]\}_i \rangle 0 \\ b_i, npu \ \{h^T[\mathbf{X}(t),t] + \boldsymbol{\lambda}^T(t)D[\mathbf{X}(t),t]\}_i \langle 0 \end{cases}. \tag{4.5}$$

Єдиним винятком буде, коли

$$h^T[\mathbf{X}(t),t] + \boldsymbol{\lambda}^T(t)D[\mathbf{X}(t),t] = 0, \tag{4.6}$$

тобто коли гамільтоніан не залежить від U(t) і не може бути мінімізований по **U**(t). Якщо рівняння (6) задовільняється не тільки в ізольованих у часі точках, то говорять задача мінімізації володіє сингулярним рішенням.

Запишемо для розгляду задачі канонічні рівняння

$$\mathbf{X}' = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = f[\mathbf{X}(t),t] + D[\mathbf{X}(t),t]\mathbf{U}(t), \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\lambda}' = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial F[\mathbf{X}(t),t]}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial h^T[\mathbf{X}(t),t]}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{U}(t) + \\ + \frac{\partial f^T[\mathbf{X}(t),t]}{\partial \mathbf{x}}\boldsymbol{\lambda}(t) + \frac{\partial \{D[\mathbf{X}(t),t],\mathbf{U}(t)\}^T}{\partial \mathbf{x}(t)}\boldsymbol{\lambda}(t) \end{aligned}, \tag{4.8}$$

де **U**(t) визначається з (4.5).

Якщо буде задано необхідний стан в момент досягнення і вектор початкових умов, то приходимо, як і раніше, до двоточечної крайової задачі, половина умов для якої задана для початкового моменту, а половина - для моменту досягнення. Один з методів розв*язку канонічних рівнянь при такому формулюванні полягає в оберненні часу, що входить в канонічні рівняння. Почнемо з вектора кінцевого стану, який часто є початком координат, потім проінтегруємо в зворотному напрямі від цієї точки при постійному управлінні до отримання з (4.5) точки перемикання.

Проілюструємо управління в задачі про мінімальний час на прикладі лінійної системи з постійними параметрами і скалярним вхідним сигналом.

Потрібно перевести систему , що описується п- мірним векторним диф. рівнянням

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}(t) + b\mathrm{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{4.9}$$

в початок координат $X(t_f) = 0$ за мінімальний час.

Таким чином функція вартості дорівнює

$$I = \int_{t_0}^{t_f} 1 \cdot dt = t_f - t_0 \tag{4.10}$$

при обмеженні $-1 \le u(t) \le 1$ (4.11)

Гамільтоніан має вигляд

$$\mathrm{H}[\mathbf{X}(\mathrm{t}), \mathbf{U}(\mathrm{t}), \boldsymbol{\lambda}(\mathrm{t})] = 1 + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\mathrm{A}\mathbf{X}(\mathrm{t}) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\mathrm{bu}(\mathrm{t}) \quad . \tag{4.12}$$

Мінімізація гамільтоніана відносно **U**(t) забезпечується при

$$\mathrm{u}(t) = -sign[\boldsymbol{\lambda}^T(t)b]. \tag{4.13}$$

Таким чином при оптимальному управлінні гамільтоніан H дорівнює

$$H[\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)] = 1 + \boldsymbol{\lambda}(t)A\mathbf{X}(t) - |\boldsymbol{\lambda}^T(t)b| \tag{4.14}$$

Так як час досягнення не фіксується і H в явному вигляді від t не залежить, то з урахуванням

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dF}{dt} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{u}^T \frac{\partial H}{\partial \mathrm{u}} \text{ і } H[\mathbf{X}(t_f), \mathbf{U}(t_f), \boldsymbol{\lambda}(t_f), t_f] + \frac{\partial g}{\partial t_f} + \left(\frac{\partial N^T}{\partial t_f}\right)\nu = 0$$

знаходимо вздовж оптимальної траєкторії

$$H[\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)] = 0 \;, \quad t \in [t_0, t_f] \tag{4.15}$$

Канонічні рівняння мають вигляд

$$\mathbf{X}' = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = A\mathbf{X}(t) + b\mathbf{U}(t) = A(t)\mathbf{X}(t) - bsign\left[\boldsymbol{\lambda}^T(t)b\right] \qquad (4.16)$$

$$\boldsymbol{\lambda}' = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -A^T\boldsymbol{\lambda}(t) \qquad (4.17)$$

Для виключеннння сингулярного розв*язку потрібно впевнитися, що величина λ^T (t)b не може дорівнювати нулю, якщо часовий інтервал не дорівнює нулю.

Із (4.17) видно, що сингулярність буде мати місце, якщо $\lambda(t_0)$ тотожньо дорівнює нулю, що неможливо. Крім того, система повинна бути керована. Якщо система не керована, то неможливо здійснити її перехід в початок координат.

Розв'язок рівняння (2.17) має вигляд

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t}-\mathrm{t}_{\mathrm{f}})}\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{t}_{\mathrm{f}}). \qquad (4.18)$$

Перепишемо рівняння (2.7.16), припустивши $t_0 = 0$ і здійснючи заміну змінної

$$\tau = t_f - t \qquad (4.19)$$

і $$\zeta(\tau) = \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t_f - \tau) \qquad (4.20)$$

у вигляді

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -A\zeta(\tau) + bsign\left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_f)e^{A\tau}b\right]. \qquad (4.21)$$

Розв'язок цього при $\zeta(0) = X(t_f) = 0$ дорівнює

$$\xi(t) = \int_0^t e^{-A(t-p)}b\ sign\left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_f)e^{Ap}b\right]\ dp. \qquad (4.22)$$

Тепер можна отримати стан $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ із якого за визначений мінімальний час t_f можливий перехід в початок координат, якщо підставити в (4.22) $\boldsymbol{\lambda}(t_f)$ і обчислити $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}(0)=\zeta(t_f)$. Це встановлює співвідношення між $\mathbf{x}(t_0)$ і $\boldsymbol{\lambda}(t_f)$, в зв′язку з яким величину λ можна назвати “функцією впливу”. Так як ясно, що знак $\lfloor \lambda^T(t_f)e^{Ap}b \rfloor$ визначається напрямком, а не величиною вектора λ (t_f), всі стани, які можуть досягатися за даний мінімальний час, можуть бути визначені, якщо припустити, що всі значення λ (t_f) лежать поза одиничною сферою.

Теорема про n інтервалів управлення Фельдбаума говорить, що **якщо об'єкт управління описується лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку з постійними коефіцієнтами і корені його характеристичного рівняння дійсні, негативні або нульові, то для оптимального управління необхідно і достатньо n інтервалів максимального значення управління Umax, а знаки на інтервалах повинні чергуватися.**

Приклад 4.1

Динаміка системи описується диференціальними рівняннями

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = 3U, \end{cases} \quad X(t_0) = X_0$$

Перевести систему у початок координат $X(t_f) = 0$ за мінімальний час при обмежені на керування $|U| \le 1$.

1.Обчислити матрицю переходів. Розрахувати лінію перемикання, час перемикання, точку перемикання.

Записати оптимальний закон керування.

Відповідь.

1. Функція вартості дорівнює

$$I = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$$

При обмеженні $-1 \leq U \leq 1$ Гамільтоніан має вигляд

$H(X, U, \lambda, t) = 1 + \lambda^T AX(t) + \lambda^T bU(t)$.

Для забезпечення мінімуму гамільтоніана відносно *U(t)*

$U(t) = -sign\ [\lambda^T(t)b]$.

При аналітичному розв'язку системи диференціальних рівнянь у просторі стану складова вимушеного руху

$X(t) = \int_0^t exp\ A(t-\tau)BU(\tau)d\tau$.

При розв'язку задачі про мінімальний час лінія переключення

$\xi(\tau) = \int_0^\tau e^{-A(\tau-p)} b\ sign\left[\lambda^T\left(t_f\right) e^{Ap}\ b\right] dp$

Точки, в яких $\lambda^T\left(t_f\right) e^{Ap}\ b$ дорівнюють нулю, є точками переключення.

Кількість інтервалів керування визначається за теоремою про *n* інтегралів керування.

Для системи *n = 2* кількість інтервалів для максимального значення керування, а знаки на інтервалах повинні чергуватися.

Обчислимо матрицю переходів

$e^{At} = e\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t = I + At + \cdots$

Отримаємо

$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\int e^{Ap} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} dp = \int \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} dp = \int \begin{bmatrix} 3p \\ 3 \end{bmatrix} dp$

$\lambda^T\left(t_f\right) e^{Ap}\ b = \left[\lambda_1\left(t_f\right) \lambda_2\left(t_f\right)\right] \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \left[\lambda_1\left(t_f\right)\ \ \lambda_1\left(t_f\right)p + \lambda_2\left(t_f\right)\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} =$

$0 + +3\lambda_1\left(t_f\right)p + 3\lambda_2\left(t_f\right)$

Отримаємо лінію переключення

$\xi(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^\tau \begin{bmatrix} 3p \\ 3 \end{bmatrix}\ sign\left[3\lambda_1\left(t_f\right)p + 3\lambda_2\left(t_f\right)\right] dp$

Для фіксованого $\lambda(t_f)$ переключення може виникнути тільки при $\tau_s = -\frac{\lambda_2(t_f)}{\lambda_1(t_f)}$, що відповідає твердженню, що в об'єкті з n дійсними полюсами може виникнути *n-1* переключень.

$$X(t_s) = \xi(\tau_s) = \begin{bmatrix} 1 & -\tau_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^{\tau_s} \begin{bmatrix} 3p \\ 3 \end{bmatrix} sign\left[3\lambda_1(t_f)(p-\tau_s)\right]dp =$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & -\tau_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^{\tau_s} \begin{bmatrix} 3q \\ 3 \end{bmatrix} sign\,\lambda_1(t_f)dq = -sign\,\lambda_1(t_f) \begin{bmatrix} 1 & -\tau_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\frac{\tau_s^2}{2} \\ 3\tau_s \end{bmatrix} =$$

$$= sign\lambda_1(t_f) \begin{bmatrix} 3\frac{\tau_s^2}{2} \\ -3\tau_s \end{bmatrix}$$

Якщо $\lambda_1(t_f) > 0$ то точка переключення $x_1 = 3\frac{\tau_s^2}{2}$, $x_2 = -3\tau_s$, якщо $\lambda_1(t_f) < 0$ то $x_1 = -3\frac{\tau_s^2}{2}$, $x_2 = 3\tau_s$. Межа переключення задовольняє рівності $\frac{1}{3}(2x_1 + \frac{1}{3}x_2|x_2|) = 0$.

Закон керування

$$U(t) = -sign\,\frac{1}{3}[2x_1 + \frac{1}{3}x_2|x_2|].$$

5. Застосування градієнтних методів для розв'язання задач оптимального керування

Для лінійних систем з квадратичними функціями вартості отримана двоточкова крайова задача (ДТКЗ), яка є лінійною та може бути розв'язана шляхом використання принципу суперпозицій або шляхом переходу до нелінійного рівняння Ріккати, яке має обмеження лише у кінцевий момент часу. Для нелінійних систем відповідні ДТКЗ є нелінійними. Для розв'язання таких задач у загальному випадку повинні використовуватись ітеративні методи, наприклад градієнтні. Для нелінійних систем керування у загальному випадку неможливо оптимальний закон регулювання подати у вигляді добутку вектора стану та залежного від часу коефіцієнту підсилення. Більш того, оптимальне керування звичайно залежить, причому нелінійно, від початкового значення $\mathbf{X}(t_0)$ вектора стану. Це означає, що для більшості нелінійних систем керування доступними виявляються тільки такі закони керування, які не мають петлі зворотнього зв'язку.

Будемо мінімізувати функціонал

$$\mathbf{I} = G[\mathbf{X}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[\mathbf{X(t)}, \mathbf{U}(t), t]dt \tag{5.1}$$

для системи

$$\mathbf{X}' = f[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t],\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \tag{5.2}$$

Почнемо з визначення гамільтоніана

$$\mathbf{H}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = F[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] + \lambda^T(t) f[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] \tag{5.3}$$

Потім вважаємо умову:

$$\frac{\partial\ \mathbf{H}}{\partial\ \mathbf{X}} = -\lambda' = \frac{\partial\ \mathbf{F(X,U,t)}}{\partial\ \mathbf{X}} + \left[\frac{\partial\ \mathbf{f^T(X,U,t)}}{\partial\ \mathbf{X}}\right] \boldsymbol{\lambda}(t); \tag{5.4}$$

з граничною умовою

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial\ G[\mathbf{X}(t_f), t_f]}{\partial\ \mathbf{X}(t_f)}; \tag{5.5}$$

Отже, необхідно мінімізувати визначений гамільтоніан шляхом вибору значення **U.** В таких випадках, коли будь-яке керування є припустимим, вихідним є рівняння

$$\frac{\partial\ \mathbf{H}}{\partial\ \mathbf{U}} = 0 = \frac{\partial\ F(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t)}{\partial\ \mathbf{U}} + \frac{\partial\ f^T(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t)}{\partial\ \mathbf{U}}\ \boldsymbol{\lambda}\ (t) \tag{5.6}$$

Виберемо деяке керування замість невідомого оптимального керування; при цьому, звичайно, не буде виконуватись умова $d\mathbf{H}/d\mathbf{U}=0$. Задане обмеження у формі системи дифференційних рівняннь (5.2) будемо розв'язувати відносно **X** при цьому вибраному керуванні **U**; будемо також розв'язувати приєднану систему (5.4) в зворотньому часі від t_f до t_o з граничними умовами (5.5). Приріст першого порядку функці□ вартості (5.1) при відхиленні керування на Δ**U**(t) від значення **U**(t), як це неважко помітити з (5.4), можно записати у вигляді :

$$\Delta \mathbf{I} = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial\ \mathbf{H}[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t]}{\partial\ \mathbf{U}(t)} \right\}^T \Delta \mathbf{U}(t)dt; \tag{5.7}$$

Якщо бажано забезпечити одержання найбільшого змінення Δ**I**, потрібно обчислити градієнт ∂**H**/∂**U** і потім приріст Δ**U** вибрати таким чином, щоб він був протилежним напрямку цього градієнту

$$\Delta \mathbf{U}(t) = -k(t)\frac{\partial\ \mathbf{H}[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),\boldsymbol{\lambda}\ (t),t]}{\partial\ \mathbf{U}(t)} \tag{5.8}$$

Відзначимо, що таке змінення забезпечує менше значення **I** при k(t)>0, що і потрібно, тому що необхідно забезпечити мінімум значення **I**. Щоб почати пошук оптимального рішення, припустимо, що маємо деяке неоптимальне керування $U^N(t)$. В результаті розв'язку (5.2) знайдемо $X^N(t)$, а із (5.4) з граничними умовами (5.5) отримаємо $\boldsymbol{\lambda}^N(t)$. Потім у відвідності з (3.1.6) визначаємо вираз для ∂**H**/$\partial \mathbf{U}^N(t)$, котрий приймає вигляд

$$\frac{\partial\ \mathbf{H}}{\partial\ \mathbf{U}^N} = \frac{\partial\ F(\mathbf{X}^N,\mathbf{U}^N,t)}{\partial\ \mathbf{U}^N} + \frac{\partial\ f^T(\mathbf{X}^N,\mathbf{U}^N,t)}{\partial\ \mathbf{U}^N}\boldsymbol{\lambda}^N \tag{5.9}$$

Після цього за (5.8) визначаємо приріст Δ**U**(t), де k(t) - невід'ємна функція часу. Перший приріст $\Delta \mathbf{I}^N$ функці□ **I**, якщо він є необхідним, обчислюється за формулою (5.7). Нове значення $\mathbf{U}^{N+1}(t)$ керування **U** обчислюється звичайним чином *:*

$$\mathbf{U}^{N+1}(t)=\mathbf{U}^N(t)+\Delta\mathbf{U}^N(t) \tag{5.10}$$

Ця процедура повторюється доти, поки або керування, або функція вартості стануть змінюватись лише незначно від ітерації до ітерації.

Викладену послідовність обчислень з використанням градієнтного методу першого порядку в задачі з неперервним часом можна представити так :

1. Визначаємо гамільтоніан

$\mathbf{H}$=F[$\mathbf{X}$(t),$\mathbf{U}$(t),t]+$\boldsymbol{\lambda}^T$(t)f[$\mathbf{X}$(t),$\mathbf{U}$(t),t]

2. Вибираємо початкове значення $\mathbf{U}$(t),$\mathbf{X}$(t_0)

3. Для значень $\mathbf{U}^N$(t) та $\mathbf{X}^N$(t_0), які ми маємо, знаходимо $\mathbf{X}^N$(t) як розв'язок системи (5.2).

4. У зворотному часі вирішуємо систему приєднаних рівнянь

$$\boldsymbol{\lambda}'^N = -\frac{\partial\ \mathbf{H}}{\partial\ \mathbf{X}^N(t)};\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{N}}(t_f) = \frac{\partial\ G[\mathbf{X}^{\mathbf{N}}(t_f)]}{\partial\ \mathbf{X}^N(t_f)};$$

5. Знаходимо приріст керування

$$\Delta\mathbf{U}^N(t) = -k^N \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{U}^N(t)}$$

6. Обчислюємо чергове значення керування

$$\mathbf{U}^{N+1}(t) = \mathbf{U}^{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) + \Delta\mathbf{U}^N(t)$$

7. Повторюємо обчислення, починаючи з п.3. Обчислення повторюються доти, поки зміни керування від ітерації до ітерації не стануть незначними. Узагальнимо знайдені співвідношення для випадку, коли на деякі складові вектора стану накладені обмеження у фіксований кінцевий момент часу. Для цього розглянемо задачу мінімізації функції часу

$$\mathbf{I} = G[\mathbf{X}(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[\mathbf{X}(\mathbf{t}),\mathbf{U}(t),t]dt \tag{5.11}$$

для системи, задано рівнянням

$$\mathbf{X}^{-1}=f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]; \qquad \mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0 \tag{5.12}$$

Фінальні значення деяких складових вектора стану фіксовані шляхом введення обмеження у формі q-мірного векторного рівняння

$$N[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0 \tag{5.13}$$

Можна сформулювати принцип максимуму для ціє задачі та одержати в результаті звичайним способом градієнтну процедуру. Головні труднощі при цьому полягають у тому, що розв'язок $\mathbf{X}^N$(t) рівняння (5.12) при заданому законі керування $U^N(t)$ не буде задовольняти умові (5.13). Тому обмеження (5.13) треба ввести в градієнтну процедуру. Для того, щоб одержати розв'язок цієї задачі з фіксованим кінцевим значенням, можна скористатися методом функції штрафів. Для цього необхідно до функції вартості (5.11) додати штраф за порушення обмеження, що визначає кінцеве значення вектора стану. Таким чином, мінімізації підлягає значення нової функції вартості:

$$\mathbf{I} = \mathbf{N}^T[\mathbf{X}(t_f),t_f]\theta\mathbf{N}[\mathbf{X}(t_f),t_f] - \mathbf{G}[\mathbf{X}(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[\mathbf{X(t)},\mathbf{U}(t),t]dt; \tag{5.14}$$

з обмеженням у формі рівності :

$$\mathbf{X}'=f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t], \qquad \mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0 \tag{5.15}$$

Тут θ - додатньо визначена діагональна вагова матриця. При цьому очікується, що при необмеженому збільшенні θ наслідки порушення обмеження N=0 будуть ставати більш незначними. Невирішеною тут залишається така проблема : яким великим має бути значення θ ? У загальному випадку відповідь може бути отримана тільки на основі числових розрахунків. Градієнтні методи можна використовувати для розв'язання задач з нефіксованим кінцевим моментом часу та з обмеженнями на змінні стану або керування у формі нерівності. Рівняння, до яких приводить принцип максимуму при розв'язанні задач із змінним кінцевим моментом часу, мають наступні співвідношення (з невідомим значенням t_f)

$$\begin{aligned} &H[\mathbf{X}(t_f),\mathbf{U}(t_f),\lambda(t_f),t_f] + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t_f} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial t_f}\nu = 0 \\ &\mathbf{I}(t_f) = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X(t_f)}} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \mathbf{X}(t_f)}\nu = 0; \\ &N[\mathbf{X}(t_f),t_f] = 0; \end{aligned} \tag{5.17}$$

При кожній ітерації градієнтної процедури неможливо ввести умову $\mathbf{N}[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0$ навіть для фіксованого значення t_f. Можливо врахувати це кінцеве обмеження у формі рівняння шляхом введення штрафів, після чого в переформульованій задачі вважати, що подібне кінцеве обмеження у формі рівняння відсутнє. Аналогічно рівняння (5.16) та (5.17) не можуть бути використані безпосередньо у градієнтній процедурі тому, що для визначення **H** відповідні спряжені рівняння необхідно інтегрувати у зворотньому часі від моменту t_f, а цей момент невідомий доти, поки не буде розв'язане рівняння (5.16).

Оскільки кінцевий момент часу невизначений, пропонується вибирати таке його значення, при якому функція вартості мінімальна по цій змінній, тобто d**I**/dt=0. Може бути, що момент часу, визначений із умови d**I**/dt=0, не є кінцевим і максимізує значення функці вартості, а не мінімізує його. Якщо виникають такі сумніви, можна знайти знак другої похідної $d^2\mathbf{I}/dt^2\mathbf{I}$ для точки, де d**I**/dt=0. Таким чином, вихідну задачу мінімізаці функці□ вартості

$$\mathbf{I} = G[\mathbf{X}(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]dt; \qquad (5.19)$$

для системи

$$\mathbf{X}'=f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]; \quad \mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0 \qquad (5.20)$$

з кінцевими значеннями

$$\mathbf{N}[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0 \qquad (5.21)$$

де t_f - не визначено, треба переформулювати в іншу задачу, тобто: потрібно розглянути задачу мінімізації модифікованої функції вартості :

$$\mathbf{I}' = \frac{1}{2}\left\| N[\mathbf{X}(t_f),t_f \right\|_0^2 + G[\mathbf{X}(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]dt \qquad (5.22)$$

для систем, що описуються рівнянням (5.20),де t_f визначається з рівняння (5.23)

$$\frac{\mathbf{dI}}{\mathbf{dt_f}} = 0 = \left\{ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial t_f} + \left[\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{X}(t_f)} \right]^T \mathbf{X}'(t_f) \right\} \theta\mathbf{N} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t_f} + \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}(t_f)} \right]^T \mathbf{X}'(t_f) + F[\mathbf{X}(t_f),\mathbf{U}(t_f),t_f];$$

(5.23)

Необхідні обчислення при цьому виконуються звичайним чином як для градієнтної процедури у функціональному просторі, описано раніше.

Розглянемо градієнтні процедури з обмеженими на керування у формі нерівності :

$$g[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t] \ge 0 \tag{5.24}$$

та на змінні стану

$$h[\mathbf{X}(t),t] \ge 0 \tag{5.25}$$

Можливий спосіб урахування подібних обмежень полягає в тому, щоб перетворити їх у еквівалентні обмеження у формі рівняннь. Наприклад, обмеження (5.24) можна замінити таким :

$$(y_i)^2 = g_i[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t], \qquad i = 1,2,3,\ldots,r; \tag{5.26}$$

яке приводить до того, що y_i буде більше або дорівнювати нулю тому, що величина $(y_i)^2$ невід'ємна. Змінна y_i розглядається як додаткова змінна керування, далі задача розв'язується звичайним чином. Тут немає можливості використати це рівняння безпосередньо тому, що неможливо для g_i забезпечити значення більше нуля. Маємо деяке значення $\mathbf{U}^N$ і розв'язуємо рівняння $\mathbf{X}'^N=f^N$, щоб знайти $\mathbf{X}^N$, яке визначає значення g. Проте можна ввести штраф за порушення цієї нерівності. В результаті рівняння (5.26) замінюється штрафом у функції вартості, тому одержуємо

$$\mathbf{I} = \ldots + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{r} \left| g_i[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t] \right|^P \mathbf{H}(g_i)\,dt + \ldots \tag{5.27}$$

Тут P - будь-яке додатнє число, яке повинно бути вибране, $H(g_i)$ - ступінчаста функція, визначена співвідношенням:

$$\mathbf{H}(g_i) = \begin{cases} 0 & g_i \ge 0 \\ k_i & g_i < 0 \end{cases} \tag{5.28}$$

Шляхом вибору значень **P** та K_i можна змінювати значення штрафу за порушення обмеження на керування у формі нерівності. Врахування обмежень у формі нерівності на значення змінних стану здійснюється по-іншому, тобто замість рівняння (5.27) розглянемо диференційне рівняння

$$\mathbf{x}'_{n+1}=f_{n+1}=|h_1(\mathbf{X},t)|^{P1}\mathbf{H}(h_1)+|h_2(\mathbf{X},t)|^{P2}\mathbf{H}(h_2)+\ldots+|h_s(\mathbf{X},t)|^{Ps}\mathbf{H}(h_s), \qquad \mathbf{X}_{n+1}(t_0)=0, \quad \mathbf{X}_{n+1}(t_f)=0. \tag{5.29}$$

або диференційними рівняння

$$\mathbf{x'}_{n+1}=|h_1(\mathbf{X},t)|^{P1}\mathbf{H}(h_1),\ \ \mathbf{x}_{n+1}(t_0)=0,\ \ \mathbf{x}_{n+1}(t_f)=0 \tag{5.30}$$

$$\mathbf{x'}_{n+2}=|h_2(\mathbf{X},t)|^{P2}\mathbf{H}(h_2),\ \ \mathbf{x}_{n+2}(t_0)=0,\ \ \mathbf{x}_{n+2}(t_f)=0$$

$$\mathbf{x'}_{n+s}=|h_s(\mathbf{X},t)|^{Ps}\mathbf{H}(h_s),\ \ \mathbf{x}_{n+s}(t_0)=0,\ \ \mathbf{x}_{n+s}(t_f)=0$$

Рівняння (5.29),(5.30) знову не можна використати у градієнтній процедурі, оскільки немає способу, який забезпечує виконання вказаних обмежень. Тому кінцеве значення змінних вводимо у функці штрафів; в результаті відповідну частину модифікованої функції вартості можна представити в один із способів:

$$\mathbf{I}=\ldots+|\mathbf{x}_{n+1}(t_f)|^{P}\mathbf{K}+\ldots,\ \ \mathbf{x}_{n+1}(t_0)=0, \tag{5.31}$$

$$\mathbf{I}=\ldots+\sum_{i=1}^{s}|\,\mathbf{x}_{n+1}(t_f)\,|^{Pi}\,\mathbf{K}_i+\ldots,\mathbf{x}_{n+i}(t_0)=0, i=1,2,\ldots,s. \tag{5.32}$$

Для зручності обчислень значення степенів Р часто приймають рівними 2, хоч це і не обов'язково. Після цього градієнтна процедура використовується звичайним способом.

Приклад 5.1.

Нехай система описується рівнянням: $x'=-x^2+U$, $x(0)=10$

Потрібно знайти керування,котре забезпечить мінімальне значення функції вартості

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+U^2)dt$$

Знаходимо гамільтоніан

$$H=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}U^2-\lambda x^2+\lambda U$$

Приєднане рівняння приймає вигляд $\lambda'=-x+2\lambda x$

з граничною умовою, а рівнняя для градієнта

$$\frac{\partial H}{\partial U}=U+\lambda$$

.

Візьмемо в якості початкового значення керування Приймаємо K=1 Для реалізації градієнтного методу виконаємо наступні обчислення.

1. Для рівняння, що маємо $U^N(t)$, $t \in [0,1]$,знаходимо $x^N(t)$ шляхом розв'язання рівняння

$$x'^N = -[x^N(t)]^2 + U^N(t), \quad x^N(0) = 10$$

2. При знайденому $X^N(t)$ визначимо $\lambda^N(t)$ з рівняння

$$\lambda'^N = -x^N(t) + 2\lambda^N(t)x^N(t), \quad \lambda^N(1) = 0$$

3. Обчислюємо

$$\frac{\partial H}{\partial U^N} = U^N(t) + \lambda(t)$$

4.Знаходимо приріст $\Delta U^N(t)$ та зміну $\Delta \mathbf{I}^N$ по наступним формулам:

$$\Delta U^N(t) = -k\frac{\partial H}{\partial U^N} = -kU^N(t) - k\lambda^N(t)$$

$$\Delta \mathrm{I}^N(t) = -k\int_0^1 \left[\frac{\partial H}{\partial U^N}\right]^2 dt = -k\int_0^1 \left[U^N(t) + \lambda^N(t)\right]^2 dt$$

5. Обчислюємо закон керування для наступної ітерації:

$$U^{N+1}(t) = U^N(t) + \Delta U^N(t)$$

6. Заміняємо $U^N(t)$ новим значенням та повторюємо обчислення, починаючи з пункта 1, до тих пір, поки прирощення $\Delta U^N(t)$ або $\Delta I^N(t)$ не стане досить малим від ітерації до ітерації.

Цей процес обчислень повторюється декілька разів, поки не буде забезпечена збіжність до оптимального розв'язку. Використання даної градієнтної схеми спряжене з труднощами визначення кінця обчислень, так як збіжність процедури може виявитись повільною при приближенні траєкторії та керування до оптимальних.

Приклад 5.2.

Використаємо метод функції штрафів при градієнтному методі пошуку екстремума для розрахунку керування та траєкторії при переведенні лінійної системи $x'_1 = x_2(t)$, $x_2 = U(t)$, $|U(t)| \le 1$, з стану $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = 0$ в початок координат $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$ за мінімальний час. Ця задача розв'язується як задача мінімалізації функції вартості

$$I=\frac{1}{2}S_{11}x^2{}_1(t_f)+\frac{1}{2}S_{12}x^2{}_2(t_f)+t_f+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}Q[U^2(t)-1]H[1-U^2(t)]dt$$

Рівняння для вектора стану, приєднані рівняння, а також вираз для $\frac{\partial H}{\partial U}$ мають вигляд:

$$\mathbf{X}'^N=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{X}^N(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}U^N(t),\ \ \mathbf{X}^N(0)=\begin{bmatrix}10\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\lambda}'^N=-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}^N(t),\ \ \boldsymbol{\lambda}^N(t_f)=\begin{bmatrix}S_{11} & X_1^N(t_f)\\ S_{22} & X_2^N(t_f)\end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial H}{\partial U^N}=\lambda^N{}_2(t)-QU^N(t)H(1-[U^N(t)]^2)$$

Крім того, так як фінальний момент часу невідомий, для його визначення маємо додаткові співвідношення $H+dG/dt_f=0$. Таким чином

$$\lambda^N{}_1(t_f)x^N{}_2(t_f)+\lambda^N{}_2(t_f)U(t_f)+1/2Q\{[U^N(t_f)]^2-1\}H\{1-[U^N(t_f)]^2\}$$

В якості критерія зупинки ітераційного процесу використовуємо:

$$\frac{dI^N}{dt_f}=0=S_{11}x^N{}_1(t_f)x'^N{}_1(t_f)+S_{22}x^N{}_2(t_f)x'^N{}_2(t)+1+1/2Q\{[U^N(t_f)]^2-1\},\ \{[1-U^N(t_f)]^2\}$$

Припустимо, що в якості початкового вибрали керування $U^0=-1$. Розв'язуючи відповідну систему рівняннь, отримаємо:

$$U^0(t)=-1,\ \ x^0{}_1(t)=10-\frac{t^2}{2},\ \ x^0{}_2(t)=-t,\ \ 0<t<\sqrt{10}$$

Припустимо, що це керування використовується на інтервалі часу тривалістю $\sqrt{10}$ с , потім керування змінюється та приймає значення +1. Рівняння для керування та вектора стану при цьому приймуть вигляд:

$$U^0(t)=1,\ \ x^0{}_1(t)=(t-2\sqrt{10})^2/2,\ \ x_2{}^0(t)=1-2\sqrt{10},\ \ t>\sqrt{10}$$

Похідні по часу функції вартості, що розглядаємо записується наступним чином:

$$\frac{dI^0}{dt}=S_{11}\left(\frac{t^2}{2}-10t\right)+S_{22}t+1,\ 0<t<\sqrt{10}$$

$$\frac{dI^0}{dt}=S_{11}(t-2\sqrt{10})^3/2+S_{22}(t-2\sqrt{10})+1,\ \ t<\sqrt{10}$$

Значення t при якому похідна дорівнює нулю, може бути прийняте в якості значення фінального моменту часу. Коли початкове керування не співпадає з оптимальним, значення вектору стану в знайдений фінальний момент часу не є нульовим, тоді розв'язуємо приєднані рівняння:

$$\lambda'_1=0,\ \ \lambda'_2=-l_1=(t),\ \ \lambda^0{}_1(t_f)=S_{11}x^0{}_1(t_f),\quad \lambda^0{}_2(t_f)=S_{22}x^0{}_2(t_f)$$

в зворотньому часі від t_f до 0. Після чого визначаємо числове значення градієнта dH/dU^0 та знайдемо наступне значення керування:

$$U'(t)=U^0(t)=k\left[\frac{\partial H}{\partial U^0(t)}\right]$$

Цей процес розрахунків повторюється доки, доти не буде забеспечений малий приріст керуваннь.

Приклад 5.3.

Динаміка системи описується диференціальними рівняннями

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = 5U, \end{cases} \quad X(t_0) = X_0$$

Перевести систему у початок координат $X(t_f) = 0$ за мінімальний час при обмежені на керування $|U| \le 1$.

1. Застосувати метод функції штрафів при градієнтному пошуку оптимуму у функціональному просторі для обчислення керування і траєкторії переводу. Записати обмеження на керування застосувавши функцію штрафів у функції вартості. Скористатися методом функції штрафів для врахування обмеження на кінцевий стан. Записати необхідні умови оптимальності. Визначити кінцевий момент часу. Записати критерій зупинки ітераційного процесу.

2.Записати чисельний алгоритм рішення.

1. Для чисельного розв'язку задачі введемо штраф на порушення обмеження на керування

$$I = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{r} g_i[U(t),t]|^p H(g_i)dt + \cdots,$$

де p — додатне число, яке слід вибрати, $H(g)$ — ступінчаста функція, визначена співвідношенням

$$H(g_i) = \begin{cases} 0, & g_i \geq 0, \\ k, & g_i < 0. \end{cases}$$

Обмеження по керуванню представимо $1 - U \geq 0, U + 1 \geq 0$.

Умови кінцевого стану системи $(x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0)$ введемо за допомогою функції штрафів у термінальну складову.

Функція вартості має вигляд

$$I = \frac{1}{2}S_{11}X_1^2(t_f) + \frac{1}{2}S_{22}X_2^2(t_f) + t_f + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} Q[-U^2+1]H[1-U^2]dt \rightarrow min$$

Рівняння для вектору стану

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} U(t)$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Спряжені рівняння

$$\lambda' = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda(t)$$

$$\lambda(t_f) = \begin{bmatrix} S_{11} & X_1(t_f) \\ S_{22} & X_2(t_f) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 5\lambda_2 - QU(t)H(1-U^2)$$

Крім того, оскільки кінцевий момент часу невідомий, для його визначення маємо співвідношення $H + \frac{\partial G}{\partial t_f} = 0$.

У якості критерію зупинки ітераційного процесу використаємо

$$\frac{dt}{dt_f} = 0 = S_{11}x_1(t_f)x_1'(t_f) + S_{22}x_2(t_f)x_2'(t_f) + 1 + \frac{1}{2}Q(1-U^2)H(1-U^2)$$

2.Чисельний алгоритм рішення задачі.

Припустимо, що в якості початкового вибрали керування *U=1*. Розв'язуємо математичну модель у прямому часі доти, поки не $\frac{dI}{dt_f} = 0$.

Керування змінюється *U=1*. Знову розв'язуємо рівняння. Якщо система не потрапляє у початок координат розв'язуємо спряжену систему

$$\begin{cases} \lambda_1' = 0 & \lambda_1(t_f) = S_{11}X_1(t_f), \\ \lambda_2' = -\lambda_1 & \lambda_2(t_f) = S_{22}X_2(t_f). \end{cases}$$

У зворотньому часі від t_f до 0.

Знаходимо наступне значення керування за градієнтною процедурою $U^{N+1}(t) = U^N(t) - k\frac{\partial H}{\partial U^N}$, де k – крок градієнтної процедури.

Цей процес розрахунків продовжується доти, поки не буде забезпечений малий приріст керування, система не потрапить у заданий стан.

Приклад 5.4.

Динаміка нелінійної системи описується:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3^2 - \frac{1}{x_1^2} + 0.5\sin u \\ x_3' = -x_2x_3 + 0.5\cos u \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, x_3(0) = 1$$

Перевести систему в $x_1(t_f) = 1.5, x_2(t_f) = 0, x_3(t_f) = 1.8$ за мінімальний час, використавши градієнтну процедуру.

1.Записати функцію вартості з додаванням функції штрафів на кінцевий стан.

Записати необхідні умови оптимальності і спряжені рівняння, умови трансверсальності. Визначити час переходу .

2.Записати чисельний алгоритм розв'язку.

Відповідь

1.В якості функції вартості для даної задачі з додаванням функції штрафів на кінцевий стан можна вибрати наступну:

$$I = t_f + \frac{1}{2}S_{11}[x_1(t_f) - 1.5]^2 + \frac{1}{2}S_{22}x_2^2(t_f) + \frac{1}{2}S_{33}[x_3(t_f) - 1.8]^2 \quad (5.33)$$

Гамільтоніан

$$H = \lambda_1 x_2 + \lambda_2\left(x_3^2 - \frac{1}{x_1^2} + 0.5\sin u\right) + \lambda_3(-x_2 x_3 + 0.5\cos u) \quad (5.34)$$

Спряжені рівняння і умови трансверсальності

$$\begin{cases} \lambda_1' = -2\lambda_2\frac{1}{x_1^3}, \\ \lambda_2' = -\lambda_1 + \lambda_2 x_3, \\ \lambda_3' = -2\lambda_2 x_3 + \lambda_3 x_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1(t_f) = S_{11}[x_1(t_f) - 1.5], \\ \lambda_2(t_f) = S_{22}x_2(t_f), \\ \lambda_3(t_f) = S_{33}[x_3(t_f) - 1.8] \end{cases} \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}\lambda_2 0.5\cos u - \lambda_3 0.5\sin u \quad (5.36)$$

В якості критерію визначення часу переходу використали

$$\frac{\partial I}{\partial t_f} = 0 = 1 + S_{11}[x_1(t_f) - 1.5]x_1'(t_f) + S_{22}x_2(t_f)x_2'(t_f) + S_{33}[x_3(t_f) - $$
$$-1.8]x_3'(t_f) \quad (5.37)$$

2. Чисельний алгоритм розв’язку.

Розв’язок починаємо з введення припущення, що початкове керування $u_0(t) = 0$. Для цього керування визначаємо початкову траєкторію $x_0(t)$ і обчислюємо похідну функції вартості $\frac{\partial I}{\partial t_f}$. Момент проходження цієї похідної через нуль приймається в якості кінцевого моменту на першій ітерації. З цим отриманим t_f і знайденим $x_0(t)$ розв’яжемо спряжені рівняння (5.35) у зворотному часі від t_f до 0.

Обчислюємо похідну $\frac{\partial H}{\partial u}$ і визначаємо критерій керування $\Delta u(t) = -k\frac{\partial H}{\partial u}$. Закон керування для наступного кроку знаходиться $u^{N+1}(t) = u^N(t) + \Delta u^N(t)$.. Цей процес обчислень повторюється до тих пір, поки не буде забезпечена збіжність до оптимального рішення.

6. Оптимальне керування системами з розподіленими параметрами

Як модель об'єкта управління візьмемо рівняння з частинними похідними:

$$A\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}\right)=f\left[\mathbf{X},\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z},\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial z^2},\mathbf{U}\right],\begin{cases}0\le t\le t_f\\ 0\le z\le L\end{cases} \tag{6.1}$$

де $\mathbf{X}$(z, t) - розподілений стан, n-мірний вектор,

$\mathbf{U}$(z, t) - розподілене управління, m-мірний вектор,

A - матриця розмірністю (nxn).

Обмежимося для простоти випадком двох незалежних змінних, $0\le t\le t_f, 0\le z\le L,$ поскільки перехід до більш високих розмірностей не зв’язаний з якими-небуть принциповими ускладненнями .

Рівнянням типу (6.1) можна описати цілий ряд реальних технологічних процесів, наприклад процес сушки пористих матеріалів, процеси в хімічних реакторах, процес нагріву.

Крайові умови визначаються конкретним фізичним змістом задач, що вирішуються;

початкові умови, як правило, задаються у вигляді фіксованого початкового стану (розподілу).

$$X(z,0)=W(z) \tag{6.2}$$

яке може бути іноді використане як керуючий вплив. (Так в задачі нагріву, початковим розподілом температури можна управляти шляхом попереднього нагріву).

Граничні умови можуть мати різну структуру. Будемо розглядати три типи граничних умов, що застосовуються в задачах оптимального управління:

Тип 1. Деякі змінні стану x_s задовільняють умовам :

$$\left.\left(\frac{\partial x_S}{\partial z}\right)\right|_{Z=0} = g_S(\mathbf{X}, \mathbf{V}(t)), \tag{6.3а}$$

$$\left.\left(\frac{\partial x_S}{\partial z}\right)\right|_{z=L} = h_S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t)). \tag{6.3б}$$

У такій формі часто задається конвективний або променистий потік тепла на кордонах системи.

Тип 2. Другі змінні стану x_f задовільняють умовам:

$$\chi_r(0,t) = const, \tag{6.3в}$$

$$\chi_r(L,t) = const. \tag{6.3г}$$

Тип 3. Нарешті , треті змінні стану χ_p , задовільняють умовам :

$$x_p(0,t) = V_p(t) \tag{6.4а}$$

$$x_p(L,t) = Y_p(t) \tag{6.4б}$$

де **V**(t), **Y**(t) - відповідно керуючі впливи, прикладені відповідно z=0, z=L.

Координати вектора стану, підлеглі граничним умовам

типу 1 означаємо індексом s

типу 2 означаємо індексом r

типу 3 означаємо індексом р.

Задача оптимального управління для прогресу, що задається рівнянням (6.1) і крайовими умовами (6.2)-(6.4) може бути сформульована як задача мінімізації (максимізації) функціонала якості I вибором управлінь **U**(z, t), **V**(t), **Y**(t), **W**(z), де

$$I[\mathbf{U}(z,t),\mathbf{V}(t),\mathbf{Y}(t),\mathbf{W}(z)]=\int_0^L G_1\left[\mathbf{X}(t_f,z),\mathbf{W}(z)\right]dz+$$
$$+\int_0^{tf} G_2\left[\mathbf{X}(L,t),\mathbf{X}(0,t),\mathbf{Y},\mathbf{V}\right]dt+\int_0^L\int_0^{tf} G\left[\mathbf{X},\mathbf{U},\left(\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial z}\right),\left(\frac{\partial^2\mathbf{X}}{\partial z^2}\right)\right]dtdz \tag{6.5}$$

<u>Необхідні умови оптимальності</u>

Також як і в випадку звичайних диф. рівнянь , припустимо, що нам відома сукупність підозрілих на оптимальність управлінь $\mathbf{U}(z,t),\mathbf{V}(t),\mathbf{Y}(t),\mathbf{W}(t)$. Розкладаючи (6.1) в степеневий ряд в околі оптимальної траєкторії і откидуючи члени розкладу выще першого порядку малості отримаємо рівняння в варіаціях :

$$A_{ij}\frac{\partial(\delta x_j)}{\partial t}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\delta x_j+\left(\frac{\partial f_i}{\partial U_k}\right)\delta U_k+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x'_j}\right)\delta x'_j+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x''_j}\right)\delta x''_j \tag{6.6}$$

де $x'_j=\frac{\partial x_j}{\partial z},x''_j=\frac{\partial^2 x_j}{\partial z^2}$, а наявність двічі повтореного індексу в якому-небуть доданку означає додавання по цьому індексу.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\delta x_k\equiv\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\delta x_k=\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\delta x_2+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\delta x_n.$$

Відповідно до цих позначень рівняння (6) можна записати у вигляді:

$$A_{ij}\frac{\partial(\partial x_j)}{\partial t}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)\delta x_k+\left(\frac{\partial f}{\partial U_k}\right)\delta U_k+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j^{/}}\right)\left[\frac{\partial(\delta x_j)}{\partial z}\right]+\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j^{//}}\right]\frac{\partial^2(\delta x_j)}{\partial z^2} \qquad (6.7)$$

Аналогічно для варіації критерію оптимальності отримаємо:

$$\delta I=\int_0^L\left\{\left[\frac{\partial G_1}{\partial x_k(z,t_f)}\right]\delta x_k(z,t_f)+\left[\frac{\partial G_1}{\partial w_j(z)}\right]\delta w_j(z)\right\}dz+$$

$$+\int_0^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial x_k(L,t)}\right]\delta x_k(L,t)+\left[\frac{\partial G_2}{\partial x_k(0,t)}\right]\delta x_k(0,t)+\left(\frac{\partial G_2}{\partial y_j(t)}\right)\delta y_j(t)+\left[\frac{\partial G_2}{\partial V_j(t)}\right]\delta V_j(t)\right\}dt+$$

$$+\int_0^{t_f}\int_0^L\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial x_k}\right)\delta x_k+\left(\frac{\partial G}{\partial U_i}\right)\partial U_i+\left[\frac{\partial G}{\partial(x_j^{/})}\right]\frac{\partial(\delta x_j)}{\partial z}+\left[\frac{\partial G}{\partial x_j^{//}}\right]\frac{\partial^2(\delta x_j)}{\partial z^2}\right\}dzdt \qquad (6.8)$$

Введемо розподілені зв'язані змінні або множники Лагранжа за допомогою виразу:

$$\int_0^{t_f}\int_0^L(\lambda_i(z,t))\left\{A_{ij}\frac{\partial(\delta x_j)}{dt}-\left(\frac{\delta f_i}{\partial x_k}\right)\delta x_k-\left(\frac{\partial f_i}{\partial U_k}\right)\delta U_k-\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j^{/}}\right]*\right.$$

$$\left.\frac{\partial(\delta x_j)}{\partial z}-\left[\frac{\partial f_i}{\partial(x_j^{//})}\right]\frac{\partial^2(\delta x_j)}{\partial z^2}\right\}dzdt=0 \qquad (6.9)$$

Враховуючи (6.9) із (6.8) отримаємо для δI

$$\delta I=\int_0^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial x_k(L,t)}\right]\delta x_k(L,t)+\left[\frac{\partial G_2}{\partial x_k(0,t)}\right]\delta x_k(0,t)+\right.$$

$$+\left[\frac{\partial G_2}{\partial y_j(t)}\right]\delta y_j(t)+\left[\frac{\partial G_2}{\partial V_j(t)}\right]\delta V_j(t)\Bigg\}dt+\int_0^L\left\{\left[\frac{\partial G_1}{\partial x_k(z,t_f)}\right]\delta x_k(z,t_f)+\right.$$

$$+\left[\frac{\partial G_1}{\partial w_j(z)}\right]\delta\omega_j(z)\Bigg\}dz+\int_0^{t_f}\int_0^L\left(\frac{\partial H}{\partial x_k}\right)\delta x_k+\left(\frac{\partial H}{\partial U_i}\right)\delta U_i+\left[\frac{\partial H}{\partial\left(x_j^{/}\right)}\right]\frac{\partial(\delta x_j)}{\partial z}+$$

$$+\left[\frac{\partial H}{\partial\left(x_j^{//}\right)}\right]\frac{\partial^2(\delta x_j)}{\partial z^2}-\lambda_i\left[A_{ij}\frac{\partial(\delta x_j)}{dt}\right]\Bigg\}dzdt \qquad (6.10)$$

де гамільтоніан H визначається по формулі:

$$H=G+\lambda_i f_i \qquad (6.11)$$

Проінтегруємо за частинами три останніх доданки в третьому підінтегральному виразі (6.10):

$$\int_0^{t_f}\int_0^L\left[\frac{\partial H}{\partial x_j^{/}}\;\frac{\partial(\delta x_j)}{\partial z}\right]dzdt=\int_0^{t_f}\left\{\frac{\partial H}{\partial x_j^{/}}\delta x_j\Bigg|_0^L-\int_0^L\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j^{/}}\right)\delta x_j dz\right\}dt \qquad (6.12)$$

$$\int_0^{t_f}\int_0^L\left[\frac{\partial H}{\partial(x_j^{//})}\cdot\frac{\partial^2(\delta x_j)}{\partial z^2}\right]dzdt=\int_0^{t_f}\left\{\frac{\partial H}{\partial\left(x_j^{//}\right)}\frac{\partial(\delta x_j)}{\partial z}\Bigg|_0^L-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j^{//}}\right)\delta x_j\Bigg|_0^L+\int_0^L\frac{\partial^2\left(\partial H/\partial x_j^{//}\right)}{\partial z^2}\{\delta x dz\}\right\}dt$$

(6.13)

$$\int_0^{t_f}\int_0^L\lambda_i\left[A_{ij}\frac{\partial(\delta x_j)}{\partial t}\right]dtdz=\int_0^L\left\{\lambda_i A_{ij}\delta x_j\Big|_0^{t_f}-\int_0^{t_f}\frac{\partial(\lambda_i A_{ij})}{\partial t}\delta x_j dt\right\}dz \qquad (6.14)$$

Підставляючи (6.12) - (6.14) в (6.10), отримаємо

$$\partial I=\int_0^{t_f}\int_0^{L}\left(\left\{\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial\left(\partial H/\partial x_k\right)}{\partial z}+\frac{\partial^2\left(\partial H/\partial x'_k\right)}{\partial z^2}+\frac{\partial(\lambda_i A_{ik})}{\partial t}\right]\delta x_k\right\}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial H}{\partial U_i}\right)\delta U_i\right)dzdt+\int_0^{t_f}\left(\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial x_K(L,t)}\right]+\left(\frac{\partial H}{\partial x'_K}\right)-\frac{\partial\left(\partial H/\partial x''_K\right)}{\partial z}\right\}\delta x_K(L,t)+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial G_2}{\partial y_j}\right)\delta.y_j(t)+\left[\frac{\partial G_2}{\partial V_j(t)}\right]\delta V_j(t)+\left[\frac{\partial H}{\partial\left(x''_j\right)}\right]\left[\frac{\partial\left(\partial x_j\right)}{\partial Z}\right]\Bigg|_0^L+$$

$$\left.+\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial x_j(0,t)}\right]-\left(\frac{\partial H}{\partial x''_j}\right)+\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial H}{\partial x''_j}\right)\right\}\delta x_j(0,t)\right)dt+$$

$$+\int_0^{L}\left(\left\{\left[\frac{\partial G_1}{\partial x_k\left(t_f,z\right)}\right]-\lambda_i A_{ik}\right\}\delta x_k\left(z,t_f\right)+\left\{\left[\frac{\partial G_1}{\partial\omega_k(z)}\right]+\lambda_i A_{ik}\right\}\delta\omega_k(z)\right)dz \qquad (6.15)$$

Із (6.15) зрозуміло, що явна залежність δI від $\delta.\mathbf{X}(z,t)$ зникає, якщо $\lambda_i(z,t)$ задовільняє умові:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_i A_{ik}\right)=-\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial\left(\partial H/\partial x'_k\right)}{\partial z}+\frac{\partial^2\left(\partial H/\partial x''_k\right)}{\partial z^2}\right]\ ,\ \text{k=1,2,...,п.} \qquad (6.16)$$

так як при цьому дорівнює нулю вираз в квадратних дужках в першому інтегральному доданку.

Розглянемо всі три можливих типи граничних умов (6.2)-(6.4)

Тип 1. Для варіації граничних умов (6.3а), (6.4а) отримаємо вирази:

$$\frac{\partial\left(\delta x_i(0\ ,\ t)\right)}{\partial z}=\left\{\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j(0\ ,\ t)}\right]\delta x_j(0\ ,\ t)+\left[\frac{\partial g_i}{\partial V_j(t)}\right]\delta V_j(t)\right\} \tag{6.17}$$

$$\frac{\partial\left(\delta x_i(L,t)\right)}{\partial z}=\left\{\left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j(L,t)}\right]\delta x_j(L,t)+\left[\frac{\partial h_i}{\partial y_j(t)}\right]\delta y_j(t)\right\} \tag{6.18}$$

Тип 2. Для варіації граничних умов (6.3б), (6.4б) отримаємо, що $\left[\partial(\delta x_i)/\partial z\right]\Big|_0^L$ довільне, а $\delta x_i(0,t)=\delta x_i(L,t)$.

Тип 3. Для варіації граничних умов (6.3а), (6.4в) отримаємо, що

$$\delta x_i(0,t)=\delta V_i(t)\ ,\ \delta x_i(L,t)=\delta y_i(t)\ ,\left[\partial(\delta x_i)/\partial z\right]\Big|_0^L \tag{ 6.19}$$

довільне. Якщо тепер координати вектора стану, які підчиняються граничним умовам типу 1 позначити індексами S, типу 2 - індексом r, типу 3 - індексом p, то вираз для δI (6.15) матиме вигляд :

$$\delta I=\int_0^{t_f}\int_0^L\left(\frac{\partial H}{\partial U_i}\right)\delta U_i dzdt+\int_0^L\left(\left\{\left[\frac{\partial G_1}{\partial x_k(z,t_f)}\right]-\lambda_i A_{ik}\right\}\delta x_k(z,t_f)+\right.$$

$$\left.+\left\{\left[\frac{\partial G_1}{\partial\omega_k(z)}\right]+\lambda_i A_{ik}\right\}\delta\omega k(z)\right)dz+\int_0^{t_f}\left(\left(\left(\frac{\partial H_2}{\partial V_s}\right)\delta V_s(t)+\left(\frac{\partial H_3}{\partial y_s}\right)\delta y_s+\right.\right.$$

$$+\left\{\left[\frac{\partial H_2}{\partial x_S(0,t)}\right]-\left[\frac{\partial H(0,t)}{\partial x'_S}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial x''_S}\right)\right\}\delta x_S(0,t)+$$

$$\left.+\left\{\left[\frac{\partial H_3}{\partial x_S(L,t)}\right]-\left[\frac{\partial H(L,t)}{\partial x'_S}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial x''_S}\right)\right\}\delta x_S(L,t)\right)dt+$$

$$+\int_0^{t_f}\left(\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial x_r(0,t)}\right]-\left(\frac{\partial H}{\partial x'_r}\right)+\frac{\partial H}{\partial x''_r}\right\}\delta x_r(0,t)+\right.$$

$$+\left\{\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial x_r(L,t)}\right]+\left(\frac{\partial H}{\partial x'_r}\right)-\frac{\partial\left(\partial H/\partial x''_r\right)}{\partial z}\right\}\delta x_r(L,t)+\left(\frac{\partial H}{\partial x''_r}\right)\frac{\partial(\delta x_r)}{\partial z}\Bigg|_0^L\right\}dt+$$

$$+\int_0^{t_f}\left(\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial V_p}\right]-\left(\frac{\partial H}{\partial x'_p}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial x''_p}\right)\right\}\delta V_p(t)+\right.$$

$$+\left\{\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial y_p}\right]+\left(\frac{\partial H}{\partial X''_p}\right)-\frac{\partial\left(\partial H/\partial x''_p\right)}{\partial Z}\right\}\delta y_p(t)+\left(\frac{\partial H}{\partial x''_p}\right)\frac{\partial(\delta x_p)}{\partial Z}\Bigg|_0^L\right\}dt \qquad (6.20)$$

де через $H_1,\ H_2,\ H_3$ позначені допоміжні гамільтони:

$$H_1 \equiv G_1 + \lambda_i A_{ik}\omega_k, \qquad (6.21)$$

$$H_2 \equiv G_2 + \left(\partial H/\partial x''_i\right)(0,t)g_i, \qquad (6.22)$$

$$H_3 \equiv G_2 + \left(\partial H/\partial x''_i\right)(L,t)h_i \qquad (6.23)$$

Із виразу (6.20) видно, що позбавитися від впливу довільних варіацій $\delta x_S(0,t)$, $\delta x_S(L,t), \left[\partial(\delta x_r)/\partial z\right]\Big|_0^L, \left[\partial(\delta x_p)/\partial z\right]\Big|_0^L, \left[\partial(\delta x_p)/\partial z\right]\Big|_0^L$ на варіацію критерія оптимальності можна, якщо ввести для спряжених змінних слідуючі граничні умови:

Тип 1:

$$\left\{\frac{\partial H_2}{\partial x_S(0,t)}-\frac{\partial H(0,t)}{\partial x'_S}+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial H(0,t)}{\partial x''_S}\right]\right\}=0 \qquad (6.24)$$

$$\left\{\frac{\partial H_3}{\partial x_S(L,t)}+\frac{\partial H(L,t)}{\partial x'_S}-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial H(L,t)}{\partial x''_S}\right]\right\}=0 \qquad (6.25)$$

Типи 2 і 3:

$$\left.{\partial H}\Big/{\partial x''_r}\right|_0^L = \left.{\partial H}\Big/{\partial x''_p}\right|_0^L = 0 \tag{6.26}$$

Якщо при цьому кінцевий стан $X\left(Z, t_f\right)$ є вільним, то необхідно додати граничні умови на λ в кінцевий момент часу

$$\lambda_i\left(z, t_f\right) A_{ik} = \frac{\partial G_1}{\partial x_k\left(z, t_f\right)}\ , \quad \text{k=1,2,...,п.} \tag{6.27}$$

Замітимо, що якщо порядок початкових рівнянь процесу в частинних похідних відносно деяких координат стану $x_q(z,t)$ меньше двох, то ${\partial H}\Big/{\partial x''_q} \equiv 0$ і граничні умови типу 2 або 3 можливі тільки з одної із сторін.Якщо наприклад, $x_q(L,t)$ є невизначеним, то коефіцієнт при $\delta. X_q(L,t)$ в (6.20) повинен дорівнювати нулю. Гранична умова на $\lambda_q(L,t)$ прийме вигляд:

$$\left[{\partial G_2}\Big/{\partial x_q}(L,t)\right] + \left({\partial H}\Big/{\partial x'_q}\right) = 0 \tag{6.28}$$

Кінцевий вираз для δI має вигляд:

$$\delta I = \int_0^{t_f}\int_0^L \left(\frac{\partial H}{\partial U_i}\right)\delta U_i dZ dt + \int_0^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial H_2}{\partial V_s(t)}\right]\delta V_s(t) + \left[\frac{\partial H_3}{\partial y_s(t)}\right]\delta y_s(t)\right\}dt +$$

$$+\int_0^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial V_p} - \frac{\partial H}{\partial x'_p} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial x''_p}\right)\right]\delta V_p(t) +\right.$$

$$\left. + \left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial y_p} - \frac{\partial H}{\partial x'_p} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial x''_p}\right)\right]\right\}\delta y_p(t)\right\}dt + \tag{6.29}$$

$$+\int_0^L\left\{\left[\frac{\partial H_1}{\partial \omega_i(Z)}\right]\delta\omega_i(Z)\right\}dZ$$

Тепер вплив варіацій $\delta\mathbf{U}, \delta\mathbf{Y}, \delta\mathbf{V}, \delta\mathbf{W}$на варіацію δI явно виражений.

Поскільки припускалось, що варіації $\delta\mathbf{U}_i, \delta\mathbf{Y}_k, \delta\mathbf{V}_j, \delta\mathbf{W}_e$ довільні необхідним умовам невід'ємності δI і оптимальності U, V, Y, W є рівність нулю коефіцієнтів при цих варіаціях. Отриманий результат можна сформулювати у вигляді:

$$\begin{gathered} U_{i\min} \le U_i \le U_{i\max}, U_{j\min} \le U_j \le U_{j\max}, \\ y_{k\min} \le y_k \le y_{k\max}, y_{l\min} \le y_l \le y_{l\max}. \end{gathered} \tag{6.30}$$

Для того щоб упр-я U, V, Y, W були оптимальними для задачі (6.1) - (6.5) з урахуванням обмежень необхідно щоб виконувалася рівність

$$\frac{\partial H}{\partial U_i} = 0 \tag{6.31}$$

при управлінні всередині області обмежень (6.30) або щоб досягався максимум H на границях області обмежень (6.30)

Відмітимо, що в тому випадку, коли $\mathbf{U}_i(z,t)$ залежить тільки від z, необхідні умови оптимальності мають вигляд

$$\int_0^{t_f} \left(\frac{\partial H}{\partial U_i} \right) dt = 0 \tag{6.32}$$

без обмежень на управління і $\int_0^{t_f} H dt \to \max,$ якщо такі є.

Аналогічно, якщо $\overline{U}$ залежить тільки від t

$$\int_0^{L} \left(\frac{\partial H}{\partial U_i} \right) dz = 0 \tag{6.33}$$

без обмежень на управління і $\int_0^{L} H dz \to \max,$ якщо такі є.

Далі, необхідно, щоб для всіх функцій, на які не накладаються обмеження, $\omega_e(Z), V_S(t), V_P(p), y_S(t), y_P(t)$ виконувались слідуючі умови:

$$\left(\frac{\partial H_1}{\partial \omega_l}\right) = 0 \tag{6.34}$$

$$\left(\frac{\partial H_2}{\partial Vs}\right) = 0 \tag{6.35}$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial V_P} - \frac{\partial H(0,t)}{\partial x'_P} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial H(0,t)}{\partial x''_P}\right] = 0 \tag{6.36}$$

$$\left(\frac{\partial H_3}{\partial y_S}\right) = 0 \tag{6.37}$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial y_P} + \frac{\partial H(L,t)}{\partial x'_P} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\partial H(L,t) \middle/ \partial x''_P\right) = 0 \tag{6.38}$$

а якщо обмеження є, то відповідні величини в лівих частинах рівності (6.34) - (6.38) повинні бути непозитивними у разі досягнення управліннями верхніх границь. Якщо деякі із функцій $\omega_e, V_S, V_P, y_S, y_P$ є просто константами і не зв'язані обмеженнями, необхідні умови перетворюються в вирази:

$$\int_0^L \left(\frac{\partial H_1}{\partial \omega_e}\right) dz = 0 \tag{6.39}$$

$$\int_0^{t_f} \left(\frac{\partial H_2}{\partial V_S}\right) dt = 0 \tag{6.40}$$

$$\int_0^{t_f} \left(\frac{\partial G_2}{\partial V_P} - \frac{\partial H(0,t)}{\partial x'_P} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial H(0,t)}{\partial x''_P}\right\}\right) dt = 0 \tag{6.41}$$

$$\int_0^{t_f} \left(\frac{\partial H_3}{\partial y_S}\right) dt = 0 \tag{6.42}$$

$$\int_0^{t_f}\left(\frac{\partial G_2}{\partial y_p}-\frac{\partial H(L,t)}{\partial x'_p}+\frac{\partial\left[\partial H(L,t)\Big/\partial x''_p\right]}{\partial z}\right)dt=0 \tag{6.43}$$

Гамільтогмани H_1, H_2, H_3 знаходятся за допомогою рівнянь (6.11) і (6.21) - (6.23)

Застосування градієнтного пошуку.

Ідея методу заключається в тому, що, якщо управління $\mathbf{U},\mathbf{V},\mathbf{Y},\mathbf{W}$ не є оптимальними, рух і напрямок градієнта, який визначається виразами:

$$\delta U_i(z,t)=\varepsilon_0\left(\frac{\partial H}{\partial U_i}\right) \tag{6.44}$$

$$\delta\omega_l(z)=\varepsilon_1\left(\frac{\partial H}{\partial\omega l}\right) \tag{6.45}$$

$$\delta V_S(t)=\varepsilon_2\left(\frac{\partial H_2}{\partial V_S}\right) \tag{6.46}$$

$$\delta V_p(t)=\varepsilon_3\left(\frac{\partial G_2}{\partial V_p}-\frac{\partial H}{\partial x'_p}+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial H}{\partial x''_p}\right]\right) \tag{6.47}$$

$$\delta y_S(t)=\varepsilon_4\left(\frac{\partial H_3}{\partial y_S}\right) \tag{6.48}$$

$$\delta y_p(t)=\varepsilon_3\left(\frac{\partial G_2}{\partial y_p}+\frac{\partial H}{\partial x'_p}-\frac{\partial\left(\partial H\Big/\partial x''_p\right)}{\partial z}\right) \tag{6.49}$$

забезпечить найбільше локальне покращення δI при достатньо малих $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$..

Алгоритм градієнтного пошуку полягає в наступному:

1) задати початкове значення управлінь

$U_i(Z,t),\ V_j(t),\ y_k(t),\ \omega_e(t),\ 0 \le z \le L,\ 0 \le t \le t_f;$

2) розв'язати рівняння динаміки (6.1) спільно з крайовими умовами (6.2)-(6.4), розрахувати значення критерію I по (6.5);

3) розв'язати рівняння для спряжених змінних (6.16) в зворотньому часі спільно з граничними умовами (6.24)-(6.28);

4) провести локальне покращення управлінь $U_i(Z,t), V_j(t), y_k(t), \omega_e(t)$ відповідно з (6.44)-(6.49), максимізуючи I вибором ε_i (це можна зробити або яким-небудь методом багатомірного пошуку, або одномірним пошуком по ε_0 при умові, що $\varepsilon_i = a_i \varepsilon_0$, i-1,2,...,5, a_i - масштабні коефіцієнти);

5) якщо умови не виконані, повернутися до кроку 2.

Такий алгоритм володіє хорошою збіжністю на початкових ітераціях, однак при підході до оптимуму збіжність значно сповільнюється, тому стараються використати методи пошуку другого порядку і спряжені градієнти.

Приклад 6.1.

Розподіл температури розчину в трубопроводі з тонкими стінками

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + W\frac{\partial \theta}{\partial x} + \theta = \theta_г, \qquad \theta(0,t) = \theta_{вх}$$

де $\theta, \theta_г$ – відповідно температура розчину, температура газу ззовні;
W – швидкість подачі розчину.

1. Для вибраного технологічного процесу сформулювати задачі оптимального керування. Обґрунтувати вибір критерію оптимальності, за формою інтегрального квадратичного.

2. Записати необхідні умови оптимальності. Отримати спряжені рівняння і умови трансверсальності.

3. Записати алгоритм градієнтного пошуку оптимального розв’язку використовуючи градієнтну процедуру.

Відповідь.

1. Керування температурою продукту, що рухається у трубопроводі з тонкими стінками. Ззовні підводиться газ, від якого передається тепло продукту за рахунок теплопередачі через стінку. Розподіл температури продукту в трубопроводі з тонкими стінками

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + W\frac{\partial\theta}{\partial x} + \theta = \theta_{\text{г}},\ \ \theta(0,t) = \theta_{\text{вх}}$$

Необхідно визначити стратегію керування $\theta_{\text{г}}(t)$, яка б мінімалізувала функціонал:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}[\theta(L,t) - \theta_{\text{зд}}]^2 dt\ \ \to min, \tag{6.50}$$

де $\theta_{\text{зд}}$ - задана температура продукту на виході трубопроводу.

Якщо необхідно забезпечити заданий температурний профіль, то функціонал має вигляд

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}[\theta\left(x,t_f\right) - \theta_{\text{зд}}]^2 dt\ \ \to min \tag{6.51}$$

2. Розглянемо перший варіант постановки задачі керування.

Рівняння у канонічній формі:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -W\frac{\partial\theta}{\partial x} - \theta + \theta_{\text{г}}, \tag{6.52}$$

Гамільтоніан визначається

$$H = \lambda(x,t)\left(-W\frac{\partial\theta}{\partial x} - \theta + \theta_{\text{г}}\right)$$

Для отримання спряженої функції $\lambda(x,t)$використаємо рівняння.

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = -\left[\frac{\partial H}{\partial\theta} - \frac{\partial\left({}^{\partial H}/{}_{\partial\theta^{`}}\right)}{\partial x} + \frac{\partial^2\left({}^{\partial H}/{}_{\partial\theta^{``}}\right)}{\partial x^2}\right], \tag{6.53}$$

де $\theta^{`}, \theta^{``}$ - відповідно перша похідна та друга похідна температури по координаті x

Отримаємо

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = -W\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \lambda \tag{6.54}$$

Для отримання кінцевих умов використали $\lambda(x, t_f) = \frac{\partial G_1}{\partial X(x,t_f)}$,

де G_1 - складова критерію, що задає умови процесу в кінцевий момент часу.

Оскільки в критерії (6.50) ці умови не задані

$$\lambda(x, t_f) = 0 \tag{6.55}$$

Для визначення граничних умов використаємо

$$\frac{\partial G_2}{\partial\theta(L,t)} + \frac{\partial H}{\partial\theta^{`}(L,t)} - \frac{\partial\left(\partial H / \partial\theta^{``}(L,t)\right)}{\partial x} = 0,$$

де G_2 - складова критерію, що задає умови процесу на виході з трубопровода

$$\lambda(L, t) = \frac{1}{W}\left[\theta(L, t) - \theta_{\text{зд}}\right] \tag{6.56}$$

Необхідна умова оптимальності по керуванню

$$\frac{\partial H}{\partial\theta_{\text{г}}} = \lambda(x, t) \tag{6.57}$$

Функція керування визначається так

$$\theta_{\text{г}}(t)_{\text{нов}} = \theta_{\text{г}}(t)_{\text{стар}} - \varepsilon\int_0^L \lambda(x, t)dx, \tag{6.58}$$

де ε - крок градієнтної процедури.

3. Алгоритм реалізації градієнтного пошуку полягає в наступному:

1) Задати початкове значення керування $\theta_{\text{г}}(t)$;
2) Розв'язати рівняння динаміки (6.52) спільно з крайовими умовами;
3) Розв'язати спряжене рівняння (6.54) у зворотному часі спільно з граничними (6.56) і кінцевими (6.55) умовами;
4) Провести локальне покращення керування $\theta_{\text{г}}(t)$;
5) Якщо умови зупинки не виконані – повернутися до кроку 2.

Для чисельного розрахунку рівняння (6.52) у прямому часі і спряженого (6.54) у зворотному часі і керування (6.58), представили їх у дискретній формі.

$$\frac{\theta_{v+1,s}-\theta_{v,s}}{\tau} = -W\,\frac{\theta_{v,s}-\theta_{v,s-1}}{\mathrm{h}} - \theta_{s,v} + \theta_{\text{г}v}$$

$$\theta_{v+1,s} = \theta_{v,s} + \tau\left(-W\,\frac{\theta_{v,s}-\theta_{v,s-1}}{\mathrm{h}} - \theta_{s,v} + \theta_{\text{г}v}\right) \qquad (6.59)$$

$$\frac{\lambda_{v,s}-\lambda_{v-1,s}}{\tau} = -W\,\frac{\lambda_{v,s+1}-\lambda_{v,s}}{h} - \theta_{s,v} + \theta_{\text{г}v}$$

$$\lambda_{v-1,s} = \lambda_{v,s} - \tau\left(-W\,\frac{\lambda_{v,s+1}-\lambda_{v,s}}{h} - \theta_{s,v} + \theta_{\text{г}v}\right), \qquad (6.60)$$

де τ, h - відповідно, крок по часу, по координаті

$$\theta_{\text{г}\,v\,\text{нов}} = \theta_{\text{г}\,v\,\text{стар}} - \varepsilon \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{1}\frac{\lambda_{v,s+1}-\lambda_{v,s}}{h} * h \qquad (6.61)$$

Приклад 6.2.

Рівняння теплопровідності для плоскої стінки

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

де a – коефіцієнт температуропровідності;

Граничні умови III роду (конвективний теплообмін)

$$-\lambda_{\text{т}}\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{x}}\Big|_{\mathrm{x}=0} = \alpha_2(\theta_{г} - \theta|_{\mathrm{x}=0})$$

$$-\lambda_{\text{т}}\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{x}}\Big|_{\mathrm{x}=\delta} = \alpha_3(\theta|_{\mathrm{x}=\delta} - \theta_{н.с})$$

де $\lambda_{\text{т}}$ - коефіцієнт теплопровідності

1.Для вибраного технологічного процесу сформулювати задачу оптимального керування. Обґрунтувати вибір критерію оптимальності.

2.Записати необхідні умови оптимальності. Отримати спряжені рівняння і умови трансверсальності.

3.Записати алгоритм градієнтного пошуку оптимального розв’язку використовуючи градієнтну процедуру.

Відповідь.

1. Необхідно обігріти внутрішню поверхню плоскої стінки за допомогою подачі газу. Через стінку тепло передається за допомогою теплопровідності.

Передача тепла від газу до стінки і від стінки до навколишнього середовища відбувається за рахунок конвективного теплообміну.

Для забезпечення заданої температури стінки на внутрішній поверхні необхідно мінімізувати функціонал:

$$I = {}^{1}\!/_{2}\int_0^{t_f}[\theta(0,t)-\theta_{зд}]^2 dt \ \rightarrow min, \tag{6.62}$$

Граничні умови представимо

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\alpha_2}{\lambda_т}(\theta|_{x=0}-\theta_г) = g_1$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=\delta} = \frac{\alpha_3}{\lambda_т}(\theta_{н.с}-\theta|_{x=\delta}) = h_1 \tag{6.63}$$

Гамільтоніан визначається

$$H = \lambda(x,t)a\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right) \tag{6.64}$$

2. Для отримання спряженої функції $\lambda(x,t)$використаємо рівняння.

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = -\left[\frac{\partial H}{\partial\theta} - \frac{\partial\left({}^{\partial H}\!/_{\partial\theta^{`}}\right)}{\partial x} + \frac{\partial^2\left({}^{\partial H}\!/_{\partial\theta^{``}}\right)}{\partial x^2}\right],$$

де $\theta^{`}, \theta^{``}$ - відповідно перша похідна та друга похідна температури по координаті x

Отримаємо

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = -a\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} \tag{6.65}$$

Для отримання граничних умов введемо допоміжні гамільтоніани

$$H_2 = G_2 + \left(\frac{\partial H}{\partial\theta^{``}(0,t)}\right)g_1,$$

$$H_3 = G_2 + \left(\frac{\partial H}{\partial\theta^{``}(\delta,t)}\right)h_1,$$

де G_2 - складова критерію, що задає граничні умови процесу.

Для спряженої функції введемо граничні умови

$$\frac{\partial H_2}{\partial\theta(0,t)} - \frac{\partial H(0,t)}{\partial\theta^{`}} + \frac{\partial\left({}^{\partial H}\!/_{\partial\theta^{``}}\right)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial\theta(\delta,t)} + \frac{\partial H(\delta,t)}{\partial\theta^{`}} - \frac{\partial\left({}^{\partial H(\delta,t)}\!/_{\partial\theta^{``}}\right)}{\partial x} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{\alpha_2}{\lambda_т}\lambda(0,t) - \frac{1}{a}[\theta(0,t) - \theta_{зд.}]$$

$$\left.\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right|_{x=\delta} = -\frac{\alpha_3}{\lambda_т}\lambda(\delta,t) \qquad (6.66)$$

Градієнт керування

$$\frac{\partial H_2}{\partial \theta_г} = -\frac{\alpha_2}{\lambda_т} a\,\lambda(0,t)$$

Функція керування визначається так

$$\theta_г(t)_{нов} = \theta_г(t)_{стар} - k\frac{\alpha_2}{\lambda_т} a\,\lambda(0,t)$$

де k - крок градієнтної процедури.

3. Алгоритм реалізації градієнтного пошуку полягає в наступному:

1) Задати початкове значення керування $\theta_г(t)$;

2) Розв’язати рівняння динаміки спільно з крайовими умовами ;

3) Розв’язати спряжене рівняння (6.65) у зворотному часі спільно з граничними умовами (6.66);

4) Провести локальне покращення керування $\theta_г(t)$;

5) Якщо умови зупинки не виконані – повернутися до кроку 2.

7. Рівняння Гамільтона-Якобі та неперервне динамічне програмування

Повернемося до задачі мінімізації функціонала

$$I = G\left[X(t),t\right]\Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} F\left[X(t),U(t),t\right]dt,$$

з точки зору теорії динамічного програмування причому G та F мають неперервні частинні похідні по X та U при обмеженні в формі рівності

$$X'(t) = f\left[X(t),U(t),t\right] \quad , \qquad (7.1)$$

де m - мірний вектор U представляє керуючу функцію, яку слід вибрати, а n - мірний вектор X представляє результуючу траекторію та обмеження на керування

$$U(t) \in \Omega, \quad t \in \left[t_0, t_f\right] \quad , \tag{7.2}$$

де Ω - задана множина R^m.

Обмеження (7.2) може мати вигляд $|\mathbf{U}| \leq M$.Визначимо

$$V\left[\mathbf{X}(t), t\right] = \min_{U_t} \left\{ G\left[\mathbf{X}(t_f), t_f\right] + \int_t^{t_f} F\left[\mathbf{X}(s), \mathbf{U}(s), s\right] ds \right\}, \tag{7.3}$$

де $\mathbf{U}_t = \left\{\mathbf{U}(s), t \leq s \leq t_f\right\}$, $\mathbf{X}(s), t \leq s \leq t_f$ - траекторія зв`язана з оптимальною керуючою функцією на інтервалі [t, t_f] при заданій початковій умові **X**(t). Тому функція V є оптимальною функцією вартості на інтервалі [t, t_f] при заданій початковій умові **X**(t). Зрозуміло, що V повинна відповідати заданій умові

$$V\left[\mathbf{X}(t_f), t_f\right] = G\left[\mathbf{X}(t_f), t_f\right]. \tag{7.4}$$

для всіх пар $\left(\mathbf{X}(t_f), t_f\right)$в момент досягнення

$t=t_f$ відповідних векторному рівнянню

$$N\left[\mathbf{X}(t_f), t_f\right] = 0.$$

Передбачається, що V існує, неперервна та має неперервні перші та другі частинні похідні для всіх точок множини R^{n+1}.

З (7.1) випливає, що $\mathbf{U}(t_1)$, $t \leq t_1$ не впливає на **X**(s), $s \leq t$; таким чином можна змінити порядок мінімізації та інтегрування

$$V[\mathbf{X}(t),t] = \min_{U(\tau)}\left\{\int_{t}^{t+\Delta t} F[\mathbf{X}(\tau),\mathbf{U}(\tau),\tau]\ dt + \min_{U_t+\Delta t}\{G[\mathbf{X}(t_f),t_f] + \right.$$

$$+\int_{t+\Delta t}^{t_f} F[\mathbf{X}(s),\mathbf{U}(s),s]\ ds\ \}\} \cong \min_{U(\tau)}\{F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]\ \Delta t + V[\mathbf{X}(t+\Delta t),t+\Delta t]\ \} = \qquad (7.5)$$

$$= \min_{U(\tau)}\{F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]\ \Delta t + V[\mathbf{X}(t),t] + \frac{\partial V[\mathbf{X}(t),t]}{\partial t}\Delta t + \left[\frac{\partial V[\mathbf{X}(t),t]}{\partial X}\right]^T *$$

$$f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]\ \Delta t + 0(\Delta t)\ \} \quad ,$$

де в останній рівності ми розклали $V[\mathbf{X}(t+\Delta t),t+\Delta t]$в ряд Тейлора, а мінімізація проводиться на інтервалі $\tau \in [t,t+\Delta t]$.

Рівняння дає змогу приміняти для його обчислення принцип оптимальності. Оптимальне керування $\mathbf{U}^*$(t) на інтервалі $\lfloor t,t_f \rfloor$ має слідуючі властивості: для любого $t+\Delta t$, замкненого в інтервалі $t \prec t+\Delta t \prec t_f$, незалежно від значень, які рівняння $\mathbf{U}^*(t)$приймало на інтервалі $[t,t+\Delta t]$, та отож незалежно від значення $\mathbf{X}(t+\Delta t)$воно повинно залишатися оптимальним на інтервалі часу $\lfloor t+\Delta t,t_f \rfloor$.

Використовуючи пропозиції про гладкість та змінивши порядок операцій мінімізації та переходу до межі при $\Delta t \to 0$, отримаєм, що V повинно задовільняти рівнянню в частиних похідних

$$\frac{-\partial V[\mathbf{X}(t),t]}{\partial t} = \min\left\{F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U},t] + \left[\frac{\partial V[\mathbf{X}(t),t]}{\partial t}\right]^T f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U},t]\right\}, \qquad (7.6)$$

що зветься рівнянням Гамільтона - Якобі чи рівнянням Гамільтона - Якобі - Белмана.

В тих випадках коли це рівняння можна примінити, воно забезпечує необхідну умову оптимальності. При відсутності обмежень на величину **U** та при умові, що функції F та f мають частинні похідні по **U**, оптимальне керування $\mathbf{U}^*$(t) можна знайти диференцюючи вираз в фігурних дужках

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}}+\sum\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{U}}\right]=0 \quad \text{для всіх} \quad t\in\left[t \quad t_f\right].$$

Повторення приведених роздумів для заданої функції оптимального керування **U** дає

$$\frac{-\partial V_1[\mathbf{X}(t),t]}{\partial t}=F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]+\left[\frac{\partial V[\mathbf{X}(t),t]}{\partial x}\right]^T f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t] \tag{7.7}$$

Тому необхідно, щоб **U** задовільняло (7.3) для всіх

$$t\in\left[t_0,t_f\right]$$

Хоч розв`язання рівняння Гамільтона - Якобі в загальному вигляді зв`язано з великими трудноощами, у випадку, коли воно розв`язується, отримують оптимальне рівняння як функцію від траекторії стану, що є бажаною формою зворотнього зв`язку.

Розглянемо лінійний об'єкт керування, який описується рівнянням **X**'=**A**(t)**X**+**B**(t)**U** з початковою умовою $\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0$ і з незаданим кінцевим станом $\mathbf{X}(t_f)$. Необхідно знайти **U***(t) на інтервалі $[t_0 \quad t_f]$, що мінімізує функціонал

$$I=1/2\mathbf{X}^{\mathbf{T}}(t_f)\mathbf{S}\mathbf{X}(t_f)+1/2\int_{t_0}^{t_f}[\mathbf{X}^T(t)\,\mathbf{Q}(t)\,\mathbf{X}(t)+\mathbf{U}^T(t)\,\mathbf{R}(t)\,\mathbf{U}(t)]dt \tag{7.8}$$

де **S,Q**(t),**R**(t) — симетричні матриці, причому, **Q**(t) і **R**(t) є додатньо визначеними і мають безперервні другі похідні по t. **S** — знакододатня постійна матриця (щоб гарантувати єдиний мінімум).

Рівняння Белмана має вигляд

$$-\frac{\partial V}{\partial t}=\left[\frac{1}{2}\mathbf{X}^T(t)\,\mathbf{Q}(t)\,\mathbf{X}(t)+\frac{1}{2}\mathbf{U}^{*T}(t)\,\mathbf{R}(t)\,\mathbf{U}^*(t)+\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}}\right)^T(\mathbf{A}(t)\,\mathbf{X}+\mathbf{B}(t)\,\mathbf{U}^*)\right] \tag{7.9}$$

Гранична умова, що витікає з рівнянь

$$\lim_{t \to t_f} V^*(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T(t_f)\mathbf{S}\mathbf{X}(t_f) \qquad (7.10)$$

Процес мінімізації призводить до умови

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}}\right|_{U=U^*} + \left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{U}}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}}\right)^T \left(\mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}\right)\right]\right|_{U=U^*} = 0 \qquad (7.11)$$

де **F** - підінтегральний вираз в рівнянні (7.8). З останнього слідує

$$\mathbf{U}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}(t)\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}}\right)$$

Якщо хочемо синтезувати лінійне керування як функцію координат, то слід в якості критерія якості прийняти квадратичну форму

$$\mathbf{V}^*(\mathbf{X},t) = 1/2\mathbf{X}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{X}$$

де **P**(t) - симетрична матриця розмірністю (n x n).

$$\mathbf{V}_x(x,t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t) \qquad \mathbf{V}_t(x,t) = 1/2\mathbf{X}^T\mathbf{P}'(t)\mathbf{X}(t)$$

одержимо

$$\mathbf{P}' = -\mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$$

з граничною умовою $\mathbf{P}(t_f)=\mathbf{S}$.

Єдиний абсолютний мінімум функціонала виходить тільки в тому випадку, якщо матричне рівняння Риккаті має одне рішення. Калман доказав слідуючу теорему.

Теорема.

Відповідно до прийнятих пропозицій, рівняння Ріккаті з граничною умовою $\mathbf{P}(t_f)=\mathbf{S}$ має єдине рішення для матриці **P**(t) , при цьому керування є оптимальним по відношенню до критерію оптимальності **I**. Іншими словами, рівняння Белмана (7.7) забезпечує для цього випадку достатню умову оптимальності.

Підкреслимо алгоритмічні особливості методу динамічного програмування на відміну від принципу максимума.

1. Вимоги гладкості функцій **F(X,U,**t) і f(**X,U,**t) по **X** зняті і не доводиться вирішувати краєву задачу. Рішення одержуються в формі синтезу, і дозволяють знайти не тільки оптимальне управління, але і побудувати керуючий пристрій , працюючи по принципу оберненого зв'язку. Одержане рішення забезпечує для кожного початкового змісту абсолютний мінімум I на безлічі допустимих рішень D.

2. Існування функції **V(X**,t), задовольняючій умовам (7.2), (7.3) в загальному випадку не гарантовано.

Саме розв`язання рівняння Белмана, якщо воно існує, одержати набагато складніше, чим рішення системи звичайних диференційних рівняннь. Прямим методом рішення диференційних рівнянь у часткових похідних є метод дискретного динамічного програмування, котрий являється послідовним повторюванним крок за кроком вживанням рівняння Гамільтона-Якобі або принципу оптимальності Белмана.

Приклад 7.1.

1.Динаміка системи описується диференціальними рівняннями

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = 7U, \end{cases} \quad X(t_0) = X_0$$

Розрахувати оптимальне програмне керування системою використовуючи динамічне програмування.

Розглянути задачу, де рівняння Гамільтона – Якобі-Беллмана можна розв'язати аналітично. Шукану функцію представити у вигляді квадратичної форми.

Відповідь.

1. Рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана має вигляд

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = min\left\{F[X(t), U(t), t] + \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T f[X(t), U(t), t]\right\},$$

де $V[X(t), t] -$ оптимальна функція вартості на інтервалі часу при заданій початковій умові $X(t)$.

Функція $V[X(t), t]$ повинна задовольняти граничну умову

$$V[X(t_f), t_f] = G[X(t_f), t_f],$$

де G – термінальна складова функції вартості.

Рівняння Беллмана можна розв'язати аналітично

Рівняння руху

$$\left.\begin{matrix} x_1' = x_2 \\ x_2' = 7U \end{matrix}\right\} \quad \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0$$

Критерій оптимальності

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty (q_{11}\, x_1^2 + q_{22} x_2^2 + rU^2) dt \to min$$

Рівняння Беллмана для цієї задачі

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = min\left\{\frac{1}{2} q_{11} x_1^2 + \frac{1}{2} q_{22} x_2^2 + \frac{1}{2} rU^2 + \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} 7U\right\}$$

Вираз у фігурних скобках квадратично залежить від керування, оптимальне керування одержимо з умови стаціонарності цього виразу.

$$U^*(t) = -\frac{7}{r}\frac{\partial V}{\partial x_2}$$

Підставимо U^* у рівняння Беллмана

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2} q_{11} x_1^2 + \frac{1}{2} q_{22} x_2^2 + x_2 \frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{(7)^2}{2r}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2$$

Одним із засобів розв'язку такого типу рівнянь базується у завданні припущеного вигляду шуканої функції $V(X, t)$ з точністю до невизначених коефіцієнтів. Задамо $V(X, t)$ у формі $V(X, t) = Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2$ і підставимо цю функцію у вище наведене рівняння.

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2Ax_1 + 2Bx_2, \ \frac{\partial V}{\partial x_2} = 2Bx_1 + 2Cx_2,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 = 4(B^2 x_1^2 + 2BC x_1 x_2 + C^2 x_2^2)$$

$\frac{1}{2}q_{11}x_1^2 + \frac{1}{2}q_{22}x_2^2 + 2Ax_1x_2 + 2Bx_2^2 - 2\frac{49}{r}B^2x_1^2 - 4\frac{49}{r}BCx_1x_2 -$
$2\frac{49}{r}C^2x_2^2 = 0.$

Прирівняємо коефіцієнти при x_1^2, x_1x_2, x_2^2 до нуля і знайдемо A, B, C.

$$\left(\frac{1}{2}q_{11} - 2\frac{49}{r}B^2\right)x_1^2 + \left(2\mathrm{A} - 4\frac{49}{r}\mathrm{BC}\right)x_1x_2 + \left(\frac{1}{2}q_{22} + 2\mathrm{B} - 2\frac{49}{r}C^2\right)x_2^2 = 0$$

$$B = \frac{1}{14}\sqrt{q_{11}r}, \quad C = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}q_{22}+\frac{1}{14}\sqrt{q_{11}r}\right)r}{2}}$$

$$A = \frac{1}{r}\sqrt{q_{11}r}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}q_{22}+\frac{1}{14}\sqrt{q_{11}r}\right)r}{2}}$$

Підставимо $\frac{\partial V}{\partial x_2}$ у вираз для U*

$$U^* = -\frac{7}{r}\left(\frac{1}{7}\sqrt{q_{11}r}x_1 + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}q_{22}+\frac{1}{14}\sqrt{q_{11}r}\right)r}{2}}x_2\right)$$

Приклад 7.2.

Розглянемо систему:

$$x' = x^3 + U, \quad x(0) = x_0$$

для якої функція вартості

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^2 + U^2)dt \to \min .$$

Потрібно визначити оптимальне керування зі зворотнім зв`язком.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min H\left(x, U, \frac{\partial V}{\partial X}\right) = 0 ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

$$H\left(X, U, \frac{\partial V}{\partial X}\right) = \frac{1}{2}(x^2 + U^2) + \lambda(x^3 + U),$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = U + \lambda = 0, \qquad U = -\lambda = -\frac{\partial V}{\partial X},$$

$$H^*\left(X, \frac{\partial V}{\partial X}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial X}x^3 + \frac{1}{2}x^2,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^2 - 2x^3\frac{\partial V}{\partial X} - x^2 = 0, \qquad V[x(t_0), t_0] = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{2x^3 \pm \sqrt{4x^6 + 4x^2}}{2} = x^3 \pm x\sqrt{x^4 + 1},$$

$$U^* = -\frac{\partial V}{\partial X} = -x^3 - x\sqrt{x^4 + 1}, \qquad x' = x^3 + U = -x\sqrt{x^4 + 1} \;,$$

Також розв`язання звичайного диференціального рівняння можна розкласти в степеневий ряд: $V(x) = p_0 + p_1 x + \frac{1}{2!}p_2 x^2 + \frac{1}{3!}p_3 x^3 + \frac{1}{4!}p_4 x^4$,

$$\frac{\partial V}{\partial X} = p_1 + p_2 x + \frac{1}{2!}p_3 x^2 + \frac{1}{3!}p_4 x^3,$$

Якщо обмежити ряд членом четвертого порядку, підставити можливе рішення в диференціальне рівняння та прирівняти члени з однаковими степенями x, то отримаємо рішення

$$p_1 = 0; \;\; p_2 = 1; \;\; p_3 = 0; \;\; p_4 = 6; \;\; \frac{\partial V}{\partial X} = x + x^3.$$

Приклад 7.3.

Динаміку лінеаризованого об`єкта можна виразити

$$X_1' = X_2, \quad X_2' = \frac{k_1}{k_2 - t}X_3, \quad X_3' = U \qquad .$$

Припустимо, використовуючи функціонал

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\tau}\left(\mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{X} + r\mathbf{U}^2\right)dt,$$

де r=10, T=250c,

$$Q(t)=\frac{1}{(300-t)^2}\begin{bmatrix}5\cdot 10^{-7} & 0 & 0\\ 0 & 10^{-3} & 0\\ 0 & 0 & 10^{3}\end{bmatrix},$$

$X_1(0)=3000$, $X_2(0)=800$, $X_3(0)=12$,

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{k_1}{k_2-t}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\qquad b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$ гранична умова p(T)=0.

Дивлячись на те, що $r^{-1}B^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1/10\end{bmatrix}$ маємо

$$U*(X,t)=-\frac{1}{10}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{10}\begin{bmatrix}p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}$$

Виходячи з матричного характеру рівняння можна показати, що необхідно розв`язати слідуючі шість зв`язаних нелінійних диференціальних рівняння з граничними умовами в одній точці:

$$\begin{bmatrix} p'_{11} & p'_{12} & p'_{13} \\ p'_{21} & p'_{22} & p'_{23} \\ p'_{31} & p'_{32} & p'_{33} \end{bmatrix} = -\frac{1}{300-t^2}\begin{bmatrix} 5\cdot 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{3} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{k_1}{k_2-t} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{k_1}{k_2-t} & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}+$$

$$+\frac{1}{10}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{300-t^2}\begin{bmatrix} 5\cdot 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{3} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & p_{11} & p_{12}\dfrac{k_1}{k_2-t} \\ 0 & p_{21} & p_{22}\dfrac{k_1}{k_2-t} \\ 0 & p_{31} & p_{32}\dfrac{k_1}{k_2-t} \end{bmatrix}-$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21}\dfrac{k_1}{k_2-t} & p_{22}\dfrac{k_1}{k_2-t} & p_{23}\dfrac{k_1}{k_2-t} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{13}p_{31} & p_{13}p_{32} & p_{13}p_{33} \\ p_{23}p_{31} & p_{23}p_{32} & p_{23}p_{33} \\ p_{33}p_{31} & p_{33}p_{32} & p_{33}p_{33} \end{bmatrix};$$

$$p'_{11}=\frac{1}{10}p_{13}^2-\frac{5\cdot 10^{-7}}{(300-t)^2},$$

$$p'_{12}=\frac{1}{10}p_{13}p_{23}-p_{11},$$

$$p'_{13}=\frac{1}{10}p_{13}p_{33}-\frac{k_1}{k_2-t}p_{12},$$

$$p'_{22}=\frac{1}{10}p_{23}{}^2-2p_{12}-\frac{10^{-3}}{(300-t)^2},$$

$$p'_{23}=\frac{1}{10}p_{23}p_{33}-\frac{k_1}{k_2-t}p_{22}-p_{13},$$

$$p'_{33}=\frac{1}{10}p_{33}-2\frac{k_1}{k_2-t}p_{23}-\frac{10^{3}}{(300-t)^2}.$$

Список літератури

1. Ray W.Harmon. Advanced process control – McGraw-Hill, Book Company, 1981. - 385p
2. Sage EP, White C.S. Optimal systems control. 2d View all formats and editions – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J,1977. - 392p.
3. Ладієва Л.Р. Оптимізація систем керування: Навчальний посібник. – Електронне мережне навчальне видання, 2020. – 192с
4. Жученко А.І. Динамічна оптимізація з використанням MATLAB та SIMULINK. / А.І. Жученко, Л.Р. Ладієва, Р.М. Дубік – К.: НТУУ "КПІ", 2009. – 209 с.
5. Korniyenko, B., Ladieva, L. Method of Static Optimization of the Process of Granulation of Mineral Fertilizers in the Fluidized Bed/ In: Hu Z., Petoukhov S., Dychka I., He M. (eds) Advances in Computer Science for Engineering and Education IV. ICCSEEA 2021. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, vol 83. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80472-5_17 ISSN: 23674512
6. Korniyenko, B., Ladieva, L., Bereza, O. Optimal Control with Prediction for the Process of Vacuum Membrane Distillation (2022) Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, 135, pp. 37-50. DOI: 10.1007/978-3-031-04809-8_4 ISSN: 23674512.
7. Ладієва Л.Р., Корнієнко Б.Я., Осіпа Р.А., Семенцов В. Оптимальне керування процесом гранулювання в псевдозрідженому шарі // Новітні технології, № 1(11), 2021. - С. 17-32. https://doi.org/10.52058/2524-0102-2021-1(11)-17-32
8. Ladieva L. R., Istomin A. P. Optimal control of the vacuum membrane distillation process in bioethanol production //Materiály XVII Mezinárodní vědecko - praktická konference ,Věda a vznik - 22 - 30 prosinců – Praha, 2021, Volume 5, P. 51-53.

9. Ладієва Л.Р., Клуста Т.В., Козаневич З.Я. Оптимальне керування процесом алкілування бензолу пропіленом у рідкій фазі // Наукоємні технології № 4 (48), 2020, С.513-520 DOI: 10.18372/2310-5461.48.15.091
10. Ладієва Л.Р., Клуста Т.В., Дубік Р.М. Синтез робастного регулятора в процесі алкілування бензолу пропіленом у рідкій фазі // Вісник НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» Хімічна інженерія, екологія і енергозбереження, № 3, 2020, С.12-21 https://doi.org/10.20535/2617-9741.3.2020
11. Zhulynskyi, A.A. Ladieva, L.R. Korniyenko, B.Y. Parametric identification of the process of contact membrane distillation ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences Volume 14, Issue 17, September 2019, P. 3108-3112.
12. Korniyenko, B., Ladieva, L. Mathematical Modeling Dynamics of the Process Dehydration and Granulation in the Fluidized Bed (2021) Advances in Intelligent Systems and Computing, 1247 AISC, P.18-30. DOI: 10.1007/978-3-030-55506-1_2 ISSN: 21945357
13. Korniyenko, B., Galata, L., Ladieva, L. Mathematical model of threats resistance in the critical information resources protection system (2019) CEUR Workshop Proceedings, 2577, P. 281-291. ISSN: 16130073
14. Korniyenko B. Security Estimation of the Simulation Polygon for the Protection of Critical Information Resources / B. Korniyenko, L. Galata, L. Ladieva // CEUR Workshop Proceedings, Selected Papers of the XVIII International Scientific and Practical Conference "Information Technologies and Security" (ITS 2018) Kyiv, Ukraine, November 27, 2018, Volume-2318, - P. 176-187, urn:nbn:de:0074-2318-4 ISSN: 16130073
15. Korniyenko, B.Y., Ladieva, L.R., Galata, L.P. Mathematical model of heat transfer process of production of granulated fertilizers in fluidized bed (October 2021) ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, 16 (20), P.. 2126-2131. ISSN: 18196608.

ЗМІСТ